Opponensi vélemény
Fodor Ferenc
„Convex bodies and their approximations” című
MTA doktori disszertációjához

A vizsgált disszertáció egy 136+9 oldal hosszú, alapos, jól megírt munka. A dolgozat a szerző (társszerzőkkel együtt írt) hat cikkének anyagát mutatja be a konvex geometria és a sztochasztikus geometria témaköréből, melyek mindegyike rangos, nemzetközi referált folyóiratban jelent meg. A dolgozat képeket nem tartalmaz, de a geometriai témája ellenére a szöveg érthető és könnyen értelmezhető képek segítsége nélkül is.

A disszertáció egy négy oldalas összefoglalással kezdődik, melyben a szerző hat tézis formájában felsorolja a dolgozat fő eredményeit, majd egy kilenc oldalas bevezetésben ismerteti a vizsgált problémák szakirodalomban elfoglalt helyét, áttekinti az azokhoz kapcsolódó, már ismert eredményeket, és bemutatja a megoldásukhoz szükséges eszközöket és a dolgozatban használt terminológiát és jelölésrendszert.

A dolgozat lényegi része a 3-8. fejezet, melyben a szerző fejezetenként egy-egy tézisponthoz kapcsolódó eredményeit ismerteti.

A harmadik fejezet témája az L_p-duális Minkowski probléma. Ez a probléma a klasszikus Minkowski problémára vezethető vissza, mely szükséges és elégséges feltételt kér arra, hogy melyek azok az n-dimenziós egységsugarú gömb határán definiált Borel mértékek, melyek előállnak egy n-dimenziós konvex test felületi mértékeként; ezen probléma egy fontos speciális esete a kérdés diszkrét mértékekre (konvex politópokra) vonatkozó része. Konvex testek felületi mértékének egy általánosítása az origót a belsejükben tartalmazó konvex testekre definiált, úgynevezett Q-ra vonatkozó L_p q-adik duális görbületi mérték, ahol $p, q \in \mathbb{R}$, és Q egy origót a belsejében tartalmazó kompakt, csillagszerű halmaz, és az L_p duális Minkowski probléma szükséges és elégséges feltételt kér arra, hogy adott p, q, Q paraméterek esetén egy μ Borel-mérték mikor áll elő egy alkalmas K konvex test Q-ra vonatkozó L_p q-adik duális görbületi mértékeként. A szerző a fejezetben megválaszolja ezt a kérdést diszkrét mértékekre $p > 1, q > 0$ esetén, tetszőleges mértékre $p > 1, p > q > 0$ esetén azon általánosabb esetben, ahol a konvex test az origót a határában is tartalmazhatja, valamint két tételben vizsgálja a problémára kapott megoldások simaságát. A disszertáció a két egzisztenciára vonatkozó tételnek csak a $Q = B^n$ esetre vonatkozó bizonyítását közli.

A negyedik fejezet egy konvex test beírt politópokkal vett közelítésével foglalkozik az alábbi formában. Legyen ρ egy K konvex testen definiált valószínűségi sűrűségfüggvény, és λ egy K-n integrálható függvény, melyek folytonosak K határának egy környezetében, és ρ itt pozitív. Válasszunk K-ból n pontot egymástól függetlenül ρ eloszlása szerint. A fejezet fő eredménye egy aszimptotikus formula $n \to \infty$ esetén K és az n pont konvex burka különbségének λ-val súlyozott térfogatának várható értékére.

Az ötödik fejezet az alábbi duális problémát tárgyalja. Adott K konvex testre legyen K_1 a K-tól legfeljebb 1 távolságra levő pontok halmaza, $\mathcal{H}_K$ azon hipersíkok családja, melyek metszik K_1-et és melyek nem metszik K belsejét, és tekintsük azon egyértelműen létező, egybevágóság-invariáns μ Borel-mértéket, melyben minden M konvex testre az őt metsző hipersíkok mértéke M átlagszélessége. Ekkor $\frac{1}{2}\mu$ $\mathcal{H}_K$-ra vett μ_K megszorítása egy valószínűségi mérték. Válasszunk ezen valószínűségi mérték szerint n hipersíkot $\mathcal{H}_K$-ból egymástól függetlenül. A fejezet fő eredménye egy aszimptotikus formula a fenti hipersíkok meghatározta, K-tartalmazó konvex politóp és K_1 metszete átlagszélességének és K átlagszélességének különbségére, valamint az előbbi test hiperlapjainak számára.

Legyen K egy konvex test, melynek határa C^2-differenciálható és pozitív Gauss görbületű, és legyen ρ egy pozitív, folytonos valószínűségi sűrűségfüggvény K határán. Reitzner egy 2002-es eredménye aszimptotikus formulát ad n pont konvex burkának j-edik belső térfogatának várható értékére, ahol a pontokat egymástól függetlenül választjuk ρ szerint K határáról. A hatodik fejezet első eredménye ezt a formulát általánosítja tetszőleges K konvex testre, melynek bármely határpontjához létezik egy belülről érintő ε-sugarú gömb, ahol ε értéke a ponttól független. A fejezet második eredménye azt mutatja, hogy (legalábbis $j = 1$ esetén) ez a feltétel nem elhagyható: általános esetben az aszimptotikus formulában szereplő konstans együttható egy intervallumban mozog, melynek egyik végpontja pl. a fenti feltételt kielégítő konvex testek, másik végpontja konvex politópok esetén vétetik fel.

A hetedik fejezet a jelölt orsókonvex síkidomok körpoligonokkal való véletlen közelítéseivel foglalkozik, ahol egy síkidom R-orsókonvex, ha előáll valahány R sugarú zárt körlemez metszeteként, és R-körpoligon, ha előáll véges sok R sugarú zárt körlemez metszeteként. Egy halmaz R-orsókonvex burka a halmazt tartalmazó R-sugarú zárt körlemezek metszete, ha létezik; egy véges halmaz R-orsókonvex burka, ha létezik, egy R-körpoligon. A fejezet aszimptotikus formulákat ismertet adott K orsókonvex síkidomnak n darab, K-ból uniform módon, egymástól függetlenül választott pont R-orsókonvex burka K-tól vett eltérésének várható értékére, ahol az eltérést a két halmaz területének, kerületének különbségeként, illetve Hausdorff-távolságaként mérjük, és K C^2-sima síkidom, mely határának görbülete mindenhol $\frac{1}{R}$-nél nagyobb, illetve ha K egy R-sugarú zárt körlemez. A fejezetben emellett találhatunk becsléseket a fenti mennyiségek varianciájára is, és röviden megismerhetjük a szerző köréírt körpoligonokra vonatkozó hasonló eredményeit is.

A nyolcadik fejezet orsókonvex síkidomok adott csúcszámú beírt/köréírt körpoligonokkal való legjobb közelítéseivel foglalkozik, és aszimptotikus formulákat igazol ezen körpoligonok területére, kerületére, és a síkidomtól vett Hausdorff-távolságára.

A disszertáció téziseiben szereplő eredményeket új (számos és releváns) eredménynek elfogadom. Ezek véleményem szerint bőségesen elegendőek az MTA doktori címhez előírt követelmények teljesítésére. A dolgozat világossá teszi, hogy a pályázó alaposan elsajátította a geometria, ezen belül különösen a konvex geometria, a sztochasztikus geometria és a differenciálgeometria témaköreit, de otthonosan mozog az analízis, a mértékelmélet, valószínűségszámítás és a lineáris algebra területein belül is, és ezek eszköztárát rutinosan és kreatívan alkalmazta a dolgozatban ismertetett bizonyításokban.

A fentiek alapján javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását és támogatom a jelöltnek az MTA doktora cím odaítélését.

Bicske, 2021.01.20.

Lángi Zsolt

Lángi Zsolt, PhD