

Első rendű módszerek sztochasztikus programozási alkalmazásairól

(On first-order methods in
stochastic programming)

MTA doktori értekezés tézisei

Fábián Csaba

Neumann János Egyetem, Kecskemét

2019.

1. Bevezetés

Értekezésem sztochasztikus programozási (SP) feladatok megoldó eljárásaival foglalkozik. A SP feladatokban tipikusan előforduló függvények várható értéket, valószínűséget, vagy valamely kockázati mértéket tartalmaznak. A függvényértékek általában nem számíthatók pontosan, becslésük is nagy adattömeg feldolgozását követeli. Nagyon különböző feladatokra hasonló eljárások bizonyultak hatékonyak: vágósíkos eljárások primál és duál formában.

A téziszfüzet felépítése az értekezés felépítéséhez igazodik. A 2. részben vágósíkos eljárásokkal és kiterjesztéseikkel foglalkozom. A 3. részben vázoló, hogy ezek miként alkalmazhatók kockázati mértékek kezelésére.

Az első dekompozíciós eljárást a korabeli számítógépek memóriakorlátainak az áthidalására dolgozták ki. A mai számítógépeken szinte korlátlanul áll rendelkezésre memória (teljes adatbázisok tárolását lehetővé téve). A dekompozíciós eljárások azonban ma is hasznosak; ezt bizonyítják a 4., az 5., és a 6. részben leírtak.

A kockázat mérésének és korlátozásának egyik legkorábbi és legszemléletesebb eszköze a valószínűség (egy döntéshozónak általában nem szükséges elmagyaráznunk az 'esély' fogalmát). A valószínűséggel megfogalmazott döntési problémák megoldó eljárásai ma is a kutatás fókuszában vannak. A 7. részben egy olyan szukcesszív közelítő eljárást vázoló valószínűség-maximalizálási feladatokra, amely duális nézőpontból egyszerű vágósíkos eljárás, de ilyen összefüggésben korábban nem használták. Kiderül, hogy ebben a környezetben ez az eljárás jobban tűri a zajt, mint a klasszikus eljárások.

A szimulációs eljárások jelentősége egyre növekszik, amint egyre bonyolultabb feladatok megoldására jelenik meg igény. A 8. részben egy véletlenített eljárást írok le nehezen számítható függvény minimalizálására. Az eljárás a sztochasztikus gradiens módszerekre hasonlít, azonban különbözik tőlük, mert a célfüggvény modelljét építi fel. A 9. részben ezt a véletlenített eljárást alkalmazom nehezen számítható korlátozó függvény kezelésére. A 10. részben szimulációs megközelítésben térek vissza a valószínűség-maximalizálási feladatra.

A legfontosabbnak tartott saját eredményeket kövér dőlt betűvel szedem.

Az értekezés alapját képező cikkek a "<http://www.fabiancsaba.hu/articles>" weblapon elérhetők, "reader" felhasználónévvel és "w6v6\$B7P" jelszóval.

2. Vágósíkos eljárások és kiterjesztéseik

Lemaréchal, Nemirovskii, és Nesterov (1995) regularizált vágósíkos eljárást dolgoztak ki konvex célfüggvény minimalizálására, level módszer néven. Tágabb értelemben bundle típusú módszernek tekinthető, melyben a stabilitást színhalmazok biztosítják. A módszert az alábbi feladatra alkalmazva vázoló:

$$\min \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{midőn } \mathbf{x} \in X, \quad (1)$$

ahol $X \subset \mathbb{R}^n$ korlátos konvex poliéder D átmérővel, és $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény, amely Lipschitz-folytonos Λ konstanssal. A módszer által az i -edik

lépésig talált próbapontokat (iterates) jelölje $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i$. Egy kútfőnek (oracle) nevezett eljárás ezen pontokban a célfüggvény egy-egy érintőjét szolgáltatja. Ezen érintőknek megfelelő lineáris függvények felső burkolója adja a célfüggvény vágósíkos modelljét, jelölje ezt $\varphi_i(\mathbf{x})$. Az (1) feladat optimumára felső illetve alsó korlátot jelentenek az alábbi mennyiségek:

$$\bar{\phi}_i = \min_{1 \leq j \leq i} \varphi(\mathbf{x}_j) \quad \text{illetve} \quad \underline{\phi}_i = \min_{\mathbf{x} \in X} \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (2)$$

A modell pontosságát a $\Delta_i = \bar{\phi}_i - \underline{\phi}_i$ rés (gap) méri. Rögzített $0 < \lambda < 1$ (level paraméter) mellett tekintsük a modell-függvény alábbi színhalmazát:

$$X_i = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \varphi_i(\mathbf{x}) \leq \underline{\phi}_i + \lambda \Delta_i \right\}. \quad (3)$$

A következő próbapontot egy konvex kvadratikusan programozási feladat megoldása adja:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \arg \min_{\mathbf{x} \in X_i} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2. \quad (4)$$

A level módszer konvergenciájával kapcsolatban Lemaréchal et al az alábbi tételt bizonyították. Legyen $\epsilon > 0$ előírt tolerancia. A rés ϵ alá csökkentéséhez elegendő

$$c \left(\frac{\Delta D}{\epsilon} \right)^2 \quad (5)$$

lépés, ahol a c konstans csak a λ paramétertől függ.

A level módszer meglepően jó tapasztalati hatékonyságot mutat: n dimenziós feladat ϵ pontossággal való megoldásához legfeljebb

$$n \ln \left(\frac{V}{\epsilon} \right) \quad (6)$$

lépés szükséges, ahol $V = \max_X \varphi - \min_X \varphi$ a feladatra jellemző konstans.

Lemaréchal és szerzőtársai az eljárást kiterjesztették korlátozott konvex programozásra is, korlátos level módszer néven. A korlátos feladatot az alábbi formában vizsgálják:

$$\min \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{midőn} \quad \mathbf{x} \in X, \psi(\mathbf{x}) \leq 0, \quad (7)$$

ahol X illetve φ ugyanazokat a feltételeket teljesítik, mint az (1) feladatban. A korlátozó függvény $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ szintén Lipschitz-folytonos Λ konstanssal. Feltesszük, hogy $\psi(\mathbf{x})$ felvesz mind pozitív, mind 0 értéket. A korlátos feladat optimumát Φ fogja jelölni.

A korlátos level módszer primál-duál eljárás, amely a (korlát nélküli) level módszer futamaiból áll. Jelölje $\varphi_i(\mathbf{x})$ illetve $\psi_i(\mathbf{x})$ a célfüggvény illetve a korlátozó függvény vágósíkos modelljét az i -edik lépésben. A modell-feladat

$$\min \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \text{midőn} \quad \mathbf{x} \in X, \psi_i(\mathbf{x}) \leq 0. \quad (8)$$

Jelölje Φ_i a modell-feladat optimumát, és definiáljuk a $h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duális modell-függvényt így:

$$h_i(\alpha) = \min_{1 \leq j \leq i} \{ \alpha(\varphi(\mathbf{x}_j) - \Phi_i) + (1 - \alpha)\psi(\mathbf{x}_j) \}. \quad (9)$$

Dualitási megfontolás mutatja, hogy a modellek pontossága a $\max_{\alpha \in [0,1]} h_i(\alpha)$ mennyiséggel becsülhető. Utóbbi mennyiség viszont becsülhető $h_i(\alpha_i)$ megfelelő konstans-szorosával, ahol $\alpha_i \in [0, 1]$ alkalmasan választott duális próbapont. Ezt a duális próbapontot az alábbi szabály határozza meg. Jelölje $I_i \subseteq [0, 1]$ azt az intervallumot, mely fölött $h_i(\alpha)$ nemnegatív. Legyen továbbá $\hat{I}_i \subset I_i$ olyan intervallum, amely $\hat{I}_i$ szimmetrikusan helyezkedik el I_i -ben, és $|\hat{I}_i| = (1 - \mu)|I_i|$ valamely $0 < \mu < 1$ konstanssal. A fenti objektumokkal a duális próbapont így adódik:

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_{i-1}, & \text{ha } i > 1 \text{ és } \alpha_{i-1} \in \hat{I}_i; \\ \text{az } I_i \text{ intervallum középpontja,} & \text{különben.} \end{cases} \quad (10)$$

A korlátos level módszer konvergenciájával kapcsolatban Lemaréchal et al az alábbi a tételt bizonyították: ϵ -megengedett ϵ -optimális megoldás megtalálásához elegendő

$$c \left(\frac{2\Delta D}{\epsilon} \right)^2 \ln \left(\frac{2\Delta D}{\epsilon} \right) \quad (11)$$

lépés, ahol a c konstans csak a módszer paramétereitől függ.

Van úgy, hogy a célfüggvényhez vagy a korlátozó függvényhez nem lehetséges vagy nem praktikus pontos érintőt szerkeszteni. (Ez SP feladatok esetén jellemzően előfordul.) Ilyenkor közelítő támaszfüggvényekkel dolgozunk. Adott $\hat{\mathbf{x}}$ próbapont és $\hat{\delta} > 0$ tűrés esetén a kútfő egy $\ell(\mathbf{x})$ lineáris függvényt ad, melyre

$$\ell(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \quad \text{és} \quad \ell(\hat{\mathbf{x}}) \geq \varphi(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\delta}. \quad (12)$$

A klasszikus bundle módszernek Kiwiel (1985) dolgozta ki egy közelítő változatát. Minden lépésben becsli, hogy az új próbapont mennyivel lehet jobb a legjobb ismert megoldásnál. Az új pontban előírandó pontosságot ez a becslés szabályozza; ha a kurrens tolerancia nagy a becsült javuláshoz képest, akkor a toleranciát felezi.

A level módszernek és a korlátos level módszernek közelítő változatát dolgoztam ki. Ezeket a Fábián (2000) cikkben publikáltam. (A korlátozás nélküli eljárás kidolgozása megelőzte a PhD fokozatom megszerzését.) A közelítő level módszerben a pontosságot a Δ_i rés alapján szabályozom. Egy újonnan talált $\mathbf{x}_{i+1}$ próbapontban $\delta_{i+1} = \gamma \Delta_i$ pontosságot írunk elő, ahol γ konstans, melyre $0 < \gamma < (1 - \lambda)^2$. A legjobb ismert felső korlát ennek megfelelően így számítható:

$$\bar{\phi}_i = \min_{1 \leq j \leq i} \{ \varphi(\mathbf{x}_j) + \delta_j \}. \quad (13)$$

Ez az eljárás a pontosságot hatékonyabban szabályozza, mint a korábbi közelítő vágósíkos és regularizált módszerek. Az (5) konvergencia-tételt kiterjesztettem

a közelítő módszerre. Később kiderült, hogy a (6) tapasztalati hatékonyság öröklődik a közelítő módszerre. Ezt a Fábián és Szőke (2007) és a Wolf et al (2014) cikkekben ismertetett számítási eredmények támasztják alá.

A korlátos level módszer közelítő változata a közelítő level módszer futamából áll. A (11) konvergencia-tételt kiterjesztettem a közelítő módszerre. Tudomásom szerint a közelítő korlátos level módszer az első bundle-típusú korlátos optimalizálási eljárás, amely inegzakt adatokkal dolgozik.

Kiwiel (2009) új elvet dolgozott ki a pontosság szabályozására a klasszikus bundle módszerhez, amelyet 'partially inexact' módszernek nevez. Ha a kurrens próbaponthoz tartozó függvényérték számítása közben kiderül, hogy ez a függvényérték nem lehet jobb, mint a minimumra eddig ismert legjobb felső becslésünk, akkor a kurrens pontban nem érdemes pontosan számolni. (Pusztán olyan vágósík elegendő, amely tanúsítja, hogy nem lehet javítani.) Adott $\hat{x}$ próbapont és $\hat{\phi}$ küszöbérték esetén a kútfőtől egy $\ell(x) \leq \varphi(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) lineáris függvényt várunk, amelyre

$$\ell(\hat{x}) > \hat{\phi} \quad \text{vagy} \quad \ell(\hat{x}) = \varphi(\hat{x}) \quad (14)$$

teljesül.

'On-demand accuracy' néven de Oliveira és Sagastizábal (2014) közös általánosítását dolgozta ki a Fábián (2000) cikkben leírt közelítő level módszernek és Kiwiel (2009) részben inegzakt bundle módszerének. A de Oliveira és Sagastizábal cikk elnyerte a 2014. évi Broyden díjat, melyet évente ítélnek oda az *Optimization Methods and Software* folyóiratban megjelent legjobb cikknek.

Az 'on-demand accuracy' megközelítést kiterjesztettem korlátos optimalizálási feladatokra. Továbbá ennek a megközelítésnek speciális formáját dolgoztam ki, amelyik különösen alkalmas kétlépcsős sztochasztikus programozási feladatok megoldására (alább vázoló az 1. Algoritmus alatt). Ezeket az eredményeket a Fábián, Wolf, Koberstein, és Suhl (2015) cikkben publikáltuk. — Cikkünkben a 'partly asymptotically exact' elnevezést használtuk. A terminológia egyszerűsítése végett disszertációmban a 'partially inexact' elnevezést használok, amelyet a jelen tézisekben a 'részben inegzakt' kifejezéssel fordítok. Utóbbi elnevezés összhangban van Kiwiel (2009) terminológiájával.

Először a korlátozás nélküli eljárást vázolólok. (A disszertációban Algorithm 8 és Specification 9 alatt szerepel.) Az i -edik iterációt lényegesnek nevezem, ha a megfelelő próbapontban előírt küszöbérték elérhető volt. Ilyenkor a megfelelő vágósíkot δ_i tűréssel szerkesztjük, azaz $l_i(x_i) \geq \varphi(x_i) - \delta_i$ teljesül. Az i -edik iteráció végén a lényeges indexek halmazát $\mathcal{J}_i \subset \{1, \dots, i\}$ jelöli.

1. Algoritmus. Részben inegzakt level módszer.

1.0 Paraméterek.

Megállási tűrés: $\epsilon > 0$.

Level paraméter: λ ($0 < \lambda < 1$).

Vágósíkok pontosságát szabályozó paraméter: γ , melyre $0 < \gamma < (1 - \lambda)^2$ kell teljesüljön.

1.1 Bundle inicializálás.

Legyen $i = 1$ (iteráció-számláló).

Legyen $\mathbf{x}_1 \in X$ egy alkalmas kezdőpont.

Legyen $l_1(\mathbf{x})$ a célfüggvényhez $\mathbf{x}_1$ -ben szerkesztett lineáris támaszfv, és legyen $\delta_1 = 0$.

Legyen $\mathcal{J}_1 = \{1\}$

– a kezdő indexet lényegesnek tekintjük, mert $l_1(\mathbf{x}_1) \geq \varphi(\mathbf{x}_1) - \delta_1$ teljesül.

1.2 Modell-függvény és optimalitási ellenőrzés.

Legyen $\varphi_i(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq j \leq i} l_j(\mathbf{x})$ (vágósíkos modell-függvény).

Legyenek $\underline{\phi}_i = \min_{\mathbf{x} \in X} \varphi_i(\mathbf{x})$, és $\bar{\phi}_i = \min_{j \in \mathcal{J}_i} \{l_j(\mathbf{x}_j) + \delta_j\}$.

A rés $\Delta_i = \bar{\phi}_i - \underline{\phi}_i$.

Ha $\Delta_i < \epsilon$ akkor közel-optimális megoldást találtunk, stop.

1.3 Új próbapont keresése.

Legyen $X_i = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \varphi_i(\mathbf{x}) \leq \underline{\phi}_i + \lambda \Delta_i \right\}$,

és ezzel $\mathbf{x}_{i+1} = \arg \min_{\mathbf{x} \in X_i} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2$.

1.4 Bundle frissítés.

Legyen $\delta_{i+1} = \gamma \Delta_i$.

A kútfőnek átadandó paraméterek:

- a jelen próbapont $\mathbf{x}_{i+1}$,
- a tűrés δ_{i+1} , és
- a küszöbérték $\bar{\phi}_i - \delta_{i+1}$.

Legyen $l_{i+1}(\mathbf{x})$ a kútfő által adott lineáris függvény.

Ha a küszöbérték elérhető volt, akkor legyen $\mathcal{J}_{i+1} = \mathcal{J}_i \cup \{i+1\}$, különben $\mathcal{J}_{i+1} = \mathcal{J}_i$.

Léptessük az i számlálót, és ismételjük az 1.2 lépéstől.

2. Specifikáció. Kútfő (oracle) az 1. Algoritmushoz.

Input paraméterek

$\hat{\mathbf{x}}$: jelen próbapont,

$\hat{\delta}$: tűrés, és

$\hat{\phi}$: küszöbérték.

A kútfő egy $\ell(\mathbf{x})$ lineáris függvényt ad, amely az alábbi feltételeket teljesíti

$$\ell(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \quad \|\nabla \ell\| \leq \Lambda \quad (\text{paraméterektől független korlát}),$$

és ezeken felül

vagy $\ell(\hat{\mathbf{x}}) > \hat{\phi}$, tanúsítva, hogy a küszöbérték nem elérhető;

vagy $\ell(\hat{\mathbf{x}}) \leq \hat{\phi}$, és ekkor $\ell(\hat{\mathbf{x}}) \geq \varphi(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\delta}$ kell teljesüljön.

Ennek a változatnak a különlegessége, hogy a küszöb ilyen formában írható elő:

$$\kappa\varphi_i(\mathbf{x}_{i+1}) + (1 - \kappa)\bar{\phi}_i, \quad (15)$$

ahol $\kappa = \frac{\gamma}{1-\lambda}$. (A λ és γ paraméterekre a fenti 1.0 lépésben előírt föltételekből rögtön látszik, hogy $0 < \kappa < 1$.) A disszertációban Proposition 11 alatt mondom ki és bizonyítom a fenti küszöbérték alkalmasságát. Alkalmasság itt azt jelenti, hogy a küszöbérték (15) választása mellett az (5) hatékonysági becslés kiterjeszthető a részben inegzakt level módszerre. Azaz a rés ϵ alá csökkentéséhez elegendő $c\left(\frac{\Delta D}{\epsilon}\right)^2$ lépés, ahol a c konstans csak a λ és γ paraméterektől függ.

A küszöbérték (15) formában való felírásának a kétlépcsős sztochasztikus programozási feladat megoldásánál lesz jelentősége. A Wolf et al (2014) cikkben ismertetett kísérleti eredmények azt mutatják, hogy a módszer öröklí a level módszer (6) tapasztalati hatékonyságát.

Most az 'on-demand accuracy' megközelítésnek a korlátos konvex programozási feladatokra való kiterjesztését vázolom. Jelölje $l_j(\mathbf{x})$ illetve $l'_j(\mathbf{x})$ a j -edik iteráció során a célfüggvényhez illetve a korlátozó függvényhez szerkesztett közelítő támasz-függvényeket. Itt is megkülönböztetünk lényeges indexeket, mint a korlátozás nélküli esetben. Jelölje $\mathcal{J}_i \subset \{1, \dots, i\}$ a lényeges indexek halmazát az i -edik iterációig. $j \in \mathcal{J}_i$ esetén $l_j(\mathbf{x}_j) + \delta_j \geq \varphi(\mathbf{x}_j)$ és $l'_j(\mathbf{x}_j) + \delta_j \geq \psi(\mathbf{x}_j)$ teljesül, az eljárás során definiált δ_j toleranciával. A duális modell-függvényt ezekkel így definiálom:

$$h_i(\alpha) = \min_{j \in \mathcal{J}_i} \{ \alpha(l_j(\mathbf{x}_j) - \Phi_i) + (1 - \alpha)l'_j(\mathbf{x}_j) + \delta_j \}. \quad (16)$$

Alább vázolom a korlátos módszert (a disszertációban Algorithm 13 és Specification 14 alatt ismertetem).

3. Algoritmus. *Részben inegzakt korlátos level módszer.*

3.0 Paraméterek.

Megállási tűrés: $\epsilon > 0$.

Level paraméter: λ ($0 < \lambda < 1$).

Duális próbapontok meghatározására szolgáló paraméter: μ ($0 < \mu < 1$).

Vágósíkok pontosságát szabályozó paraméter: γ ,

melyre $0 < \gamma < (1 - \lambda)^2$ kell teljesüljön.

3.1 Bundle inicializálás.

Legyen $i = 1$ (iteráció-számláló).

Legyen $\mathbf{x}_1 \in X$ egy alkalmas kezdőpont.

Legyen $l_1(\mathbf{x})$ illetve $l'_1(\mathbf{x})$ a célfüggvényhez illetve a korlátozó függvényhez $\mathbf{x}_1$ -ben szerkesztett lineáris támaszfüggvény, és legyen $\delta_1 = 0$.

Legyen $\mathcal{J}_1 = \{1\}$ – a kezdő indexet lényegesnek tekintjük, mert $l_1(\mathbf{x}_1) \geq \varphi(\mathbf{x}_1) - \delta_1$ és $l'_1(\mathbf{x}_1) \geq \psi(\mathbf{x}_1) - \delta_1$ teljesül.

3.2 Modellek és optimalitási ellenőrzés.

Legyenek $\varphi_i(\mathbf{x})$ illetve $\psi_i(\mathbf{x})$

a célfüggvény illetve a korlátozó függvény vágósíkos modelljei.

Legyen $\underline{\Phi}_i$ a (8) modell-feladat minimuma.

Legyen $h_i(\alpha)$ a duális modell-függvény (16) szerint.

Ha $\max_{\alpha \in [0,1]} h_i(\alpha) < \epsilon$, akkor közel-optimális megoldást találtunk, stop.

3.3 A duális próbapont beállítása.

Jelölje $I_i \subseteq [0, 1]$ azt az intervallumot, mely fölött $h_i(\alpha)$ nemnegatív.

Legyen $\hat{I}_i \subset I_i$ olyan intervallum,

amely szimmetrikusan helyezkedik el I_i -ben, és $|\hat{I}_i| = (1 - \mu)|I_i|$.

α_i beállítása a (10) szabály szerint történik.

3.4 Új primál próbapont keresése.

Legyen $\underline{\phi}_i = \alpha_i \underline{\Phi}_i$ és $\bar{\phi}_i = \alpha_i \underline{\Phi}_i + h_i(\alpha_i)$.

$X_i = \left\{ \mathbf{x} \in X \mid \alpha_i \varphi_i(\mathbf{x}) + (1 - \alpha_i) \psi_i(\mathbf{x}) \leq \underline{\phi}_i + \lambda h_i(\alpha_i) \right\}$ színhalmazzal

legyen $\mathbf{x}_{i+1} = \arg \min_{\mathbf{x} \in X_i} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2$.

3.5 Bundle frissítés.

Legyen $\delta_{i+1} = \gamma h_i(\alpha_i)$.

A kútfőnek átadandó paraméterek:

- a jelen próbapont $\mathbf{x}_{i+1}$ és
- duális próbapont α_i ,
- a tűrés δ_{i+1} , és
- a küszöbérték $\bar{\phi}_i - \delta_{i+1}$.

Legyenek $l_{i+1}(\mathbf{x})$ és $l'_{i+1}(\mathbf{x})$ a kútfő által adott lineáris függvények.

Ha a küszöbérték elérhető volt, akkor legyen $\mathcal{J}_{i+1} = \mathcal{J}_i \cup \{i+1\}$,
különben $\mathcal{J}_{i+1} = \mathcal{J}_i$.

Léptessük az i számlálót, és ismételjük az 3.2 lépéstől.

4. Specifikáció. Kútfő (oracle) a 3. Algoritmushoz.

Input paraméterek

$\hat{\mathbf{x}}$: jelen próbapont és

$\hat{\alpha}$: duális próbapont,

$\hat{\delta}$: tűrés, és

$\hat{\phi}$: küszöbérték.

A kútfő $\ell(\mathbf{x})$ és $\ell'(\mathbf{x})$ lineáris függvényeket ad,

amelyek az alábbi feltételeket teljesítik

$$\ell(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{x}), \ell'(\mathbf{x}) \leq \psi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in X), \quad \|\nabla \ell\|, \|\nabla \ell'\| \leq \Lambda, \quad \text{és}$$

$$\begin{aligned}
&\text{vagy} \quad \hat{\alpha}\ell(\hat{\mathbf{x}}) + (1 - \hat{\alpha})\ell'(\hat{\mathbf{x}}) > \hat{\phi}, \\
&\quad \text{tanúsítva, hogy a küszöbérték nem elérhető,} \\
&\text{vagy} \quad \hat{\alpha}\ell(\hat{\mathbf{x}}) + (1 - \hat{\alpha})\ell'(\hat{\mathbf{x}}) \leq \hat{\phi}, \text{ és ekkor} \\
&\quad \ell(\hat{\mathbf{x}}) \geq \varphi(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\delta} \text{ és } \ell'(\hat{\mathbf{x}}) \geq \psi(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\delta} \text{ kell teljesülnön.}
\end{aligned}$$

A fenti módszerre kiterjesztettem a (11) konvergencia-tételt. (A kiterjesztett tételt a disszertációban Theorem 15 alatt mondom ki és bizonyítom.)

A módszert kockázatkerülő (risk-averse) kétlépcsős sztochasztikus programozási feladatok megoldására használtuk. A Wolf et al (2014) cikkben ismertetett kísérleti eredmények azt mutatják, hogy a módszer lényegesen hatékonyabb az elméleti konvergencia-eredményénél.

3. Vágósíkos eljárások kockázatkerülő feladatokra

Ezekben a feladatokban a kockázatot mérjük, és a kockázati mértékre korlátokat írunk elő. (A továbbiakban felteszem, hogy a szereplő véletlen mennyiségek mérhetőek egy alkalmas mértéktérben, és a várható értékek léteznek.) Legyen R véletlen hozam. Rögzített $t \in \mathbb{R}$ cél-hozamhoz képest a várható hiány (Expected Shortfall) $ES_t(R) = E([t - R]_+)$ lesz. Ezen mérték matematikai vizsgálatát Klein Haneveld (1986) végezte el. Legyen most $Q = -R$ véletlen veszteség, és $(1 - \beta)$ adott konfidencia-szint, ahol $0 < \beta \leq 1$. A feltételes kockázatotott érték (Conditional Value-at-Risk), $CVaR_\beta(Q)$ azt mutatja, hogy az esetek legrosszabb $\beta \cdot 100\%$ -ára szorítkozva, mennyi a veszteség feltételes várható értéke. Ezen mérték matematikai vizsgálatát Rockafellar és Uryasev (2000, 2002) és Pflug (2000) végezték el. Rockafellar és Uryasev (2000) és Ogryczak és Ruszczyński (2002) megmutatták, hogy adott R véletlen hozam esetén a $t \mapsto ES_t(R)$ és a $\beta \mapsto -\beta CVaR_\beta(-R)$ függvények konvex konjugáltak.

Optimalizálási feladatokban a hozam valamely döntés függvénye, azaz $R = R(\mathbf{x})$. Klein Haneveld és Van der Vlerk (2006) illetve Küenzi-Bay és Mayer (2006) hatékony vágósíkos eljárásokat dolgoztak ki az ES illetve a CVaR mértékek optimalizálási feladatokban való kezelésére.

Az ES és CVaR mértékek között fennálló konvex konjugáltsági viszonyt diszkrét véges eloszlás esetén lineáris programozási dualitási viszonyra egyszerűsítve fogalmaztam meg a Fábián (2008) cikkben. Ez a felírás egy duális megoldó eljárásnak is alapjául szolgált, melyet a Fábián és Veszprémi (2008) cikkben ismertettünk. A CVaR mértéknek a Fábián (2008) cikkben megfogalmazott alakja később különösen hasznosnak bizonyult kétlépcsős kockázatkerülő feladatok megoldásában, erről a jelen tézisek 6. részében számolok be. Egyforma valószínűségű forgatókönyvek esetén ez a CVaR felírás a Küenzi-Bay és Mayer (2006) vágósíkos modelljének egy különös változatát eredményezi, amely sztochasztikus dominancia kezelésében bizonyult hatékonynak.

A sztochasztikus dominancia véletlen mennyiségek közötti reláció, közgazdászok az 1960-as évektől használják. A másodrendű sztochasztikus dominancia (Second-order Stochastic Dominance, SSD) racionális és kockázatkerülő befektetők általános preferenciáit írja le. Ezen reláció és az ES illetve CVaR mérték-

kek közötti kapcsolatot Whitmore és Findlay (1978) illetve Ogryczak és Ruszczyński (2002) tisztázta. SSD korlátokat sztochasztikus programozási feladatokban Dentcheva és Ruszczyński (2003, 2006) alkalmaztak először. Roman et al (2006) dominancia-mértéket definiáltak, és ezzel fogalmaztak meg maximalizálási feladatot. Döntéstámogató rendszerekben, különösen pénzügyi területen, azóta is kiterjedten alkalmaznak sztochasztikus dominanciára (főleg SSD) épülő modelleket, és a sztochasztikus dominancia továbbfejlesztett változatai máig a kutatás előterében vannak.

A gyakorlatban véges diszkrét eloszlások mellett szokták az adódó optimalizálási feladatokat megoldani. Az első megoldó eljárások nagyméretű determinisztikus optimalizálási feladattá alakították a SSD relációt tartalmazó sztochasztikus programozási feladatot. Ennek mérete a scenáriók számával arányos, így sok scenárió esetén jelentős erőfeszítést kíván.

A Brunel Egyetem CARISMA kutatócsoportjával hatékony eljárásokat dolgoztunk ki gyakorlati alkalmazásokban felmerülő feladatok megoldására. **Vágósíkos eljárást dolgoztam ki SSD korlátos feladatok megoldására, amely a Fábián (2008) cikkben kidolgozott CVaR-reprezentációt használja. Az eljárást a Fábián, Mitra, és Roman (2011a) cikkben közzöltük, és szerzőtársaimmal implementáltuk.** Drámai hatékonyság-növekedést eredményezett: órák helyett másodpercek alatt oldottuk meg a tesztfeladatokat, illetve addig kezelhetetlen problémák megoldhatóvá váltak. Rudolf és Ruszczyński (2008) cikkükben szintén vágósíkos eljárást dolgoztak ki SSD korlátok kezelésére. A tudományos közvélemény elfogadja, hogy a mi eredményünk független (kutatási jelentés formájában mi is 2008-ban publikáltuk).

A projekt során kidolgozott eljárásokat társszerzőim beépítették az OptiRisk Systems által fejlesztett pénzügyi elemző eszközökbe. – Az OptiRisk informatikai társaság, amely optimalizáló és kockázatkezelést támogató szoftverek fejlesztésére specializálódott, és a Brunel Egyetem kutatási eredményeit hasznosítja az üzleti (főleg pénzügyi) szférában; <http://www.optirisk-systems.com>.

A Fábián et al (2011a) cikkben leírt eljárásokat fejlesztették tovább Sun et al (2013) és Khemchandani et al (2016).

A Fábián, Mitra, Roman, és Zverovich (2011b) cikkben javított változatát dolgoztam ki a Roman et al (2006) által definiált dominancia-mértéknek. Out-of-sample vizsgálatokban kitűnt az új modell stabilitása. Az új dominancia-mérték egyszerűen leírható: adott R és R' véletlen hozamok mellett azt méri, hogy mekkora az a legnagyobb ρ pénzösszeg (kockázatmentes hozam), amelyre R dominálja az $(R' + \rho)$ együttes hozamot, azaz $R \succeq_{SSD} R' + \rho$ fennáll. Legyen R' rögzített (benchmark) hozam, és $R = R(x)$ a döntési változó függvénye. Tekintsük dominancia mértéket, mint a döntési változó függvényét:

$$\max \{ \rho \in \mathbb{R} \mid R(x) \succeq_{SSD} R' + \rho \}. \quad (17)$$

A Fábián et al (2011b) cikkben hatékony vágósíkos eljárást dolgoztam ki a fenti dominancia mérték maximalizálására. Az eljárást szerzőtársaimmal implementáltuk, és portfólió-optimalizálási feladatokon teszteltük. További vizsgálatok

eredményeiről számoltunk be a Fábián et al (2011c) könyv-fejezetben. A vizsgált időszak itt már tartalmazta a 2007-2008 éveket, így hozam-adataink szórása jóval nagyobb volt. Az új modell alapján kapott portfóliók lényegesen jobbaknak bizonyultak a Roman et al (2006) eredeti modellje alapján kapottaknál.

Szerzőtársaim az új modellre épülő indexálási eljárást dolgoztak ki, amelyet sikerrel alkalmaztak. (Indexálás a pénzügyi zsargonban olyan részvény-portfólió összeállítását jelenti, melynek hozama a tőzsde-indexét felülmúlja.) A Roman et al (2013) és Valle et al (2017) cikkekben ismertetett esettanulmányok az új modell stabilitását mutatják.

4. Dekompozíciós eljárások kétlépcsős SP feladatokra

Ezekben a sztochasztikus programozási feladatokban a döntéseket két lépcsőben hozzák meg, és a két lépcső között valamely véletlen esemény zajlik le. Az első lépcső döntésének meghozatalakor a véletlen esemény kimenetele még nem ismert. Pld. az első lépcső döntése vonatkozhat valamely létrehozandó rendszer bizonyos paramétereire, a második lépcső döntése pedig a rendszer különböző (véletlenszerűen változó) körülmények között való üzemeltetésére. A cél költség-minimalizálás, melyben a rendszer létrehozásához szükséges befektetést és a hosszútávú üzemeltetés költségét szokás figyelembe venni.

Az első lépcső döntési változóit jelölje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a megengedett tartomány $X \subset \mathbb{R}^n$ legyen nemüres, korlátos konvex poliéder. Felteszem, hogy a véletlen eseménynek véges sok kimenetele lehet; a forgatókönyvek (szcenáriók) számát jelölje S , ezek közül az s -edik bekövetkezésének az esélyét jelölje p_s .

Tegyük fel, hogy az első lépcső $\mathbf{x}$ döntését meghoztuk, és az s -edik forgatókönyv valósult meg. A második lépcső $\mathbf{y}$ döntését egy alkalmas $\mathcal{R}_s(\mathbf{x})$ matematikai programozási feladat optimális megoldása alapján hozzuk meg. Most felteszem, hogy $\mathcal{R}_s(\mathbf{x})$ lineáris programozási feladat, amelyben $\mathbf{x}$ a jobboldali vektorra van hatással. Felteszem továbbá, hogy ennek a második lépcső feladatnak bármely $\mathbf{x} \in X$ és $s = 1, \dots, S$ esetén van optimális megoldása. Jelölje $q_s(\mathbf{x})$ a megfelelő optimumot. A $q_s : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($s = 1, \dots, S$) függvényeket pótló függvényeknek (recourse function) fogom nevezni.

Az első lépcső feladatának klasszikus alakja

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \sum_{s=1}^S p_s q_s(\mathbf{x}) \quad \text{midőn } \mathbf{x} \in X, \quad (18)$$

ahol $\mathbf{c}$ adott költség-vektor. A célfüggvényben szereplő várható érték függvényre bevezetjük a $q(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^S p_s q_s(\mathbf{x})$ jelölést. Ezt a $q : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a várható pótlás függvényének (expected recourse function) fogom nevezni.

A kétlépcsős sztochasztikus programozási feladat felírható egyetlen lineáris programozási feladatként. Ez az ekvivalens LP feladat jellegzetes blokk-szerkezetű, az egyes forgatókönyvekhez tartozó részfeladatokat az első lépcső változói fogják össze.

Az első megoldó eljárást Dantzig és Madansky (1961) dolgozták ki, a Dantzig-Wolfe (1960) dekompozíciót alkalmazva az ekvivalens LP feladat duálisára. Ez a megközelítés felfogható olyan vágósíkos eljárásnak, ahol mindegyik $q_s(\mathbf{x})$ pótló függvénynek külön $\tilde{q}_s(\mathbf{x})$ modelljét építjük föl. Ezek súlyozott összege, a $\tilde{q}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^S p_s \tilde{q}_s(\mathbf{x})$ függvény, a várható pótlás függvényének vágósíkos modelljét adja. Ezt aggregálatlan modellfüggvénynek nevezzük.

Van Slyke és Wets (1969) 'L-shaped' módszere közvetlenül a várható pótlás függvényének építi fel vágósíkos modelljét. Ezt az $\tilde{f}(\mathbf{x})$ függvényt aggregált modellfüggvénynek nevezzük. Ez a megközelítés felfogható úgy, mint a Benders (1962) dekompozíciónak az ekvivalens LP feladathoz történő adaptálása. (Az 'L-shaped' módszer specialitása az aggregálásban rejlik.)

Az aggregálatlan és az aggregált modellfüggvény között a $\tilde{q}(\mathbf{x}) \geq \tilde{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in X$) reláció áll fenn, vagyis az aggregálatlan modell jobban közelíti a várható pótlás függvényét. Ennek ára azonban, hogy az aggregálatlan master feladat nagyobb, mint az aggregálatlan.

A vágósíkos eljárások során fölmerülő numerikus nehézségek orvoslására Ruszczyński (1986) bundle típusú regularizációt adaptált az aggregálatlan modellfüggvényhez, 'regularized decomposition' néven.

Sztochasztikus programozási keretben egy-egy vágás megkonstruálása jelentős erőfeszítést kíván, mivel meg kell oldani a második lépcső megfelelő feladatait. Ezen erőfeszítés csökkentésére Zakeri, Philpott, és Ryan (2000) közelítő eljárást dolgoztak ki: előre definiálnak egy $T_i \searrow 0$ számsorozatot, és az i -dik iterációban a második lépcsős feladatokat T_i megállási toleranciával oldják meg.

A Fábán és Szőke (2007) cikkben az aggregált modellhez dolgoztam ki dekompozíciós eljárást, 'level dekompozíció' néven. Ez egyidejűleg biztosítja a numerikus stabilitást, és egyensúlyba hozza az első és a második lépcső számítási erőfeszítéseit. A level dekompozíciós sémába az eloszlás szukcesszív közelítését is integráltam; a megkövetelt pontosságot a Fábán (2000) cikkben bevezetett közelítő level módszer szabályozza. Ez hatékonyabb megközelítés a tradicionális eloszlás-közelítő eljárásoknál, amelyek a pontosságot heurisztikusan szabályozzák. Társszerzőmmel (akkori doktorandusz hallgatómmal) egy használható megoldó programcsomagot fejlesztettünk ki kétlépcsős SP feladatokra. Ebben a keretben implementáltuk az új eljárásokat. Ismert tesztfeladatokat oldottunk meg különböző scenárió-számmal, különböző megállási toleranciákat előírva. Az eredmények azt mutatták, hogy a közelítő level módszer örökli a level módszer tapasztalati hatékonyságát.

A level dekompozíció hatással volt de Oliveira et al (2011) és Song és Luedtke (2015) projektjeire, melyek keretében hasonló elvű közelítő eljárásokat dolgoztak ki.

A Zverovich, Fábán, Ellison, és Mitra (2012) cikk célja a kétlépcsős sztochasztikus programozási feladat különböző megoldó eljárásainak összehasonlítása és újra-értékelése volt, korszerű szoftver eszközök és számítógép-architektúrák tükrében. Szerzőtársaim a Brunel Egyetem CARISMA munkacsoportjának tagjai voltak. (Sztochasztikus programozás algoritmikus kérdései és alkalmazásai területén a CARISMA a vezető csoportok közé tartozott.)

A vizsgált eljárások: direkt eljárás (az ekvivalens lineáris programozási feladat megoldása általános célú LP megoldóval) egyrészt, és dekompozíció másrészt. A dekompozíciónak mind az aggregált, mind az aggregálatlan modelljét vizsgáltuk. A regularizáció hatását is vizsgáltuk dekompozíciós eljárásokra: aggregálatlan modell esetén Ruszczyński (1986) regularizált dekompozíciós eljárását, aggregált modell esetén a Fábián és Szőke (2007) cikkben leírt level dekompozíció egyszerűsített változatát implementáltuk.

Szisztematikus vizsgálatokat végeztünk egy bő tesztalmazon. Minden feladatot többször oldottunk meg, bővülő scenárió-halmazokkal. Vizsgálataink azt mutatták, hogy a dekompozíciós eljárások jobban skálázódnak a direkt eljárásnál. Kevés scenárió esetén még érdemes az utóbbit választani, de bizonyos scenárió-szám fölött már csak a dekompozíciós eljárások versenyképesek.

Ezenkívül azt találtuk, hogy a dekompozíció aggregált modellje jobban skálázódik az aggregálatlannál. Eredményeink összhangban vannak a Birge és Louveaux (1997) könyv 5.3 fejezetében leírt egyszerű szabállyal, miszerint aggregálatlan modellt érdemes használni, ha a scenáriók száma nem haladja meg lényegesen az első lépcső feladat korlátozó feltételeinek a számát. Azonban azt találtuk, hogy a master feladat megoldásához használt szolver hatékonyságától függ az a küszöb, ahonnan kezdve az aggregált modellt érdemes használni.

Tapasztalataink szerint a regularizáció javít a dekompozíciós eljárások hatékonyságán. A Fábián és Szőke (2007) cikkben bevezetett level dekompozíció nagyméretű feladatok esetén hatékonyabbnak bizonyult, mint Ruszczyński (1986) regularizált dekompozíciója.

A projekt során a Brunel egyetemi munkatársaimmal közösen kifejlesztett megoldókat integrálták az OptiRisk társaság FortSP sztochasztikus programozási rendszerébe. Az OptiRisk informatikai és tanácsadó társaság, amely kockázatkezelési feladatokra specializálódott, és a Brunel Egyetemen kutatási eredményeire támaszkodik. A FortSP rendszert több valós alkalmazásban felhasználták. Hozzájárulásomat a Zverovich et al (2014) kézikönyvben nyugtázzák.

A Brunel Egyetemen munkatársam volt Victor Zverovich, akinek Zverovich (2012) PhD értekezése jelentős részben a közös projektünkön alapszik. Projektünk útmutatásul szolgált J. Gondzio és kutatócsoportja számára az Edinburgh Egyetemen, a Gondzio et al (2016) projektjük során. Eredményeink támpontot jelentettek Takano et al (2015) és Sen és Liu (2016) projektjei számára.

A Fábián, Wolf, Koberstein, és Suhl (2015) cikkben az 1. Algoritmust adaptáltam az aggregált master feladathoz. Az eljárás az aggregált és az aggregálatlan modellek előnyeit egyesíti. A Wolf, Fábián, Koberstein, és Suhl (2014) cikkben kísérleti eredményeket közlünk. A (15) küszöbérték alkalmazásával a kútfő (oracle) szabálya az alábbi, szemléletes alakot veszi fel: ha

$$\tilde{q}(\mathbf{x}_{i+1}) - \tilde{f}(\mathbf{x}_{i+1}) > \frac{1 - \kappa}{\kappa} \left[\bar{\phi}_i - \left(\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{i+1} + \tilde{q}(\mathbf{x}_{i+1}) \right) \right] \quad (19)$$

teljesül, akkor az $\mathbf{x}_{i+1}$ ponthoz a közelítő lineáris támaszfüggvényt a kútfőben tárolt információ alapján szerkesztjük meg. Ellenkező esetben a szokásos módon megoldjuk a második lépcső feladatait.

A (19) egyenlőtlenség bal oldalán az aggregálatlan és az aggregált modellfüggvény új próbapontban felvett értékének a különbsége áll. A jobb oldalon a szögletes zárójelben levő kifejezés pedig becslés arra, hogy az új próbapont mennyivel lehet jobb az eddig ismert legjobb megoldásnál. (A becslés az aggregálatlan modellen alapszik.) Ebben az értelmezésben a kútfő szabálya így fogalmazható meg: ha az új próbapontban az aggregálatlan modellfüggvény szignifikánsan jobban közelít, mint az aggregált modellfüggvény, akkor az utóbbit az előbbiből vett információ alapján élesítjük. Ennek az élesztésnek a műveletigénye elhanyagolható a második lépcső feladatainak a megoldásához képest.

Szerzőtársaim, Leena Suhl, Achim Koberstein és Christian Wolf a Paderborni Egyetem DS&OR (Decision Support & Operations Research) Laboratóriumának munkatársai voltak. (Ipari optimalizálási területen ez az egyik vezető laboratórium Németországban.) A fenti eljárásokat implementáltuk a DS&OR Lab korábban kifejlesztett sztochasztikus programozási megoldó rendszerében.

A megoldó rendszerrel széleskörű vizsgálatokat végeztünk, több mint száz különböző feladaton (az összes ismert tesztfeladatot beleértve). Minden feladatot többször oldottunk meg, bővülő scénárió-halmazokkal és különböző eljárásokkal. Az új módszer az esetek harmadában leggyorsabbnak bizonyult. Az esetek 88 százalékában az új módszer futási ideje a legrövidebb futási időnek kétszerese alatt maradt. Összes futási időt tekintve az új módszer bizonyult leggyorsabbnak; ötöd annyi idő alatt oldotta meg a feladatokat, mint a benchmark-nak tekintett hagyományos aggregálatlan eljárás. Tapasztalataink azt mutatják, hogy a részben inezgakt level módszer örökli a level módszer gyakorlati hatékonyságát.

A közös projekt során kifejlesztett megoldókat a paderborni kollégák a gyakorlatban is alkalmazták, egy gázközmű tervezési feladatának hatékony megoldására.

Egyik paderborni munkatársam Christian Wolf volt. Közös projektünkről írta PhD értekezését [Wolf (2013)], egyik témavezetője én voltam.

5. Kétlépcsős SP feladatok megengedettségi kérdései

Ha a második lépcsőben megengedettségi problémák léphetnek fel, akkor a klasszikus dekompozíciós eljárásokban a master feladatba fizibilitási vágásokat vesznek fel. Ezt átveszi Ruszczyński (1986) regularizált dekompozíciója is, és a fizibilitási vágásokra nem terjed ki a regularizáció.

A Fábán és Szőke (2007) cikkben olyan eljárást javaslok a második lépcső megengedettségi problémáinak kezelésére, amely a regularizációs keretbe szervesen illeszkedik. Ez a regularizáció a megengedettségi kérdésekre is kiterjed, a klasszikus megközelítéstől eltérően. Az alkalmazott primál-duál eljárás egyensúlyt tart a fizibilitás illetve az optimalitás irányába tett számítási erőfeszítések között. A master feladatban egy új korlátozó függvényt vezetek be, amely a második lépcső in-

fízibilitásának várható értékét méri. Az új korlátozó függvényt hasonló módon lehet kiértékelni, mint a várható pótlás függvényét (expected recourse function). Az adódó korlátos konvex programozási feladat megoldására korlátos level módszernek a Fábián (2000) cikkben bevezetett közelítő változatát adaptáltam.

Az infízibilitás-korlátos megközelítéshez a célfüggvényt (expected recourse function) ki kell terjesztenünk a teljes térre. Ezt második lépcső feladataiban tétlen (slack) változók bevezetésével oldjuk meg, amelyeket a célfüggvényben büntetünk. A második lépcsős infízibilitás büntetésének ötlete felmerül Prékopa (1995) könyvének 12.10. fejezetében, valamint Ruszczyński és Świątanowski (1997) cikkében. Ők nem foglalkoztak a büntetés szükséges nagyságával, én ezt is vizsgáltam. (Megközelítésemben a büntetés csak a célfüggvény kiterjesztését kell biztosítsa, az optimalitást a korlátos optimalizálási eljárás biztosítja.) A kiterjesztéshez szükséges büntetés könnyen számítható, ha a második lépcső feladatai hálózati folyam feladatok (network recourse). Ezért erre a megközelítésre főleg logisztikai és távközlési alkalmazásokkal foglalkozó kollégák: Rahmaniani, Crainic, Gendreau, és Rei (2018).

Az eljárást Szőke Zoltán akkori doktorandusz hallgatómmal implementáltuk és teszteltük. Eredményeink az eljárás használhatóságát bizonyították.

A hatékony implementációt segíti az az észrevétel, hogy az új korlátozó függvénynek és a célfüggvénynek adott pontban történő kiértékeléséhez ugyanazokat a második lépcsős feladatokat kell megoldani. Az értekezésben ezt Observation 24 alatt mondom ki és bizonyítom. A bizonyítás érdekességének tartom, hogy egy lineáris programozási primál/duál feladatpár bázisai közötti természetes megfelelésre épül.

6. Kockázati korlátok kétlépcsős SP feladatokban

A Fábián, Wolf, Koberstein, és Suhl (2015) cikkben az 'on-demand accuracy' elvet kiterjesztettem kétlépcsős kockázatkerülő sztochasztikus programozási feladatokra. Két ismert kétlépcsős kockázatkerülő modellt vizsgáltam, az Ahmed (2006) által bevezetett CVaR-korlátos, és a Dentcheva és Martinez (2012) által tárgyalt, konvex rendezésen (Increasing Convex order, IC) alapuló modellt.

A CVaR-korlátos modellhez a jelen tézisek 3. részében említett CVaR reprezentációt alkalmaztam. Hatékonysági megfontolások mellett ennek a felírásnak további előnye, hogy a master feladat megengedett tartománya kompakt. (Ez a level típusú eljárások konvergenciájának bizonyításához szükséges.)

Az IC-korlátos modellt általánosítottam, az általánosítás a jelen tézisek 3. részében említett (17) dominancia-mértéken alapszik. Az általánosított modell olyan sztochasztikus programozási feladatra vezet, amelynek dekomponálásakor a korlátos konvex programozási eljárások ereje kihasználható.

Közelítő sémát dolgoztam ki mindkét említett modellből eredő feladatra, amely lehetővé teszi az 'on-demand accuracy' megközelítést. A 3. Algoritmust

adaptáltam az adódó feladatokhoz. Az adaptált algoritmust disszertációmban Algorithm 25 alatt ismertetem, 'a partially exact version of the constrained level method' néven. Magyarul 'részben egzakt' eljárásnéven fogok rá hivatkozni.

Szerzőtársaim, Leena Suhl, Achim Koberstein és Christian Wolf a Paderborni Egyetem DS&OR (Decision Support & Operations Research) Laboratóriumának munkatársai voltak. A CVaR-korlátos modellhez többféle megoldó eljárást implementáltunk, a jelen tézisek 4. részében vázolt programcsomag bővítéseként. Ezeket az eljárásokat összehasonlítottuk (kb. ötven ismert tesztfeladatot oldottunk meg).

A dekompozíciós eljárások mindegyike hatékonyabbnak bizonyult, mint az ekvivalens lineáris programozási feladat közvetlen megoldása. A regularizáció hatása figyelemre méltó volt; az egyszerű vágósíkos eljárásnál átlagosan ötször gyorsabbnak bizonyultak a korlátos level módszerre épülők.

A részben egzakt regularizált eljárás teljes futási ideje csak kicsivel volt rövidebb, mint az egzakt regularizált eljárás teljes futási ideje. A lényeges iterációk számát tekintve azonban a különbség már szignifikáns. (Lényeges iterációk során megoldjuk a második lépcső feladatait, míg a nem lényeges iteráció során a kütfőben tárolt információt használjuk.) Ennek alapján arra számíthatunk, hogy nehezebb második lépcsős feladatok esetén a részben egzakt eljárás előnye a futási időket tekintve is szignifikáns lesz.

Ezt a projektet a jelen tézisek 4. részében említett gázközmű tervezési projekt folytatásaként indítottuk. A cél annak kockázatnak a kezelése volt, amelyet az enyhe telek esetén alacsony gázkereslet jelent. (Az előre lekötött erőforrások költsége ilyenkor is jelentkezik.) Az eredeti problémának kockázatkerülő kiterjesztését fogalmaztuk meg, és megoldottuk az újonnan kifejlesztett megoldó eljárásokkal. A gázközmű így össze tudta hasonlítani a saját hatáskörben megvalósított kockázatsökkentés költségét a különben szükséges biztosítás költségével.

7. Valószínűséggel megfogalmazott feladatok

A Fábíán et al (2018) cikkben szukcesszív közelítő eljárást dolgoztam ki valószínűség-maximalizálási feladatokra, ahol a véletlen paraméterek eloszlása logkonkáv. Az eljárás a valószínűségi függvény epigráfjának belső közelítésén alapszik, előrehaladtával újabb próbapontokat veszünk fel. A valószínűségi függvény konvex kell legyen. — Eredetileg $\phi(\mathbf{z}) = -\log F(\mathbf{z})$ alakú függvényekkel dolgoztunk, ahol $F(\mathbf{z})$ nemdegenerált normális eloszlásfüggvény.

A projektet Prékopa (1990) belső közelítő sémája motiválta, és az eljárás analóg Dentcheva, Prékopa, és Ruszczyński (2000) kúpgeneráló eljárásával. A különbség az, hogy a valószínűségi függvénynek nem egy szinthalmazát közelítem, hanem az epigráfját. Új próbapontok meghatározása így könnyebb; korlátozás nélküli konvex minimalizálással történik, szemben a klasszikus sémával, ahol a valószínűségi függvény szinthalmazára felett kell optimalizálni. (Duális nézőpontból az epigráfus megközelítés egyszerű vágósíkos eljárás, a valószínűségi függvény konjugáltjára alkalmazva.) Az új sémában a próbapontok gradiens

módszerrel meghatározhatók. Az eljárás könnyen implementálható, és nem érzékeny a valószínűségi függvény gradienseinek számítási hibáira. A gradiensek a klasszikus szimulációs módszerekkel becsülhetők.

Szerzőtársaim közreműködésével implementáltuk az eljárást, és tíz kisebb feladaton teszteltük. Méréseink szerint majdnem a teljes futási időt a valószínűségi függvény gradienseinek számítása töltötte ki. Természetesen adódott egy heurisztikus javítás: a különböző irányú erőfeszítések egyensúlyba hozása végett a próbapont-meghatározó részfeladatokat csak közelítőleg kell megoldani. Minden próbapont-meghatározást egyetlen iránymenti keresésre egyszerűsítettünk. Meglepő tapasztalatunk az volt, hogy a valószínűség előírt pontosságú maximalizálásához szükséges próbapontok száma soha nem növekedett jelentősen.

A jelenség okát a gradiens módszer figyelemre méltó hatékonyságában találtuk meg. Speciális célfüggvény esetén jól ismert a gradiens módszer hatékonysága; a disszertációban Theorem 31 alatt idézek egy klasszikus eredményt, amely globálisan jól kondicionált célfüggvényre vonatkozik. (A függvény ezen tulajdonsága alatt most azt értem, hogy Hesse mátrixainak sajátértékei pozitív és véges korlátok közé esnek, amelyek függetlenek a kiértékelés $\mathbf{z}$ helyétől.) Ennek tételnek Luenberger és Ye (2008) 8.6. fejezetében közölt bizonyítása valójában csak egy bizonyos környezetben kívánja meg a célfüggvény jól kondicionált voltát.

A disszertációban egy kétdimenziós valószínűségi függvény kondicionáltságát illusztrálok (Example 32). Ez a példa alátámasztja azt a sejtésemet, hogy nemdegenerált normális eloszlás esetén a $\phi(\mathbf{z}) = -\log F(\mathbf{z})$ függvény jól kondicionált a tér azon részén, ahova a valószínűség-maximalizálási feladat optimális megoldása jellemzően tartozik. (Eddigi kísérleteink alátámasztják ezt a sejtést.) A feladat korlátos megfogalmazása, amelyet a 10. részben ismertetek, lehetővé teszi az esetleg mégis rosszul kondicionált célfüggvény regularizálását.

8. Véletlenített eljárás bonyolult célfüggvényhez

A Fábrián, Csizmás, Drenyovszki, Vajnai, Kovács, és Szántai (2019) cikkben szimulációs eljárást dolgoztam ki nehezen számítható, de jól kondicionált célfüggvény poliéder fölötti minimalizálására. Az eljárás hatékonyságára elméleti becslést adtam.

Az eljárás a 7. részben említett oszlopgeneráló eljárás véletlenített változata. A feladatot az alábbi absztrakt formában írom fel:

$$\min \phi(T\mathbf{x}) \quad \text{midőn} \quad A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad (20)$$

ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ a döntési változók vektora, és az adatok $T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $A \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$. Felteszem, hogy a megengedett tartomány nem üres és korlátos. A célfüggvényről pedig az alábbiakat teszem fel.

5. Feltevés. A $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konvex és kétszer folytonosan deriválható. A $\nabla^2 \phi(\mathbf{z})$ Hesse mátrix sajátértékei ismert, pozitív és véges korlátok közé esnek, amelyek függetlenek a kiértékelés $\mathbf{z}$ helyétől.

6. Feltevés. Adott $\mathbf{z}$ esetén a $\phi(\mathbf{z})$ érték nagy pontossággal számítható, és a $\nabla\phi(\mathbf{z})$ gradiens komponensei tetszőleges tűréssel számíthatók. (Kisebb tűrés nagyobb erőfeszítést kíván.) Továbbá mérsékelt erőfeszítéssel torzítatlan becslés adható a gradiensre, méghozzá úgy, hogy a hiba szórása előre adott tűrés alatt marad.

Új $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ változók bevezetésével a (20) feladat így írható:

$$\min \phi(\mathbf{z}) \quad \text{midőn} \quad A\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} - T\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (21)$$

A korlátokhoz rendre a $-\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$, $-\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ és $-\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ szorzókat bevezetve az alábbi Lagrange duált kapjuk:

$$\max \{\mathbf{y}^T \mathbf{b} - \phi^*(\mathbf{u})\} \quad \text{midőn} \quad \mathbf{y} \leq \mathbf{0}, \quad T^T \mathbf{u} = A^T \mathbf{y}, \quad (22)$$

ahol a $\phi^*(\mathbf{u})$ függvény a $\phi(\mathbf{z})$ konvex konjugáltja.

Adott $\mathbf{z}_i$ ($i = 0, 1, \dots, k$) pontokban a primál célfüggvényt kiértékelve legyen $\phi_i = \phi(\mathbf{z}_i)$. Ezek alapján a $\phi(\mathbf{z})$ függvénynek egy természetes felső közelítését szerkeszthetjük meg; erre a közelítő függvényre a $\phi_k(\mathbf{z})$ jelölést fogom használni.

Jelölje $\phi_k^*(\mathbf{u})$ a közelítő $\phi_k(\mathbf{z})$ függvény konvex konjugáltját. $\phi_k^*(\mathbf{u})$ vágósíkos közelítése a $\phi^*(\mathbf{u})$ függvénynek.

A (21) feladatban a $\phi(\mathbf{z})$ függvényt a közelítő $\phi_k(\mathbf{z})$ függvénnyel helyettesítve, az eredeti feladat modelljét kapjuk. Felteszem, hogy a modell-feladat megoldható — ez a $\mathbf{z}_i$ ($i = 0, 1, \dots, k$) próbapontok megfelelő választásával biztosítható. Hasonlóan, a (22) duál feladatban a $\phi^*(\mathbf{u})$ függvényt a közelítő $\phi_k^*(\mathbf{u})$ függvénnyel helyettesítve, a duális feladat modelljét kapjuk.

A modell-feladatok lineáris programozási feladatok. A primál modell-feladat a szokásos LP formában így néz ki:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^k \phi_i \lambda_i \\ \text{midőn} \quad & \lambda_i \geq 0 \quad (i = 0, \dots, k), \\ & \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \\ & \sum_{i=0}^k \lambda_i \mathbf{z}_i - T\mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (23)$$

A duál modell-feladat pedig így:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \vartheta + \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
\text{midőn} \quad & \mathbf{y} \leq \mathbf{0}, \\
& \vartheta + \mathbf{z}_i^T \mathbf{u} \leq \phi_i \quad (i = 0, \dots, k), \\
& -T^T \mathbf{u} + A^T \mathbf{y} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{24}$$

A (23) és (24) feladatok LP primál-duál párt alkotnak.

Jelölje $(\bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_k, \bar{\mathbf{x}})$ illetve $(\bar{\vartheta}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{y}})$ a (23) illetve a (24) feladat egy-egy optimális megoldását. Legyen továbbá

$$\bar{\mathbf{z}} = \sum_{i=0}^k \bar{\lambda}_i \mathbf{z}_i. \tag{25}$$

Célunk az eredeti (21) - (22) feladatpár szukcesszív közelítése a (23) - (24) modell-feladatpárral. A közelítés minőségét az optimumok különbsége méri.

A klasszikus oszlopgeneráló sémában olyan új $\mathbf{z}_{k+1}$ próbapontot keresünk, amelyet a (23) primál modell-feladathoz hozzávéve, a minimum jelentősen csökken. Lineáris programozási környezetben egy oszlopvektor javító potenciáljának szokásos becslése a redukált ár. A (23) feladat optimális primál és duál megoldását tekintve ez azt jelenti, hogy az

$$f(\mathbf{z}) = \phi(\mathbf{z}) - \bar{\vartheta} - \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{z} \tag{26}$$

függvény (korlátozás nélküli) minimalizálásával megfelelő javító vektort kapunk.

A fenti $f(\mathbf{z})$ függvény örökli a $\phi(\mathbf{z})$ függvény korábban felsorolt jó tulajdonságait, amint alább megfogalmazom.

Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény konvex és kétszer folytonosan deriválható. Ismeretek olyan α, ω ($0 < \alpha \leq \omega$) számok, hogy bármely $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ esetén a $\nabla^2 f(\mathbf{z})$ Hesse mátrix sajátértékei α és ω közé esnek.

Bármely $\mathbf{z}^\circ \in \mathbb{R}^n$ próbapont esetén az $f(\mathbf{z}^\circ)$ érték nagy pontossággal számítható, és a $\mathbf{g}^\circ = \nabla f(\mathbf{z}^\circ)$ gradiens komponensei tetszőleges tűréssel számíthatók. Továbbá bármely adott $\sigma > 0$ mellett mérsékelt erőfeszítéssel előállíthatók egy olyan véletlen $\mathbf{G}^\circ$ vektor realizációi, amelyre

$$\mathbb{E}(\mathbf{G}^\circ) = \mathbf{g}^\circ \quad \text{és} \quad \mathbb{E}(\|\mathbf{G}^\circ - \mathbf{g}^\circ\|^2) \leq \sigma^2 \|\mathbf{g}^\circ\|^2. \tag{27}$$

Az $f(\mathbf{z})$ függvény korlátozás nélküli minimalizálására szimulációs eljárást javasoltam, amely a gradiens módszer közvetlen általánosítása: gradiens helyett becsült gradiensekkel dolgozunk. Ennek a véletlenített gradiens eljárásnak a hatékonyságát elméletileg is bizonyítottam, a gradiens módszerre vonatkozó klasszikus eredményt terjesztettem ki. Alább idézem a kiterjesztett tételt (a disszertációban Theorem 35 alatt mondom ki és bizonyítom).

7. Tétel. *Célunk a fenti tulajdonságokkal rendelkező $f(\mathbf{z})$ függvény minimalizálása a teljes $\mathbb{R}^n$ tér felett. A fent említett véletlenített gradiens eljárást alkalmazzuk: jelölje $\mathbf{z}^\circ$ a kurrens próbapontot, és $\mathbf{G}^\circ$ a hozzá tartozó gradiens becslését. A következő próbapontot a $\mathbf{z}^\circ$ pontból induló $-\mathbf{G}^\circ$ irány menti keresés adja. Feltesszük, hogy az egyes gradiens becsléseit egymástól függetlenül generáljuk.*

A $\mathbf{z}^0$ próbapontból j lépést téve, jelölje $\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^j$ az egymás után kapott próbapontokat. Ezekre

$$E[f(\mathbf{z}^j)] - \mathcal{F} \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\omega(\sigma^2 + 1)}\right)^j (f(\mathbf{z}^0) - \mathcal{F}) \quad (28)$$

teljesül, ahol $\mathcal{F} = \min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z})$.

Az oszlopgeneráló sémára visszatérve, a kurrens modell-feladatot megoldva, a $\mathbf{z}$ vektorhoz tartozó redukált árat jelölje

$$\bar{\rho}(\mathbf{z}) := \bar{\vartheta} + \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{z} - \phi(\mathbf{z}), \quad (29)$$

és a maximális redukált árat jelölje

$$\bar{\mathcal{R}} := \max_{\mathbf{z}} \bar{\rho}(\mathbf{z}). \quad (30)$$

A kurrens $\bar{\mathbf{z}}$ pontból indulva véletlenített gradiens módszerrel keresünk javító oszlopot. A 7. Tétel alábbi következménye ennek az eljárásnak a hatékonyságát mutatja (a disszertációban Corollary 37 alatt bizonyítom).

8. Következmény. *Legyen β ($0 < \beta \ll 1$) valamely előírt tolerancia és p ($0 < p \ll 1$) előírt valószínűség. A véletlenített gradiens módszerrel $O(-\log(\beta p))$ lépést téve, olyan $\hat{\mathbf{z}}$ vektort kapunk, melyre*

$$P\left(\bar{\rho}(\hat{\mathbf{z}}) \geq (1 - \beta)\bar{\mathcal{R}}\right) \geq 1 - p.$$

Jelen keretben az $\bar{\mathcal{R}}$ mennyiség azt is méri, hogy az oszlopgeneráló eljárás folyamán felépített modelljeink mennyire közelítik az eredeti objektumokat. Pontosabban fogalmazva, $\bar{\mathcal{R}}$ felső korlát a (23) modell-feladat optimumának és a (21) konvex feladat optimumának a különbségére. Így a 8. Következmény lehetőséget ad arra, hogy konfidencia-intervallumba foglaljuk az eredeti feladat optimumát.

Az itt vázolt véletlenített oszlopgeneráló eljárás erős hasonlóságot mutat a sztochasztikus gradiens módszerekhez. A fő különbség az, hogy a jelen eljárás a célfüggvénynek egy modelljét építi fel. A modell felépítésével és a modell-feladatok megoldásával járó erőfeszítés kifizetődik, ha a gradiens becslése munkaigényes.

9. Bonyolult korlátozó függvény kezelése

A Fábián, Csizmás, Drenyovszki, Vajnai, Kovács, és Szántai (2019) cikkben szimulációs eljárást dolgoztam ki nehezen számítható, de jól kondicionált korlátozó függvény kezelésére. Az eljárás a 8. részben ismertetett minimalizáló eljárást alkalmazza egy Newton-típusú sémában. Megbízhatóságára elméleti becslést adtam.

A feladatot az alábbi absztrakt formában írom fel:

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{midőn} \quad \check{\mathbf{A}} \mathbf{x} \leq \check{\mathbf{b}}, \quad \phi(T\mathbf{x}) \leq \pi, \quad (31)$$

ahol a $\mathbf{c}, \check{\mathbf{b}}$ vektorok és az $\check{\mathbf{A}}$ mátrix adottak és összeillő méretűek, és π adott pozitív szám.

A fenti feladat helyett az alábbi feladatok egy sorozatát fogom közelítőleg megoldani, a d jobboldal különböző értékeivel, és egyre csökkenő tűréssel:

$$\min \phi(T\mathbf{x}) \quad \text{midőn} \quad \check{\mathbf{A}} \mathbf{x} \leq \check{\mathbf{b}}, \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq d. \quad (32)$$

Jelölje $\chi(d)$ a fenti feladat optimumát, mint a d paraméter függvényét. Ez monoton csökkenő konvex függvény. Ésszerű feltételek mellett a $\chi(d) = \pi$ egyenlet megoldásával juthatunk a (31) feladat megoldásához. A (32) feladatok közelítő megoldására az előző részben ismertetett eljárást használom. A $\phi(\cdot)$ függvény legyen az 5. Feltevés szerinti. Először egy egyszerűsített, determinisztikus változatot vázolok, utána térek rá a szimulációs sémára.

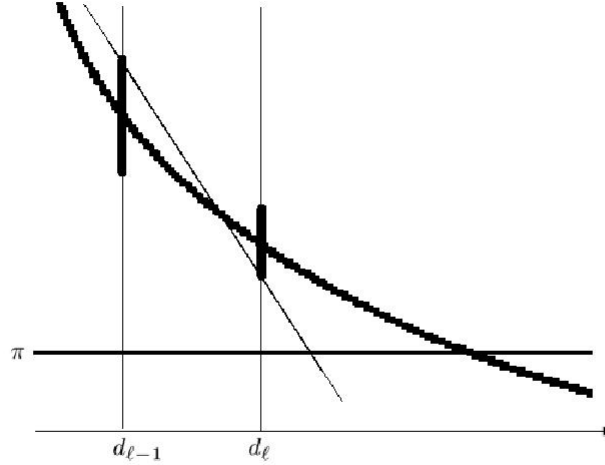
Az egyszerűsített sémánál felteszem, hogy mind a $\phi(\mathbf{z})$ függvényértékek, mind a $\nabla \phi(\mathbf{z})$ gradiensek pontosan számíthatók. Ilyenkor a 8. részben ismertetett eljárás determinisztikus, és a 8. Következmény szerint meghatározott konfidencia-intervallumok biztosan tartalmazzák a megfelelő minimumokat. A master feladat megállási feltételével szabályozható a végső minimum konfidencia-intervallumának a hossza.

A $\chi(d)$ függvény gráfját az 1. ábra mutatja. A $d = d_{\ell-1}$ és $d = d_\ell$ függőleges egyenesek vastagított szeletei konfidencia-intervallumok, melyek a $\chi(d_{\ell-1})$ illetve a $\chi(d_\ell)$ függvényértéket tartalmazzák. — A konfidencia-intervallumokat a megfelelő paraméterű (32) feladatok közelítő megoldásával kaptuk.

Az ábrán a konfidencia-intervallumok tanúsága szerint $\chi(d_{\ell-1}), \chi(d_\ell) \geq \pi$ teljesül. Legyen $\epsilon > 0$ rögzített megállási tűrés. Ha a d_ℓ ponthoz tartozó konfidencia-intervallum biztosítja, hogy $\chi(d_\ell) \leq \pi + \epsilon$ teljesül, akkor az eljárás megáll.

Egyébként jelölje $l_\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azt a lineáris függvényt, amely az $(\ell - 1)$ -edik konfidencia-intervallum felső végpontjára és az ℓ -edik konfidencia-intervallum alsó végpontjára illeszkedik. A $d_{\ell+1}$ próbapont az $\ell(d) = \pi$ egyenlet megoldása lesz.

A pontosság szabályozásának ötletével Lemaréchal, Nemirovskii, és Nesterov (1995) Korlátos Newton Módszerében találkoztam. Ezt az ötletet terjesztettem ki a fenti konstrukcióra. Jelen lépésben a $\chi(d_{\ell+1})$ értéket egy olyan $[\underline{\chi}_{\ell+1}, \bar{\chi}_{\ell+1}]$



1. ábra. A $\chi(d)$ függvény gráfja, és az $(\ell + 1)$ -edik próbapont előállítása.

konfidencia-intervallumba kell foglalni, melynek hossza $0,25 \cdot (\bar{\chi}_{\ell+1} - \pi)$ alatt marad. Ezen választásokkal

$$0,5 \cdot (l_\ell(d_\ell) - \pi) |l'_\ell| \geq (l_{\ell+1}(d_{\ell+1}) - \pi) |l'_{\ell+1}| \quad (33)$$

teljesül, ahol l' a függvény meredekségét méri. Ezen alapszik az eljárás konvergenciájának bizonyítása. Adott (31) feladat esetén jelölje $N(\epsilon)$ a fenti eljárásban végrehajtott iterációk számát, mint az előírt ϵ megállási tűrés függvényét. Ez a mennyiség $\log \frac{1}{\epsilon}$ rendű, mint a disszertációban Corollary 45 mutatja.

Most rátérek a szimulációs sémára. A $\phi(\cdot)$ függvény legyen a 6. Feltevés szerinti. (Tehát a gradiensek pontos számítása nem praktikus.)

A fent vázolt determinisztikus Newton-típusú eljárást ki kell bővítenünk, hogy abban az esetben is használható legyen, ha egy-egy konfidencia-intervallum nem tartalmazza a megfelelő függvényértéket. A bővítés abban áll, hogy ha az ℓ -edik Newton lépés során inkonzisztenciát észlelünk, akkor visszalépünk az előző próbapontra; azaz ilyenkor $d_{\ell+1} = d_{\ell-1}$ lesz. Az eljárás megbízhatóságával kapcsolatban az alábbi tételt bizonyítottam (a disszertációban Theorem 49).

9. Tétel. *Adott $\epsilon > 0$ megállási tűrés mellett legyen $L = \max\{22, 3N(\epsilon)\}$, ahol $N(\epsilon)$ a determinisztikus eljárás szerint végrehajtandó Newton-típusú iterációk számát jelöli. A 8. részben ismerttetett minimalizáló eljárást paraméterezzük úgy, hogy legalább 0,9 megbízhatóságú konfidencia-intervallumokat adjon.*

Tegyük fel, hogy a véletlenített Newton-típusú eljárás nem állt le L lépésben. Akkor legalább $0,9$ valószínűséggel elértük a korlátos optimalizálási feladat egy ϵ -optimális megoldását.

10. Szimulációs eljárás valószínűség maximalizálására

A Fábíán, Csizmás, Drenyovszki, Vajnai, Kovács, és Szántai (2019) cikkben szimulációs eljárást dolgoztam ki valószínűség-maximalizálási feladatokra, ahol a véletlen paraméterek nemdegenerált normális eloszlásúak. Ez a 7. részben ismertetett epigráfközelítő eljárás véletlenített változata. Amint említettem, a determinisztikus epigráfközelítő eljárás analóg Dentcheva, Prékopa, és Ruszczyński (2000) klasszikus kúpgeneráló eljárásával. Azonban a klasszikus sémában új próbapontok meghatározása jelentős erőfeszítést kíván, mert a valószínűségi függvény szinthalmaza felett kell optimalizálni. Hatékony implementációk minél kevesebb próbaponttal kell boldoguljanak, ezért az adódó master feladat megoldására egyre bonyolultabb, különlegesebb módszereket dolgoztak ki. A Dentcheva et al (2004), Dentcheva és Martinez (2013), van Ackooij et al (2017) cikkekben nyomon követhető a komplexitás és a specializáció szintjének emelkedése. — Az epigráfközelítő eljárásban könnyebb az új próbapontok meghatározása, mert korlátozás nélküli konvex minimalizálással történik. Ezenkívül az epigráfközelítő séma sokkal inkább hibátűrő a próbapontok meghatározásában, mint a klasszikus szinthalmazközelítő séma. Ez a hibátűrőssé lehetősé teszi szimulációs eljárások alkalmazását. Én a 8. részben ismertetett véletlenített eljárást adaptáltam valószínűségi függvényhez.

Ebben a keretben közvetlenül alkalmazhatóak a normális eloszlásfüggvény értékbecslésére kidolgozott klasszikus szimulációs módszerek. Ezekkel kapcsolatban Szántai Tamás szerzőtársam tudására támaszkodtunk. Az eljárást kecskeméti szerzőtársaim közreműködésével implementáltuk és teszteltük.

A célfüggvényünk tehát legyen $\phi(\mathbf{z}) = -\log F(\mathbf{z})$, ahol $F(\mathbf{z})$ egy n -dimenziós nemdegenerált standard normális eloszlásfüggvény. A célfüggvény értékei és gradienseinek komponensei elfogadható erőfeszítéssel becsülhetők. Egyszerűség kedvéért felteszem, hogy a célfüggvény értékeit nagy pontossággal számoljuk, és a gradiensek becslésére fogok összpontosítani. (Nagy n esetén ez utóbbi a nagyobb feladat.)

A 7. részben megfogalmazott sejtésem szerint a $\phi(\mathbf{z})$ valószínűségi függvény jól kondicionált a tér azon részén, ahova a valószínűség-maximalizálási feladat optimális megoldása jellemzően tartozik. Mivel azonban kvantitatív becslés nem áll rendelkezésünkre, a 8. Következményre most pusztán úgy tekintek, mint az eljárás hatékonyságának alátámasztására. Az eljárás során épített modellek minőségét más eszközzel fogom mérni. Ehhez a feladatot korlátos formára írom át. — Ezen forma további előnye, hogy lehetővé teszi az esetleg mégis rosszul kondicionált célfüggvény regularizálását (a disszertációban Remark 56 alatt fogalmazom meg).

A probabilisztikus függvény monotonitását kihasználva, a valószínűség-maximalizálási feladatot az absztrakt (21) forma helyett az alábbi formában írjuk fel.

$$\min \phi(\mathbf{z}) \quad \text{midőn} \quad A\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} - T\mathbf{x} \leq \mathbf{0}. \quad (34)$$

A továbbiakban felteszem, hogy létezik és ismert olyan $\tilde{\mathbf{z}}$ megengedett pont, melyre $F(\tilde{\mathbf{z}}) \geq 0.5$.

A normális eloszlás további tulajdonsága, hogy létezik (és könnyen előállítható) olyan $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^n$ korlátos doboz-szerű tartomány, hogy az $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{Z}$ komplementer halmaz mértéke elhanyagolható. A megengedett tartományt erre korlátozva, a (34) feladatnak jó közelítését kapjuk:

$$\min \phi(\mathbf{z}) \quad \text{midőn} \quad A\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} - T\mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in \mathcal{Z}. \quad (35)$$

Feltehető, hogy a $\tilde{\mathbf{z}}$ pont a fenti feladatnak is megengedett megoldása. Új $\mathbf{z}' \in \mathbb{R}^n$ döntési változók bevezetésével a (35) feladat az alábbi alakra hozható:

$$\min \phi(\mathbf{z}) \quad \text{midőn} \quad A\mathbf{x} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}' - T\mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}' \in \mathcal{Z}, \quad \mathbf{z} \leq \mathbf{z}'. \quad (36)$$

A célfüggvényt $\mathbf{z}_i$ ($i = 0, \dots, k$) próbapontokban kiértékelve, a 8. részben tárgyalt módon szerkeszthetjük meg a $\phi_k(\mathbf{z})$ közelítő függvényt és a modell-feladatokat. Jelölje $(\bar{\lambda}_0, \dots, \bar{\lambda}_k, \bar{\mathbf{x}})$ illetve $(\bar{\vartheta}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{y}})$ a primál illetve a duál LP modell-feladat egy-egy optimális megoldását.

Az ismert $\tilde{\mathbf{z}}$ pontot vegyük be a kezdeti $\mathbf{z}_i$ ($i = 0, \dots, k$) próbapontok közé. Akkor a modell-feladatok közös optimuma soha nem haladja meg a $-\log 0.5$ szintet. Ezért a $\bar{\mathbf{z}}$ pont, amelyet a (25) formában kapunk meg a modell-feladat optimális megoldásából, mindig teljesíteni fogja a $F(\bar{\mathbf{z}}) \geq 0.5$ és $\bar{\mathbf{z}} \in \mathcal{Z}$ feltételeket.

Legyen $\bar{\mathbf{g}} = \nabla \phi(\bar{\mathbf{z}})$ a megfelelő gradiens. Ez pontosan nem számolható, de a klasszikus szimulációs eljárások segítségével becsülhető. Nevezetesen, előírt q ($0 \ll q < 1$) megbízhatóság és $\Delta > 0$ tűrés mellett torzítatlan $\bar{\mathbf{G}}$ becslést tudunk szerkeszteni, ahol a q megbízhatóságú konfidencia-intervallum átmérője legfeljebb Δ .

A fenti objektumok alapján legyen

$$\bar{\mathbf{B}} := \left(\phi_k(\bar{\mathbf{z}}) - \phi(\bar{\mathbf{z}}) \right) + \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{G}})^T (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) + \Delta \cdot \text{diag}(\mathcal{Z}). \quad (37)$$

Ez véletlen mennyiség, melynek realizációi könnyen előállíthatók, és korlátot ad a modell-feladat illetve az eredeti valószínűségi feladat optimumai közötti eltérésre. Nevezetesen, $P(\bar{\mathbf{B}} \geq \text{'eltérés'}) \geq q$ teljesül (a disszertációban ez Corollary 55 alatt szerepel).

Az eljárást szerzőtársaimmal implementáltuk, és kísérleteket végeztünk vele (tesztfeladatunkban a véletlen paraméterek vektora 15 dimenziós). A véletlenített oszlopgeneráló eljárás minden esetben figyelemre méltó gyorsasággal konvergált. A korlátozó eljárás használhatónak bizonyult a modell-feladat illetve az eredeti valószínűségi feladat optimumai közötti eltérés becslésére.

Hivatkozások

- van Ackooij W, Berge V, de Oliveira W, Sagastizábal C (2017) Probabilistic optimization via approximate p-efficient points and bundle methods. *Computers & Operations Research* 77:177–193
- Ahmed S (2006) Convexity and decomposition of mean-risk stochastic programs. *Mathematical Programming* 106:433–446
- Benders J (1962) Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik* 4:238–252
- Birge J, Louveaux F (1997) *Introduction to Stochastic Programming*. Springer-Verlag, New York
- Dantzig G, Madansky A (1961) On the solution of two-stage linear programs under uncertainty. In: *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol 1, University of California Press, Berkeley, pp 165–176
- Dantzig G, Wolfe P (1960) The decomposition principle for linear programs. *Operations Research* 8:101–111
- Dentcheva D, Martinez G (2012) Two-stage stochastic optimization problems with stochastic ordering constraints on the recourse. *European Journal of Operational Research* 219:1–8
- Dentcheva D, Martinez G (2013) Regularization methods for optimization problems with probabilistic constraints. *Mathematical Programming* 138:223–251
- Dentcheva D, Ruszczyński A (2003) Optimization with stochastic dominance constraints. *SIAM Journal on Optimization* 14:548–566
- Dentcheva D, Ruszczyński A (2006) Portfolio optimization with stochastic dominance constraints. *Journal of Banking & Finance* 30:433–451
- Dentcheva D, Prékopa A, Ruszczyński A (2000) Concavity and efficient points of discrete distributions in probabilistic programming. *Mathematical Programming* 89:55–77
- Dentcheva D, Lai B, Ruszczyński A (2004) Dual methods for probabilistic optimization problems. *Mathematical Methods of Operations Research* 60:331–346
- Fábián CI (2000) Bundle-type methods for inexact data. *Central European Journal of Operations Research* 8:35–55, (Special issue, T. Csendes and T. Rapcsák, editors)

- Fábián CI (2008) Handling CVaR objectives and constraints in two-stage stochastic models. *European Journal of Operational Research* 191:888–911, (Special issue on Continuous Optimization in Industry, T. Illés, M. Lopez, J. Vörös, T. Terlaky, G-W. Weber, eds.) – Former version: Decomposing CVaR minimization in two-stage stochastic models. *RUTCOR Research Report* (<http://rutcor.rutgers.edu>) 32-2005
- Fábián CI, Szőke Z (2007) Solving two-stage stochastic programming problems with level decomposition. *Computational Management Science* 4:313–353
- Fábián CI, Veszprémi A (2008) Algorithms for handling CVaR-constraints in dynamic stochastic programming models with applications to finance. *The Journal of Risk* 10:111–131
- Fábián CI, Mitra G, Roman D (2011a) Processing second-order stochastic dominance models using cutting-plane representations. *Mathematical Programming* 130:33–57, – Former version: *Stochastic Programming E-Print Series* (www.speps.org) 10-2008
- Fábián CI, Mitra G, Roman D, Zverovich V (2011b) An enhanced model for portfolio choice with SSD criteria: a constructive approach. *Quantitative Finance* 11:1525–1534
- Fábián CI, Mitra G, Roman D, Zverovich V, Vajnai T, Csizmás E, Papp O (2011c) Portfolio choice models based on second-order stochastic dominance measures: an overview and a computational study. In: Bertocchi M, Consigli G, Dempster M (eds) *Stochastic Optimization Methods in Finance and Energy*, International Series in Operations Research & Management Science, vol 163, Springer, pp 441–469
- Fábián CI, Wolf C, Koberstein A, Suhl L (2015) Risk-averse optimization in two-stage stochastic models: computational aspects and a study. *SIAM Journal on Optimization* 25:28–52
- Fábián CI, Csizmás E, Drenyovszki R, van Ackooij W, Vajnai T, Kovács L, Szántai T (2018) Probability maximization by inner approximation. *Acta Polytechnica Hungarica* 15:105–125, special issue dedicated to the memory of András Prékopa (editors: A. Bakó, I. Maros and T. Szántai)
- Fábián CI, Csizmás E, Drenyovszki R, Vajnai T, Kovács L, Szántai T (2019) A randomized method for handling a difficult function in a convex optimization problem, motivated by probabilistic programming. *Annals of Operations Research* DOI: 10.1007/s10479-019-03143-z. To appear in S.I.: Stochastic Modeling and Optimization, in memory of András Prékopa (editors: E. Boros, M. Katehakis, A. Ruszczyński)
- Gondzio J, González-Brevis P, Munari P (2016) Large-scale optimization with the primal-dual column generation method. *Mathematical Programming Computation* 8:47–82

- Khemchandani R, Bhardwaj A, Chandra S (2016) Single asset optimal trading strategies with stochastic dominance constraints. *Annals of Operations Research* 243:211–228
- Kiwiel K (1985) An algorithm for nonsmooth convex minimization with errors. *Mathematics of Computation* 45:171–180
- Kiwiel K (2009) Bundle methods for convex minimization with partially inexact oracles. Tech. rep., Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, available at Optimization Online
- Klein Haneveld W (1986) Duality in Stochastic Linear and Dynamic Programming. No. 274 in *Lecture Notes in Economics and Math. Systems*, Springer-Verlag
- Klein Haneveld W, van der Vlerk M (2006) Integrated chance constraints: reduced forms and an algorithm. *Computational Management Science* 3:245–269, – Former version: *SOM Research Report* 02A33-2002, University of Groningen
- Künzi-Bay A, Mayer J (2006) Computational aspects of minimizing conditional value-at-risk. *Computational Management Science* 3:3–27, – Former version: *Working Paper* No. 211-2005, FINRISK, Swiss National Centre of Competence in Research / Financial Valuation and Risk Management
- Lemaréchal C, Nemirovskii A, Nesterov Y (1995) New variants of bundle methods. *Mathematical Programming* 69:111–147
- Luenberger D, Ye Y (2008) *Linear and Nonlinear Programming*. International Series in Operations Research and Management Science, Springer
- Ogryczak W, Ruszczyński A (2002) Dual stochastic dominance and related mean-risk models. *SIAM Journal on Optimization* 13:60–78
- de Oliveira W, Sagastizábal C (2014) Level bundle methods for oracles with on-demand accuracy. *Optimization Methods and Software* 29:1180–1209, (Published in Optimization Online in 2012)
- de Oliveira W, Sagastizábal C, Scheimberg S (2011) Inexact bundle methods for two-stage stochastic programming. *SIAM Journal on Optimization* 21:517–544
- Pflug G (2000) Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In: Uryasev S (ed) *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
- Prékopa A (1990) Dual method for a one-stage stochastic programming problem with random RHS obeying a discrete probability distribution. *ZOR - Methods and Models of Operations Research* 34:441–461
- Prékopa A (1995) *Stochastic Programming*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

- Rahmaniani R, Crainic T, Gendreau M, Rei W (2018) Accelerating the Benders decomposition method: application to stochastic network design problems. *SIAM Journal on Optimization* 28:875–903
- Rockafellar R, Uryasev S (2000) Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk* 2:21–41
- Rockafellar R, Uryasev S (2002) Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance* 26:1443–1471
- Roman D, Darby-Dowman K, Mitra G (2006) Portfolio construction based on stochastic dominance and target return distributions. *Mathematical Programming* 108:541–569
- Roman D, Mitra G, Zverovich V (2013) Enhanced indexation based on second-order stochastic dominance. *European Journal of Operational Research* 228:273–281
- Rudolf G, Ruszczyński A (2008) Optimization problems with second order stochastic dominance constraints: duality, compact formulations, and cut generation methods. *SIAM Journal on Optimization* 19:1326–1343
- Ruszczyński A (1986) A regularized decomposition method for minimizing the sum of polyhedral functions. *Mathematical Programming* 35:309–333
- Ruszczyński A, Świątanowski A (1997) Accelerating the regularized decomposition method for two-stage stochastic linear problems. *European Journal of Operational Research* 101:328–342
- Sen S, Liu Y (2016) Mitigating uncertainty via compromise decisions in two-stage stochastic linear programming: variance reduction. *Operations Research* 64:1422–1437
- van Slyke R, Wets RB (1969) L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17:638–663
- Song Y, Luedtke J (2015) An adaptive partition-based approach for solving two-stage stochastic programs with fixed recourse. *SIAM Journal on Optimization* 25:1344–1367
- Sun H, Xu H, Meskarian R, Wang Y (2013) Exact penalization, level function method, and modified cutting-plane method for stochastic programs with second order stochastic dominance constraints. *SIAM Journal on Optimization* 23:602–631
- Takano Y, Nanjo K, Sukegawa N, Mizuno S (2015) Cutting plane algorithms for mean-CVaR portfolio optimization with nonconvex transaction costs. *Computational Management Science* 12:319–340

- Valle C, Roman D, Mitra G (2017) Novel approaches for portfolio construction using second order stochastic dominance. *Computational Management Science* 14:257–280
- Whitmore G, Findlay M (1978) *Stochastic Dominance: An Approach to Decision- Making Under Risk*. D.C.Heath, Lexington, MA
- Wolf C (2013) Advanced acceleration techniques for nested benders decomposition in stochastic programming. PhD thesis, University of Paderborn, (Available at <https://d-nb.info/1046905090/34>) Advisors L.Suhl and C.I. Fábián
- Wolf C, Fábián CI, Koberstein A, Suhl L (2014) Applying oracles of on-demand accuracy in two-stage stochastic programming - a computational study. *European Journal of Operational Research* 239:437–448
- Zakeri G, Philpott A, Ryan D (2000) Inexact cuts in Benders decomposition. *SIAM Journal on Optimization* 10:643–657
- Zverovich V (2012) *Modelling and solution methods for stochastic optimisation*. LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, (PhD thesis. School of Information Systems, Computing and Mathematics, Brunel University of West London, 2011. Advisor: G. Mitra)
- Zverovich V, Fábián CI, Ellison E, Mitra G (2012) A computational study of a solver system for processing two-stage stochastic LPs with enhanced benders decomposition. *Mathematical Programming Computation* 4:211–238
- Zverovich V, Valle CA, Ellison F, Mitra G (2014) *FortSP: A Stochastic Programming Solver. Manual*. OptiRisk Systems, available at <http://optirisk-systems.com/manuals/FortspManual.pdf>