**Opponensi vélemény Fodor Ferenc**
**Convex bodies and their approximations**
**c. MTA Doktori Disszertációjáról**

A disszertáció 146 nagyalakú TEX oldalt tartalmazó, egy ábrát tartalmazó, szép kiállítású gondos munka, amely a pályázó hat cikkének anyagát öleli fel. Ezen cikkek vezető külföldi folyóiratokban jelentek meg.

A dolgozat első két fejezete egy tartalomjegyzéket, egy 13 oldalas összefoglalást majd egy 5 oldalas bevezetést tartalmaz. A további hat fejezet tartalmazza a tézisfüzetben pontosan megfogalmazott 6 tézis kifejtését az említett hat cikk alapján. A munkát egy teljes irodalomjegyzék zárja.

Minden fejezetet azon cikk adatainak pontos közlése kezdi, melyből a fejezet eredményeket tartalmaz. Mivel az irodalomban nincs külön kiemelve a dolgozat alapját képező 6 cikk ez egyszerűsíti az olvasó helyzetét az eredmények áttekintésében.

**A 3. fejezet** alapját képező munka a J. Differential Equation folyóiratban jelent meg a társszerző Ifj. Böröczky Károly. A kapcsolódó állításokat a szerző az alábbi módon foglalja össze a tézisfüzet első tézisében:

*Megoldottuk az $L_p$ duális Minkowski probléma egzisztenciális részét a $p > 1$, $q > 0$ esetben, ami lényegében a kapcsolódó Monge-Amper-egyenlet megoldását is jelenti, ha a vizsgált mérték abszolút folytonos a Hausdorff-mértékre nézve a gömbfelületen. Továbbá vizsgáltuk a megoldás simaságát a Monge-Amper-egyenlet regularitási tulajdonságainak megfelelően.*

A dolgozat (és így a 3.fejezet) egy klasszikus és igen fontos örökzöld Minkowski problémához kapcsolódik. Az eredeti kérdés az, hogy milyen a gömbfelületen értelmezett mértékek geometrizálhatók abban az értelemben, hogy megegyeznek valamely konvex test által definiált felszínmértékkel. A kérdést Minkowski oldotta meg olyan mértékekre, melyek abszolút-folytonosak a Lebesgue mértékre nézve, az általános eset megoldása pedig Alexandrov (illetve Fenchel és Jensen) nevéhez fűződik. A lezártnak tűnő kérdés új lendületet nyert Lutwak 70-es évekbeli munkásságával, aki elindítja az ú.n. duális Brunn-Minkowski elmélet kidolgozását, melyben Minkowski összeg helyett a radiális összeg fogalma jelenik meg. Tovább általánosítható a feladat, ha az Euklideszi egységgömb helyett egy az origót belsejében tartalmazó origóra nézve csillagszerű halmazt tekintünk egységgömbnek; a legáltalánosabb formához pedig úgy jutunk, ha a szokásos felszín mérték helyett a problémában az általánosabb $L_p$ felszín mértéket tekintjük a vizsgálat tárgyának. A szerzők ezen legáltalánosabb feladatra találnak megoldást. Abban az esetben, amikor a feladat megoldható, vizsgálható a megoldás simasága is. A duális $L_p$ probléma esetén is vannak olyan paraméterértékek, amikor a megoldás határára esik az origó. ilyenkor a támaszfüggvénynek is zérushelye van az $S^{n-1}$-en így a duális $L_p$ probléma kimondását és a végeredményt is módosítani kell, a 3.1.2. Tétel tartalmazza ezt az eredményt. A megoldások simaságáról is találhatók további tételek ebben a fejezetben és a hozzátartozó cikkben egyaránt.

**A negyedik** és az ötödik fejezet a "Súlyozott térfogatapproximáció beírt politópokkal" illetve a "Körülírt véletlen politópok" címet viselik. Mindkettő a J. London Math. Soc folyóiratban megjelent Böröczky, Fodor, Hug cikk tételeit tartalmazza, mely véletlen politópokkal való közelítések aszimptotikáját vizsgálja. A negyedik fejezetben egy olyan tételt bizonyít a szerző (4.1.1 Tétel), mely a disszertáció legfontosabb eredményei közé sorolható. A 2.Tézis megfogalmazása szerint:

*Aszimptotikus formulát bizonyítottunk d-dimenziós térbeli konvex test és olyan véletlen politóp súlyozott térfogatkülönbségének várható értékére $n \to \infty$ mellett, amely a konvex testből adott valószínűségi sűrüségfüggvény által meghatározott elosztás szerint választott n független véletlen pont konvex burka. A valószinűségi sűrűségfüggvényről és a súlyfüggvényről feltesszük, hogy a konvex test határának egy környezetében folytonos, a sűrüségfüggvény pedig pozitív is.*

A tétel rendkívül általános, a szerzők jelentősen nehezítik a dolgukat a test határára vonatkozó extra feltevések kigyomlálásával. A bizonyítás gondolatmenetét Schütt véletlen politópokról és az affin felszínmértékről 1994-ben írt cikke motiválta. Ebben a cikkben mind a súlyfüggvény mind a sűrűségfüggvény az identitás, mutatva, hogy ezen a ponton is jelentős általánosítás történt; ugyanakkor egy ottani lemma hiányzó bizonyítása helyett azt egy szélesebb körben alkalmazható egyszerűbb állításra cserélik (4.2.2 Lemma). A 4.1.1 Tétel általánossága az 5. fejezet eredményeinek bizonyításához is kell, így ezt kell értékelnem ezen két fejezet központi állításának. Az eredmény egy közvetlen következménye a 4.1.2 Következmény, mely Efron egy a véletlen politóp csúcsai számának várhatóértékéről szóló gondolatmenete szerint ezen érték aszimptotikus értékét adja meg pontosan. Sajnos sem a dolgozatból sem a tézisfüzetből nem derül ki az, hogy a három formula (a (4.1.2) formula, az Efron formula a 4.1.2 Következmény előtt illetve a 4.1.2 Következményben szereplő formula) $\lambda(x)$ és $\rho(x)$ függvényei milyen viszonyban vannak egymással, azt látom, hogy a következmény formálisan igaz, ha a két függvény megegyezik és formális következtetést más esetben nem lehet levonni. (Mivel a 4.1.2 Következmény formulájában $\lambda(x)$ nem szerepel, de a szövegezésben igen ez azt sejteti, hogy itt keresendő a sajtóhiba.)

**Áttérve az ötödik fejezet** eredményeinek ismertetésére először egy speciálisan definiált $\mu_K$ valószínűségi mértékkel kell megbarátkoznunk, mely definíciója a $K$ átlagszélességéhez kapcsolódik. Független $\mu_K$ eloszlású véletlen hipersíkok definiálják a $K$-körüli véletlen politópot. A valószínűségi mértékkel együtt az átlagszélesség várható értékének aszimptotikája kerül célkeresztbe, mivel a további bizonyítások a polaritás alkalmazásával az előző fejezetben bizonyított térfogatra vonatkozó tételre támaszkodnak. Az 5.1.1 illetve 5.1.2 tételek vannak bizonyítva a dolgozatban és idézve a tézis füzetben, de az eredeti cikkben az ezeknél általánosabb a dolgozatban 5.2.2 illetve 5.2.3 tételként jegyzett állítások vannak igazolva. Klasszikus geometriai vizsgálatok kapcsán a beírt poliéderekre vonatkozó állítások adaptálása körülírt poliéderekre általában nem változtatja a célfüggvényt, azaz, ha térfogatokról szól a beírt poliéderekről szóló tétel, akkor szintén térfogatokról szokott szólni az analóg állítás körülírt poléderekre. Itt a polaritás alkalmazása indokolja az átlagszélességre vonatkozó állítás kimondását és szintén ennek köszönhető, hogy a nem könnyen felépített $c_d$ konstans bukkan fel az ötödik fejezet eredményeiben is. A következő kérdés a (4.1.2) formula által definiált "véletlen felszinmérték" fogalmának "folytonosságára" kérdez rá:

- **Mit lehet mondani a**

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\rho, K_\varepsilon} \int\limits_{K_\varepsilon \setminus K_{(n)}} \lambda(x) dx$$

**mennyiségről?**

Igez-e hogy a

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{d+1}}\mathbb{E}_{\rho,K} \int\limits_{K\setminus K_{(n)}} \lambda(x)dx$$

mennyiséghez tart?

**A hatodik fejezet** véletlen beírt poliéderek vegyes térfogatainak várható értékeiről szól. Ez is az előző két fejezet szerzőhármasának egy további a Trans. Amer. Math. Soc.-ban megjelent cikkén alapul, mintegy folytatva a korábbi vizsgálatokat. Most a konvex test határán definiált sűrüségfüggvény és valószínűségi mérték van rögzítve és a határon választunk független és véletlen módon $n$ pontot a valószínűségi eloszlásnak megfelelően. A pontok konvex burka adja a véletlen politópot, mely vegyes térfogatai várható értékének az eltérése a test ugyanezen vegyes térfogatától képezi az aszimptotikus vizsgálat tárgyát. Az eredményben szereplő aszimptotikát $C^2_+$ határú konvex testekre Reitzner bizonyította 2002-ben, ezt terjesztette 2003-ban Schütt és Werner ki olyan testekre, melyeknek van belső $r$ sugarú gördülő gömbje és ugyanakkor szabadon gördülnek egy $R$ sugarú gömbben.

A disszertációban idézett, a szerzőhármastól származó új bizonyítás csak azt feltételezi, hogy a konvex testnek van belső gördülő gömbje. (Ez azt is jelenti, hogy lehet pozitív mértékű darabon is nulla szorzatgörbület a test határán. Ez a jelenség az ilyen típusú állításokban tipikusan nem megengedett.) Világos, hogy a bizonyításnak lényegesen különbözni kell a korábbi bizonyításoktól. Az új gondolatot szintén a 4. fejezet vizsgálatai inspirálták, ahol súlyozott térfogatapproximáció játszotta a szerepet. A gondolatmenet formális adoptálásának a nehézséget a véletlen poliéder csúcspontjainak választására vonatkozó megszorítás jelentette (miszerint nem a testből, hanem csak annak határáról választhatjuk a pontokat). A megvalósítás (még a disszertációban letisztult változatban is) egy komoly számolásokat tartalmazó hosszú bizonyítást eredményez.

A fejezet a $V_1$ vegyes térfogat tekintetében pontos alsó illetve felső korlátra vonatkozó eredményt tartalmaz, egy még általánosabb esetben, hiszen a gördülő gömb feltétel sincs már megkövetelve a konvex testre. Az alsó korlát a gördülő gömbbel rendelkező testek esetén valósul meg, míg a felső korlát a politópok esetén áll fenn. A kapcsolódó tétel a 6.1.3 Tétel, ami önmagában is ezért jelentőséggel bír. Ennek az állításnak is komoly történeti előzményei vannak, mutatva, hogy nem triviális általánosítás található a dolgozatban.

**A hetedik fejezet** két cikk eredményeit tartalmazza, melyek közül az elsőt Kevei Péterrel és Vígh Viktorral, a másodikat Vígh Viktorral írta a szerző. Ezek megjelenési helyei az Adv. in Appl. Probab. illetve J. Appl. Probab. folyóiratok. Mindkettőben klasszikus véletlen poligonok geometria adatai várhatóértékének aszimptotikájáról szóló eredmények találhatók, orsókonvex lemezek véletlen körpoligonokra vonatkozó aszimptotikáira átdolgozva. Az első cikk a várhatóértékekről a második a szórásokról szól. Találunk itt olyan eredményt is, mely jelentősen eltér a standard konvexitás alkalmazása esetén megvalósuló lehetőségektől. Meglepő, például, hogy a körlemezben az egyenletes eloszlás szerint választott csúcsokkal rendelkező véletlen körpoligonok csúcsszáma várhatóértékének a határértéke a $\pi^2/2$ értékű konstans. Minden probléma általánosításnál fontos kérdés, hogy az általánosabb probléma megoldása a megfelelő speciális esetben visszaadja-e a speciális probléma megoldását. Jelen esetben az új probléma határ eseteként kapjuk vissza a kiindulási problémát. Meggyőző, hogy az eredmények ugyanennél a határátmenetnél vissza adják a klasszikus eredményeket (a dolgozatbeli simasági feltételek automatikus átírása mellett).

Az orsókonvexitás fogalma először Mayer egy 1935-ös cikkében bukkan fel hiperkonvexitás néven. Feltűnő, hogy az orsókonvexitáshoz kapcsolódó aszimptotikus állítások igen erős simasági feltételek mellett teljesülnek (a 7.1.1 Tételben a határ $C^2$ sima a 7.1.2 Tételben $C^5$ simaságú míg a 7.1.3 Tétel a körlapról szól). Ez két természetes kérdést vet fel:

- **A 7.1.1 illetve 7.1.2 tételek beli simasági feltételek a Taylor közelítés szükséges nagyságrendjéből a bizonyítás alapján adódnak. Történt-e vizsgálat ezen feltételek gyengíthetőségével kapcsolatosan?**
- **Az orsókonvexitás fogalma természetes módon értelmezhető Minkowski terekben (véges dimenziós Banach terekben), így az összes felvetett probléma átfogalmazható ebbe a környezetbe. A vizsgált geometriai mennyiségek léteznek, de tipikusan nem affin invariánsak; az analitikus apparátus kidolgozott így a bizonyításokhoz kapcsolódó lokális eszköztár a norma megfelelő simasága mellett alkalmazható. A kérdés az, hogy közvetlen átfogalmazása a bizonyításoknak lehetséges-e? (Ezek mennyire támaszkodnak olyan metrikus összefüggésekre, melyek jelentősen új számításokat követelnek általános norma esetén?)**

A fejezet második cikke az első direkt folytatása, azonban adott $r$-re vonatkozó orsókonvex alaplemezek helyett pozitív görbületű határral rendelkező konvex lemezeket tekintünk. Ezek orsókonvexek minden olyan értékre, mely meghaladja a maximális görbületi sugarat. A vizsgált geometriai mennyiségek (az alaplemezből egyenletes eloszlás szerint véletlenül és függetlenül választott pontok orsókonvex burkában) a csúcsok száma illetve a terület. Ezen mennyiségek szórását akarjuk becsülni. Külön vizsgálandó a körlap esete mert az általános feltételrendszernek a körlap nem felel meg. A kapcsolódó eredmények a 7.2.2 Tételben vannak összefoglalva. A fejezetben találunk még centrális határeloszlás tételeket, az általános orsókonvex lemez esetére (itt is a körlapot ki kell zárni a megfelelő görbületre vonatkozó feltétellel). A fejezet végén a szerzők definiálnak egy olyan valószínűségi modellt, mely $R_3^2$ határú konvex lemezek körülírt véletlen körpoligonokkal való közelítését tudja kezelni. Az ötlet itt is a dualitás, melynek egy speciális formája adható meg az adott $r$ sugárral rendelkező körpoligonok osztályára. Érdekes tény, hogy ezen dualitás fogalomnak nincs megfelelője a lineáris konvexitás elméletében.

A **nyolcadik fejezet** szintén körpoligonokkal foglalkozik, de ezúttal nem játszik szerepet a véletlen. A kérdés klasszikus, síkbeli orsókonvex halmazok legjobb közelítéseit vizsgálják a szerzők, beírt illetve körülírt körpoligonokkal. A fejezet alapját adó cikk egy Vigh Viktorral közös, az Acta Sci. Math. (Szeged) folyóiratban megjelent publikáció. Aszimptotikus eredményeket kapunk a beleírt és körülírt körpoligonok és a vizsgált lemez távolságára, ahol a távolságot kerületi eltérés, területi eltérés illetve Hausdorff metrika szerint is tekintjük. Ez 6 különböző formulát jelent, melyek közül a dolgozatban a beírt poligonokra vonatkozók vannak bizonyítva. A bizonyítás magja McClure és Vitali 1975-ben megjelent cikkének két általános tétele, melyet alkalmazni lehet a szerzők által vizsgált probléma aszimptotikájának a meghatározására is. Mindezek ellenére a bonyolúlt feltételrendszerek ellenőrzése, az azokban szereplő általános függvények konkrét formájának a megkeresése nem egyszerű feladat, melyet a szerzők ötletesen és néha technikás számolásokkal oldottak meg.

**Rátérve a dolgozat értékelésére** leszögezhetjük, hogy a disszertáció a modern geometriai kutatások fősodrásához tartozó területekhez szól hozzá, eredeti és igen általános módon. A szerzőnek a témakör vezető egyéniségeivel illetve fiatal tanítványával írt olyan cikkein alapul, melyek vezető folyóiratokban jelentek meg. A matematikai tartalom messze megfelel a szokásos elvárásoknak, a szerző nagy rutinnal használja az integrálgeometria, geometriai mértékelmélet, konvex geometria, differenciálgeometria eszközeit, otthonosan mozog mind a technikai jellegű hosszas számolások, mind a ötletes rövid bizonyítások világában. A dolgozat stílusa, szerkezete, áttekinthetősége, nyelvhasználata egyaránt elsőosztályú, lényegében nem tartalmaz sajtóhibát, ami egy ilyen terjedelmű munkában kíváló teljesítmény. A tézisek megfogalmazása tömör és világos, a dolgozat tartalma egységes, melyben a központi szerepet a 4. 5. és 6. fejezet tartalmilag összekapcsolható eredményei adják. Új fogalmak bevezetése nem jellemző, de rugalmasan és sikeresen kapcsolódik olyan közelmúltban megjelent fogalmakhoz, melyek a jelen kutatások fókuszába kerültek, ahogy azt a 7. illetve 8. fejezet eredményeiből láthatjuk. Mint geométer egy igazi kritikát kell megfogalmaznom, a teljes dolgozatban mindössze egy (nagyon kicsi) ábrát találtam. Ez a megértést és így a haladást az olvasásban nehezíti. (Az ok nyilván a disszertáció oldalszámára vonatkozó korlátozás, ezért negatívumként nem rovom fel.)

A fentiekből látszik, hogy a disszertáció anyaga megfelel az MTA doktorával szemben támasztható követelményeknek. **Javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását. Továbbá melegen javaslom a pályázónak az MTA doktora cím odaítélését.**

2021 január 15

G.Horváth Ákos
MTA Doktora