

Válaszok Iglói Ferenc opponensi véleményére

Szeretném megköszönni Iglói Ferenc professzor úrnak az értekezésem bírálataival kapcsolatos gondos munkáját, észrevételeit és értékes megjegyzéseit. A feltett kérdésekre az alábbiakban válaszolok.

1. Kérdés: A 2.3 fejezetben a kvantumos Ising lánc esetében is vizsgálja az összefonódott állapotok felléptét a transzverz tér erősségének (B) és hőmérsékletének (T) függvényében. Közismert, hogy $T = 0$ és $B = 1$ esetén a fenti rendszerben kvantumos fázisátalakulás megy végbe, ha $N \rightarrow \infty$. Ezzel összefüggésben látszik-e valamilyen szinguláris viselkedés a $T_E(B, N)$ függvényben.

Tekintsük az egydimenziós Ising-spinláncot transzverz térben. A rendszer Hamilton-operátora a következő

$$H = -J \sum_{i=1,2,\dots,L-1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)} + B \sum_i \sigma_x^{(i)}, \quad (1)$$

ahol a J és a B konstansok, és a $\sigma_l^{(i)}$ Pauli spin mátrixok. Ennek a rendszernek a termikus állapotát a

$$\rho \propto \exp(-\beta H) \quad (2)$$

sűrűségmátrix írja le, ahol β az inverz hőmérséklet. A Hamilton-operátor diagonalizálható a következőképpen. Először a Jordan-Wigner transzformációt kell használni. Ekkor a spin operátorokat fermion keltő és eltüntető operátorokkal írjuk fel. Ezt követően, a Bogoljubov-transzformációval el lehet jutni egy diagonalizált alakig. Így a Hamilton-operátor várható értéke, $\langle H \rangle_\beta$, számolható [1]. Az energia-minimum szeparálható állapotokra, $\min_{\varrho_{\text{sep}}} \langle H \rangle_{\varrho_{\text{sep}}}$, ismert [2]. A T_E hőmérséklet az a hőmérséklet, amelyre a Hamilton-operátor várható értéke megegyezik a szeparálható állapotok által elért legkisebb energiával, vagyis

$$\langle H \rangle_{1/T_E} = \min_{\varrho_{\text{sep}}} \langle H \rangle_{\varrho_{\text{sep}}}. \quad (3)$$

Ebből a definícióból meghatározható a T_E hőmérséklet adott B -re. Az eredmény a Fig. 1 ábrán látható. A Fig. 2 ábrán látható a szeparálható állapotok által elért legkisebb energia

$$E_{\text{sep}} = \min_{\varrho_{\text{sep}}} \langle H \rangle_{\varrho_{\text{sep}}} \quad (4)$$

mint B függvénye. [Lásd az értekezés (2.3.24) egyenletét a $d = 1, M = J, b = |B|/J$ esetre.]

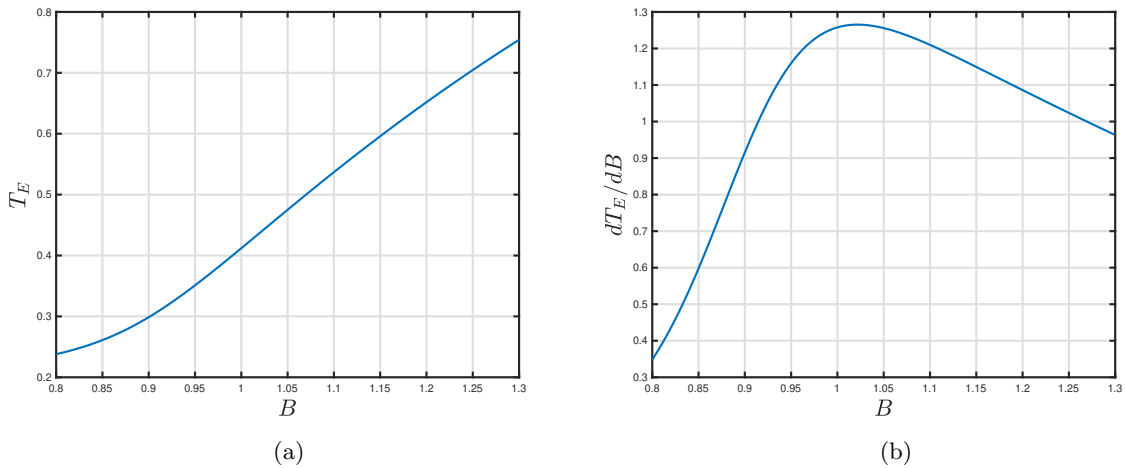


FIG. 1. (a) A T_E mint a B függvénye transzverz térben lévő egydimenziós Ising-spinláncra termikus egyensúlyban. Egy inflexiós pont van $B = 1$ körül. (b) A dT_E/dB derivált, mint a B függvénye.

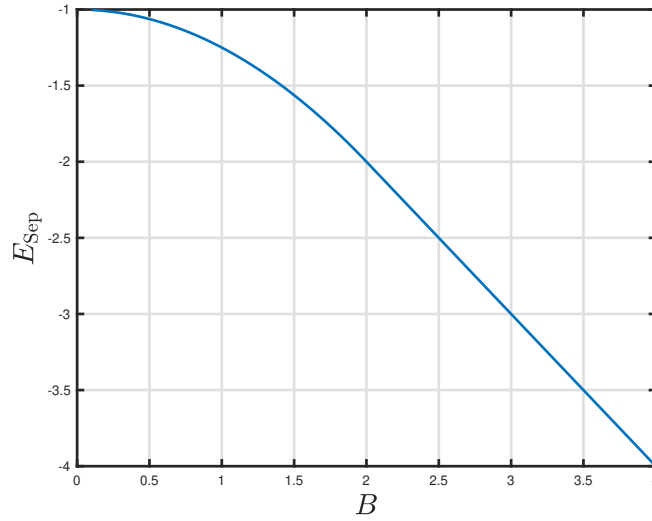


FIG. 2. A szeparálható állapotok energiaminimuma E_{Sep} mint a B függvénye transzverz térben lévő egydimenziós Ising-spinláncra termikus egyensúlyban. A $B = 1$ -nél nincs ugrás a függvény értékében vagy a deriváltjának az értékében, amely a függvény analitikus alakjából is látható.

A QUBIT4MATLAB programcsomag következő rutinjai segítenek az alábbi számolásban [3]. Az

```
ising_thermal(B,T)
```

adja a qubitenkénti belső energiát az Ising-spinláncra a termodinamikai limitben, ha a hőmérséklet T , a térerősség B és a legközelebbi szomszédok közti csatolás $J = 1$. Az

```
ising_classical_ground(B)
```

adja a qubit-enkénti belső energiát a klasszikus sing-spinláncra a termodinamikai limitben, ha a hőmérséklet T , a térerősség B és a legközelebbi szomszédok közti csatolás $J = 1$.

$B = 1$ -ben nem találunk hirtelen ugrást sem a függvény értékében, sem a derivált értékében. Ez érthető, mert a számolás termikus állapotra vonatkozik, nem a $T = 0$ alapállapotra. Másrészt, a szeparálható állapotok energiaminimumában, sem a deriváltban nincs ugrás $B = 1$ esetén. Viszont egy inflexió pont van a $T_E(B)$ függvényben a $B = 1$ érték közelében (lásd a Fig. 1 ábrát).

2. Kérdés: Kiterjedt rendszerek összefonódottságának jellemzésére a Neumann- és Rényi-féle entrópiákat is szokás használni. Milyen kapcsolata van ezeknek a disszertációban szereplő összefonódás jellemzőkkel

Tiszta állapotban lévő kétrészes rendszerekben az összefonódottságot az egyik részrendszer redukált sűrűségmátrixának Neumann-entrópiájával szokták jellemezni. Szorzat állapot esetén a redukált állapot is tiszta állapot, és ezek az entrópiák nullával egyenlőek, míg nem szorzat állapot esetén pozitív értékűek.

A kevert állapotok esete ennél jóval bonyolultabb. Ekkor a Neumann-entrópia konvex tetejét szokták használni, amit keltési entrópiának hívnak ("entanglement of formation"). Ez egy jól definiált mennyiség, viszont a legtöbb esetben nem számolható ki egyszerűen. Két qubit esetén azonban van rá zárt képlet. Általában az ún. konkurenciát szokták kiszámolni, amelynek aztán a keltési entrópia egyszerű függvénye.

Van olyan eset, amikor fizikai mennyiséget (amit akár összefonódottsági tanúként is használhatunk) lehet kapcsolatba hozni a konkurenciával. Páros számú qubit antiferromágneses Heisenberg gyűrűje esetén, amelynek Hamilton operátora [4]

$$H = \sum_i^N \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}, \quad (5)$$

a rendszer energiája és a két-qubites konkurencia között fennáll az

$$C_{gs} = -\frac{1}{2}[(E/N) + 1] \quad (6)$$

összefüggés, ahol N a részecskeszám, C_{gs} két-qubites konkurencia, E az energia. Hasonló összefüggés áll fenn a teljesen összekötött gráfon lévő Heisenberg rendszerre [2]. A két-qubites keltési összefonódottság pedig a konkurencia ismeretében kiszámítható.

Más rendszerre, egy operátor várható értékéből, amely akár összefonódottsági tanú is lehet, alsó határt lehet az összefonódottságra adni [5].

3. Kérdés: Rendezetlen kvantumoz rendszerek gyakran végtelenül rendezetlen kritikus ponttal rendelkeznek, ahol a rendszer alapállapotát összekapcsolt klaszterek összességével lehet leírni. Példát adhat a rendezetlen kvantumoz Ising lánc, vagy a rendezetlen antiferromágneses Heisenberg spin lánc. Lát-e lehetőséget ilyen problémák esetén alkalmazni a klaszterállapotokra kifejlesztett módszerét?

Az összefonódottság-detekciónk azon alapul, hogy felírható egy összefüggés

$$|C\rangle\langle C| \geq A + B, \quad (7)$$

ahol $|C\rangle$ a klaszterállapot, A és B is egy helyi mérési beállítással (local measurement setting) mérhető. Így a hűségre (fidelity) egy alsó határt kapunk

$$F = \langle |C\rangle\langle C| \rangle \geq \langle A \rangle + \langle B \rangle. \quad (8)$$

Konkrétan, az A -hoz az egyes qubiteken a $\sigma_z^{(1)}, \sigma_x^{(2)}, \sigma_z^{(3)}, \sigma_x^{(4)}, \dots$ operátorokat kell mérni, a B -hez pedig az egyes qubiteken a $\sigma_x^{(1)}, \sigma_z^{(2)}, \sigma_x^{(3)}, \sigma_z^{(4)}, \dots$ operátorokat.

A Bíráló azt kérdezi, hogy lehet-e ezt a módszert vagy egy ehhez hasonló módszert Ising és Heisenberg rendszerekre alkalmazni, egy speciális állapotban [6].

Ehhez szükség lenne először is konkrét tiszta $|\Psi\rangle$ állapotra, ami körül az összefonódottságot detektáljuk. Aztán kellenének A_1, A_2, A_3 , stb. mátrixok, amelyekre fennáll a

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| \geq A_1 + A_2 + A_3 + \dots \quad (9)$$

egyenlőtlenség, és amelyek könnyen mérhetőek. Az irodalomban van olyan eljárás, ami minden $|\Psi\rangle$ -re meghatározza az A_k mátrixokat [7].

Kevert állapotra a probléma nehezebb. A Ref. [6] megfogalmazása szerint

”Ebben az esetben a termodinamikai mennyiségek várható értékeit kétféle átlagolás során kapjuk meg: először adott rendezetlen minta esetén kiszámítjuk a termikus átlagértéket, majd ezt a különböző mintákra, azaz a rendezetlenségre is átlagoljuk.”

Amennyiben a rendezetlenséget eredményező mintákat ismerjük, akkor megkísérelhetünk egy olyan módszert alkotni, amely a minták ismeretében detektál összefonódottságot az adott állapotban. Amennyiben egy adott rendezetlenség esetén ez az állapot tiszta, akkor visszavezettük az összefonódottság detekciót egy tiszta állapot körüli összefonódottság detekcióra.

A klaszterekre való szétvágás segíthet az operátorok megtalálásában, ahol az összefonódottságot detektáló operátort a $\sum_k A_k \otimes B_k$ alakban kereshetjük, ahol A_k és B_k két külön klaszteren hat, és kevés tag van az összegben.

Hozzá szeretném tenni, hogy antiferromágneses Heisenberg-rendszerek esetén az $T = 0$ állapotban

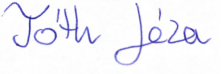
$$\langle J_l^2 \rangle = 0 \quad (10)$$

$l = x, y, z$ -re. Ebben az esetben, a

$$(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2 \geq Nj, \quad (11)$$

kritérium használható összefonódottság detekciójára, ahol N a spin- j részecskék száma. Ezt a kritériumot mutattuk be a disszertációban (Observation 7.2.1), lásd még a Ref. [8–10] referenciákat. Ha az (11) egyenlőtlenség nem teljesül, akkor az állapot összefonódott. Természetesen a (11) kritérium összefonódottságot detektál a termikus állapotban is alacsony hőmérsékleten, nem csak a $T = 0$ esetben.

Budapest, 2020. december 15.



Tóth Géza

-
- [1] P. Pfeuty, The one-dimensional ising model with a transverse field, *Ann. Phys.* **57**, 79 (1970).
 - [2] G. Tóth, Entanglement witnesses in spin models, *Phys. Rev. A* **71**, 010301 (2005).
 - [3] A QUBIT4MATLAB programcsomag a <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8433> címen érhető el. A QUBIT4MATLAB csomag aktuális verziója a <http://gtoth.eu/qubit4matlab.html> címen is megtalálható. A következő cikk a 3.0-as verzió leírását tartalmazza: G. Tóth, *Comput. Phys. Commun.* **179**, 430 (2008).
 - [4] K. M. O'Connor and W. K. Wootters, Entangled rings, *Phys. Rev. A* **63**, 052302 (2001).
 - [5] O. Gühne, M. Reimpell, and R. F. Werner, Estimating entanglement measures in experiments, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 110502 (2007).
 - [6] F. Iglói and I. Kovács, Végtelenül rendezetlen kritikus viselkedés, *Fizikai Szemle* **11**, 366 (2014).
 - [7] S. Sciara, C. Reimer, M. Kues, P. Roztock, A. Cino, D. J. Moss, L. Caspani, W. J. Munro, and R. Morandotti, Universal n -partite d -level pure-state entanglement witness based on realistic measurement settings, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 120501 (2019).
 - [8] G. Tóth, Entanglement detection in optical lattices of bosonic atoms with collective measurements, *Phys. Rev. A* **69**, 052327 (2004).
 - [9] G. Tóth, C. Knapp, O. Gühne, and H. J. Briegel, Optimal spin squeezing inequalities detect bound entanglement in spin models, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 250405 (2007).
 - [10] G. Tóth and M. W. Mitchell, Generation of macroscopic singlet states in atomic ensembles, *New J. Phys.* **12**, 053007 (2010).