MTA doktori disszertáció tézisfüzete

Konvex testek és approximációik

(Convex bodies and their approximations)

Fodor Ferenc

Szegedi Tudományegyetem

Bolyai Intézet

2019

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Összefoglalás és tézisek

Ez a tézisfüzet az MTA doktora cím elnyerésére készült disszertációm összefoglalását tartalmazza. A doktori mű témája a konvex geometriához, illetve konvex testek véletlen és legjobb approximációjának aszimptotikus elméletéhez tartozik. A konvex geometria és a sztochasztikus geometria sok ponton kapcsolódik egymáshoz és az utóbbi évtizedekben nagyon gyors fejlődésen ment át.

A disszertáció hat társszerzőkkel írt publikációm anyagából készült, amelyek mind neves, nemzetközi, referált matematikai folyóiratokban jelentek meg. A disszertációban felhasznált cikkeim a következők (abc sorrendben): Böröczky, Fodor [BF19], Böröczky, Fodor, Hug [BFH10], Böröczky, Fodor, Hug [BFH13], Fodor, Kevei, Vígh [FKV14], Fodor, Vígh [FV12] és Fodor, Vígh [FV18]. A hat cikk közül [BF19] az L_p duális Minkowski-probléma egzisztenciális részének megoldásáról szól a $p > 1$, $q > 0$ esetben, illetve a megoldás simaságának vizsgálatáról. Négy publikáció ([BFH10, BFH13, FKV14, FV18]) konvex testek politópokkal, poliéderekkel, illetve konvex körpoligonokkal való véletlen közelítéseinek tulajdonságait vizsgálja, míg a hatodik ([FV12]) cikkben síkbeli konvex lemezek körpoligonokkal való legjobb közelítéseiről bizonyítunk aszimptotikus formulákat. A véletlen approximáció esetében a disszertációban olyan aszimptotikus erdeményeket tárgyalunk, amelyek egyes geometriai mennyiségek várható értékére, illetve szórására vonatkoznak. A disszertáció történeti áttekintésében (2.1. alfejezet) röviden megemlítem a témában írt más, de a disszertációban fel nem használt cikkeimet is, amelyek többnyire véletlen politópok egyes jellemző mennyiségeinek szórásáról, illetve nagy számok törvényeiről tartalmaznak eredményeket: Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh [BFRV09], Bárány, Fodor, Vígh [BFV10], Fodor, Hug, Ziebarth [FHZ16].

A dolgozatban használt matematikai eszközök a konvex geometria, analízis és a valószínűségszámítás módszereit ötvözik.

A disszertáció szerkezete a következő. A 2. fejezet bevezető jellegű: A doktori mű 2.1. alfejezetében röviden, bonyolultabb jelölések használata nélkül összefoglaljuk a dolgozat eredményeit, és elhelyezzük őket a terület szakirodalmában. A disszertáció 2.2. alfejezetében bevezetjük azokat a jelöléseket és fontosabb fogalmakat, amelyeket a későbbiekben használni fogunk.

A 3. fejezet a [BF19] cikk tartalmán alapszik és az L_p duális Minkowski-probléma egzisztenciális részének megoldását tartalmazza a $p > 1, q > 0$ esetben, ami lényegében a kapcsolódó Monge-Ampère-egyenlet megoldását jelenti abban az esetben, amikor a tekintett mérték abszolút folytonos a Hausdorff-mértékre az n-dimenziós tér egységgömbjén. Ezen felül tárgyaljuk (bizonyítás nélkül) a megoldás simaságát is a Monge-Ampère-egyenlet regularitási tulajdonságainak segítségével.

A 4. fejezetben, amelyben a [BFH10] cikk egyes részeit használtam fel, d-dimenziós konvex testek beírt véletlen politópokkal való súlyozott térfogatapproximációját vizsgáljuk.

A 5. fejezetben, amely szintén a [BFH10] cikk bizonyos részein alapszik, d-dimenziós konvex testek körülírt véletlen poliéderekkel való átlagszélesség szerinti közelítését vizsgáljuk.

Az 6. fejezet a [BFH13] cikk alapján készült. Gördülőgömbbel rendelkező, d-dimenziós konvex testeket közelítünk olyan véletlen politópokkal, amelyek a konvex test határáról választott független véletlen pontok konvex burkaként állnak elő. A fejezetben ilyen politópok vegyes térfogatait vizsgáljuk.

A 7. és 8. fejezetben sima határú és kellően kerek (orsó-) konvex lemezeket közelítünk körpoligonokkal, amelyek véges sok, egyforma sugarú, zárt körlemez metszetei. A 7.1. és 7.2. alfejezetekben, amelyek a [FKV14, FV18] cikkek alapján készültek, véletlen körpoligonok általi közelítéseket vizsgálunk a várható érték (7.1. alfejezet) és a szórás (7.2. alfejezet) szempontjából, míg a 8. fejezeben konvex lemezek beírt és körülírt körpoligonokkal való legjobb közelítéseiről bizonyítunk aszimptotikus formulákat. A 8. fejezet a [FV12] cikken alapszik.

Megjegyezzük, hogy a tézisfüzetben a tételek és formulák számozása megegyezik a disszertációban használttal.

A disszertáció fő eredményeit az alábbi *tézisek* foglalják össze. A téziseket úgy fogalmaztam meg, hogy szélesebb közönség számára is érthetőek legyenek. Emiatt ezek természetesen nem tekinthetőek precíz matematikai állításoknak, de jól összegzik a dolgozat tartalmát. Az eredményeket matematikailag precíz módon a disszertáció egyes fejezeteiben mondjuk ki.

1. Tézis. *Megoldottuk az L_p duális Minkowski-probléma egzisztenciális részét a $p > 1, q > 0$ esetben, ami lényegében a kapcsoldó Monge-Ampère-egyenlet megoldását is jelenti, ha a vizsgált mérték abszolút folytonos a Hausdorff-mértékre nézve a gömbfelületen. Továbbá vizsgáltuk a megoldás simaságát a Monge-Ampère-egyenlet regularitási tulajdonságainak segítségével.*

Az 1. tézis a doktori mű 3. fejezetén alapszik.

2. Tézis. *Aszimptotikus formulát bizonyítottunk d-dimenziós euklideszi térbeli konvex test és olyan véletlen politóp súlyozott térfogatkülönbségének várható értékére $n \to \infty$ mellett, amely a konvex testből adott valószínűségi sűrűségfüggvény által meghatározott eloszlás szerint választott n független véletlen pont konvex burka. A valószínűségi sűrűségfüggvényről és a súlyfüggvényről feltesszük, hogy a konvex test határának egy környezetében folytonos, a sűrűségfüggvény pedig pozitív is.*

Az 2. tézis a doktori mű 4. fejezetének tartalmán alapszik.

3. Tézis. *Aszimptotikus formulát bizonyítottunk d-dimenziós euklideszi térbeli konvex test és olyan, a konvex testet tartalmazó véletlen poliéder átlagszélesség-különségének várható értékére $n \to \infty$ mellett, amely n független, adott valószínűségi eloszlás szerinti véletlen zárt féltér metszete.*

A 3. tézis a disszertáció 5. fejezetének anyagán alapszik.

4. Tézis. *Aszimptotikus formulát bizonyítottunk d-dimenziós euklideszi térbeli gördülőgömbbel rendelkező konvex test és olyan véletlen politóp vegyes térfogatai különbségének várható értékére $n \to \infty$ mellett, amely n független, a konvex test határáról adott pozitív és folytonos valószínűségi sűrűségfüggvény által meghatározott eloszlás szerint választott véletlen pont konvex burka.*

A 4. tézis a dolgozat 6. fejezetének fő eredményét fejezi ki.

5. Tézis. *Aszimptotikus formulákat bizonyítottunk euklideszi síkbeli elegendően sima határú és megfelelően kerek (orsó-) konvex lemez és olyan véletlen konvex körpoligon területkülönbségének és kerületkülönbségének várható értékére, és a véletlen körpoligon csúcsai számának várható értékére $n \to \infty$ mellett, amelyet a konvex lemezből választott n független, egyenletes valószínűségi eloszlású pont határoz meg. Továbbá aszimptotikus becsléseket igazoltunk a csúcsok számára, illetve a kimaradó terület szórására, és analóg állításokat mutattunk egy körülírt véletlen modell esetén.*

A 5. tézis a disszertáció 7. fejezetében bizonyított tételeken alapszik.

6. Tézis. *Aszimptotikus formulákat bizonyítottunk megfelelően sima határú és kellően kerek (orsó-) konvex lemez és beleírt illetve köré írt n oldalú körpoligonok minimális távolságára $n \to \infty$ mellett, a Hausdorff-metrika, területi eltérés és kerületi eltérés szerint.*

Az 6. tézis a doktori mű 8. fejezetének fő eredményét foglalja össze.

2. fejezet

Bevezetés

A disszertáció 2.1. alfejezete a Minkowski-probléma, illetve a konvex testek politópokkal való közelítésének rövid történeti áttekintését és saját eredményeink vázlatos ismertetését tartalmazza. A 2.1. alfejezetben igyekeztünk a dolgozatban szereplő tételek tartalmát közérthetően és lényegében formulák használata nélkül elmondani, illetve elhelyezni őket az elméletben. Tekintettel a Minkowski-problémával, illetve a konvex testek véletlen és legjobb approximációjával foglalkozó hatalmas mennyiségű irodalomra, a doktori mű 2.1. alfejezetében lévő áttekintésben szigorúan csak olyan témákat említünk meg, amelyek szorosan kapcsolódnak saját eredményeinkhez.

A disszertáció 2.2. alfejezetében bevezetjük a dolgozatban használt legfontosabb jelöléseket és fogalmakat. Itt ezek közül csak azokat ismételjük meg, amelyek fő eredményeink kimondásához feltétlenül szükségesek.

A konvex testek elméletével és azok poliéderekkel való közelítésével kapcsolatos további információkat például a következő monográfiákban találhat az olvasó: Schneider [Sch14] és Gruber [Gru07].

A dolgozatban mindvégig euklideszi térben dolgozunk, a dimenziót n-el vagy d-vel jelöljük, a többi jelölés függvényében, az ütközéseket elkerülendő. A tér pontjait általában kisbetűkkel, részhalmazait pedig nagybetűkkel jelöljük. Egy $X \subseteq \mathbb{R}^d$ halmaz esetén $\operatorname{int} X$ a halmaz belsejét, ∂X pedig a határát jelenti.

Az origó középpontú d-dimenziós egységgömb B^d, határa pedig S^{d-1}. Konvex testen olyan kompakt konvex halmazt értünk, amelynek belseje nem üres. Speciálisan, a síkban konvex test helyett a konvex lemez kifejezést is használjuk.

A j-dimenziós Hausdorff-mértéket $\mathcal{H}^j$ jelöli, de a térfogatra a V szimbólumot is használjuk. Speciálisan, $\alpha_d := V(B^d)$ (a 3. fejezetben a κ_d jelölést használjuk az egységgömb térfogatára)) és $\omega_d := \mathcal{H}^{d-1}(S^{d-1}) = d\alpha_d$. A síkban a területre az $A(\cdot)$, a kerületre a $\operatorname{Per}(\cdot)$ illetve $\ell(\cdot)$ jelölést is használjuk.

Az $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ halmazok Minkowski-összegén az

$$X + Y := \{x + y : x \in X \text{ és } y \in Y\}$$

halmazt értjük. Egy $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test és $\lambda > 0$ esetén a $K + \lambda B^d$ összeget a K test λ sugarú paraleltartományának nevezzük, és K_λ-val jelöljük.

Két kompakt $A, B \subset \mathbb{R}^d$ halmaz Hausdorff-távolságát a következő módon definiáljuk:

$$d_H(A, B) := \min\{\lambda \geq 0 : A \subseteq B_\lambda \text{ és } B \subseteq A_\lambda\}.$$

Jelölje $f_i(P)$, $i \in \{0, \ldots, d-1\}$, a P poliéder i-dimenziós lapjainak számát.

Az $f(n)$ és $g(n)$ sorozat aszimptotikusan egyenlő, ha $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$, jelölésben $f(n) \sim g(n)$. Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényekhez létezik olyan $\gamma > 0$ konstans, hogy $|f| < \gamma g$ teljesül I-n, akkor ezt a $f \ll g$ vagy $f = O(g)$ szimbólummal jelöljük. Ha $f \ll g$ és $g \ll f$, akkor $f \approx g$.

Azt mondjuk, hogy egy $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test határa C^k sima, ha ∂K az $\mathbb{R}^d$-nek C^k osztályú részsokasága. Ha pedig ezen felül a Gauss-féle $\kappa(x)$ szorzatgörbületre teljesül, hogy $\kappa(x) > 0$ minden $x \in \partial K$ esetén, akkor K határa C^k_+.

A disszertációban gyakran használjuk a kétszeres differenciálhatóságnak egy olyan általánosítását, amely gyengébb a szokásos definíciónál, és lényegében csak azt követeli meg, hogy ∂K-nak legyen az adott pontban másodrendű sorfejtése. Az így kapott pozitív szemidefinit kvadratikus alak játssza a második alapforma szerepét, és ennek determinánsa az (általánosított) Gauss-féle szorzatgörbület, sajátértékei az (általánosított) főgörbületek, amelyek j-edik elemi szimmetrikus függvényét $H_j(x)$-szel jelöljük. Ha ∂K kétszer differenciálható x-ben a szokásos értelemben, akkor ezek megegyeznek a differenciálgeometriában szokásos megfelelő mennyiségekkel. A kétszeres differenciálhatóság ezen általánosítása azért fontos a konvex testek elméletében, mert Alexandrov nevezetes tétele szerint egy konvex test $\mathcal{H}^{d-1}$ szerint majdnem minden határpontjában kétszer differenciálható ebben az értelemeben.

A dolgozat több fejezetében használjuk még a következő fogalmat. Legyenek $K, L \subset \mathbb{R}^d$ konvex testek. Azt mondjuk, hogy L szabadon siklik K-ban, ha tetszőleges $x \in \partial K$ esetén létezik olyan $p \in \mathbb{R}^d$, hogy $x \in L + p$ és $L + p \subseteq K$, lásd [Sch14, Section 3.2]. Abban a speciális esetben, ha $L = B$ gömb, akkor B gördül (vagy siklik) K-ban, míg ha $K = B$ gömb, akkor L szabadon siklik B-ben. Ha K-nak van gördülőgömbje, akkor minden határpontjában létezik egyértelmű támaszhipersíkja, ha pedig K szabadon siklik egy gömbben, akkor külső normális egységvektora Lipschitz folytonos (Hug [Hug00]).

Egy $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test és egy $u \in S^{d-1}$ vektor esetén a K u-irányú $w(u)$ szélessége a két u-ra merőleges támaszhipersíkjának távolsága. A K test $W(K)$ átlagszélességét a következő módon defniáljuk: $W(K) = \frac{1}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} w(u) \mathcal{H}^{d-1}(du)$.

A disszertációban használjuk még az ún. $V_j(K)$ vegyes térfogatokat. Ezek alapvető fontosságú mennyiségek a konvex testek Brunn-Minkowski-elméletében, és a Steiner-polinom együtthatóiként állnak elő a következő módon. Jól ismert, hogy $\lambda \geq 0$ esetén

$$V(K + \lambda B^d) = \sum_{j=0}^{d} \lambda^{d-j} \alpha_{d-j} V_j(K).$$

Konkrétan $V_d(K)$ a K térfogata, $V_{d-1}(K)$ a K felszínének fele, $V_1(K)$ a K átlagszélességének egy konstansszorosa, és $V_0(K) = 1$ minden konvex testre.

3. fejezet

Az L_p duális Minkowski-probléma

Ez a fejezet a Böröczky, Fodor [BF19] cikk tartalmán alapszik.

A klasszikus Minkowski-probléma arra keres szükséges és elégséges feltételeket, hogy egy Borel-mérték az S^{n-1} gömbfelületen mikor lehet a felületi mértéke egy konvex testnek. A probléma diszkrét változatát, illetve amikor a tekintett mérték abszolút folytonos a szférikus Lebesgue-mértékre nézve, még Minkowski oldotta meg, az általános esetet pedig Alexandrov, és tőle függetlenul Fenchel és Jessen. A problémának pontosan akkor van megoldása, ha a mérték nem koncentrálódik semmilyen főszférán és egyben súlypontja az origóba esik. Hasonló problémákat vizsgáltak részletesen más, a konvex testek Brunn-Minkowski-elméletében előforduló mértékre is, mint pl. az Alexandrov-féle integrálgörbület-mérték, L_p felületi mértékek, kúptérfogat-mérték, stb.

A duális Brunn-Minkowski-elmélet főleg Lutwak munkája nyomán az 1970-es években alakult ki. Ugyan nincs formális dualitás a klasszikus és a duális elmélet között, de nagyon sok a hasonlóság és analógia. A duális elmélet csillagszerű kompakt halmazokkal foglalkozik, és benne a radiális függvény hasonló szerepet játszik, mint a klasszikus esetben a támaszfüggvény. Egy $S \subset \mathbb{R}^n$ halmazt a $p \in S$ pontra nézve csillagszerűnek nevezünk, ha a $[p, s]$ szakasz benne van S-ben, mindahányszor $s \in S$. A konvex testek természetesen csillagszerűek minden pontjukra nézve. Jelölje $\mathcal{S}^n_{(o)}$ az olyan $\mathbb{R}^n$-beli o-ra nézve csillagszerű kompakt halmazokat, amelyek belsejükben tartalmazzák az origót. Egy $S \in \mathcal{S}^n_{(o)}$ halmaz radiális függvénye $\varrho_S = \max\{t \geq 0 : ts \in S\}$. Lutwak [Lut75] definiálta a duális vegyes térfogatokat olyan K konvex testre, amely belsejében tartalmazza az origót: $q \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\widetilde{V}_q(K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \varrho_K^q(u)\, \mathcal{H}^{n-1}(du),$$

ami úgy van normalizálva, hogy $\widetilde{V}_n(K) = V(K)$. Szükségünk van a duális vegyes térfogat kiterjesztésére arra az esetre, amikor az origó K határán is lehet. Ezt a $q > 0$ esetben lehet megtenni, és a fejezet (illetve a [BF19] cikk) jelentős része ezzel foglalkozik. A duális vegyes térfogatok lokalizálásával (ami bevett eljárás a konvex testek klasszikus elméletében), jutunk a duális görbületi mértékek fogalmához (Huang, Lutwak, Yang, Zhang [HLYZ16]): ha $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$, $q \in \mathbb{R}$ és $\eta \subset S^{n-1}$ Borel-hamaz, akkor

$$\widetilde{C}_q(K,\eta) = \frac{1}{n}\int_{\boldsymbol{\alpha}^*_K(\eta)} \varrho^q_K(u)\mathcal{H}^{n-1}(du),$$

ahol $\boldsymbol{\alpha}^*_K(\eta)$ az η fordított radiális Gauss-leképezés (lásd disszertáció 25. o.) melletti képe. Hasonlóan a duális vegyes térfogatokhoz, a duális görbületi mértékeket is kiterjesztjük arra az esetre, amikor $q > 0$ és o a K határán van. A duális görbületi mértékek fontos tulajdonsága, hogy pl. a kúptérfogat-mérték és az Alexandrov-féle integrálgörbületi mérték is előállítható segítségükkel. Lutwak, Yang, Zhang [LYZ18] bevezette a duális görbületi mértékek egy még általánosabb változatát, amelyben egy csillagszerű halmaz játssza az egységgömb szerepét: legyen $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$, $\eta \subset S^{n-1}$ Borel halmaz, $q \in \mathbb{R}$ és $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$, ekkor

$$\widetilde{C}_q(K,Q,\eta) = \frac{1}{n}\int_{\boldsymbol{\alpha}^*_K(\eta)} \varrho^q_K(u)\varrho^{n-q}_Q(u)\mathcal{H}^{n-1}(du).$$

A Q halmaz szerepének előnye a duális görbületi mértékek és az ekviaffin transzformációk kapcsolában van.

Az L_p duális görbületi mértékeket Lutwak, Yang, Zhang [LYZ18] vezette be: $q \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$, $p \in \mathbb{R}$ és $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$ esetén a K test Q-ra vonatkozó L_p q-adik duális görbületi mértéke

$$d\widetilde{C}_{p,q}(K,Q,\cdot) = h_K^{-p}d\widetilde{C}_q(K,Q,\cdot).$$

Az L_p duális görbületi mértékek fontossága abban rejlik, hogy a p és q megfelelő választásával visszakapunk több fontos mértéket a klasszikus (L_p) Brunn-Minkowski-elméletből és a duális elméletből: L_p felületi mértékek, L_p inegrálgörbület mértékek, duális görbületi mértékek.

Lutwak, Yang, Zhang [LYZ18] fogalmazta meg az L_p duális Minkowski-problémát: *Adott $p, q \in \mathbb{R}$ és $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$ esetén milyen szükséges és elégséges feltételeket kell teljesítenie egy μ Borel-mértéknek az S^{n-1} gömbfelületen, hogy létezzen olyan $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$ konvex test, amelyre $\mu = \widetilde{C}_{p,q}(K,Q,\cdot)$?*

Az L_p duális görbületi mértékek tulajdonságai miatt az L_p duális Minkowski-probléma, a p és q paraméterek alkalmas választásával, magában foglalja a Minkowski-probléma korábban vizsgált változatatait: L_p Minkowski-probléma, duális Minkowski-probléma, L_p Alexandrov probléma.

Ha $Q = B^n$ és a μ abszolút folytonos mérték sűrűségfüggvénye f, akkor az L_p duális Minkowski-probléma a következő Monge-Ampère-egyenlet megoldását jelenti:

$$\det(\nabla^2 h + h\,\mathrm{Id}) = \tfrac{1}{n}\, h^{p-1}\cdot(\|\nabla h\|^2 + h^2)^{\frac{n-q}{2}}\cdot f,$$

ahol f nemnegatív Borel függvény, amelyre teljesül, hogy $\int_{S^{n-1}} f d\mathcal{H}^{n-1} > 0$ (lásd 8016. o. (93), [BF19], Section 7). Ha $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$, akkor a megfelelő Monge-Ampère egyenlet (see 8016. o. (94), [BF19], Section 7)

$$\det(\nabla^2 h(u) + h(u)\,\mathrm{Id}) = \tfrac{1}{n}\, h(u)^{p-1}\|\nabla h(u) + h(u)\,u\|_Q^{n-q}\cdot f(u).$$

A fenti egyenletekben az ismeretlen a h támaszfüggvény, a ∇h a h gradiense S^{n-1}-en, $\nabla^2 h$ pedig h Hesse-mátrixa, a $\|\cdot\|_Q$ a Q által definiált félnormát jelenti.

Az L_p duális Minkowski-problémával és a Minkowski-probléma korábban vizsgált valtozataival kapcsolatos releváns eredményeket röviden áttekintjük a disszertáció 3.1. alfejezetében. Ezeket itt terjedelmi okokból nem ismételjük meg.

A disszertáció 3. fejezetében fő eredményeink a következők.

3.1.1. Tétel (Böröczky, Fodor [BF19], Theorem 1.1)**.** *Legyen $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$, $p > 1$ és $q > 0$, $p \neq q$, továbbá legyen μ olyan diszkrét mérték S^{n-1}-en, ami nem koncentrálódik semmilyen zárt félgömbön. Ekkor létezik olyan $P \in \mathcal{K}^n_{(o)}$ politóp, hogy $\widetilde{C}_{p,q}(P, Q, \cdot) = \mu$.*

Megjegyezzük, hogy ha $p > q$, akkor a megoldás egyértelmű Lutwak, Yang and Zhang [LYZ18, Theorem 8.3] eredménye alapján.

Hug, Lutwak, Yang, Zhang[HLYZ05] adott példát olyan μ mértékre, amely pozitív és folytonos sűrűségfüggvénnyel rendelkezik a Hausdorff-mértékre nézve S^{n-1}-en, és amelyre $q = n$ és $1 < p < n$ esetén megtörténhet, hogy a problémának csak olyan megoldása van, amelynek a határán van az origó. Ebben az esetben h_K-nak zéróhelye van S^{n-1}-en. Így, ha $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$, $p > 1$ és $q > 0$, akkor az L_p duális Minkowski-probléma természetes formája a következő (lásd Chou, Wang [CW06] és Hug, Lutwak, Yang, Zhang [HLYZ05] ha $q = n$).): Legyen μ nemtriviális véges Borel-mérték S^{n-1}-en. Keressünk olyan $K \in \mathcal{K}^n_o$ testet, hogy

$$d\widetilde{C}_q(K, Q, \cdot) = h_K^p d\mu.$$

A megoldás folyamán kiderül, hogy természetes feltenni a következőt a K testről: $\mathcal{H}^{n-1}(\Xi_K) = 0$, ahol

$$\Xi_K = \{x \in \partial K : \text{létezik olyan } u \in S^{n-1} \text{ külső normális } x\text{-ben, hogy } h_K(u) = 0\}.$$

A fenti feltétel garantálja, hogy K felületi mértéke abszolút folytonos $\widetilde{C}_q(K, Q, \cdot)$-ra nézve.

3.1.2. Tétel (Böröczky, Fodor [BF19], Theorem 1.2)**.** *Legyen $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$, $p > 1$ és $q > 0$ olyan, hogy $p \neq q$, továbbá legyen μ véges Borel-mérték S^{n-1}-en, ami nem koncentrálódik semmilyen zárt félgömbön. Ekkor létezik olyan $K \in \mathcal{K}^n_o$, amelyre $\mathcal{H}^{n-1}(\Xi_K) = 0$, $\mathrm{int}K \neq \emptyset$ és $d\widetilde{C}_q(K, Q, \cdot) = h_K^p d\mu$. Továbbá $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$, ha $p > q$.*

A disszertációban a 3.1.1. és 3.1.2. tételt csak abban az esetben bizonyítjuk teljes részletességgel, amikor $Q = B^n$. Az általános eset bizonyítása megtalálható a [BF19] cikkben.

A 3. fejezet további fő eredményei az L_p duális Minkowski-probléma megoldásának simaságát írják le abban az esetben, amikor a $\widetilde{C}_q(K, Q, \cdot)$ q-adik duális görbületi mérték abszolút folytonos a Hausdorff-mértékre nézve az S^{n-1} gömbfelületen. Ezeket az eredményeket a disszertációban csak kimondjuk és bizonyításukat terjedelmi okokból nem részletezzük. A részletes gondolatmenetek megtalálhatók a [BF19] cikk 7. fejezetében (Section 7).

Az alábbi három tétel bizonyítása Caffarellinek [Caf90a, Caf90b] a Monge-Ampère-egyenlet megoldásainak regularitására vonatkozó egyes eredményeit használja.

3.1.3. Tétel (Böröczky, Fodor [BF19], Theorem 1.3)**.** *Legyen $p > 1$, $q > 0$, $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$, $0 < c_1 < c_2$, és legyen $K \in \mathcal{K}^n_o$ olyan, hogy $\mathcal{H}^{n-1}(\Xi_K) = 0$, $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, illetve*

$$d\widetilde{C}_q(K, Q, \cdot) = h^p_K f \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

valamely f Borel-függvényre S^{n-1}-en, amelyre $c_1 \leq f \leq c_2$.

(i) *$\partial K \backslash \Xi_K = \{z \in \partial K : h_K(u) > 0$ minden $u \in N(K, z)\}$ és $\partial K \backslash \Xi_K$ C^1 és nem tartalmaz szakaszt, továbbá h_K C^1 az $\mathbb{R}^n \backslash N(K, o)$ halmazon.*

(ii) *Ha f folytonos, akkor minden $u \in S^{n-1} \backslash N(K, o)$ pontnak létezik olyan S^{n-1}-beli U környezete, hogy h_K megszorítása U-ra $C^{1,\alpha}$ minden $\alpha \in (0, 1)$-ra.*

(iii) *Ha $f \in C^\alpha(S^{n-1})$ valamely $\alpha \in (0, 1)$-ra és ∂Q C^2_+, akkor $\partial K \backslash \Xi_K$ C^2_+, és minden $u \in S^{n-1} \backslash N(K, o)$ pontnak létezik olyan környezete, amelyre a h_K megszorítása $C^{2,\alpha}$.*

A 3.1.2 tétel szerint, ha $p > q > 0$ és $p > 1$, akkor $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$ teljesül az L_p duális Minkowski-probléma K megoldására. Másrészt, a [BF19] cikkben mutatunk egy példát (Example 7.1, 8015. o.) arra, hogy ha $1 < p < q$, akkor megtörténhet, hogy az L_p duális Minkowski-probléma 3.1.2 tétel által garantált K megoldására $o \in \partial K$ és o a ∂K nem sima pontja. A következő tételben megmutatjuk, hogy azonban ha $q \leq n$, akkor K szigorúan konvex.

3.1.4. Tétel (Böröczky, Fodor [BF19], Theorem 1.4)**.** *Ha $1 < p < q \leq n$, $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$, $0 < c_1 < c_2$ és $K \in \mathcal{K}^n_o$ olyan, hogy $\mathcal{H}^{n-1}(\Xi_K) = 0$ és $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, továbbá*

$$d\widetilde{C}_q(K, Q, \cdot) = h^p_K f \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

valamely f Borel-függvényre S^{n-1}-en, amelyre $c_1 \leq f \leq c_2$, akkor K szigorúan konvex; vagy másképpen, h_K C^1 a $\mathbb{R}^n \backslash o$ halmazon.

Megjegyezzük, hogy ha $o \in \mathrm{int}K$, akkor a 3.1.3 tétel bizonyításában felhasznált gondolatmenetek tetszőleges $p, q \in \mathbb{R}$ esetén működnek.

3.1.5. Tétel (Böröczky, Fodor [BF19], Theorem 1.5)**.** *Legyen $p, q \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathcal{S}^n_{(o)}$, $0 < c_1 < c_2$, és legyen $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$ olyan, hogy*

$$d\widetilde{C}_{p,q}(K, Q, \cdot) = f \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

valamely f Borel-függvényre S^{n-1}-en úgy, hogy $c_1 \leq f \leq c_2$. Ekkor

(i) *K sima és szigorúan konvex, és h_K C^1 az $\mathbb{R}^n \backslash \{o\}$ halmazon;*

(ii) *ha f folytonos, akkor h_K megszorítása S^{n-1}-re $C^{1,\alpha}$ tetszőleges $\alpha \in (0, 1)$-ra;*

(iii) *ha $f \in C^\alpha(S^{n-1})$ valamely $\alpha \in (0, 1)$-ra, és ∂Q C^2_+, akkor ∂K C^2_+, és h_K $C^{2,\alpha}$ a S^{n-1}-n.*

4. fejezet

Súlyozott térfogatapproximáció beírt politópokkal

Ez a fejezet a Böröczky, Fodor, Hug [BFH10] cikk egyes részeit tartalmazza.

Ebben a fejezetben a következő véletlen modellt vizsgáljuk. Legyen C konvex test a d-dimenziós $\mathbb{R}^d$ euklideszi térben, és legyen ϱ egy korlátos, nemnegatív mérhető függvény C-n. Jelölje $\mathcal{H}^d \llcorner C$ a d-dimenziós Hausdorff-mérték megszorítását C-re. Ha $\int_C \varrho(x)\, \mathcal{H}^d(dx) > 0$, akkor

$$\mathbb{P}_{\varrho,C} := \left(\int_C \varrho(x)\, dx \right)^{-1} \varrho\, \mathcal{H}^d \llcorner C.$$

valószínűségi mértéket definiál C-n. A $\mathbb{P}_{\varrho,C}$ szerinti várható értéket $\mathbb{E}_{\varrho,C}$ jelöli. A $\mathbb{P}_{\varrho,C}$ valószínűségi eloszlás szerint választott n független véletlen pont konvex burkát $C_{(n)}$-el jelöljük. A fenti konstrukció véletlen politópok egy meglehetősen általános modelljét szolgáltatja.

Fő eredményeink kimondásához szükségünk van a következő konstansra:

$$c_d = \frac{(d^2+d+2)(d^2+1)}{2(d+3)\cdot(d+1)!} \Gamma\left(\frac{d^2+1}{d+1}\right) \left(\frac{d+1}{\alpha_{d-1}}\right)^{2/(d+1)} \tag{4.1.1.}$$

(lásd Wieacker [Wie78]). Az alábbiakban a $\mathcal{H}^d(dx)$ d-dimenziós Hausdorff-mérték szerinti integrálás jelölésére egyszerűen a dx szimbólumot használjuk.

Schütt [Sch94] eredményét átalánosítva, bebizonyítjuk a következő tételt.

4.1.1. Tétel (Böröczky, Fodor, Hug [BFH10, Theorem 3.1])**.** *Legyen K egy $\mathbb{R}^d$-beli konvex test, ϱ valószínűségi sűrűségfüggvény K-n, és $\lambda : K \to \mathbb{R}$ egy integrálható függvény. Tegyük fel, hogy λ és ϱ folytonos, ϱ pedig pozitív is ∂K egy K-ra vonatkozó környezetében. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{d+1}}\, \mathbb{E}_{\varrho,K} \int_{K\setminus K_{(n)}} \lambda(x)\, dx = c_d \int_{\partial K} \varrho(x)^{\frac{-2}{d+1}} \lambda(x) \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}}\, \mathcal{H}^{d-1}(dx), \tag{4.1.2.}$$

ahol a c_d konstans a (4.1.1.)-ben van definiálva.

Abban a speciális esetben, amikor $\varrho \equiv \lambda \equiv 1$, az ún. uniform modellt kapjuk. Az uniform modell vizsgálata hosszú múltra tekint vissza. A (4.1.2.) aszimptotikus formulát Rényi és Sulanke [RS63] bizonyította be a síkban abban az esetben, amikor C olyan konvex lemez (síkbeli konvex test), amelynek határa C^3_+. Ezt Wieacker [Wie78] kiterjesztette a d-dimenziós gömb esetére. Bárány igazolta (4.1.2.)-t olyan d-dimenzós konvex testekre, amelyek határa C^3_+ tulajdonságú. Schütt végül megmutatta, hogy a (4.1.2.) aszimptotikus formula teljesül tetszőleges konvex testre anélkül, hogy a határ simaságára bármilyen feltételt tennénk.

A 4.1.1. tételre adott bizonyításunkat Schütt [Sch94]-beli gondolatmenete inspirálta, ahol Schütt a $\varrho \equiv \lambda \equiv 1$ speciális (uniform) esetet vizsgálta. Megjegyezzük, hogy a [Sch94] cikkben a 2. lemmára, amely létfontosságú a gondolatmenet szempontjából, a szerző nem ad bizonyítást, hanem M. Schmuckenschläger egy hasonló, de nem publikált eredményére hivatkozik. A [Sch94] cikk 2. lemmája nem teljesül a cikkben kimondott általánosságban: például nem igaz szimplexekre. Ez valószínűleg javítható, azonban a 4.1.1. tétel általunk adott bizonyításában a [Sch94, Lemma 2] helyett az annál egyszerűbb 3.2.2. lemmát használjuk.

Vegyük észre, hogy a (4.1.2.) formula jobb oldalán lévő határérték csak a ϱ és λ függvények ∂K-n felvett értékeitől függ. Speciálisan, előírhatunk tetszőleges pozitív és folytonos ϱ függvényt K határán. Ekkor ϱ tetszőleges K-n értelmezett valószínűségi sűrűségfüggvénnyé való kiterjesztése kielégíti a 4.1.1. tétel feltételeit a ϱ függvény ∂K-n előírt értékeivel.

A 4.1.1. tétel jelentősége abban is áll, hogy a K konvex test határának simaságára nem teszünk semmilyen feltételt, ami nagyban nehezíti a bizonyítást. Továbbá a ϱ valószínűségi sűrűségfüggvény és a λ súlyfüggvény is nagyon általános. Hangsúlyozzuk, hogy a 4.1.1. tétel általánossága szükséges ahhoz, hogy a dolgozat 4. fejezetében a körülírt véletlen poliédrikus halmazokkal kapcsolatos állítások bizonyításához használhassuk fel a polaritás segítségével.

Egy Efrontól [Efr65] származó klasszikus gondolatmenet szerint

$$\mathbb{E}_{\varrho,K}\left(f_0(K_{(n)})\right) = n \cdot \mathbb{E}_{\varrho,K} \int_{K \setminus K_{(n-1)}} \varrho(x)\, dx,$$

amelynek segítségével a 4.1.1. tételből következik az alábbi állítás:

4.1.2. Következmény (Böröczky, Fodor, Hug [BFH10, Corollary 3.2])**.** *Legyen K egy $\mathbb{R}^d$-beli konvex test, ϱ valószínűségi sűrűségfüggvény K-n, és $\lambda : K \to \mathbb{R}$ egy integrálható függvény. Tegyük fel, hogy λ és ϱ folytonos, ϱ pedig pozitív is ∂K egy K-ra vonatkozó környezetében. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{d-1}{d+1}}\, \mathbb{E}_{\varrho,K}(f_0(K_{(n)})) = c_d \int_{\partial K} \varrho(x)^{\frac{d-1}{d+1}} \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}}\, \mathcal{H}^{d-1}(dx),$$

ahol a c_d konstans a (4.1.1.)-ben van definiálva.

A 4.1.1. tétel bizonyítását a 3.2. alfejezet tartalmazza.

5. fejezet

Körülírt véletlen politópok

Ez a fejezet a Böröczky, Fodor, Hug [BFH10] cikk egyes részeit tartalmazza.

A disszertáció 5. fejezetében a következő modellt vizsgáljuk. Jelölje $\mathcal{H}$ az $\mathbb{R}^d$-beli hipersíkok terét a szokásos topológiával (lásd [SW08, Chapter 13]). Legyen $\mathcal{H}_K \subset \mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$ azon altere, amelynek elemei metszik a K egység sugarú K_1 paraleltartományát, de diszjunktak K belsejétől. Egy $H \in \mathcal{H}_K$ hipersík esetén H^--al jelöljük azt a H által határolt zárt félterét $\mathbb{R}^d$-nek, amelyre $K \subset H^-$.

Legyen μ az az egyértelmű, mozgásinvariáns Borel-mérték $\mathcal{H}$-n, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $L \subset \mathbb{R}^d$ konvex test esetén azoknak a $\mathcal{H}$-beli hipersíkoknak a μ mértéke, amelyek metszik L-t megegyezik az L test $W(L)$ átlagszélességével. Ekkor a $\mu_K = (1/2)\mu \llcorner \mathcal{H}_K$ mérték, amely az $(1/2)\mu$ megszorítása $\mathcal{H}_K$-ra, valószínűségi mérték $\mathcal{H}_K$-n, ugyanis teljesül rá a következő összefüggés

$$\mu_K(\mathcal{H}_K) = \frac{1}{2}\mu(\mathcal{H}_K) = \frac{1}{2}(W(K + B^d) - W(K)) = \frac{1}{2}W(B^d) = 1.$$

Legyen $n > 0$ egész szám, és legyenek $H_1, \ldots, H_n$ független, μ_K eloszlású véletlen hipersíkok $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor

$$K^{(n)} := \bigcap_{i=1}^{n} H_i^-$$

egy véletlen poliédrikus halmaz, amely tartalmazza K-t.

Fő célunk az 5. fejezetben a $K^{(n)}$ véletlen poliéder geometriai tulajdonságainak vizsgálata. Az 5.2. és 5.3. alfejezetben aszimptotikus formulát bizonyítunk az $\mathbb{E}W(K^{(n)} \cap K_1)$ várható értékre. A $K^{(n)}$ helyett azért tekintjük $K^{(n)} \cap K_1$-t, mert $K^{(n)}$ pozitív valószínűséggel nem korlátos. Megjegyezzük, hogy K_1 helyett használhatnánk tetszőleges más olyan konvex testet is, amely K-t a belsejében tartalmazza, de ez csak a konstansokon változtatna, a közelítés rendjén nem.

Az 5. fejezet fő eredményeit a következő két tétel foglalja össze.

5.1.1. Tétel (Böröczky, Fodor, Hug [BFH10, Theorem 2.1])**.** *Ha K egy $\mathbb{R}^d$-beli konvex test, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{d+1}}\, \mathbb{E}(W(K^{(n)} \cap K_1) - W(K)) = 2\, c_d\, \omega_d^{-\frac{d-1}{d+1}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d}{d+1}}\, \mathcal{H}^{d-1}(dx),$$

ahol a c_d konstans a (4.1.1.)-ben van definiálva.

5.1.2. Tétel (Böröczky, Fodor, Hug [BFH10, Theorem 2.2])**.** *Ha K egy $\mathbb{R}^d$-beli konvex test, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{d-1}{d+1}}\,\mathbb{E}(f_{d-1}(K^{(n)})) = c_d\,\omega_d^{-\frac{d-1}{d+1}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d}{d+1}}\,\mathcal{H}^{d-1}(dx),$$

ahol a c_d konstans a (4.1.1.)-ben van definiálva.

A 5.1.2. tételben az eredmény befolyásolása nélkül helyettesíthetnénk $K^{(n)}$-t a $K^{(n)}$ és egy tetszőleges olyan politóp metszetével, amely belsejében tartalmazza K-t.

Valójában az 5.2. és 5.3. alfejezetben a 5.1.1. és 5.1.2. tételnél jóval általánosabb állításokat bizonyítunk: az 5.2.2. tételt és a 5.2.3. tételt, amelyek speciális eseteként állnak elő a fenti állítások. Az 5.2.2. és 5.2.3. tételek az előbbiekben bevezetettnél lényegesen általánosabb eloszlásokra vonatkoznak.

Bizonyításukban a disszertáció 4. fejezetében igazolt, beírt politópok súlyozott térfogatapproximációjára vonatkozó aszimptotikus formulákat (4.1.1. és 4.1.2. tétel) és polaritást használunk.

Hangsúlyozzuk, hogy a fenti eredményekben a K test teljesen általános, azaz határának simaságára nem teszünk semmilyen feltételt.

A polaritás hasznosságát a beírt és körülírt politópok egyes tulajdonságainak összekapcsolására már Ziezold [Zie70] észrevette és később mások is alkalmazták. Glasauer és Gruber [GG97] használtak például polaritást az átlagszélesség és térfogat esetén, amelynek segítségével aszimptotikus formulákat bizonyítottak konvex testek legjobb közelítéseire.

6. fejezet

Véletlen pontok konvex testek határáról

Ez a fejezet a Böröczky, Fodor, Hug [BFH13] cikken alapszik.

A disszertáció 6. fejezetében a következő valószínűségi modellt vizsgáljuk. Legyen K olyan konvex test $\mathbb{R}^d$-ben, amelyben egy r sugarú gömb szabadon gördül.

Legyen ϱ a K határán definiált, a K felszínmértékére nézve folytonos és pozitív valószínűségi sűrűségfüggvény. Legyenek az $x_1, \dots, x_n$ független, véletlen pontok ∂K-ról, amelyek eloszlása ϱ szerinti. A $K_n := [x_1, \dots, x_n]$ konvex burok olyan véletlen politópot határoz meg, amely K-ba írt abban az értelemben, hogy minden csúcsa K határán van. A célunk, hogy a K_n véletlen politóp vegyes térfogatainak várható értékét vizsgáljuk.

Egy esemény valószínűségét $\mathbb{P}_\varrho$-val, a várható értéket pedig $\mathbb{E}_\varrho$-val jelöljük ebben a modellben. Egy adott K konvex test esetén a K_n véletlen politóp j-edik vegyes térfogatának $\mathbb{E}_\varrho(V_j(K_n))$ várható értéke tart $V_j(K)$-hoz, ha n tart a végtelenbe. A $V_j(K) - \mathbb{E}_\varrho(V_j(K_n))$ mennyiség aszimptotikus viselkedését K határának tulajdonságai határozzák meg. M. Reitzner [Rei02] bizonyította a következő tételt.

6.1.1. Tétel (Reitzner, [Rei02]). *Legyen K olyan $\mathbb{R}^d$-beli konvex test, amelynek határa C^2_+ sima, és legyen ϱ folytonos, pozitív valószínűségi sűrűségfüggvény ∂K-n. Ekkor*

$$V_j(K) - \mathbb{E}_\varrho(V_j(K_n)) \sim c^{(j,d)} \int_{\partial K} \varrho(x)^{-\frac{2}{d-1}} H_{d-1}(x)^{\frac{1}{d-1}} H_{d-j}(x)\, \mathcal{H}^{d-1}(dx) \cdot n^{-\frac{2}{d-1}} \tag{6.1.1.}$$

ha $n \to \infty$, ahol a $c^{(j,d)}$ konstansok csak j-től és a d dimenziótól függenek.

Ha $j = d$, azaz a térfogat esetében, C. Schütt és E. Werner [SW03] kiterjesztették az (6.1.1.) formulát olyan konvex testekre, amelyek egyszerre rendelkeznek r sugarú gördülőgömbbel és gördülnek szabadon egy R sugarú gömbben valamely $0 < r < R$ esetén.

Ez utóbbi feltétel, azaz hogy K szabadon gördül egy gömbben, uniform felső korlátot biztosít ∂K főgörbületeire, ahol azok léteznek. A [SW03] cikkben a szerzők a $c^{(d,d)}$ konstans értékét is kiszámolták:

$$c^{(d,d)} = \frac{(d-1)^{\frac{d+1}{d-1}}\Gamma(d+1+\frac{2}{d-1})}{2(d+1)![(d-1)\alpha_{d-1}]^{\frac{2}{d-1}}}.$$

Ezen felül C. Schütt és E. Werner [SW03] azt is megmutatták, hogy rögzített K esetén az (6.1.1.) formulában szereplő integrál akkor minimális, ha a sűrűségfüggvény éppen

$$\varrho_0(x) = \frac{H_{d-1}(x)^{\frac{1}{d+1}}}{\int_{\partial K} H_{d-1}(x)^{\frac{1}{d+1}}\, \mathcal{H}^{d-1}(dx)}.$$

A 6. fejezetben a fő célunk, hogy kiterjesszük a 6.1.1. tételt minden $j = 1, \ldots, d$ esetén olyan konvex testekre, amelyekről csak azt tesszük fel, hogy van gördülőgömbjük. Azt is megengedjük, hogy K határának Gauss görbülete nulla legyen egy pozitív mértékű darabon. A fejezetben a következő tételt bizonyítjuk.

6.1.2. Tétel (Böröczky, Fodor, Hug [BFH13, Theorem 1.2])**.** *Az* (6.1.1.) *aszimptotikus formula érvényes minden olyan K konvex testre, amelynek van gördülőgömbje.*

A 6.1.2. tétel bizonyítása különbözik mind a Reitzner [Rei02], illetve a Schütt, Werner [SW03] cikkben használttól. A bizonyítás gondolatmenetét a Böröczky, Fodor, Hug [BFH10] cikkünkben található módszer inspirálta (lásd 4.2. alfejezet), ahol konvex testek súlyozott térfogatapproximációját vizsgáltuk. Azonban a konvex test határáról választott véletlen pontok esetén a gondolatmenet lényegesen bonyolultabb, és olyan eszközöket is használ, amelyekre a [BFH10]-ban nem volt szükségünk; így a két bizonyítás jelentősen eltér egymástól.

Példák mutatják, hogy a gördülőgömb létezését követelő felétel nem hagyható el a 6.1.2. tételből. Az 5. fejezetben az alábbi általános korlátokat bizonyítjuk a $j = 1$ esetben.

6.1.3. Tétel (Böröczky, Fodor, Hug [BFH13, Theorem 1.3])**.** *Legyen K egy $\mathbb{R}^d$-beli konvex test, és legyen ϱ folytonos, pozitív valószínűségi sűrűségfüggvény ∂K-n. Ekkor léteznek olyan K-tól és ϱ-tól függő pozitív c_1, c_2 konstansok, hogy tetszőleges $n \geq d+1$ esetén*

$$c_1 n^{-\frac{2}{d-1}} \leq \mathbb{E}_\varrho(V_1(K) - V_1(K_n)) \leq c_2 n^{-\frac{1}{d-1}}.$$

Az alsó korlát optimális nagyságrendű, ha K-nak van gördülőgömbje, a felső korlát pedig optimális nagyságrendű, ha K politóp.

A 6.1.2. tétel bizonyítása az 6.2., 6.3. és 6.4. alfejezetben, az 6.1.3. tételé pedig az 6.5. alfejezetben található.

7. fejezet

Közelítés véletlen körpoligonokkal

7.1. Várható értékek

Ez az alfejezet a Fodor, Kevei, Vígh [FKV14] cikken alapszik.

Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ konvex lemez, és legyenek $x_1, \ldots, x_n$ független véletlen pontok K-ból, amelyeket az egyenletes valószínűségi eloszlás szerint választunk. Jelölje K_n az $x_1, \ldots, x_n$ pontok konvex burkát. Ekkor K_n egy uniform véletlen (konvex) sokszög K-ban.

Jelölje $f_0(K_n)$ a K_n csúcsainak számát, $A(K)$ a K területét, $\Gamma(\cdot)$ pedig az Euler-féle gamma függvényt. Rényi és Sulanke klasszikus cikkükben bebizonyították (lásd [RS63, Satz 3]), hogy ha K határa C^3_+ sima, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f_0(K_n)) \cdot n^{-1/3} = \sqrt[3]{\frac{2}{3A(K)}}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\int_{\partial K}\kappa(x)^{1/3}\mathrm{d}x, \tag{7.1.1.}$$

ahol a K határán az ívhossz szerint integrálunk. Megjegyezzük, hogy az Efron-féle azonosság [Efr65] segítségével (7.1.1.)-ból azonnal következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(A(K \setminus K_n)) \cdot n^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{2A(K)^2}{3}}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\int_{\partial K}\kappa(x)^{1/3}\mathrm{d}x. \tag{7.1.2.}$$

Rényi és Sulanke a (7.1.2.) formulát közvetlenül számolta ki, lásd [RS64, Satz 1 formula (48)].

Feltéve, hogy ∂K elegendően sima és $\kappa(x) > 0$ minden $x \in \partial K$ esetén, Rényi és Sulanke megmutatták (lásd [RS64, Satz 1 formula (47)]), hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathrm{Per}(K) - \mathrm{Per}(K_n)) \cdot n^{2/3} = \frac{1}{12}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(12A(K))^{2/3}\int_{\partial K}\kappa(x)^{4/3}\mathrm{d}x. \tag{7.1.3.}$$

A disszertációnak ebben a fejezetében a fenti véletlen modell R-orsókonvex változatát vizsgáljuk. Legyen $R > 0$. Egy konvex lemezt R-orsókonvexnek nevezünk, ha előáll R sugarú zárt körlemezek metszeteként. Véges sok, R sugarú, zárt körlemez metszetét konvex R-körpoligonnak nevezzük. Legyen X olyan kompakt halmaz

$\mathbb{R}^2$-ben, amelyet tartalmaz egy R sugarú zárt körlemez. Az X-et tartalmazó összes R-orsókonvex halmaz metszetét az X R-orsókonvex burkának nevezzük, amely szintén R-orsókonvex. Az $R = 1$ esetben az 1-orsókonvexitás (illetve 1-körpoligon) helyett egyszerűen orsókonvexitást (körpoligont) mondunk. Az orsókonvexitás szó magyarázatát az adja, hogy két, legfeljebb $2R$ távolságra lévő pont R-orsókonvex burka orsó alakú, és hasonlóan a szokásos konvexitáshoz, egy R-orsókonvex halmaz bármely két pontjával együtt azok R-orsókonvex burkát is tartalmazza.

Ismert, hogy egy d-dimenziós konvex test esetén az R-orsókonvexitás tulajdonság ekvivalens azzal, hogy a test szabadon gördül egy R sugarú gömbben, illetve azzal, hogy egy R sugarú gömb Minkowski-összeadandója, lásd Schneider [Sch14, 3.1. és 3.2. alfejezet].

A következő véletlen modellt tekintjük. Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ egy R-orsókonvex lemez. Legyenek $x_1, x_2, \ldots$ független véletlen pontok S-ből, amelyeket az egyenletes eloszlás szerint választunk. Jelölje S_n^R az $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ponthalmaz R-orsókonvex burkát, amely egy uniform véletlen R-körpoligon S-ben. Fő eredményként, a Rényi és Sulanke-féle (7.1.1.), (7.1.2.) és (7.1.3.) aszimptotikus formulák R-orsókonvex analogonjait bizonyítjuk, lásd a 7.1.1., 7.1.2. és 7.1.3. tételeket.

Az orsókonvexitás bevezetését Mayertól [May35] származtatják, aki 1935-ös cikkében tekintett ilyen halmazokat. A fogalom elég természetes annak fényében, hogy euklideszi térbeli konvex testek előállnak zárt félterek metszeteként. Az orsókonvexitás esetében a félterek szerepét R sugarú gömbök veszik át. Heurisztikusan azt is mondhatjuk, hogy a szokásos konvex eset az $R = \infty$-nek felel meg.

Megjegyezzük, hogy az orsókonvexitásra különböző nevek léteznek az irodalomban. Mayer [May35] eredetileg „Überkonvexität"-nek nevezte ezt a fogalmat, és az 1930-as és 1940-es években megjelent korai cikkekben általában a Mayer-féle név fordítását használták, innen származik a hiperkonvexitás kifejezés. Fejes Tóth László R-konvexnek nevezte ezeket a halmazokat. Az orsókonvexitás újabb keletű név, amelyet például Bezdek et al. [BLNP07] és Kupitz et al. [KMP05, KMP10] kezdett használni.

Az orsókonvexitás vizsgálata visszanyúlik az 1930-as évekig, erről egy rövid áttekintés található a Danzer, Grünbaum, Klee [DGK63] cikkben. Az utóbbi években keletkezett eredményekről a következő művekben lehet tájékozódni: Bezdek [Bez10, Bez13], Bezdek et al. [BLNP07], Kupitz et al. [KMP05, KMP10].

Az orsókonvexitás fontos szerepet játszik számos problémában, ahol természetes módon felmerül egybevágó gömbök metszete. Ilyen például a konvex testek diametrális teljessége, illetve az ún. gömbi metszet tulajdonság és ezek kapcsolata állandó szélességű testekkel euklideszi és Minkowski-terekben, lásd Eggleston [Egg65], Moreno és Schneider [MS12, MS07]. Egy másik természetes példa a Tóth Bálint-féle fogyó véletlen folyamat, lásd pl. Ambrus et al. [AKV12].

A disszertáció 7.1 alfejezetének fő eredményeit az alábbi három tétel tartalmazza.

7.1.1. Tétel (Fodor, Kevei, Vígh [FKV14, Theorem 1.1]). *Legyen $R > 0$, és legyen S olyan R-orsókonvex lemez, amelynek határa C^2 sima, és amelyre teljesül, hogy*

$\kappa(x) > 1/R$ *minden* $x \in \partial S$ *esetén. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f_0(S_n^R)) \cdot n^{-1/3} = \sqrt[3]{\frac{2}{3A(S)}} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \int_{\partial S} \left(\kappa(x) - \frac{1}{R}\right)^{1/3} \mathrm{d}x, \tag{7.1.4.}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(A(S \setminus S_n^R)) \cdot n^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{2A(S)^2}{3}} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \int_{\partial S} \left(\kappa(x) - \frac{1}{R}\right)^{1/3} \mathrm{d}x. \tag{7.1.5.}$$

7.1.2. Tétel (Fodor, Kevei, Vígh [FKV14, Theorem 1.2])**.** *Legyen* $R > 0$*, és legyen* S *olyan* R*-orsókonvex lemez, amelynek határa* C^5 *sima, és amelyre teljesül, hogy* $\kappa(x) > 1/R$ *minden* $x \in \partial S$ *esetén. Ekkor*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} & \mathbb{E}(\mathrm{Per}(S) - \mathrm{Per}(S_n^R)) \cdot n^{2/3} \\ &= \frac{(12A(S))^{2/3}}{36} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \int_{\partial S} \left(\kappa(x) - \frac{1}{R}\right)^{1/3} \left(3\kappa(x) + \frac{1}{R}\right) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7.1.6.}$$

7.1.3. Tétel (Fodor, Kevei, Vígh [FKV14, Theorem 1.3])**.** *Legyen* $R > 0$*, és legyen* $S = B_R$ *egy* R *sugarú zárt körlemez. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f_0(S_n^R)) = \frac{\pi^2}{2}, \tag{7.1.7.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(A(B_R \setminus S_n^R)) \cdot n = \frac{R^2 \cdot \pi^3}{2}, \tag{7.1.8.}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathrm{Per}(B_R) - \mathrm{Per}(S_n^R)) \cdot n = \frac{R \cdot \pi^3}{2}. \tag{7.1.9.}$$

Elég meglepő, hogy a körlemezben uniform véletlen körpoligonok csúcsszámának várható értéke egy meglehetősen kis konstanshoz tart. Ez nagyjából azt jelenti, hogy ha egy R sugarú körlemezből választunk sok független véletlen pontot az egyenletes eloszlás szerint és vesszük az általuk meghatározott konvex R sugarú körpoligont, akkor annak körülbelül öt csúcsa lesz. A szokásos konvex esetben ennek a jelenségnek nincs analogonja.

Továbbá megjegyezzük, hogy ha K egy olyan szokásos konvex lemez, amelynek határa C^2_+ sima, akkor a (7.1.4.) és (7.1.5.) aszimptotikus formuláinkból rendre következnek a Rényi és Sulanke által bizonyított (7.1.1.) és (7.1.2.) formulák. Hasonló módon, ha K határa C^5_+ sima, akkor a (7.1.6.) formulánkból következik a Rényi és Sulanke-féle (7.1.3.) formula. A fentieket a disszertáció 7.1.2. alfejezetében bizonyítjuk. A 7.1.1. és 7.1.2. tételek tekinthetők Rényi és Sulanke megfelelő eredményei általánosításának.

A 7.1.1. és a 7.1.2. tételt a 7.1.4. alfejezetben, a 7.1.3. tételt pedig a 7.1.5. alfejezetben bizonyítjuk be.

7.2. Szórás

Ez az alfejezet a Fodor, Vígh [FV18] cikken alapszik.

Ebben a részben az előző alfejezetben vizsgált véletlen modellben a csúcsszám és a kimaradó terület szórását vizsgáljuk. Olyan K konvex lemezeket tekintünk, amelyek határa C^2_+ sima. Jelölje $\kappa_m(\kappa_M)$ a K határán a görbület minimumát (maximumát). Ekkor ismert (lásd pl. [Sch14, Section 3.2]), hogy egy $r_m = 1/\kappa_M$ sugarú kör szabadon gördül K-ban, illetve K szabadon siklik egy $r_M = 1/\kappa_m$ sugarú körben. Ennek következményeként K orsókonvex minden $r \geq r_M$ sugárral. Legyen $r \geq r_M$ rögzített. Jelölje a K^r_n szimbólum n K-ból választott egyenletes eloszlású, független véletlen pont r sugarú orsókonvex burkát. A K^r_n halmaz egy konvex körpoligon, ahol a határoló körívek sugara r, és K orsókonvex tulajdonsága miatt $K^r_n \subset K$. Ekkor $f_0(K^r_n)$ jelöli a csúcsok (oldalak) számát és $A(K^r_n)$ a területet.

A disszertáció előző 7.1. alfejezetében, többek között, az $f_0(K^r_n)$ csúcsszám és az $A(K \setminus K^r_n)$ kimaradó terület várható értékére bizonyítottunk aszimptotikus formulát. Ebben az alfejezetben ezen mennyiségek szórását vizsgáljuk. Véletlen politópokkal kapcsolatos mennyiségek másodrendű tulajdonságaira vonatkozó eredmények jóval kevesebben vannak, mint a várható értékre vonatkozók. Csak a közelmúltban sikerült egyes mennyiségek szórásrára korlátokat adni, illetve nagy számok törvényeit és centrális határeloszlástételeket bizonyítani. A teljesség igénye nélkül felsorolunk néhány ilyen eredményt tartalmazó cikket: Bárány, Fodor, Vígh [BFV10], Bárány, Reitzner [BR10], Bárány, Vu [BV07], Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh [BFRV09], Fodor, Hug, Ziebarth [FHZ16], Reitzner [Rei03, Rei05], Schreiber, Yukich [SY08], Thäle, Turchi, Wespi [TTW18], Turchi, Wespi [TW18], Vu [Vu05, Vu06]. Az ismert eredmények áttekintése megtalálható pl. a következő összefoglaló cikkekben: Bárány [Bár08] és Schneider [Sch18].

Ebben az alfejezetben az $f_0(K^r_n)$ és $A(K^r_n)$ mennyiségekre igazolunk aszimptotikus korlátokat. Bizonyításaink Reitzner [Rei03] gondolatmenetén alapulnak és az Efron-Stein formulát használják. Fő eredményeinket a következő tételek foglalják össze.

7.2.1. Tétel (Fodor, Vígh [FV18], Theorem 3)**.** *Legyen K olyan konvex lemez, amelynek határa C^2_+ sima. Ekkor tetszőleges $r > r_M$ esetén igazak az alábbiak:*

$$\operatorname{Var}(f_0(K^r_n)) \ll n^{\frac{1}{3}}, \tag{7.2.1.}$$

és

$$\operatorname{Var}(A(K^r_n)) \ll n^{-\frac{5}{3}}, \tag{7.2.2.}$$

ahol a konstansok csak K-tól és r-től függenek.

Abban a speciális esetben, amikor K egy r sugarú zárt körlap, a következő állításokat bizonyítjuk.

7.2.2. Tétel (Fodor, Vígh [FV18], Theorem 4)**.** *Ha K egy r sugarú zárt körlap, akkor*

$$\operatorname{Var}(f_0(K^r_n)) \approx const., \tag{7.2.3.}$$

és

$$\operatorname{Var}(A(K_n^r))) \ll n^{-2}, \tag{7.2.4.}$$

ahol a konstansok csak r-től függenek.

A 7.2.1 tételből standard gondolatmenettel (lásd pl. Bárány, Steiger [BS13, 174. o.], Reitzner [Rei03, Section 5], vagy Böröczky, Fodor, Reitzner, Vígh [BFRV09, 2294. o.]) következik a nagy számok erős törvénye is.

7.2.3. Tétel (Fodor, Vígh [FV18], Theorem 5)**.** *Legyen K olyan konvex lemez, amelynek határa C_+^2 sima. Ekkor tetszőleges $r > r_M$ esetén 1 valószínűséggel igaz, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} f_0(K_n^r) \cdot n^{-1/3} = \sqrt[3]{\frac{2}{3A(K)}}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\int_{\partial K}\left(\kappa(x) - \frac{1}{r}\right)^{1/3} \mathrm{d}x,$$

és

$$\lim_{n\to\infty} A(K \setminus K_n^r) \cdot n^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{2A(K)^2}{3}}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\int_{\partial K}\left(\kappa(x) - \frac{1}{r}\right)^{1/3} \mathrm{d}x.$$

A disszertáció 7.2.4. alfejezetében mutatunk egy lehetséges véletlen modellt C_+^2 határú konvex lemezek körülírt véletlen körpoligonokkal való közelítésére, lásd. 7.2.6. tétel és 7.2.7 következmény.

8. fejezet

Legjobb közelítések körpoligonokkal

Ez a fejezet a Fodor, Vígh [FV12] cikk egyes részeit tartalmazza.

A disszertáció 8. fejezetében síkbeli orsókonvex halmazok legjobb közelítéseit vizsgáljuk beírt, illetve körülírt konvex körpoligonokkal. A legjobb közelítés mértékét a Hausdorff-távolság, területi eltérés, és kerületi eltérés szerint mérjük. Beírt körpoligonon ebben a fejezetben azt értjük, hogy a körpoligon csúcsai mind az orsókonvex lemez határán vannak, körülírt körpoligon esetében pedig az oldalak érintik a lemez határát.

Legyen $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$ (szokásos) konvex, kompakt halmaz, amelynek belseje nem üres, és amely belsejében tartalmazza az o origót. Jelölje $A(\cdot)$ a területet. A kerületet ebben a fejezetben, a korábbiaktól eltérően az $\ell(\cdot)$ szimbólummal jelöljük.

A K_1 és K_2 halmaz területi eltérésén a következőt értjük

$$\delta_A(K_1, K_2) = A(K_1 \cup K_2) - A(K_1 \cap K_2),$$

míg kerületi eltérésén a

$$\delta_\ell(K_1, K_2) = \ell(K_1 \cup K_2) - \ell(K_1 \cap K_2)$$

mennyiséget. Ebben a fejezetben δ_H jelöli az $\mathbb{R}^2$-beli kompakt halmazok Hausdorff-távolságát.

Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, orsókonvex halmaz (azaz szabadon gördül egy egység sugarú körben), amelynek határa kétszer folytonosan differenciálható. Az S halmaz közelítéseit fogjuk vizsgálni beírt és körülírt (1 sugarú) konvex körpoligonokkal, amelyeknek legfeljebb n csúcsa van a Hausdorff-metrika, területi eltérés és kerületi eltérés szerint. Ennek alapján hat különböző problémával kell foglalkoznunk minden n-re. Jelöljön rendre S_n^H, S_n^A és S_n^ℓ ($S_{(n)}^H, S_{(n)}^A$ és $S_{(n)}^\ell$) egy olyan S-be írt (S köré írt) konvex körpoligont, amelynek legfeljebb n oldala van és távolsága S-től minimális a Hausdorff-távolság, területi eltérés illetve kerületi eltérés szerint. Ilyen körpoligonok léteznek, bár nem feltétlenül egyértelműek. Az is nyilvánvaló, hogy az extremális körpoligon és S távolsága mind a hat esetben nullához tart, ha n tart a végtelenbe. A 8. fejezet fő eredménye a következő tétel, amelyben pontos aszimptotikus formulát adunk a közelítés rendjére.

8.1.1. Tétel (Fodor, Vígh [FV12, Theorem 1]). *Legyen S kompakt, orsókonvex halmaz $\mathbb{R}^2$-ben, amelynek határa kétszer folytonosan differenciálható. Ekkor a következők igazak:*

$$\delta_\ell(S, S_n^\ell) \sim \frac{1}{24}\left(\int_{\partial S} (\kappa^2(s)-1)^{\frac{1}{3}} ds\right)^3 \cdot \frac{1}{n^2}, \tag{i}$$

$$\delta_A(S, S_n^A) \sim \frac{1}{12}\left(\int_{\partial S} (\kappa(s)-1)^{\frac{1}{3}} ds\right)^3 \cdot \frac{1}{n^2}, \tag{ii}$$

$$\delta_H(S, S_n^H) \sim \frac{1}{8}\left(\int_{\partial S} (\kappa(s)-1)^{\frac{1}{2}} ds\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}, \tag{iii}$$

$$\delta_\ell(S, S_{(n)}^\ell) \sim \frac{1}{24}\left(\int_{\partial S} (2\kappa^2(s)-3\kappa(s)+1)^{\frac{1}{3}} ds\right)^3 \cdot \frac{1}{n^2}, \tag{iv}$$

$$\delta_A(S, S_{(n)}^A) \sim \frac{1}{24}\left(\int_{\partial S} (\kappa(s)-1)^{\frac{1}{3}} ds\right)^3 \cdot \frac{1}{n^2}, \tag{v}$$

$$\delta_H(S, S_{(n)}^H) \sim \frac{1}{8}\left(\int_{\partial S} (\kappa(s)-1)^{\frac{1}{2}} ds\right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}, \tag{vi}$$

ha $n \to \infty$.

A fenti tételben az S határán a ds ívhossz szerint integrálunk.

A 8.1.1. tételben szereplő formulákhoz első hasonló állításokat Fejes Tóth László fogalmazott meg [FT53] könyvében. Ő azt az esetet tekintette, amikor egy K (szokásos) konvex lemezt közelítünk beírt és körülírt konvex n-szögekkel a Hausdorff-távolság, területi eltérés és kerületi eltérés szerint. Az általa megfogalmazott aszimptotikus formulákat McClure és Vitale [MV75] bizonyította be.

A 8.1.1. tétel bizonyításában mi is felhasználjuk a McClure és Vitale [MV75] által kifejlesztett analitikus módszert, amit az egyes esetben különböző geometriai gondolatmenetekkel kombinálunk. A McClure és Vitale [MV75] cikkből használt eszközöket a dolgozat 8.2. alfejezetében vezetjük be. Ebben a disszertációban csak a 8.1.1. tétel i), ii) és iii) részét bizonyítjuk részletesen, lásd 8.3. alfejezet. A többi rész bizonyítása megtalálható a [FV12, Section 5] cikkben.

Irodalomjegyzék

[Aff91] F. Affentranger, *The convex hull of random points with spherically symmetric distributions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **49** (1991), no. 3, 359–383 (1993).

[AKV12] G. Ambrus, P. Kevei, and V. Vígh, *The diminishing segment process*, Statist. Probab. Lett. **82** (2012), no. 1, 191–195.

[Bár08] I. Bárány, *Random points and lattice points in convex bodies*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **45** (2008), no. 3, 339–365.

[BFV10] I. Bárány, F. Fodor, and V. Vígh, *Intrinsic volumes of inscribed random polytopes in smooth convex bodies*, Adv. in Appl. Probab. **42** (2010), no. 3, 605–619.

[BR10] I. Bárány and M. Reitzner, *On the variance of random polytopes*, Adv. Math. **225** (2010), no. 4, 1986–2001.

[BS13] I. Bárány and W. Steiger, *On the variance of random polygons*, Comput. Geom. **46** (2013), no. 2, 173–180.

[BV07] I. Bárány and V. Vu, *Central limit theorems for Gaussian polytopes*, Ann. Probab. **35** (2007), no. 4, 1593–1621.

[Bez10] K. Bezdek, *Classical topics in discrete geometry*, Springer, New York, 2010.

[Bez13] K. Bezdek, *Lectures on sphere arrangements—the discrete geometric side*, Fields Institute Monographs, vol. 32, Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2013.

[BLNP07] K. Bezdek, Z. Lángi, M. Naszódi, and P. Papez, *Ball-polyhedra*, Discrete Comput. Geom. **38** (2007), no. 2, 201–230.

[BF19] K. J. Böröczky and F. Fodor, *The L_p dual Minkowski problem for $p > 1$ and $q > 0$*, J. Differential Equations **266** (2019), no. 12, 7980–8033.

[BFH10] K. J. Böröczky, F. Fodor, and D. Hug, *The mean width of random polytopes circumscribed around a convex body*, J. Lond. Math. Soc. (2) **81** (2010), no. 2, 499–523.

[BFH13] K. J. Böröczky, F. Fodor, and D. Hug, *Intrinsic volumes of random polytopes with vertices on the boundary of a convex body*, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), no. 2, 785–809.

[BFRV09] K. J. Böröczky, F. Fodor, M. Reitzner, and V. Vígh, *Mean width of random polytopes in a reasonably smooth convex body*, J. Multivariate Anal. **100** (2009), no. 10, 2287–2295.

[BS10] K. J. Böröczky and R. Schneider, *The mean width of circumscribed random polytopes*, Canad. Math. Bull. **53** (2010), no. 4, 614–628.

[Caf90a] L. Caffarelli, *A localization property of viscosity solutions to Monge-Ampère equation and their strict convexity*, Ann. Math. **131** (1990), 129-134.

[Caf90b] L. Caffarelli, *Interior $W^{2,p}$-estimates for solutions of the Monge-Ampère equation*, Ann. Math. **131** (1990), 135-150.

[CW06] K.-S. Chou and X.-J. Wang, *The L_p-Minkowski problem and the Minkowski problem in centroaffine geometry*, Adv. Math. **205** (2006), 33-83.

[DGK63] L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee, *Helly's theorem and its relatives*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, pp. 101–180.

[Efr65] B. Efron, *The convex hull of a random set of points*, Biometrika **52** (1965), 331–343.

[Egg65] H. G. Eggleston, *Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces*, Israel J. Math. **3** (1965), 163–172.

[FT53] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953.

[FHZ16] F. Fodor, D. Hug, and I. Ziebarth, *The volume of random polytopes circumscribed around a convex body*, Mathematika **62** (2016), no. 1, 283–306.

[FKV14] F. Fodor, P. Kevei, and V. Vígh, *On random disc polygons in smooth convex discs*, Adv. in Appl. Probab. **46** (2014), no. 4, 899–918.

[FV12] F. Fodor and V. Vígh, *Disc-polygonal approximations of planar spindle convex sets*, Acta Sci. Math. (Szeged) **78** (2012), no. 1-2, 331–350.

[FV18] F. Fodor and V. Vígh, *Variance estimates for random disc-polygons in smooth convex discs*, J. Appl. Probab. **55** (2018), no. 4, 1143–1157.

[HLYZ16] Y. Huang, E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, *Geometric measures in the dual Brunn-Minkowski theory and their associated Minkowski problems*, Acta Math. **216** (2016), no. 2, 325–388.

[HLYZ05] D. Hug, E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, *On the L_p Minkowski problem for polytopes*, Discrete Comput. Geom. **33** (2005), no. 4, 699–715.

[GG97] S. Glasauer and P. M. Gruber, *Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies. III*, Forum Math. **9** (1997), no. 4, 383–404.

[Gru07] P. M. Gruber, *Convex and discrete geometry*, Springer, Berlin, 2007.

[Hug00] D. Hug, *Measures, Curvatures and Currents in Convex Geometry*, 2000. Habilitationsschrift, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg i. Br.

[KMP05] Y. S. Kupitz, H. Martini, and M. A. Perles, *Finite sets in $\mathbb{R}^d$ with many diameters – a survey*, Conference on Mathematics and Applications (Bangkok, 2005), Mahidol University Press, Bangkok, 2005, pp. 91–112.

[KMP10] Y. S. Kupitz, H. Martini, and M. A. Perles, *Ball polytopes and the Vázsonyi problem*, Acta Math. Hungar. **126** (2010), no. 1-2, 99–163.

[Lut75] E. Lutwak, *Dual mixed volumes*, Pacific J. Math. **58** (1975), no. 2, 531–538.

[LYZ18] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, *L_p-dual curvature measures*, Adv. Math. **329** (2018), 85-132.

[May35] A. E. Mayer, *Eine Überkonvexität*, Math. Z. **39** (1935), no. 1, 511–531.

[MV75] D. E. McClure and R. A. Vitale, *Polygonal approximation of plane convex bodies*, J. Math. Anal. Appl. **51** (1975), no. 2, 326–358.

[MS07] J. P. Moreno and R. Schneider, *Continuity properties of the ball hull mapping*, Nonlinear Anal. **66** (2007), no. 4, 914–925.

[MS12] J. P. Moreno and R. Schneider, *Diametrically complete sets in Minkowski spaces*, Israel J. Math. **191** (2012), no. 2, 701–720.

[Rei02] M. Reitzner, *Random points on the boundary of smooth convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 6, 2243–2278.

[Rei03] M. Reitzner, *Random polytopes and the Efron-Stein jackknife inequality*, Ann. Probab. **31** (2003), no. 4, 2136–2166.

[Rei05] M. Reitzner, *Central limit theorems for random polytopes*, Probab. Theory Related Fields **133** (2005), no. 4, 483–507.

[RS63] A. Rényi and R. Sulanke, *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **2** (1963), 75–84.

[RS64] A. Rényi and R. Sulanke, *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. II*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **3** (1964), 138–147.

[Sch14] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[Sch18] R. Schneider, *Discrete aspects of stochastic geometry*, Handbook of discrete and computational geometry, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL. Third edition, 2018, pp. 299–329.

[SW08] R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and integral geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[SY08] T. Schreiber and J. E. Yukich, *Variance asymptotics and central limit theorems for generalized growth processes with applications to convex hulls and maximal points*, Ann. Probab. **36** (2008), no. 1, 363–396.

[Sch94] C. Schütt, *Random polytopes and affine surface area*, Math. Nachr. **170** (1994), 227–249.

[SW03] C. Schütt and E. Werner, *Polytopes with vertices chosen randomly from the boundary of a convex body*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., vol. 1807, Springer, Berlin, 2003, pp. 241–422.

[TTW18] C. Thäle, N. Turchi, and F. Wespi, *Random polytopes: central limit theorems for intrinsic volumes*, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018), no. 7, 3063–3071.

[TW18] N. Turchi and F. Wespi, *Limit theorems for random polytopes with vertices on convex surfaces*, Adv. in Appl. Probab. **50** (2018), no. 4, 1227–1245.

[Vu05] V. H. Vu, *Sharp concentration of random polytopes*, Geom. Funct. Anal. **15** (2005), no. 6, 1284–1318.

[Vu06] V. Vu, *Central limit theorems for random polytopes in a smooth convex set*, Adv. Math. **207** (2006), no. 1, 221–243.

[Wie78] J. A. Wieacker, *Einige Probleme der polyedrischen Approximation*, 1978. Diplomarbeit — Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg i. Br.

[Zie70] H. Ziezold, *Über die Eckenanzahl zufälliger konvexer Polygone*, Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. **5** (1970), no. 3, 296–312.