OPPONENSI VÉLEMÉNY
FODOR FERENC
CONVEX BODIES AND THEIR APPROXIMATIONS
C. AKADÉMIAI DOKTORI DISSZERTÁCIÓJÁRÓL

A disszertáció 146 oldal terjedelmű, szép kiállítású, gondos munka.

Az 1. fejezet, amely egy összefoglalás, lényegében a tézisekkel egyezik meg, de kissé kibővítve. A 2. fejezet a bevezetés, amely egy történeti áttekintésről, és abban elhelyezve a disszertáció eredményeinek ismertetéséről szól, és még egy jelöléseket és alapdefiniciókat tartalmazó részből áll. A 3.-8. fejezetek a disszertáció érdemi része, amelyek a jelölt eredményeit tartalmazzák.

A disszertáció témája természetszerűen két részre osztható. A 3. fejezet az L_p-duális Minkowski problémáról szól, míg a 4.-8. fejezetek különféle approximációs kérdéseket vizsgálnak.

A disszertáció olvashatóságát nagyban megkönnyíti, hogy minden fejezetnek az első paragrafusában kimondja az ott bizonyítandó tételeket (kivéve a 7. fejezetet, ahol ugyanezt a 7.1 és a 7.2 alfejezeteknél teszi meg), majd a fejezet többi része a bizonyításokat tartalmazza. Megjegyzendő, hogy a kimondott tételek (teljes) bizonyítását nem mindig adja meg, hanem időnként csak utal az eredeti cikkeire.

Most rátérek a disszertációbeli eredmények szemelvényes ismertetésére.

3. fejezet

A 3. fejezetben öt tétel szerepel, 3.1.1-3.1.5. Ezek közül csak a 3.1.1 és a 3.1.2 tételek bizonyítását adja meg, de azokat is csak abban az esetben, ha a bennük szereplő Q test B^n-nel egyenlő. A viszonylag sok definíció miatt a definíciókat megismételni nem tudom, csak a disszertációra tudok utalni. Mindkét ezen tételben a kiindulás egy diszkrét, ill. véges μ Borel mérték S^{n-1}-en, amely nincs koncentrálva semmilyen zárt félgömbre, és $p > 1$ és $q > 0$ és $p \neq q$. A 3.3.1 tételben bizonyítja egy konvex P politóp létezését, amelyre $0 \in \operatorname{int} P$, és amelyre az L_p szerinti q-adik duális görbületi mérték éppen μ. A 3.2.2 tételben egy 0-t tartalmazó konvex K test létezését bizonyitja, amelynek felületén csak egy 0 mértékű halmazon lehet olyan u külső egységnormális, amelyre a támaszfüggvény értéke 0 (ez a 3.3.1 tétel esetében ez éppen a $0 \in \operatorname{int} P$ feltétel), és amelyre az előző mérték éppen μ (pontosabban ezt az egyenlőséget egy nevezővel átszorzott formában adja meg, nehogy 0-val kelljen osztani). Továbbá $p > q$ esetén $0 \in \operatorname{int} K$.

A 3.1.1 tétel bizonyításában a P poliédert a klasszikus esethez analóg módon egy véges sok változójú extrémumprobléma megoldása segítségével találja meg. Ezután ebből a 3.3.2 tétel bizonyítása, szintén a klasszikus esethez analóg módon, egy határátmenettel történik. Itt természetesen garantálni kell, hogy a beírt gömb sugara pozitív maradjon, és a köréírt gömb sugara véges maradjon. Továbbá használja, hogy $q > 0$-ra, és 0-t tartalmazó konvex testekre a q-adik duális "intrinsic" térfogat folytonosan függ a testtől, és a q-adik duális görbületi mérték gyengén folytonosan függ a testtől. Mindezek részletei 26 oldalt tesznek ki, 16 segédállítással, és összességében ez egy eléggé komplikált bizonyítás. Viszont, mivel jól van megírva, könnyen lehet követni.

A bizonyítás nélkül megadott 3.1.3-3.1.5 tételek a 3.1.2 tételnek olyan variánsai, hogy ha a μ mérték elég "szép", azaz a Lebesgue mértékre abszolút folytonos, és aszerinti Radon-Nikodým deriváltja bizonyos regularitási feltételeknek eleget tesz, akkor a K test is bizonyos, jobb regularitási feltételeknek tesz eleget. Ehhez Monge-Ampère típusú egyenletek megoldásainak regularitását kell bizonyítani, ha az adatok elég szépek.

4. FEJEZET

A 4. és 5. fejezetben konvex testek approximációját vizsgálja beírt, ill. körülírt konvex politópokkal. Ezen azt érti, hogy a politóp a test része, ill. a testet tartalmazza. A csúcsoknak nem kell a test határán lenni (ez az eset a 6. fejezet tárgya lesz), sem pedig a hiperlapoknak nem kell támaszhipersíkokat kifeszíteni. A két kérdés között egy érezhető dualitás van, és valóban az 5. fejezet eredményei dualizálással fognak következni a 4. fejezet eredményeiből. Erre a célra tekintettel, a 4. fejezetben a problémát elegendő általánosságban vizsgálja, hogy a polarizálás menjen.

Tehát a 4. fejezetben a következő kérdést vizsgálja. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test, símasági feltételek nélkül. Ha K-ban veszünk n vé1etlen, egyenletes eloszlású, független pontot, arra jól ismert, hogy azok konvex burkának térfogatát levonva a test térfogatából, a különbség aszimptotikusan konstansszor $V(K)^{2/(d+1)}$-szer $n^{-2/(d+1)}$-szer a test affinfelszíne, ahol az affinfelszín a Gauss görbület $1/(d+1)$-edik hatványának felületi integrálja, a $\mathcal{H}^{d-1}$ mérték szerint (l. disszertáció, 76. oldal, legalsó sor). Itt a $V(K)^{2/(d+1)}$ tényezőt az integráljel alá bevihetjük, mint a K-beli egyenletes eloszlás $1/V(K)$ sűrűségfüggvényének $-2/(d+1)$-egyedik hatványát. Megjegyzendő, hogy a Gauss görbület majdnem mindenütt létezik ∂K-n, és mérhető, így ez a integrál értelmes. Továbbá az ekviaffin izoperimetrikus egyenlőtlenség szerint (l. disszertáció, 70-edik oldal) ez az integrál becsülhető a térfogat egy pozitív hatványának egy konstansszorosával, így speciálisan véges.

Ennek a következő általánosítását tekinti a szerző. Legyen ϱ egy korlátos, mérhető valószínűségi sűrűségfüggvény K-n, amely szerint választja a pontokat K-ból, és egy $\lambda \in L_1(K)$ súlyfüggvény, amivel súlyozza a kimaradó térfogatot (értéke lehet negatív is). Továbbá ∂K-nak egy K-re vonatkoztatott környezetében legyenek ϱ és λ folytonosak, ezenkívül ϱ még pozitív is. Ekkor a 4.1.1 tétel szerint a véletlen politópból kimaradó, a λ súlyfüggvénnyel súlyozott térfogat várható értéke aszimptotikusan konstansszor $n^{-2/(d+1)}$-szer egy integrál ∂K-n, a $\mathcal{H}^{d-1}$ mérték szerint. Az integrandus a Gauss görbület $1/(d+1)$-edik hatványa, megszorozva $\varrho(x)^{-2/(d+1)}\lambda(x)$-szel.

A 4.1.1 tételnek következménye a 4.1.2 korollárium. Ez a fenti véletlen politóp csúcsszámának várható értékét aszimptotikusan meghatározza, mint konstansszor $n^{(d-1)/(d+1)}$-szer egy integrál ∂K-n, a $\mathcal{H}^{d-1}$ mérték szerint. Az integrandus a Gauss görbület $1/(d+1)$-edik hatványa, megszorozva $\varrho(x)^{(d-1)/(d+1)}$-gyel.

A 4.1 paragrafus további részében vázolja a 4.1.1 tétel bizonyításának lépéseit, ami jól is jön az olvasónak, mivel ez a bizonyítás 13 oldalt tesz ki, és 6 lemmát tartalmaz.

5. FEJEZET

Az 5. fejezetben tér rá a köréírt politópokkal való közelítésre. Itt először a megfelelő valószínűségi modellt vezeti be. A hipersíkok által alkotott affin Grassmann sokaságon van – mégpedig konstans szorzó erejéig egyetlen – egybevágóságinvariáns lokálisan véges Borel mérték. Ezt úgy normálja, hogy bármely konvex testet metsző hipersíkok mértéke annak átlagszélessége legyen. Ez a mérték az egész affin Grassmann sokaságon persze végtelen, de ennek egy alkalmas, 2 mértékű részét tekinti. Ez a rész azon hipersíkok halmaza, amelyek int K-t nem metszik, de K-nak 1 sugarú paralleltartományát metszik. A mérték megszorítását erre a részhalmazra elosztja 2-vel, így kap ezen a részhalmazon egy valószínűségi mértéket, ami lesz a vizsgált modell. Mivel n hipersík által határolt belső félterek metszete pozitív valószíséggel korlátlan, ezért a térfogat várható értéke végtelen. Emiatt ezt a poliedrális halmazt elmetszi a K konvex test 1 sugarú paralleltartományával, K_1-gyel. Itt az elmetsző K_1 választása esetleges, más K-t belsejében tartalmazó konvex testtel is helyettesíthetné. Ezzel szemben a modell K_1 választásától lényegesen függ, ami egyszersmind egy távolságegységet is kitüntet. (Így lehetséges, hogy az 5.1.1 tételbeli távolság dimenziójú mennyiség, és az 5.1.2 tételbeli távolság a 0-adikon dimenziójú mennyiség ugyanazzal az integrállal adható meg.)

Az 5.1.1 tételben belátja, hogy a véletlen poliedrális halmaz és K_1 metszetének és K-nak átlagszélességei különbsége aszimptotikusan konstansszor $n^{-2/(d+1)}$-szer egy integrál ∂K-n, ahol az integrandus a szorzatgörbületnek $d/(d+1)$-edik hatványa. Az 5.1.2 tételben belátja, hogy a véletlen poliedrális halmaz hiperlapjai számának várható értéke aszimptotikusan konstansszor $n^{(d-1)/(d+1)}$-szer az előző integrál ∂K-n.

Az 5.2.2 tétel az 5.1.1 tételnek a súlyozott változata. A fenti valószínűségi mérték helyett egy másik valószínűségi mértéket tekint, amely az előzőre abszolút folytonos, és amelynek Radon-Nikodým deriváltja – tehát a súlyfüggvény – pozitív és folytonos a K-hoz elég közeli hipersíkokban. Ezenkívül felteszi, hogy $0 \in \operatorname{int} K$. Az 5.1.2 tételbeli formula helyett egy olyan formulát kap, ahol annyi a különbség, hogy az integrandus meg van szorozva a súlyfüggvénynek a $\partial K \ni x$-ben vett (majdnem mindenütt egyértelműen létező) külső egységnormalisától függő helyen vett értékének $-2/(d+1)$-edik hatványával.

Az 5.2.2 tételt alkalmasan specializálva a jobb oldalon szereplő integrál a K^* poláris konvex testnek affinfelszínével lesz egyenlő, amely felülől becsülhető konstansszor a K^* térfogatának egy hatványával. Mindezekből következik hogy a 5.1.1, 5.1.2, 5.2.2 és 5.2.3 tételekben szereplő függvény, amely a szorzatgörbület $d/(d+1)$-edik hatványa, a ∂K halmazon véges integrálú, igy mind a négy tételben végesek a jobb oldalakon szereplő integrálok. (Erre szükség is van, hiszen ha egyikük végtelen lenne, akkor az csak azt jelentené, hogy a megfelelő tétel a vizsgált mennyiségnek nem a helyes nagyságrendjét adja meg, hanem $n^{-2/(d+1)}$-nél csak rosszabb nagyságrendben lenne közelíthető átlagszélesség tekintetében., ill. $n^{(d-1)/(d+1)}$-nél nagyobb nagyságrendű csúcsszáma lenne.)

Az utolsó specializálás más szóval azt jelenti, hogy adott $V(K^*)$ esetére, a fenti speciális súlyfüggvény esetében, az átlagszélesség tekintetében aszimptotikusan a legrosszabbul közelíthetőek az ellipszoidok (70. oldal).

Az 5.2.3 tétel az 5.1.2 tétel súlyozott változata, az 5.2.2 tételbeli súlyfüggvénnyel. Az 5.2.3 tétel jobb oldalán szereplő integrál csak annyiban tér el az 5.2.2 tétel jobboldalán szereplő integráltól, hogy a súlyfüggvénynek $(d-1)/(d+1)$-edik hatványa szerepel benne.

Megjegyzendő, hogy az 5.1.1 és 5.1.2 tételeket azok súlyozott formájaban bizonyítja, azaz az 5.2.2 és 5.2.3 tételek formájában.

6. fejezet

A 6. fejezetben tér rá arra az esetre, amikor a K konvex test határából választ ki n független pontot, a ∂K-n egy adott ϱ folytonos, pozitív valószínűségsűrűség szerint. Azaz, a megfelelő valószínűségeloszlás a K felszínmértékére abszolút folytonos, és a Radon-Nikodým deriváltja ϱ. A vizsgált mennyiségek az n pont K_n konvex burkaként előálló konvex politóp j-edik "intrinsic" térfogatainak várható értékei, $1 \leq j \leq d$ esetén, pontosabban azok eltérései a K test j-edik "intrinsic" térfogataitól, és ezeknek aszimptotikáját vizsgálja.

A reguláris – pontosabban C^2_+ – eset már korábban ismert volt. Ezt általánosítva a belső gördülőgömbbel rendelkező konvex testek esetére a 6.1.2 tételben belátja a fenti eltérésre ugyanazt az aszimptotikus formulát, amely a C^2_+ esetre érvényes. Az ebben szereplő integrál a feltételek szerint nemnegatív és véges.

Itt a belső gördülőgömb létezése nem csak technikai szempontból van feltéve. Ha ezt elejti, a 6.1.3 tétel szerint az eltérés nagyságrendje megváltozik: csak annyit lehet állítani, hogy nagyságrendileg $n^{-2/(d-1)}$ és $n^{-1/(d-1)}$ közé esik (a konstans szorzók a K-tól és a ϱ-tól függnek), miközben a alsó becslés a gördülőgömbbel rendelkező testekre, míg az felső becslés a politópok esetére pontos, nagyságrendileg.

A 6.1.2 tétel bizonyításának vázlatát megadja a 6.1 paragrafusban, ami igencsak szerencsés, mivel a bizonyítás, amely integrálgeometriai megfontolásokat használ, 19 oldalt tesz ki, és 6 lemmán nyugszik. A bizonyítás egyik lépéseként a K testre vonatkozó formulákat az egységgömbre vonatkozó formulákkal hasonlítja össze, mintegy visszavezetve az általános K test esetét az egységgömbre. A 6.1.3 tétel bizonyítása lényegesen egyszerűbb.

7. fejezet

7.1 fejezet.

Ennek a részfejezetnek a célja a 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3 tételek bizonyítása. Ezek R-orsókonvex lemezekkel foglalkoznak. A korábbi tételekkel ellentétben, itt csak az elegendően síma R-orsókonvex lemezekkel foglalkozik. (Megjegyzendő, hogy kivételesen, a szintén korábbi 6.1.2 tételben a gördülő gömb létezése is egy bizonyos símasági feltétel.) Továbbá, a pozitív görbület helyett itt az $1/R$-nél nagyobb görbületet köti ki. (Az R-orsókonvex lemezek esetében ez a természetes analogonja a szokásos konvex lemezek pozitív görbületének.)

A kérdés a következő. Legyen S egy R-orsókonvex lemez, és vesz belőle n egyenletes, véletlen, független pontot. Ezek R-orsókonvex burka lesz a véletlen modell, amit "R-disc-polygon"-nak nevez, és S_n^R-rel jelöl.

A 7.1.1 tételben S-re C^2-t tesz fel, és S_n^R csúcsszámának, valamint az S_n^R-ből kimaradó területnek várható értékeire ad aszimptotikus formulát. A 7.1.2 tételben az S és S_n^R kerületei különbségének várható értékére ad aszimptotikus formulát, de itt a C^5 feltevés mellett. Megjegyzendő, hogy Rényi-Sulanke klasszikus tételei, a megfelelő símasági feltételek mellett, következnek ezekből a tételekből (az $R \to \infty$ határátmenettel). Továbbá, az integrandusok R-rel monoton nőnek, így a maximumukat az $R = \infty$ választásra érik el, ami annak felel meg, hogy az orsókonvex burok nagyobb a szokásos konvex buroknál, így terület és kerület szempontjából jobban közelít.

A 7.1.3 tételnek nincs a szokásos konvex lemezek esetében analogonja. Itt az R sugarú körre adja meg a fenti aszimptotikus formulákkal analóg formulákat. Itt a 7.1.1 és 7.1.2 tételektől eltérően persze a görbület egyenlő $1/R$-rel. Kissé meglepő módon, míg a területkülönbség és a kerületkülönbség $1/n$ nagyságrendű (ami jobb mint a 7.1.1 és 7.1.2 tételben), a csúcsszámnak véges várható értéke van. A 7.1.3 tétel bizonyítása vázlatos.

Itt lenne egy kérdésem: van-e a 7.1.3 tételnek “R-disc-polygon”-okra érvényes változata, analóg módon mint a szokásos konvexitás esetén a konvex sokszögek véletlen közelítésének?

7.2 fejezet.

Ennek a részfejezetnek a célja a 7.2.1 és a 7.2.2 tételek első állításainak bizonyítása. A 7.2.1 és a 7.2.2 tételek második állításait, valamint a 7.2.3 tételt csak kimondja, és csak annyit mond, hogy a megadott bizonyításokhoz hasonlóan, ill. korábbi cikkekhez hasonlóan bizonyíthatók.

A terminológiát a 7.1 részfejezethez képest kissé megváltoztatja, az r-orsókonvex kifejezés helyett r-hiperkonvexet használ, de a továbbiakban én maradni fogok az r-orsókonvex kifejezésnél.

A 7.2.1 tételben egy C^2_+, r-orsókonvex lemezre, amelyre a görbületi sugár szigorúan kisebb mint r, a véletlen “r-disc-polygon” csúcsszámának, és területének szórásaira ad nagyságrendi becsléseket, ha $n \to \infty$ (a konstansok K-től és r-től függnek). A 7.2.2 tételben ugyanezt az r sugarú körre teszi meg (amelyre persze a görbületi sugár egyenlő r-rel), ahol nagyságrendileg jobb eredményeket kap (a konstansok r-től függnek). A 7.2.3 tételben egy C^2_+, r-orsókonvex lemezre, amelyre a görbületi sugár szigorúan kisebb mint r, a véletlen “r-dics-polygon” csúcsszámára és a kimaradó területre nagyságrendileg pontos 7.1.1 tétel helyett annak erősítését mutatja meg. Nemcsak a várható értékek nagyságrendje határozható meg, hanem igazából egy majdnem mindenütti konvergencia is fennáll, tehát egy nagy számok erős törvénye teljesül mindkét esetben.

7.2.4. fejezet.

Ennek a részfejezetnek a célja a 7.2.6 tétel bizonyítása. Itt a kérdés a következő. K legyen C^2_+, r-orsókonvex lemez. Ennek van egy $K^{*,r}$ duálisa, ami szintén C^2_+, r-orsókonvex lemez: $K^{*,r} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid K \subset rB^2 + x\}$. Feltéve, hogy a görbületi sugár szigorúan kisebb mint r, a valószínűségi modell a következő. $K^{*,r}$-bol választ n független, egyenletes véletlen pontot, és a köréjük írt r sugarú körök metszetét tekinti, mint véletlen köréírt “r-disc-polygon”-t. A 7.2.6 tételben, megfelelő regularitási feltételek mellett, aszimptotikus formulákat ad a várható csúcsszámra, valamint a kerületek, ill. területek különbségeire. A 7.2.7 korolláriumban a csúcsszám szórására ad nagyságrendi korlátot, ahol a megfelelő konstans a K-tól és az r-től függ.

8. FEJEZET

A 8. fejezetnek célja az 1-orsókonvex lemezek legjobb approximációinak vizsgálata. A korábbi jelölésektől ez csak annyiban tér el, hogy a korábban hasznalt R (7.1 részfejezet) ill. r (7.2 részfejezet) most normálva lesz, értéke 1 lesz.

Vizsgál beírt, és köréírt “1-disc-polygon”-okat. Három különféle értelemben vizsgálja a legjobb közelítést: a területek ill. kerületek különbségeként, és a Hausdorff-metrika értelmében. Ez összesen hat kérdés, és a 8.1.1 tételben a C^2 feltevésével egy 1-orsókonvex lemez esetén a legjobb közelítésekre megad összesen hat aszimptotikus formulát, mind const/n^2 alakú. Csak a beírt esetekre adja meg a bizonyítást, a köréírt esetek tekintetében az eredeti cikkre utal.

Itt lenne egy kérdésem. Ha a közelítő “1-disc-polygon” sem nem beírt, sem nem köréírt, hanem tetszőleges, akkor a klasszikus eredmények analogonjaiképpen további három kérdés merül fel, amelyek bizonyára megoldhatók a disszertációbeli módszerek segítségével. Itt a disszertációbeli 131. oldalon szereplő területi és kerületi eltéréseket lehetne használni.

Összegzés

A disszertáció jól megírt, könnyen olvasható. Mindamellett sok bizonyítás nagyon technikás, és komoly, kitartó munka eredménye. Az olvasó szerencséjére ezek általában fel vannak bontva részállításokra, továbbá a tényleges bizonyításuk előtt sokszor vázolva vannak a gondolatmenetek.

A disszertációban szereplő mindkét terület, az L_p-duális Minkowski probléma, és konvex testek véletlen, ill. legjobb approximációi a konvex geometriának jelenleg igen intenzíven kutatott ágai, a kutatás élvonalába tartoznak. Ráadásul az approximációs kérdések tulajdonképpen a konvex geometria és a valószínűségszámítás határterülete, mindkét terület módszereit használja. A jelölt otthonosan mozog mindezen területeken.

A disszertáció érdemi részét képező 3.-8. fejezetek alapját a jelöltnek hat, társszerzős cikkének részei képezik, amely cikkeket kiváló társszerzőkkel írt, és amelyek jó folyóiratokban jelentek meg, amelyek közül négy szakfolyóirat. Ezzel kapcsolatban kiemelendő a jelöltnek a közös cikkekben együttműködésre való képessége, amely együttműködés újabban elterjedt, és amely a cikkek színvonalát emeli.

A fentiek alapján megállapítható, hogy Fodor Ferenc akadémiai doktori disszertációja bőségesen kielégíti az akadémiai doktori disszertációkkal szemben támasztható követelményeket. Ezért Fodor Ferenc nyilvános védésének kitűzését, és számára az MTA doktora cím odaítélését a legmelegebben javaslom.

Budapest, 2021. II. 12.

Makai Endre