

Válaszok Lévay Péter opponensi véleményére

Szeretném megköszönni Lévay Péter professzor úrnak az értekezésem bírálataival kapcsolatos gondos munkáját, észrevételeit és értékes megjegyzéseit. A feltett kérdésekre az alábbiakban válaszolok.

1. Kérdés: Az 1.1.5 bekezdés után szereplő Dicke állapot milyen mérték szerint a "legjobban összefonódott"?

Az Eq. (1.1.5) képletben a $|m, N\rangle$ szimmetrikus Dicke állapotok definíciója van megadva [1]

$$|m, N\rangle := \binom{N}{m}^{-\frac{1}{2}} \sum_k P_k(|1_1, 1_2, \dots, 1_m, 0_{m+1}, \dots, 0_N\rangle), \quad (1)$$

ahol N a részecskeszám, m az egyesek száma, és a $\{P_k\}$ a spinek különböző permutációit jelöli. Páros N -re, az $|N/2, N\rangle$ -et szokás a legösszefonódottabbnak mondani a következő okokból. Osszuk az N -qubites rendszert két $N/2$ -qubites részrendszerre. Ekkor van értelme beszélni a két részrendszer közti összefonódottságról, ami egyszerű is kiszámítani, mivel a Dicke állapotok tiszta állapotok. Az egyik részrendszer redukált sűrűségmátrixára számított entrópia a szokásos módszer az összefonódottság mérésére, amely az $|m, N\rangle$ állapotok közül az $m = N/2$ esetén a legnagyobb [1]. Hozzáteszem, hogy az összefonódottság az $N/2$ qubit vs. $N/2$ qubit felosztásnál nagyobb Dicke állapotok esetében, mint a többi felosztásnál, ahol a qubitek nem két egyenlő csoportra vannak osztva [1].

A Bíráló kérdése alkalmat ad arra, hogy a Dicke állapotok összefonódottságával kapcsolatban általánosságban is próbálják megállapításokat tenni. Ez nem egyszerű, mivel a kéttest-összefonódottsággal szemben a többtest-összefonódottságra nincs egyértelmű mérőszám. Ezzel együtt szerintem lehet úgy érvelni, hogy a Dicke állapot a Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) állapotokhoz hasonlóan összefonódottság szempontjából kitüntetett helyzetben van.

Egyrészt, nagy N -re, a biszeparálható (vagyis nem teljesen N -qubit összefonódott) állapotokkal hűsége (fidelity) $1/2$, ami egyébként a lehető legkisebb érték. Ez a következőképpen látható. A disszertációban szereplő Observation 4.2.1 azt bizonyítja, hogy biszeparálható ϱ állapotok kielégítik az

$$\text{Tr}(\rho|N/2, N\rangle\langle N/2, N|) \leq \frac{1}{2} \frac{N}{N-1} =: C_{N/2, N} \quad (2)$$

egyenlőtlenséget, és van olyan ϱ biszeparálható állapot, amelyre az egyenlőség igaz az Eq. (2) egyenletben. Az Eq. (2) alapján, nagy N -re azt találjuk, hogy $C_{N/2, N} \approx 1/2$. Fontos ismét hangsúlyozni, hogy biszeparálható állapotokra vonatkozó hűségnek $1/2$ a lehetséges legkisebb értéke. A GHZ állapotra is egy ilyen érték adódik [2], a másik ismert csoport a gráfállapotok. Tehát azt mondhatjuk, hogy a Dicke állapotok a lehető legmesszebb vannak a biszeparálható, vagyis nem teljesen összefonódott állapotoktól. Ez annak a jele, hogy az állapot nagyon összefonódott. Továbbá, lehetővé teszi az igazi többtest összefonódottság detekcióját Dicke állapotok körül a hűség mérése alapján, mivel egy kísérlet esetén viszonylag sok zajt tolerál az állapot.

Másrészt, ha a Dicke állapotot paraméterbecslésre használjuk egy lineáris interferométerben, akkor a kvantum Fisher-információra a következő teljesül

$$F_Q[|N, N/2\rangle, J_l] = N(N+2)/2 \quad (3)$$

$l = x, y$, ami a Heisenberg skálázásnak felel meg. Ez egy körülbelül kettes faktossal kisebb mint a GHZ állapotra kapott érték,

$$F_Q[|\text{GHZ}\rangle, J_z] = N^2. \quad (4)$$

Viszont, ha a disszertáció Eq. (8.3.15) egyenletében definiált mennyiséget nézzük

$$\text{avg}_{\vec{n}} F_Q[\varrho, J_{\vec{n}}] = \frac{1}{3} (F_Q[\varrho, J_x] + F_Q[\varrho, J_y] + F_Q[\varrho, J_z]), \quad (5)$$

akkor mindkét esetben a maximális

$$\text{avg}_{\vec{n}} F_Q[\varrho, J_{\vec{n}}] = \frac{1}{3} N(N+2) \quad (6)$$

értéket kapjuk. Tehát ilyen értelemben a Dicke állapot annyira jó metrológiára, mint a GHZ állapot.

2. Kérdés: *N*-qubit rendszerekre a teljes állapottomográfiával kapcsolatosan létezik egy szép geometriai kép, mely a Wootters féle diszkrét fázistéren alapul (Phys. Rev. A70, 062101 (2004)). Ez azzal van kapcsolatban, hogy a kvantumállapotot reprezentáló sűrűségmátrix $4^N - 1 = (2^N - 1)(2^N + 1)$ darab szabadsági fokával kapcsolatos $4^N - 1$ nemtriviális Pauli operátort particionálhatjuk $2^N + 1$ olyan halmazba, mely $2^N - 1$ kölcsönösen kommutáló operátorból áll. Egy rögzített halmazon belüli Pauli operátorok előjeleinek alkalmas megválasztásával mindig elérhető, hogy az egységoperátorral együtt ezek a kölcsönösen kommutáló szettek egy 2^N elemből álló stabilizátor csoportot alkotnak. Ezt a stabilizátor csoportot *N* darab, előjel erejéig egyértelmű, Hermitikus Pauli operátor generálja. Nyilván minden halmazra 2^N darab lehetséges, különböző stabilizátorokra vezető, előjelkiosztás van minden előjelkiosztásnak megfelel egy stabilizált állapot. Így minden kommutáló szettre a stabilizált állapotokból egy 2^N darab bázisvektorból álló bázist kapunk. Ezek az irodalomból jól ismert MUB-ok (mutually unbiased bases), melyek az effektív teljes állapottomográfiánál játszanak fontos szerepet (W. K. Wootters: arXiv:quant-ph/0306135). *N*-qubitot ábrázolhatunk a Gibbons-Hoffmann-Wootters fázistérben (Phys. Rev. A70, 062101 (2004)), melynek origón átmenő sugarai pont az effektív teljes állapottomográfiával kapcsolatos MUB irányoknak felelnek meg. Kérdésem, permutációsan invariáns állapot tomográfia esetén létezik-e a 6.2.8 alakú állapotok vizsgálatára egy hasonlóan szép geometriai kép? Lehet-e a MUB-oknak valamiféle permutációsan invariáns analogonját definiálni?

A permutációsan invariáns tomográfiában minden qubiten ugyanazt az operátort kell mérnünk, mert ekkor minimális számú különböző helyi mérést (local measurement settings) kell végezzünk. Ezeknek a mérési elrendezéseknek a formája, Eq. (6.2.15) szerint,

$$\{A_j, A_j, \dots, A_j\}, \quad (7)$$

ahol A_j egy-qubites operátor. Az A_j -ket úgy választjuk ki, hogy minél kisebb legyen a rekonstruált sűrűségmátrix bizonytalansága. Az A_j -k eloszlása a Bloch gömbön így egyenletesen látszik, lásd Figure 6.1(a) ábrát a disszertációban. Az $A_j^{\otimes N}$ operátorok tipikusan nem kommutálnak egymással, ezért nehéz kommutáló részcsoportokat találni.

Ugyanakkor megengedhetjük, hogy ne a minimális számú különböző helyi mérést (local measurement settings) végezzük. Ilyenkor, ha kétrészi rendszer esetén lemérjük $\langle AB \rangle$ -t, akkor le kell mérnünk $\langle BA \rangle$ -t is, hogy megkapjuk a $\langle AB + BA \rangle / 2$ értékét. Akár változathatjuk is az AB és BA sorrendet az egyes méréseknél, amiket azután átlagolunk. Itt meg kell jegyezni, hogy egy általános többtest korrelációnak $N!$ permutációja lehetséges. Ennél jóval kevesebbet mérünk egy várható értékhez nagy N -re. Másrészt, könnyebb ugyanazt mérni sokszor, mint a mért mennyiséget változtatni.

A MUB-ok alapján végzett tomográfia eltér ezektől az ötletektől. Például, Ref. [3] bemutat konkrét MUB konstrukciókat két- és három qubitre. A bázisok egy része szorzat-bázis, a többi összefonódott bázis, míg a mi munkánkban csak szorzatbázisokkal foglalkoztunk. Az összefonódott bázisban való mérés kísérletileg jóval nehezebb. Talán ebben az esetben is figyelembe lehetne venni azt, hogy csak a permutációsan invariáns állapot

$$\varrho_{PI} = \frac{1}{N!} \sum_k \Pi_k \varrho \Pi_k^\dagger, \quad (8)$$

szeretnénk megkapni, és nem ϱ -t. Ezt tudva kevesebbet kell mérni. Például a Fig. 1. ábra a Ref. [3] közleményben leírja a két-qubites esethez tartozó egyik lehetséges választást az 5 operátorhármasra. Nem kell a $\sigma_x^1, \sigma_y^2, \sigma_x^1 \sigma_y^2$ és $\sigma_y^1, \sigma_x^2, \sigma_y^1 \sigma_x^2$ hármasok bázisában külön mérni. Felváltva is lehet mérni, és az eredményeket átlagolni, hasonlóan az előbbi példához.

3. Kérdés: *A dolgozatban a Szerző, érthető okokból, csak állapot meghatározásra (egydimenziós alterek) használja a stabilizátor formalizmust. A hibajavító kódok elméletében azonban a stabilizátor formalizmus kommutáló generátorai magasabb dimenziós altereket határoznak meg. Ismeretes, hogy az összefonódottság fogalmát alterekre is ki lehet terjeszteni. Lásd : M. Demianowicz és R. Agusiak: arXiv: 1907.12463, és az ott található referenciák. Lehet-e a stabilizátor formalizmust ilyen összefonódott alterek detektálására használni? Létezik-e a Szerző eredményeit ezirányban általánosító kutatás?*

Ha *N*-qubitre *N*-nél kevesebb stabilizáló operátort adunk meg, akkor a tanúoperátor egy altér körül detektál összefonódottságot. Egy ilyen helyzetet írunk le a Ref. [4] cikkünkben a III. D. "Witnesses for mixed states" fejezetben. Itt a következő tanúoperátort tárgyaljuk

$$\mathcal{W} = \mathbb{1} - Z^{(1)} Z^{(2)} - X^{(1)} X^{(2)} Z^{(3)}, \quad (9)$$

ahol a három-qubites rendszerben $X^{(n)}$ és $Z^{(n)}$ az n . qubiten ható Pauli mátrixokat jelöli. Az Eq. (9)-ban adott tanúoperátor detektálja azt a tiszta állapotot, amelyre

$$\begin{aligned}\langle Z^{(1)} Z^{(2)} \rangle &= +1 \\ \langle X^{(1)} X^{(2)} Z^{(3)} \rangle &= +1 \\ \langle Z^{(3)} \rangle &= +1.\end{aligned}\tag{10}$$

Azt a tiszta állapotot is detektálja, amelyre

$$\begin{aligned}\langle Z^{(1)} Z^{(2)} \rangle &= +1 \\ \langle X^{(1)} X^{(2)} Z^{(3)} \rangle &= +1 \\ \langle Z^{(3)} \rangle &= -1.\end{aligned}\tag{11}$$

Emellett, Eq. (9)-ban adott tanúoperátor detektálja a fenti két tiszta állapot bármilyen szuperpozícióját. Tehát, minden ezen altérben lévő állapotot összefonódottként detektál.

4. kérdés: A 4.3. fejezetben a Szerző a Dicke állapotokra vetítés két olyan dekompozícióját adja meg, melyet a kísérletekben is eredményesen használtak. Azt írja: úgy tűnik, nincsen olyan dekompozíció, mely ezt a trükköt kevesebb mérésbeállítással éri el. Létezik-e valamiféle bizonyítás erre a sejtésre?

A Dicke-állapot projektorára $N = 6$ qubitre 21 helyi mérés szükséges, míg a $N = 4$ qubitre 9 helyi mérés szükséges az általunk talált dekompozíció szerint.

Az optimális dekompozíció megtalálására általános módszer nem ismert, és a tenzor-rang meghatározása NP-teljes [5]. Felső határ adható az optimális dekompozícióhoz szükséges helyi mérések (local measurement setting) számára. Ez a határ a permutációs invariáns tomográfiához szükséges helyi mérések száma, amely Observation 6.2.2-ben szerepel

$$\mathcal{D}_N^{(\text{PI})} = \binom{N+2}{N}.\tag{12}$$

Ez $N = 6$ qubitre, a Observation 6.2.2 alapján, $\mathcal{D}_6^{(\text{PI})} = 28$, $N = 4$ qubitre $\mathcal{D}_4^{(\text{PI})} = 15$. Ezek valóban nagyobbak, mint a dekompozícióhoz szükséges mérések száma.

Emellett, kétrészi rendszerekre a Schmidt dekompozíciót felhasználva lehet egy tanúoperátorról bizonyítani, hogy a dekompozíciója optimális. Kis rendszerekre ismertek optimális dekompozíciók többrészi rendszerekre, pl. a három qubites GHZ és W állapotokhoz tartozó projektorokra [6].

5. kérdés: A kvantummetrológiai fejezetben a Szerző az egy paraméteres becslés és a kvantumos összefonódottság kapcsolatát mutatja be. Ismeretes, hogy a Cramér-Rao egyenlőtlenség több paraméter esetén az információgeometria igen érdekes témakörével van kapcsolatban. Ennek megfelelően elképzelhető-e, hogy a Szerző eredményeinek többparaméteres általánosításával ezen paraméterterek Riemann geometriájának és a megfelelő kvantumállapotok összefonódottság szerkezetének kapcsolatára derül fény? Pontosan ez az összefüggés bukkan fel az AdS/CFT megfelelés és a holografikus összefonódottság kapcsán is. Itt az AdS tér peremén élő CFT kvantumállapotok összefonódottsága és a bulk Riemann geometriája közötti kapcsolatról beszélhetünk (az alapötletek egyszerű összefoglalását illetően lásd: M. Raamsdonk: arXiv:1609.00026). Vizsgálták-e a kvantummetrológiai paraméterbecslések és a kvantumos összefonódottság kapcsolatát (diszkrétizált) holografikus modellek (holografikus kódok) kontextusában?

A Fisher információ metrika (1.2) első holografikus számítását elvégezték a Ref. [7]-ben a relatív entrópia másodrendű variációjával való kapcsolatát felhasználva, amint ezt Ref. [8] közleményben megállapították. A Ref. [7] közlemény (2.2)-es egyenlet expliciten mutatja, hogy a relatív entrópia második deriváltjaként kapják a Fisher információt. Ezt a matematikában a Kubo-Mori-Bogoliubov kvantum Fisher-információnak hívják [9, 10].

A szokásos kvantum Fisher információ, amelyet a disszertációban is tárgyaltunk,

$$F_Q[\varrho, A] = 2 \sum_{k,l} \frac{(\lambda_k - \lambda_l)^2}{\lambda_k + \lambda_l} |\langle k|A|l \rangle|^2\tag{13}$$

azonban ettől különbözik. Itt a sűrűségmátrix sajátfelbontása

$$\varrho = \sum_{k=1}^d \lambda_k |k\rangle\langle k|. \quad (14)$$

A szokásos kvantum Fisher információ, (13), és a hűség (fidelity) közti összefüggés a következő

$$F(\varrho, \varrho_\theta) = 1 - \frac{F_Q[\varrho, \varrho]}{2} \theta^2 + O(\theta^3), \quad (15)$$

ahol ϱ_θ az

$$\varrho_\theta = e^{-iA\theta} \varrho e^{+iA\theta} \quad (16)$$

egyenletben van definiálva.

Fontos ezen kívül, hogy a ϱ_λ egy unitér dinamikához tartozzon, ahol a Hamilton operátor egyrészecskes mennyiségek összege. A szakirodalomban szokás lineáris dinamikát is tekinteni, vagy olyan Hamilton-operátort is, amely kölcsönhatást is tartalmaz. Ezeket a kérdéseket tisztázva, a fenti cikkek nagyon ígéretesnek látszanak a kvantum-metrológiában való felhasználásra.

A disszertációban szerepel egy többparaméteres metrológiai problémához tartozó összefonódottsági feltétel. Az Observation 8.3.1. szerint, olyan állapotokra, amelyek legfeljebb k -részecskes összefonódottságot tartalmaznak, az

$$\frac{1}{3}(F_Q[\varrho, J_x] + F_Q[\varrho, J_y] + F_Q[\varrho, J_z]) \leq f(k) \quad (17)$$

egyenlőtlenség áll, ahol $f(k)$ a k monoton függvénye, és a disszertáció (8.3.16)-as egyenlete adja meg. Ha egy állapot sérti a fenti feltételt, akkor az legalább $(k+1)$ -részecskes összefonódottságot tartalmaz. A disszertációban tárgyalt GHZ és Dicke állapotok a (17) feltételt maximálisan sértő állapotok. Az első esetben három kvantum információ tag közül $F_Q[\varrho, J_z] = N$ míg $F_Q[\varrho, J_x] = F_Q[\varrho, J_y] = N/2$. A Dicke állapotra $F_Q[\varrho, J_x] = F_Q[\varrho, J_y] = N(N+2)/2$ és $F_Q[\varrho, J_z] = 0$. Tehát a három tag összege mindkét esetben $N(N+2)$ de a GHZ állapot különösen jó a J_z Hamilton-operátor esetén, míg a Dicke állapot különösen jó a J_x és J_y Hamilton-operátor esetén.

6. kérdés: A 9. fejezetben a szerző olyan Bell egyenlőtlenségeket vezet le, melyek gráf állapotok nem lokális tulajdonságainak detektálásra alkalmasak. Ezen egyenlőtlenségek konstruálása a hibajavító kódok egy speciális osztályának az úgynevezett stabilizátor kódoknak a formalizmusán alapul. Legyen $\mathcal{S}$ az a stabilizátor csoport mely a $|G\rangle$ N -qubit gráf állapotot stabilizálja. Mivel $\mathcal{S}$ csak egy egy dimenziós alteret (sugarat) stabilizál, ezért $\mathcal{S}$ egy olyan kommutatív csoport melyet N egymással kölcsönösen kommutáló megfigyelhető mennyiség generál (Pauli mátrixok tenzorszorzatai egy előjel lötyögéssel). $\mathcal{S}$ az egységoperátort is beszámítva $2N$ darab ilyen mennyiségből áll.

Ismeretes, hogy $\mathcal{S}$ egy alternatív leírása egy olyan $2N$ dimenziós $\mathbb{Z}_2$ -feletti vektortér segítségével is történhet melyet egy szimplektikus formával látunk el. Ez a $\mathbb{Z}_2$ értékű szimplektikus forma azt kódolja, hogy a megfelelő megfigyelhető mennyiségpárok kommutálnak (0) vagy nem (1). Ebben a képben $\mathcal{S}$ generátorai egy 0-kat és 1-eket tartalmazó, $N \times 2N$ -es mátrix (az úgynevezett parity check matrix) sorait alkotják. Az N darab lineárisan független sor a $2N$ dimenziós vektortérben egy N -dimenziós alteret ad. Az a tény hogy a megfigyelhető mennyiségek páronként kommutálnak annak felel meg, hogy ez az N -dimenziós alter teljesen izotróp. Az ilyen altereket Lagrange altereknek nevezik.

Az N -qubit $|G\rangle$ gráf állapotokat definiáló $\mathcal{S}$ stabilizátorok tehát Lagrange altereknek felelnek meg. A stabilizátorok tere az ilyen Lagrange alterek tere, melyet a matematikában az $LGr(2N; N)$ Lagrange féle Grassmann sokaságnak neveznek. Az irodalomban ismeretes, hogy a Lagrange altereket egy megfelelő csoport hatás pályáiként osztályozhatjuk. ($N = 2; 3; 4$ -re lásd a Bremner és Stavrou arXiv:1112.0298 munkáját felhasználó arXiv:1311.2408 dolgozat 1. 2. és 3. táblázatát). Vizsgálták-e az irodalomban szórványosan fellelhető gráf állapotok osztályozásának problémája, és a Lagrange alterek ezen osztályozásának problémája közötti kapcsolatot?

A Szerző által vizsgált, a Bell egyenlőtlenségekben megjelenő speciális operátorok a Lagrange alterekben szereplő speciális vektorok konfigurációinak felelnek meg. Mi lehet a (9.2.22) megfigyelhető mennyiségek szimplektikus geometriai jelentése? Elképzelhető-e, hogy ez a Lagrange alteres kép a 9.3 fejezetben vizsgált kompozit Bell egyenlőtlenségek mélyebb megértését teszi lehetővé? Lát-e a Szerző kapcsolatot a fenti munkákban felmerülő Lagrange alterek különböző pályái és a Bell egyenlőtlenségekkel detektálható $|G\rangle$ összefonódott állapotok osztályai között?

Nagyon szépen köszönöm a referenciát. Nagyon érdekes, hogy az 1. 2. és 3. táblázatban szereplő, egy-egy pályának megfelelő, egymással kommutáló operátorok egy-egy gráf állapotot határoznak meg. Pl.,

$$\text{PG}(2, 2)_c = \langle XIX, IXX, ZZZ \rangle \quad (18)$$

a 3-qubites lineáris klaszterállapot stabilizáló operátorainak felelnek meg helyi unitér műveletek után és a 2.-3.qubit cseréje után, amelyeket a disszertációban

$$\begin{aligned} S_1 &= X^{(1)} Z^{(2)}, \\ S_2 &= Z^{(2)} X^{(3)}, \\ S_3 &= Z^{(1)} X^{(2)} Z^{(3)}. \end{aligned} \quad (19)$$

alakban jelöltünk (lásd a 3.1.2. fejezetet). Ez a módszer véleményem szerint nagyon jól felhasználható a gráf állapotok osztályozására, de nem tudok róla, hogy ezt más már megtette volna.

Eddig kevés osztályozási próbálkozás volt a gráfállapotokra [11, 12]. Ezek a módszerek főleg azzal foglalkoztak, hogy felrajzolták adott qubit-számra az összes lehetséges gráfot, és megvizsgálták, hogy a gráfokhoz tartozó gráfállapotok közt mennyi ténylegesen különböző van. Ugyanis, különböző gráfokhoz tartozó gráfállapotok néhány esetben helyi unitér transzformációkkal egymásba alakíthatóak. Én eddig nem találkoztam az irodalomban olyan osztályozással, amely a Bíráló által említett módszert használta volna a Lagrange alterekre alapozva.

A dolgozat jól megfogalmazott, sajtóhibáktól, pontatlanságoktól általában mentes munka. Néhány szemet szűrő sajtóhiba és apró pontatlanság:

Az 1.1.1 egyenletet követő bekezdésben n helyett N -et kellene használni.

Az 1.1.4. egyenletben rossz a normálási faktor.

A (3.3.32) korlát N növekedtével nem $1/4$ -hez, hanem $1/2$ -hez konvergál. Ezt az $1/2$ -hez történő konvergenciát a 3.2 ábra már helyesen mutatja.

A 6.1.4. egyenlet után az $SU(d)$ -re vonatkozó fejtegetésben a k -val indexelt exponenciális alakok nem a k -val indexelt generátorokat adják hanem az $SU(d)$ -nek a H_k operátorokkal generált egyparaméteres részcsoportjait. A generátorok tehát inkább a páronként ortogonális nyommentes H_k operátorok.

A 6.2.8 egyenletben az N helyett $N!$ kellene. Ugyanez mondható el a 6.2.13 egyenletről.

Nagyon szépen köszönöm a talált sajtóhibákat. El fogom készíteni a disszertációm egy új változatát, amelyet elérhetővé teszek a honlapomon.

Budapest, 2020. december 15.

Tóth Géza

Tóth Géza

-
- [1] J. K. Stockton, J. M. Geremia, A. C. Doherty, and H. Mabuchi, Characterizing the entanglement of symmetric many-particle spin- $\frac{1}{2}$ systems, Phys. Rev. A **67**, 022112 (2003).
 - [2] G. Tóth, Detection of multipartite entanglement in the vicinity of symmetric Dicke states, J. Opt. Soc. Am. B **24**, 275 (2007).
 - [3] J. Lawrence, C. Brukner, and A. Zeilinger, Mutually unbiased binary observable sets on n qubits, Phys. Rev. A **65**, 032320 (2002).
 - [4] G. Tóth and O. Gühne, Entanglement detection in the stabilizer formalism, Phys. Rev. A **72**, 022340 (2005).
 - [5] C. J. Hillar and L.-H. Lim, Most tensor problems are np-hard, J. ACM **60**, 10.1145/2512329 (2013).
 - [6] O. Gühne and P. Hyllus, Investigating three qubit entanglement with local measurements, International Journal of Theoretical Physics **42**, 1001 (2003).
 - [7] N. Lashkari and M. Van Raamsdonk, Canonical energy is quantum fisher information, Journal of High Energy Physics **2016**, 153 (2016).
 - [8] S. Banerjee, J. Erdmenger, and D. Sarkar, Connecting fisher information to bulk entanglement in holography, Journal of High Energy Physics **2018**, 1 (2018).
 - [9] D. Petz, *Quantum information theory and quantum statistics* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2008).

- [10] G. Tóth, Lower bounds on the quantum Fisher information based on the variance and various types of entropies, arXiv:1701.07461 (2017).
- [11] M. Hein, J. Eisert, and H. J. Briegel, Multiparty entanglement in graph states, Phys. Rev. A **69**, 062311 (2004).
- [12] M. Van den Nest, J. Dehaene, and B. De Moor, Local unitary versus local clifford equivalence of stabilizer states, Phys. Rev. A **71**, 062323 (2005).