

Válaszok Diósi Lajos opponensi véleményére

Szeretném megköszönni Diósi Lajos professzor úrnak az értekezésem bírálatával kapcsolatos gondos munkáját, észrevételeit és értékes megjegyzéseit. A feltett kérdésekre az alábbiakban válaszolok.

1. *Megjegyzés: 1.2 paragrafus eleve többségében nem optikai rendszert sorol. Talán helyesebb és egyben informatívabb is lett volna, ha a mű címe nem optikai rendszerekre, hanem sokrészecskés, vagy sokszorosan összetett rendszerekre utal.*

A címet az eddigi munkáimmal, pályázataimmal való konzisztencia miatt választottam. Valóban, "kvantumoptika és atomoptika" is lehetett volna a címben, és talán az jobban leírta volna a munkám tartalmát.

2. *Megjegyzés: 1.5 paragrafus szerint Werner 1989-ben összefonódott állapotokat mutatott, melyek semmilyen Bell egyenlőtlenséget nem sértenek. Ez azonban nem maradt így, mert 1995-ben Popescu talált ilyen Bell egyenlőtlenségeket [PRL74, 2619 (1995)].*

Ez valóban így van. Werner eredménye az állapot egy példányára vonatkozott. Ha több példány is rendelkezésre áll, akkor ezek az állapotok is tudnak sérteni egy Bell-egyenlőtlenséget. A fent említett cikk helyi szűrést (local filtering) alkalmazott. A szöveghez hozzáadtam egy lábjegyzetet: "In some cases, when several copies of these states are provided, they do violate a Bell inequality. See S. Popescu, Phys. Rev. Lett. 74, 2619 (1995)."

Az irodalomban van egy hasonló témával foglalkozó, az előbbi közleményt hivatkozó cikk is [1]. A téma egy összefoglalása található a Ref. [2] 440. oldalán. Hozzáteszem, hogy minden összefonódott izotrópikus állapot Bell egyenlőtlenséget sért, ha több példány áll belőle rendelkezésre [3].

3. *Megjegyzés: 2.1.3 paragrafus valódi kvantum kölcsönhatás nélküli műveleteket említ, célszerű lett volna itt konkrétan kimondani, hogy az LOCC műveletekről van szó (melyeket 1.3 paragrafus már definiált).*

Köszönöm szépen az észrevételt, a szöveghez hozzáadtam, hogy "More precisely, separable states can be created with LOCC operations from product states. Such operations have been mentioned in the introduction, and will be described in the next section. "

4. *Megjegyzés: 2.1.5 paragrafus fehér zajként említi a (2.1.7) állapot maximálisan kevert komponensét. Meglehet, hogy a kvantuminformatikai irodalom is a fehér zaj kifejezést használja, ez azonban a fizika, matematika és mérnöki tudomány tágabb kereteiben félreérthető túlbonyolítás. A fehér zaj időbeli jelek maximális véletlenszerűségét jelenti, nem pedig egy statikus állapotét.*

Köszönöm szépen az észrevételt, a szöveghez hozzáadtam, hogy "mixed with white noise (i.e., the completely mixed state)".

5. *Megjegyzés: (2.2.16) képletben szereplő s-vektorok definícióját ($s = \langle \sigma \rangle$) nem találtam.*

Köszönöm szépen az észrevételt, a (2.2.13)-(2.2.15) képletekben a $\vec{v}$ -t $\vec{s}$ -re cseréltem. Így (2.2.14) definiálja az $\vec{s}$ -t mint a $(\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle)$.

6. *Megjegyzés: (5.2.6)-ban bevezetett flip operátor a kvantuminformatikán belül swap operátorként is nevezetik [Nielsen and Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 2000)]. A flip kifejezés számomra is inkább a bit-flip művelethez kötődik, ami a bit vagy gubit átfordítását jelenti.*

Valóban a swap operátor elnevezés bizonyos körökben jobban ismert. A szöveghez hozzáadtam, hogy "(The flip operator is also called swap operator in the literature.)" A kijavított értekezést elérhetővé teszem a honlapomon.

1. *Kérdés: 5.2 paragrafus bevezeti az F flip operátort és a bozon-szimmetrikus altérre vetítő P_s projektort. Nem említetik, de F sajátértéke +1 vagy -1. A permutáció-invariáns állapotok (5.2.7) szerint tehát olyan állapotok, amikben nincs interferencia a fenti +1 és -1 sajátértékekhez tartozó alterek között, de ezek keverékei jelen lehetnek. A P_s projektor viszont csak a +1-es altérhez tartozó állapotokat engedi meg, akár szuperponálva, akár keverékként*

is. Ezen a szimmetrikusnak nevezett altéren kiváló összefonódási analízis végezhető. Nem lehetne-e hasonló haladást elérni, ha az F operátor -1 -es sajátértékű alterét tartanánk meg a $P_a = (1 - F)/2$ vetítéssel.

Minden permutációsan invariáns állapot felírható az [4]

$$\varrho = \sum_k \Lambda_k M'_k \otimes M'_k \quad (1)$$

alakban, ahol M_k mátrixok ortonormált bázist alkotnak, vagyis

$$\text{Tr}(M'_k M'_l) = \delta_{kl}. \quad (2)$$

Tudjuk, hogy az állapot akkor és csak akkor PPT, ha minden $\Lambda_k \geq 0$. A flip operátort a következőképp lehet felírni [4]

$$F = \sum_k M'_k \otimes M'_k. \quad (3)$$

Az operátor várható értékére azt írhatjuk, hogy

$$\text{Tr}(\varrho F) = \sum_k \Lambda_k. \quad (4)$$

Így ha az F várható értéke negatív, vagyis a

$$\text{Tr}(\varrho F) < 0 \quad (5)$$

feltétel teljesül, akkor valamelyik Λ_k negatív és az állapot nem PPT. Az antiszimmetrikus állapotokra

$$\text{Tr}(\varrho F) = -1, \quad (6)$$

ami azt jelenti, hogy az összes állapot az antiszimmetrikus állapotok terében nem PPT és összefonódott. Talán mondhatjuk azt, hogy a Fermi-statisztika összefonódottságot eredményez.

Azt is láthatjuk, hogy az antiszimmetrikus állapotot keverhetjük szimmetrikus állapotokkal, és amíg Eq. (5) igaz, addig az állapot biztos összefonódott.

2. Kérdés: Maradva az 5.2 paragrafus bozon-szimmetrikus állapotainál, megjegyzendő, hogy az elnevezéssel csínján kell bánni, mert a több-bozonos állapotokkal való analógia nem teljes. Míg a vizsgált bozon-szimmetrikus állapotok egy N -részecskés, tehát N -szeresen faktorizálható állapottól szimmetrikus alterét feszítik ki, addig a valódi bozonok állapottere a részecskeszám szerint nem, csak a módusok szerint faktorizálható, ezzel egy időben más a megfigyelhető mennyiségek tere, mint az N -részecske rendszeré. Tehát az N -bozon terében eltérő értelmezése kell legyen az összefonódásnak, mint a bozon-szimmetrikus térben, mely utóbbit a szerző sikeresen vizsgált. Lehet-e arról fogalmunk, hogy a megszerzett tudás és technika valamilyen formában az igazi N -bozon rendszerekre is szolgáltat valamilyen tudást.

A bíráló arra utal, hogy a bozonok esetében a fix részecskeszám esete speciális, sőt akár mesterségesnek is nevezhető, és a módusokkal való leírás természetesebbnek látszik. Esetünkben, az N szimmetrikus qubites állapotot N kétállapotú bozon állapotára képeztük le. Például, $|00\rangle$ két bozont jelent, amelyek mindketten a $|0\rangle$ állapotban vannak. $(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ két bozont jelent, amelyekből az egyik a $|0\rangle$ a másik az $|1\rangle$ állapotban van.

Az N qubit szimmetrikus állapota leképezhető két módusból álló rendszerre, ahol a két módus a $|0\rangle$ és $|1\rangle$ állapotnak felel meg. Vizsgálható az ezen módusok közti összefonódottság abban az esetben is, amikor a részecskeszám nem fix. A témának kiterjedt irodalma van. Például, van olyan kritérium, amely minden kétmódusú összefonódott Gauss-i állapotot detektál [5, 6]. Van olyan állapot, amely a módusok terében szeparálható, a részecsképképben összefonódott. Például, az Eq. (1.1.5) képletben a $|m, N\rangle$ szimmetrikus Dicke állapotok definíciója van megadva [7]

$$|m, N\rangle := \binom{N}{m}^{-\frac{1}{2}} \sum_k P_k(|1_1, 1_2, \dots, 1_m, 0_{m+1}, \dots, 0_N\rangle), \quad (7)$$

ahol N a részecskeszám, m az egyesek száma, és a $\{P_k\}$ a spinek különböző permutációit jelöli. Ez az állapot összefonódott, ha $0 < m < N$. Viszont a módus-képben a Dicke állapot egy szorzat-állapot

$$|m\rangle_0 |N-m\rangle_1, \quad (8)$$

ahol m részecske a $|0\rangle$ állapotban van, $N-m$ részecske pedig a $|1\rangle$ állapotban. Így igazából a kétféle összefonódottság különbözik, a mi kritériumaink a részecskeképben segítenek az összefonódottság detekciójában.

3. Kérdés: A kimagasló angol statisztikus (és genetikus, és eugenetikus Ronald A. Fisher 1925-ben bizonyította [*Proc. Camb. Soc.* 22, 700 (1925)], hogy a mérési pontosság Cramer-Rao határa aszimptotikus nagy statisztikán el is érhető. 70 évvel később a Tóth által is idézett Braunstein és Caves [139] ezt a kvantum Cramer-Rao határra is megmutatták, megadva az optimális kvantummérést. A 8. Fejezet eredményein túl elképzelhető-e, hogy a vizsgált összefonódott sokrészecske-állapotokon az optimális mérések is egyszerű alakban megtalálhatóak?

Az optimális mérés operátora [8]

$$M_{\text{opt}} = 2i \sum_{k,l} \frac{\lambda_k - \lambda_l}{\lambda_k + \lambda_l} |k\rangle \langle l| \langle k| H |l\rangle, \quad (9)$$

ahol H a Hamilton-operátor és a sűrűségmátrix

$$\varrho = \sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k| \quad (10)$$

alakú, λ_k jelöli a sajátértékeket, és $|k\rangle$ jelöli a sajátvektorokat. Amennyiben ϱ tiszta állapot

$$\varrho = |\Psi\rangle \langle \Psi|, \quad (11)$$

akkor

$$M_{\text{opt}} = 2i[|\Psi\rangle \langle \Psi|, H]. \quad (12)$$

Az általunk tárgyalt lineáris interferométerek esetén a Hamilton-operátor egy kollektív impulzusmomentum-komponenssel egyenlő, vagyis

$$H = J_l \quad (13)$$

ahol $l = x, y, z$. Ezek a képletek csak a ϱ range-en definiálják egyértelműen M_{opt} -ot. A GHZ állapot esetén az optimális mérés

$$M_{\text{opt}}^{(\text{GHZ})} = \sigma_x^{\otimes N}. \quad (14)$$

A Dicke állapot esetén

$$M_{\text{opt}}^{(\text{Dicke})} = J_z^2. \quad (15)$$

Utóbbi kollektív mérést jelent, ami kísérleti megvalósítás esetén nagyon előnyös. Mindkettőt használták kísérletileg megvalósított sémákban is [9].

4. Kérdés: A parciális transzpozíció alapuló PPT összefonódottsági kritérium [Peres, *PRL* 77, 1413 (1996)] óta nem szűnnek arra biztatni fizikus (tehát nem-matematikus, nem mérnök) kutatókat, oktatókat, hogy az absztrakt transzpozíció helyett az ekvivalens és fizikai jelentéssel bíró időtükrözést használják. Adjunk esélyt, hogy ha van mélyebb háttere ennek az interpretációnak, akkor azt valaha megtalálhassuk! Találkozik-e, találkozott-e a szerző ezzel a fizikai értelmezéssel, legalább említés szintjén? Mennyire van ez jelen szerinte?

Valóban, az időtükrözés egy fizikai jelentéssel bíró fogalom. Nagyon jó lenne, ha a parciális transzpozíciót sikerülne egyre jobban az időtükrözéshez kötni. Véleményem szerint a PPT összefonódott állapotok érdekesek ilyen szempontból, mivel esetükben az időtükrözés fizikai állapothoz vezet.

Ezt szeretném most részletesebben megvitatni. Parciális transzponálással lehetséges "visszafordítani az időt" az egyik részrendszerben.

Vagyis, tegyük fel, hogy a két részrendszer A és B , állapotuk ϱ_{AB} , és a Hamilton-operátor

$$H = H_A + H_B \quad (16)$$

alakú, ahol H_A az A rendszeren, B pedig a H_B rendszeren hat. Ezzel $\varrho_{AB}(t)$ -t a szokásos unitér dinamika határozza meg,

$$\varrho_{AB}(t) = e^{-iHt} \varrho_{AB} e^{+iHt}. \quad (17)$$

Egyszerű számítások szerint, egy ekvivalens leírást kapunk, ha a parciálisan transzponált állapot dinamikáját tekintjük a

$$H' = H_A - H_B^* \quad (18)$$

Hamilton-operátorral, ahol $*$ elemenkénti konjugációt jelöl. Vagyis,

$$(\varrho_{AB})^{T_B}(t) = e^{-iH't} (\varrho_{AB})^{T_B} e^{+iH't}, \quad (19)$$

ahol T_B a B rendszer szerinti parciális transzponálást jelöl. Így, bizonyos értelemben, visszafordítottuk az időt a B részrendszerben. Ehhez csak az állapot parciális transzponáltját kell előállítanunk, és nem kell ismernünk H_B -t.

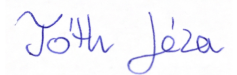
Ez az összefüggés akár numerikus szimulációra is használható, ahol az unitér dinamikát megvalósító programrészt nem ismerjük, és nem tudjuk Hamilton-operátor egyes tagjait befolyásolni. Mégis, indirekt módon, megfordíthatjuk az Hamilton-operátor egyes tagjainak az előjelét.

Például, választhatjuk a $H_A = H_B = J_x$ Hamilton-operátorokat és a $|\Psi\rangle = |1\rangle_A^{\otimes N/2} \otimes |1\rangle_B^{\otimes N/2}$ állapotot. Ebben az esetben az állapotok a két részrendszerben teljesen polarizáltak a z -irányban és a spinek az x -tengely körül fordulnak el.

A PPT összefonódott állapotok esetén a parciális transzponáltjuk is fizikai állapot, annak ellenére, hogy a két részrendszer összefonódott. Érdemes megemlíteni, hogy nagydimenziós rendszerekben a PPT összefonódottság nem ritka. Hozzá lehet tenni, hogy ha a két részrendszer között PPT összefonódottság van, akkor nem oszthatunk meg egy szingletet a két részrendszer között, mert akkor már nem PPT összefonódott lenne a rendszer. Így nem lehet kvantum állapotokat az egyik részrendszerből a másikba teleportálni. Úgy tűnik, ez az ára annak, hogy a időtükrözés fizikai állapothoz vezessen.

Ez a megfigyelés akár kísérleti teszthez vezethet. Természetesen a nehézséget az okozza, hogy a parciális transzponált nem fizikailag megvalósítható művelet. De ha tudjuk, hogy mi a ϱ_{AB} állapot, akkor $\varrho_{AB}^{T_B}$ is előállítható.

Budapest, 2020. december 15.



Tóth Géza

-
- [1] N. Gisin, Hidden quantum nonlocality revealed by local filters, Phys. Lett. A **210**, 151 (1996).
 - [2] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner, Bell nonlocality, Rev. Mod. Phys. **86**, 419 (2014).
 - [3] D. Cavalcanti, A. Acín, N. Brunner, and T. Vértesi, All quantum states useful for teleportation are nonlocal resources, Phys. Rev. A **87**, 042104 (2013).
 - [4] G. Tóth and O. Gühne, Entanglement and permutational symmetry, Phys. Rev. Lett. **102**, 170503 (2009).
 - [5] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, Inseparability criterion for continuous variable systems, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000).
 - [6] R. Simon, Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).
 - [7] J. K. Stockton, J. M. Geremia, A. C. Doherty, and H. Mabuchi, Characterizing the entanglement of symmetric many-particle spin- $\frac{1}{2}$ systems, Phys. Rev. A **67**, 022112 (2003).
 - [8] M. G. A. Paris, Quantum estimation for quantum technology, Int. J. Quant. Inf. **07**, 125 (2009).
 - [9] G. Tóth and I. Apellaniz, Quantum metrology from a quantum information science perspective, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 424006 (2014).