

DEBRECENI EGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET

MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

DIFFERENCIÁLRENDSZEREK GEOMETRIAI ALKALMAZÁSAI

MUZSNAY ZOLTÁN

Debrecen, 2020

Tartalomjegyzék

1. A variációszámítás inverz problémája	2
1.1. Bevezetés	2
1.2. Alapfogalmak	3
1.3. A variációs multiplikátor algebrai feltételei	4
1.4. Variációs szabadságfok: a 2-homogén eset vizsgálata	5
1.5. Invariáns variációs elv Lie-csoportok kanonikus geodetikus struktúrájához	6
2. Metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság	7
2.1. Bevezetés	7
2.2. Alapfogalmak	9
2.3. Finsler-metrizálhatóság	9
2.4. Speciális görbületű Finsler-metrizálhatóság	11
2.5. Projektív Finsler-metrizálhatóság	11
2.6. A geodetikus struktúra projektív merevsége	12
2.7. Invariáns metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság	13
3. Finsler-sokaságok holonómiájáról	15
3.1. Bevezetés	15
3.2. Alapfogalmak	17
3.3. Diffeomorfizmus-csoport részcsoporthoz tartozó Lie-algebrája	17
3.4. Fibrált holonómia-algebra és Lie-részalgebrái	18
3.5. Holonómia-algebra és Lie-részalgebrái	19
3.6. Konstans görbületű Finsler-sokaság	20
3.7. Konstans görbületű síkprojektív Finsler-sokaságok	20
3.8. Finsler-felületek maximális holonómiacsoporttal	21
4. Síkbeli 3-szövetek linearizálhatósága	23
4.1. Bevezetés	23
4.2. Alapfogalmak	24
4.3. A linearizálhatóság feltétele	25
4.4. A vitatott 3-szövet és linearizációja	26
Irodalomjegyzék	27

Előszó

Geometriai vizsgálatok során igen gyakran találkozhatunk olyan problémákkal, melyek megoldása, illetve megoldhatósága differenciálrendszerek (közönséges differenciálegyenletek, parciális differenciálegyenletek és egyenletrendszerek, illetve egyenlőtlenségek) vizsgálatára vezethető vissza. A disszertációban ilyen problémákra vonatkozó eredményeinket mutatjuk be. Ismertetjük a

1. variációs számítás inverz problémájára,
2. metrizálhatósági és projektív metrizálhatósági problémákra,
3. Finsler-típusú terek holonómiájára,
4. síkbeli 3-szövetek linearizálhatóságára

vonatkozó eredményeinket. A fenti problémák mindegyike igen régóta, több évtizede, vagy akár egy évszázada vizsgált klasszikus geometriai probléma, melyek jelenleg is a kutatások aktív területei és melyekben kiváló matematikusok értek, illetve érnek el eredményeket. Hogy csak néhány nevet említsünk a kezdeti időkből: a variációs számítás inverz problémájára vonatkozó első eredmények 1887-ből H. Helmholtz nevéhez fűződnek, aki szükséges és elégséges feltételt adott a megoldhatóságra az általa bevezetett variációs multiplikátor segítségével. A metrizálhatóság és a projektív metrizálhatóság problémája szorosan kötődik a variációs számítás inverz problémájához, és speciális esetként magában foglalja D. Hilbert nevezetes negyedik problémáját, azaz azon metrikák meghatározását és jellemzését, melyek geodetikus vonalai egyenesek. A síkbeli 3-szövetek linearizálhatóságára vonatkozó probléma mára már több mint száz éves, hiszen T.H. Gronwallnak a linearizálható de nem parallelizálható síkbeli 3-szövetekre vonatkozó sejtése 1912-ből származik. A holonómia fogalmát É. Cartan vezette be 1926-ban és a Finsler-terek holonómiájára vonatkozó első eredmények Szabó Zoltán nevéhez fűződnek, aki 1981-ben megadta a Berwald-típusú Finsler-terek holonómia struktúráját.

A fenti négy terület mindegyike nemcsak klasszikus, hanem – ahogyan az e témákra vonatkozó publikációkból is kiderül – a mai napig nemzetközi szinten intenzíven kutatott problémái a geometriának. Ezen négy területen elért eredmények szerepelnek a disszertáció négy fejezetében.

A Tézisek szerkezete megegyezik a Disszertáció szerkezetével: az egyes fejezetek és alfejezetek számozása azonos, az irodalomjegyzék a két műben megegyezik. Annak érdekében, hogy a Disszertációban, illetve a Tézisfüzetben szereplő eredmények könnyen beazonosíthatók legyenek, azok az eredmények, melyek a Tézisfüzetben számozott formában jelennek meg, ugyanazt a számot kapták, mint a Disszertációban. Ugyanakkor a Tézisfüzetben a kompaktabb megfogalmazás érdekében nem számozott formában jelenik meg az összes eredmény, így előfordul, hogy a számozás nem folyamatos.

Az értekezés tézisei

1. **Tézis.** Megadjuk a variációs multiplikátorra vonatkozó algebrai feltételek széles rendszerét és meghatározzuk homogén sprayk 2-homogén variációs szabadságfokát, karakterizáljuk Lie-csoportok kanonikus struktúrájának variációs tulajdonságát.
2. **Tézis.** Megadjuk a Finsler- és Landsberg-metrizálhatóság feltételét, karakterizáljuk a konstans és a skalár görbületű Finsler-metrizálhatóságot, valamint Lie-csoportok illetve geodetikus orbit struktúrák invariáns metrizálhatóságát és projektív metrizálhatóságát.
3. **Tézis.** A diffeomorfizmus-csoport részcsoporthoz tartozó érintő Lie-algebra bevezetésével új módszert adunk a diffeomorfizmus-csoport részcsoporthainak vizsgálatára, melyet sikeresen alkalmazunk Finsler-sokaságok holonómiacsoportjának vizsgálatában.
4. **Tézis.** Megmutatjuk, hogy a Riemann- és Finsler-sokaságok holonómiastruktúrája nagyon eltérhet egymástól azonosítva olyan Finsler-felületeket, melyek holonómiacsoportja maximális, azaz lezártja izomorf a kör irányítástartó diffeomorfizmus-csoportjával.
5. **Tézis.** Karakterizáljuk a véges illetve végtelen dimenziós holonómiacsoportú konstans görbületű síkprojektív Finsler-sokaságokat és megadjuk a konstans görbületű, síkprojektív Randers-felületek holonómiacsoportjait.
6. **Tézis.** Megadjuk a síkbeli 3-szövetek linearizálhatóságának feltételét és megmutatjuk, hogy egy nem parallelizálható 3-szövet esetén legfeljebb 15 különböző linearizáció létezhet.

1. fejezet

A variációszámítás inverz problémája

1.1. Bevezetés

A variációszámítás inverz problémája egy igen régi, mintegy 100 éve vizsgált klasszikus probléma. A cél az, hogy karakterizáljuk azon másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszereket, melyek variációs problémából származtathatóak. E témában az első eredmények H. Helmholtz nevéhez kötődnek, aki 1887-ben megmutatta, hogy a Lagrange-függvényre vonatkozó Euler–Lagrange másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszert helyettesíteni lehet az úgynevezett variációs multiplikátorra felírt, algebrai egyenleteket és egyenlőtlenséget, valamint elsőrendű parciális differenciálegyenleteket egyaránt tartalmazó differenciálrendszerrel, melyet ma a szakirodalom Helmholtz-feltételeknek nevez [5, 61, 78].

A variációszámítás inverz problémájának témájában az első igazán komoly eredményeket a Fields-díjas J. Douglas érte el a Helmholtz-feltételek integrálhatóságának vizsgálatával. A Riquier-féle elméletet felhasználva [36]-ban megadta a kétdimenziós sokaságokon a variációs sprayk klasszifikációját. Ahogy azt Douglas cikke is világosan mutatja, még ez az alacsony dimenziós eset is igen bonyolult, mert számos obstrukció, integrálhatósági feltétel jelenik meg a számolás során. Éppen ezért igen nehéz feladat Douglas eredményeit magasabb dimenzióra általánosítani, hiszen a túldeterminált Helmholtz-rendszer integrálhatósági feltételeinek a száma jelentősen növekszik. Így természetesen nem meglepő, hogy magasabb dimenziós esetekben a problémának általában nincs reguláris megoldása. Az 1980-as évektől kezdődően több kutatóműhely is aktívan foglalkozik a variációszámítás inverz problémájával, melynek mára kiterjedt irodalma van [5, 6, 25, 34, 59, 61, 78, 79, 80]. Érdemes megjegyezni, hogy ezekben a publikációkban a szerzők, Douglashez hasonlóan, a Helmholtz-rendszer vizsgálatával értek el eredményeket. A [104, 105] viszont Douglas módszerétől egészen eltérő megközelítésben és új eszközökkel vizsgálja a problémát. Ennek lényege, hogy a variációs multiplikátorra vonatkozó Helmholtz-feltételek helyett az Euler–Lagrange parciális differenciálegyenlet-rendszert tekinti kiindulási pontnak. Mivel az ismeretlen nem a variációs multiplikátor, hanem maga a reguláris Lagrange-függvény, így az algebrai feltételek és elsőrendű parciális differenciálegyenleteket tartalmazó rendszer helyett egy másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldhatóságát kell vizsgálni. A megközelítési mód mellett a felhasznált eszközök, a differenciálformák derivációinak Frölicher–Nijenhuis-féle elmélete és a Spencer–Goldschmidt-féle integrálhatósági

elmélet is újdonság volt ezen a területen. Az új szemléletmód és eszközök segítségével az eredményeket sikerült természetes módon származtatni, és invariáns, koordinátamentes formában megadni.

A disszertáció 1.2 alfejezetében találjuk azon legfontosabb fogalmakat és jelöléseket, melyek szükségesek a dolgozat első fejezetének megértéséhez.

Az 1.3 alfejezetben vizsgáljuk a variációs számítás inverz problémájának megoldásakor fellépő parciális differenciálegyenlet-rendszerek integrálhatósági feltételeiben megjelenő tenzorok algebrai struktúráját. Megmutatjuk, hogy az integrálhatósági feltételek meghatározásánál megjelenik a görbületi tenzor és ennek szemibázikus deriváltjai, valamint a másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó $\mathcal{A}_S$ gradált Lie-algebra elemei. Ennek szerepe különösen magasabb dimenziós esetekben jelentős, hiszen az adott sprayhez tartozó gradált Lie-algebra meghatározásával az esetek többségében a lehetséges energiafüggvényekre kapott megszorítások egyszerűen számíthatók, és sok esetben a spray variációs elvből való származtathatósága kizárható.

Az 1.4 alfejezetben vizsgáljuk, hogy egy adott spray esetén hány különböző variációs elv létezik és melyek azok a geometriai mennyiségek, melyek ismeretében ez meghatározható. Vizsgálataink során arra a speciális esetre fókuszáltunk, amikor a keresett Euler–Lagrange-függvény 2-homogén, hiszen a Riemann- illetve a Finsler-geometriában, továbbá a relativitáselméletben a geodetikusokat meghatározó energiafüggvény ilyen típusú, így ennek az esetnek a vizsgálata különösen indokolt.

Magasabb dimenzióban olyan eseteket érdemes vizsgálni, ahol a spray valamilyen speciális geometriai tulajdonsággal rendelkezik. A lapos és izotróp görbületű spraykre vonatkozó eredmények megtalálhatók a [104, 105]-ben. Az 1.5 alfejezetben Lie-csoportok kanonikus geodetikus struktúráját, azaz az 1-paraméteres részcsoportok és ezek baltelteltjai által meghatározott geodetikus struktúrát vizsgáljuk. A kérdés az, hogy vajon származtatható-e ez a balinvariáns geodetikus struktúra egy balinvariáns variációs elvből, azaz megadható-e egy olyan balinvariáns reguláris Lagrange-függvény, amihez tartozó funkcionál extrémálisai éppen a Lie-csoport kanonikus geodetikus görbeseregének a görbéi. Meglepő módon a [114] alapján kiderült, hogy a kanonikus geodetikus struktúra nem mindig származtatható balinvariáns variációs elvből.

A fejezetben bemutatott eredmények a [102, 113, 114, 115, 126] cikkekben kerültek publikálásra.

1.2. Alapfogalmak

Az M sokaság érintőterén adott $\mathcal{S}$ vektormező egy *spray*, ha lokális koordináta kifejezése

$$\mathcal{S} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (1.1)$$

alakú, ahol a $G^i(x, y)$ függvények 2-homogének az y változóban. Az $\mathcal{S}$ spray geodetikusai azon γ görbék az M sokaságon, melyekre teljesül az $\mathcal{S} \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$ feltétel. Megjegyezzük, hogy egy görbe pontosan akkor lesz az $\mathcal{S}$ geodetikusa, ha megoldása az

$$\ddot{x}^i = -2G^i(x, \dot{x}), \quad i = 1, \dots, n,$$

másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszernek. Ilyen értelemben egy spray nem más, mint a sokaságon koordinátamentesen megadott másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer.

Az $\mathcal{S}$ sprayhez asszociált $\Gamma = [J, \mathcal{S}]$ segítségével megadható egy Ehresmann-konnexió, mely a görbék horizontális liftjét felhasználva egy párhuzamos eltolást származtat a sokaságon. A horizontális disztribúció integrálhatóságáról ad információt a konnexió $R = \frac{1}{2}[h, h]$ görbülete, illetve a $\Phi = i_{\mathcal{S}}R$ Jacobi-endomorfizmusa.

Lagrange-függvény alatt olyan $E: TM \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk, mely sima a $TM \setminus \{0\} = \mathcal{T}M$ -en és C^1 -osztályú a zérus metszésen. Az E reguláris, ha az $\Omega_E := dd_J E$ maximális rangú, továbbá k -homogén, ha $\mathcal{L}_C E = kE$, ahol $C = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ a Liouville-vektormező. Ha E reguláris, akkor az $i_{\mathcal{S}}\Omega_E - d(E - \mathcal{L}_C E) = 0$ formulával definiált $\mathcal{S}$ vektormező TM -en egy spray, melynek geodetikusai megoldásai az $\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial E}{\partial x^i} = 0$ Euler–Lagrange másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszernek [41]. Ennek alapján azt kapjuk, hogy egy adott másodrendű differenciálegyenlet-rendszer vagy $\mathcal{S}$ spray pontosan akkor variációs, ha van olyan E reguláris Lagrange-függvény, amire teljesül az

$$\omega_E := i_{\mathcal{S}}\Omega_E + d\mathcal{L}_C E - dE = 0 \quad (1.2)$$

egyenlet, ahol ω_E az adott $\mathcal{S}$ spray esetén az E -hez tartozó Euler–Lagrange differenciál 1-forma. Ha az (1.2) teljesül, akkor E -t az $\mathcal{S}$ spray egy Euler–Lagrange-függvényének nevezzük.

1.3. A variációs multiplikátor algebrai feltételei

A szakirodalomban a variációszámítás inverz problémájára vonatkozó szinte valamennyi eredményt J. Douglashez hasonlóan, a Helmholtz-feltételek vizsgálatával érték el. Az úgynevezett variációs multiplikátorra vonatkozó, algebrai feltételeket és elsőrendű parciális differenciálegyenleteket tartalmazó Helmholtz-rendszer pontosan akkor megoldható, ha a spray variációs, hiszen amennyiben E egy olyan reguláris Lagrange-függvény, mely megoldása az adott sprayhez tartozó Euler–Lagrange parciális differenciálegyenlet-rendszernek, akkor a $g_{ij} := \frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$ meghatároz egy variációs multiplikátort, illetve fordítva: ha adott egy variációs multiplikátor, akkor segítségével megadható egy reguláris megoldása az Euler–Lagrange PDE rendszernek.

1.3.1. Állítás. [113, Property 6.] *Ha E az M sokaságon adott Lagrange-függvény, akkor $d_J \omega_E = i_{\Gamma} \Omega_E$. Amennyiben $\mathcal{S}$ variációs és E az $\mathcal{S}$ egy reguláris Euler–Lagrange-függvénye, akkor az $\mathcal{S}$ -hez tartozó horizontális disztribúció Lagrange típusú az Ω_E szimplektikus 2-formára vonatkozóan.*

Bevezetve a vektor értékű szemibázikus L forma $\mathcal{S}$ -hez tartozó $L' := h^*(v[\mathcal{S}, L])$, illetve $d^h L := [h, L]$ derivációját, legyen $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ a vektorértékű differenciálformák azon grádált Lie-részalgebrája, melyet a J vertikális endomorfizmus, a Φ Jacobi-endomorfizmus, a most bevezetett derivációk, valamint a Frölicher–Nijenhuis-zárójel generál. Ekkor $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \oplus_{k=1}^n \mathcal{A}_{\mathcal{S}}^k$, ahol $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^k$ a vektor értékű differenciál k -formák alterét jelöli $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ -ben.

1.3.5. Tétel. [113, Theorem 2.] *Ha E az $\mathcal{S}$ spraynek egy Euler–Lagrange-függvénye, akkor minden $L \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ -re teljesül az $i_L \Omega_E = 0$ egyenlet, így az $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ elemei algebrai feltételeket adnak a variációs multiplikátorra.*

Az 1.3.5 tételből adódik Douglas [36] VII. tételének n -dimenziós általánosítása, mely szerint ha egy $p \in TM$ pontban a $\{J, \Phi, \Phi', \dots, \Phi^{(k)}, \dots\}$ rangja nagyobb, mint $\frac{n(n+1)}{2}$, akkor az $\mathcal{S}$ spray nem származtatható variációs elvből. Magasabb dimenziós esetben további algebrai feltételeket találhatunk az $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ segítségével, hiszen ha van olyan $p \in M$ pont és $k \leq n$ amire $\dim \mathcal{A}_{\mathcal{S}}^k(p) \geq k \binom{n+1}{k+1}$, akkor az $\mathcal{S}$ spray nem származtatható variációs elvből. Vezessük be az $\mathcal{S}$ spray p -beli rangját, mely legyen a szimmetrikus g_{ij} ismeretlenekre vonatkozó

$$\left\{ \sum_{i \in \mathfrak{S}_{l+1}} \varepsilon(i) L_{i_1 \dots i_l}^j g_{ji_{l+1}} = 0 \mid L \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}(p) \right\}, \quad (1.3)$$

homogén lineáris egyenletrendszer rangja. Az $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ gradált algebra különböző szintjein megjelenő algebrai feltételek figyelembevételével kapjuk az alábbi eredményt:

1.3.9. Tétel. [113, Theorem 5.] *Ha az M sokaság egy p pontjában az $\mathcal{S}$ spray rangja nagyobb, mint $\frac{n(n+1)}{2}$, akkor az $\mathcal{S}$ nem származtatható variációs elvből.*

1.4. Variációs szabadságfok: a 2-homogén eset vizsgálata

Sprayk variációs tulajdonságát vizsgálva azt tapasztalhatjuk, hogy vannak olyan sprayk, a) melyek nem származtathatók variációs elvből, b) melyekhez lényegében egyetlen reguláris Euler–Lagrange-függvény található, c) melyekhez több eltérő reguláris Euler–Lagrange-függvény is található. Természetes tehát annak a problémának a vizsgálata, hogy egy adott spray esetén hány variációs elv létezik és melyek azok a geometriai mennyiségek, melyek ismeretében ez a szám meghatározható. [102]-ben bevezetjük a $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$, illetve a $\mathcal{V}_{\mathcal{S},k}$, $k \in \mathbb{N}$ variációs szabadságfok fogalmát, melyek megadják, hogy hány különböző reguláris Euler–Lagrange-függvény illetve k -homogén Euler–Lagrange-függvény létezik az adott $\mathcal{S}$ sprayhez. Vizsgálataink során leginkább a $k = 2$ speciális esetre fókuszálunk, hiszen a Riemann- illetve a Finsler-geometriában, továbbá a relativitáselméletben a geodetikusokat meghatározó energiafüggvények ilyen típusúak. Adott sprayhez tartozó 2-homogén Euler–Lagrange-függvények $\mathcal{E}_{\mathcal{S},2}$ halmaza vektortér az $\mathbb{R}$ felett. A lineáris kombináción túl, a megfelelő homogenitású függvény-kombinációt használva új variációs elvet kaphatunk:

1.4.2. Állítás. [102, Proposition 4.2] *Az $\mathcal{S}$ spray 2-homogén Euler–Lagrange-függvényeinek 1-homogén függvénykombinációja szintén 2-homogén Euler–Lagrange-függvénye az $\mathcal{S}$ -nek.*

A kérdés az, hogy milyen geometriai struktúra segítségével és hogyan lehet meghatározni a $\mathcal{V}_{\mathcal{S},2} = \text{rank}(\mathcal{E}_{\mathcal{S},2})$ értékét. Adott spray esetén legyen $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ az a legszűkebb involutív disztribúció, mely tartalmazza a horizontális altereket. A $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ vertikális komponense pontosan akkor triviális, ha a görbület azonosan zérus. Ha a $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ egy reguláris disztribúció, akkor integrálható, és egy $v \in TM$ -re illeszkedő integrálsokasága nem más, mint a származtatott párhuzamos eltolásra vonatkozó orbitja. Egy függvényt holonómia-invariánsnak nevezünk, ha a párhuzamos eltolással szemben invariáns. A 2-homogén holonómia-invariáns függvények halmazát $\mathcal{H}_{\mathcal{S},2}$ -vel jelöljük. Igaz, hogy egy 2-homogén Lagrange-függvény pontosan akkor lesz az $\mathcal{S}$ spray Euler–Lagrange-függvénye, ha holonómia invariáns [102, Lemma 4.3.]. A $h(2)$ -variációs szabadságfok meghatározására vonatkozik az alábbi

1.4.3. Tétel. [102, Theorem 4.4] Ha az $\mathcal{S}$ egy metrizable spray, melyhez tartozó párhuzamos eltolás reguláris, akkor $\mathcal{V}_{\mathcal{S},2} = \text{codim } \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$.

1.5. Invariáns variációs elv Lie-csoportok kanonikus geodetikus struktúrájához

Legyen G egy Lie-csoport. A G érintőtéren használjuk az (x, α) koordináta-rendszert, ahol a Maurer-Cartan formából származó $\alpha = (\alpha^i)$ az érintőtér invariáns koordinátázását adja.

1.5.1. Állítás. [96, Proposition 4.3] Az E Lagrange-függvény pontosan akkor lesz egy balinvariáns megoldása a kanonikus sprayhez tartozó Euler-Lagrange parciális differenciál-egyenlet-rendszernek, ha teljesülnek az alábbi egyenletek:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad [a, \alpha]^i \frac{\partial L}{\partial \alpha^i} = 0, \quad \forall a \in \mathfrak{g}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Következésképpen adódik, hogy a kanonikus sprayhez pontosan akkor létezik balinvariáns variációs elv, ha megadható egy reguláris, ad -invariáns $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g})$ függvény a G Lie-csoport $\mathfrak{g}$ Lie-algebráján. Ha C_{ij}^k jelöli a $\mathfrak{g}$ struktúrakonstansait, akkor igaz az alábbi

1.5.3. Tétel. [114, Theorem 3.] Egy G Lie-csoport kanonikus sprayje pontosan akkor származtatható invariáns variációs elvből az $\alpha \in \mathfrak{g}$ egy környezetében, ha a

$$\left\{ C_{ij}^k \alpha_j x_k = 0, \quad C_{ij}^k x_k + C_{jm}^k \alpha_m x_{ik} = 0 \mid i, j = 1, \dots, n \right\}$$

lineáris egyenletrendszernek van olyan $\{x_i = \epsilon_i, x_{ij} = \epsilon_{ij}\}$ megoldása, melyre $\det(\epsilon_{ij}) \neq 0$.

Ennek alapján adódik, hogy egy kommutatív Lie-csoport kanonikus sprayje lokálisan variációs elvből származtatható, illetve amennyiben a kommutátor-részalgebra 1-dimenziós, akkor a kanonikus spray nem származtatható invariáns variációs elvből. A tétel alapján megadható a legfeljebb négy-dimenziós Lie-csoportok teljes leírása [114].

Megjegyezzük, hogy a 3-dimenziós Lie-csoportokat vizsgálva G. Thompson [93]-ban megmutatta, hogy a kanonikus spray minden esetben variációs elvből származtatható. A [114] alapján viszont kiderült, hogy a kanonikus geodetikus struktúra – a balinvariáns és variációs tulajdonsága ellenére – nem mindig származtatható balinvariáns variációs elvből. Erre az esetre egy konkrét példát ad a Heisenberg csoport, melynek kanonikus sprayje variációs, de mégsem származtatható balinvariáns variációs elvből. A 4-dimenziós Lie-csoportok vizsgálatához felhasználtuk [73] osztályozását, illetve [40] eredményeit. Ennek alapján a kanonikus sprayre az alábbi esetek lehetségesek:

- nem variációs: $A_{4,7}$, $A_{4,11a}$ ahol $0 < a$, és $A_{4,9b}$ ahol $-1 < b < 1$,
- variációs és van invariáns variációs elv: $A_{4,8}$ és $A_{4,10}$,
- variációs, de nincs invariáns variációs elv: $A_{4,1}$, $A_{4,2a}$, $A_{4,3}$, $A_{4,4}$, $A_{4,5ab}$, $A_{4,6ab}$, $A_{4,9}$, $A_{4,12}$.

2. fejezet

Metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság

2.1. Bevezetés

A variációs számítás inverz problémáján belül egy igen érdekes speciális eset a metrizálhatóság problémája. Itt a másodrendű differenciálegyenlet-rendszerhez, illetve sprayhez keresett reguláris Lagrange-függvény nem más, mint egy Riemann- vagy Finsler-sokaság energiafüggvénye. Amennyiben a megfelelő metrika, illetve energiafüggvény létezik, akkor a másodrendű differenciálegyenlet-rendszerhez illetve sprayhez tartozó görbesereg görbéi a Riemann- illetve Finsler-sokaság geodetikusai.

A metrizálhatósághoz hasonló a projektív metrizálhatóság problémája, ahol a kérdés az, hogy adott másodrendű differenciálegyenlet-rendszer illetve spray esetén létezik-e olyan Riemann- vagy Finsler-metrika, melyhez tartozó kanonikus spray és a kiindulási spray geodetikus görbeserege mint ponthalmazok megegyeznek. Mind a metrizálhatóság, mind a projektív metrizálhatóság témakörében számos eredmény és cikk született.

A 2.3 alfejezetben a Finsler- és Landsberg-metrizálhatósági problémát vizsgáljuk. Mindkettő leírható egy-egy differenciálrendszer segítségével: a Finsler-metrizálhatóságot leíró differenciálrendszer az (1.2) Euler–Lagrange parciális differenciálegyenletekből, a homogenitási és a regularitási feltételből álló rendszer, a Landsberg-metrizálhatóságot leíró differenciálrendszer a Finsler-metrizálhatóság feltételein túl a metrika párhuzamos eltolással szembeni invarianciáját adó harmadrendű (2.2) egyenleteket is tartalmazza. Az 1.4 alfejezetben bevezetett $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ holonómia disztribúció segítségével jellemezni lehet a Finsler-metrizálható másodrendű differenciálegyenlet-rendszereket, illetve sprayket. Megmutatjuk, hogy a metrizálhatóság másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszere elsőrendűvé redukálható (2.3.1 és 2.3.3 tétel), és egy reguláris Lagrange-függvény pontosan akkor lehet egy Finsler-struktúra energiafüggvénye, ha a holonómia disztribúció valamennyi vektormezője ennek infinitezimális szimmetriája. Hasonló eredményt bizonyítunk a Landsberg-metrizálhatóságra is, ahol a horizontális vektormezők és a Berwald-görbület képtere által generált disztribúció játszik lényeges szerepet (2.3.4 és 2.3.5 tétel). Ezen eredmények igen jól alkalmazható effektív módszert adnak konkrét egyenletrendszerek metrizálhatóságának vizsgálatára, hiszen a kérdéses disztribúciók könnyen meghatározhatóak.

A 2.4 alfejezetben speciális görbületi tulajdonságú Finsler-metrizálhatóságot vizsgálunk. A cél az, hogy megadjuk annak szükséges és elegendő feltételét, hogy adott spray esetén létezzen olyan konstans, illetve skalár görbületű Finsler-metrika, melynek geodetikusi megegyeznek a spray által meghatározott görbesereggel. Zérus görbületű esetben a holonómia triviális, így az ilyen terek lokálisan metrizálhatóak [97, 29, 115]. A nemzérus görbületű esetekre ez a kérdés nyitott volt, de szerzőtársammal sikerült mind a konstans, mind a skalár görbületű eset problémáját megoldanunk. A konstans görbületű esetben a metrizálhatóságot a 2.4.1 tétel írja le a sprayhez tartozó Jacobi-endomorfizmusra, illetve görbületre vonatkozó szükséges és elegendő feltételek megadásával. Az alfejezet második részében a skalár görbületű esetet vizsgáljuk. A 2.4.3 tételben a Jacobi-tenzorral kapott szükséges és elegendő feltételekkel karakterizáljuk azokat a rendszereket, melyek skalár görbületű Finsler-sokaság geodetikus struktúrájaként származtathatóak. A bizonyítás egyben eljárást is ad, mellyel meghatározható egy izotróp metrizálható sprayhez tartozó Finsler-metrika. Az eredmények segítségével Hilbert negyedik problémája új megközelítésben vizsgálható. Itt a feladat úgy fogalmazható meg, hogy írjuk le azon geometriákat, ahol az egyenesek a geodetikusok [4], [82, page 191], illetve adjuk meg azon Finsler-metrikákat, melyek geodetikus sprayje projektív ekvivalens a zérus görbületű sprayvel [31]. Az ilyen típusú Finsler-metrikákhoz tartozó spray szükségképpen izotróp, és így konstans vagy skalár görbületű. Erre vonatkozó eredményeket találunk például a [22, 62, 86, 85] cikkekben. A [101]-ben adott módszer alkalmas arra, hogy olyan metrikákat konstruáljunk, melyek megoldásai Hilbert negyedik problémájának.

A 2.5 alfejezetben a projektív Finsler-metrizálhatóság problémáját vizsgáljuk. Ez egy igen régi, klasszikus, ugyanakkor a mai napig aktívan kutatott probléma [31, 32, 33, 33, 65, 68, 33, 97], mely több oldalról is megközelíthető: [32]-ben a Helmholtz-feltételek megfelelő módosításával, [97]-ben egy szemibázikus differenciál 1-forma, [33]-ban pedig egy differenciál 2-forma vizsgálatával értek el eredményeket. A projektív Finsler-metrizálhatóságra vonatkozó vizsgálatai során Rapcsák András egy parciális differenciálegyenlet-rendszer integrálhatóságára vezette vissza a probléma megoldhatóságát [75, 76]. Ezen egyenletekre ma Rapcsák-egyenletekként hivatkoznak [32, 91, 82]. Rapcsák András eredményeit felhasználva [110, 111]-ben vizsgáltuk a projektív Finsler-metrizálhatóságot. A Spencer-Goldschmidt-féle integrálhatósági elméletet alkalmazva elsőként sikerült a lapos, illetve izotróp esetre már ismert [97, 29, 30] eredményeket meghaladni. A nehézséget ebben az esetben az adja, hogy a rendszer nem elégíti ki az úgynevezett Cartan-teszt feltételeit, ami arra utal, hogy magasabb rendű integrálhatósági feltételek léphetnek fel. A Spencer-kohomológia vizsgálatával sikerült meghatároznunk ezeket a magasabb rendű kompatibilitási feltételeket.

A 2.6 alfejezetben a geodetikus struktúra projektív merevségét vizsgáljuk. A kérdés az, hogy a geodetikusok átparaméterezése, azaz a geodetikus spray projektív transzformációja során megőrződhet-e például a metrizálhatóság tulajdonsága. G. Yang [95]-ben adott példát olyan konstans zászlógörbületű Finsler sprayre, melynek projektív osztálya tartalmaz nem metrizálható sprayt. [98]-ban általánosítottuk Yang példáját és megmutattuk, hogy minden metrizálható sprayre igaz, hogy projektív osztálya tartalmaz (végtelen sok) nem metrizálható sprayt. Eredményünket [103]-ban holonómia invariáns projektív deformációkra is kiterjesztettük. Megmutattuk továbbá, hogy egy holonómia invariáns projektív deformáció csak igen specilális esetekben lehet metrizálható. Ezen eseteket si-

került a Finsler-sokaság principális görbületeinek segítségével jellemezni.

A 2.7 alfejezetben Lie-csoportok és homogén terek kanonikus konnexiójának invariáns Riemann- és Finsler-metrizálhatóságát, illetve projektív metrizálhatóságát vizsgáljuk. Mivel a Riemann-metrika maga is egy speciális Finsler-metrika, így minden Riemann-metrizálható (szükségképpen kvadratikus) spray egyben Finsler-metrizálható is. A megfordítás általában nem igaz, de a kvadratikus sprayk esete speciális, mert Szabó Zoltán [88] cikke alapján tudjuk, hogy minden Finsler-metrizálható kvadratikus spray Riemann-metrizálható is, így ezen a spray osztályon a Riemann- és Finsler-metrizálhatóság megegyezik. Azonban a projektív Riemann- illetve Finsler-metrizálhatóság általában még a kvadratikus sprayk esetén sem egyezik meg. Viszont eredményeink alapján a Lie-csoportok kanonikus konnexiója pontosan akkor invariáns Riemann-metrizálható, ha invariáns projektív Finsler-metrizálható, ami mutatja a struktúra bizonyos merevségét. A probléma általánosításaként vizsgáltuk homogén térben geodetikus orbit struktúrák (g.o. struktúrák) Riemann- és Finsler-metrizálhatóságát, illetve projektív metrizálhatóságát. Megmutattuk, hogy egy g.o. struktúra pontosan akkor invariáns Riemann- illetve Finsler-metrizálható, ha invariáns projektív Riemann- illetve projektív Finsler-metrizálható. Kvadratikus esetben pedig a Lie-csoportok kanonikus konnexiójához hasonló merevséget kapunk, miszerint egy kvadratikus g.o. struktúra pontosan akkor invariáns Riemann-metrizálható, ha invariáns projektív Finsler-metrizálható.

A fejezet eredményei a [96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 110, 115] cikkekben jelentek meg.

2.2. Alapfogalmak

Az M sokaságon az $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt Finsler-függvénynek nevezzük, ha pozitív 1-homogén, sima TM -en, továbbá konvex minden pont érintőterében. Az (M, F) párt Finsler-sokaságnak nevezzük. Az F -hez tartozó energiafüggvény illetve Finsler-metrika az $E = \frac{1}{2}F^2$, illetve a $g = g_{ij}(x, y)dx^i \otimes dx^j$, ahol $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$. A regularitási feltétel miatt az $\Omega_E = dd_J E$ Euler–Poincaré 2-forma nemelfajuló, így (1.2) egyértelműen meghatároz egy $\mathcal{S}$ sprayt, amit a Finsler-sokaság kanonikus, vagy *geodetikus sprayjének* nevezünk. Egy $\mathcal{S}$ sprayt Finsler-metrizálhatónak nevezünk, ha van olyan Finsler-metrika, melynek a geodetikus sprayje. Egy Finsler struktúra λ konstans, illetve skalár görbületű, ha a geodetikus sprayhez tartozó görbületi tenzor komponenseire az $R_{jk}^i = \lambda(\delta_k^i g_{jm}(x, y)y^m - \delta_j^i g_{km}(x, y)y^m)$ teljesül, ahol λ egy konstans, illetve skalár függvény TM -en.

2.3. Finsler-metrizálhatóság

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer milyen feltételek mellett származtatható egy Finsler-sokaság geodetikus egyenletrendszereként. Mivel egy Finsler függvény energiafüggvénye 2-homogén megoldása az Euler–Lagrange másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszernek, így az (1.2) másodrendű differenciálegyenlet-rendszer pontosan akkor Finsler-metrizálható, ha van olyan

reguláris $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ Lagrange-függvény, amely megoldása a

$$y^i \frac{\partial E}{\partial y^i} - 2E = 0, \quad y^j \frac{\partial^2 E}{\partial x^j \partial y^i} + f^j(x, y) \frac{\partial^2 E}{\partial y^j \partial y^i} - \frac{\partial E}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

$n + 1$ egyenletből álló parciális differenciálegyenlet-rendszernek és melyre a $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^i \partial y^j}$ pozitív definit. Mivel a rendszer túldeterminált, így általános esetben nincs nemelfajuló megoldása. A megoldhatóságot jellemzi az alábbi

2.3.1. Tétel. [115, Theorem 1.] Egy $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ Lagrange-függvény pontosan akkor megoldása a (2.1) rendszernek, ha megoldása a $\mathcal{L}_C E - 2E = 0$, $d_{\mathfrak{h}} E = 0$, elsőrendű parciális differenciálegyenlet-rendszernek, ahol $\mathfrak{h}$ egy tetszőleges projekció a $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ holonómia disztribúcióra.

2.3.3. Tétel. [115, Theorem 3.] Legyen az M analitikus sokaságon $\mathcal{S}$ egy analitikus spray, melynek $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ holonómia disztribúciója reguláris a $v \in \mathcal{TM}$ egy környezetében. Az $\mathcal{S}$ pontosan akkor Finsler-metrizálható a v egy környezetében, ha a (2.3.1)-es PDE rendszerhez v -ben megadható egy pozitív definit kezdeti érték.

A Finsler-metrizálhatósághoz hasonlóan vizsgálhatjuk a Landsberg-metrizálhatóság problémáját, ahol egy olyan Finsler-metrikát illetve energiafüggvényt keresünk, melyhez tartozó párhuzamos eltolás megőrzi a metrikát. Ez a geometriai feltétel leírható a

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma_i^l \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^l} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{ij}^l g_{lk} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

parciális differenciálegyenlet-rendszer segítségével. Mivel a Finsler-metrika g_{ij} komponensei az E energia függvény második deriváltjaiból származtathatóak, így a (2.2) az E -re egy $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ egyenletből álló harmadrendű parciális differenciálegyenlet-rendszer. Az $\mathcal{S}$ spray pontosan akkor Landsberg-metrizálható, ha Finsler-metrizálható és teljesül rá a (2.2)-es Landsberg-tulajdonság.

2.3.4. Tétel. [115, Theorem 4.] A Landsberg-metrizálhatóságot leíró (2.1)–(2.2) egyenletekből álló harmadrendű PDE rendszer ekvivalens az elsőrendű $\mathcal{L}_C E - 2E = 0$, $d_{\mathfrak{l}} E = 0$, egyenletrendszerrel, ahol $\mathfrak{l} : TTM \rightarrow \mathfrak{L}$ egy tetszőleges projekció arra a legszűkebb $\mathfrak{L}$ involutív disztribúcióra, mely tartalmazza a horizontális alteret és a Berwald-görbület képterét.

2.3.5. Tétel. [115, Theorem 5.] Legyen az M analitikus sokaságon $\mathcal{S}$ egy analitikus spray, melyhez tartozó $\mathcal{L}$ disztribúciója reguláris a $v \in \mathcal{TM}$ egy környezetében. Az $\mathcal{S}$ pontosan akkor Landsberg-metrizálható a v egy környezetében, ha a 2.3.4 tételben szereplő egyenletrendszerhez megadható v -ben egy pozitív definit kezdeti érték.

Egy Finsler-metrika egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó geodetikus sprayt, de egy metrizálható $\mathcal{S}$ sprayhez több olyan metrika is tartozhat, melynek geodetikus sprayje az $\mathcal{S}$. Ezért a variációs szabadságfokhoz hasonlóan [102]-ben bevezetjük az $\mathfrak{m}_{\mathcal{S}}$ metrizálhatósági szabadságfokot, mely megadja, hogy egy sprayhez hány különböző metrika tartozhat. Ez a holonómia disztribúció segítségével az alábbiak szerint határozható meg:

2.3.6. Állítás. [102, Proposition 4.9] Legyen $\mathcal{S}$ egy metrizálható spray, melyhez tartozó párhuzamos eltolás reguláris. Ekkor a metrizálhatósági szabadságfokra $\mathfrak{m}_{\mathcal{S}} = \text{codim } \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$.

2.4. Speciális görbületű Finsler-metrizálhatóság

A speciális (konstans, illetve izotróp) görbületi tulajdonság extra feltételt ír elő a keregett metrikára, szűkítve a lehetséges megoldások halmazát. Vizsgálataink eredményeként kiderült, hogy a konstans illetve skalár görbületű metrikából származó sprayk illetve geodetikus egyenlet-rendszerek felismerhetők, azaz megadható az ezeket karakterizáló feltételrendszer. Mivel zérus görbületű spray esetén a lokális metrizableóságnak nincs obstrukciója (lásd [97, 29, 115]), ezért itt csak a nemzérus görbületű esetekre fókuszálunk.

Egy $\mathcal{S}$ spray izotróp görbületű, ha a Jacobi-endomorfizmusa $\Phi = \rho J - \alpha \otimes C$ alakú. Speciálisan egy izotróp görbületű $\mathcal{S}$ sprayt gyengén Ricci-konstans illetve Ricci-konstans görbületűnek nevezünk, ha teljesül a $\mathcal{L}_\mathcal{S}\rho = 0$, illetve $d_h\rho = 0$ feltétel.

2.4.1. Tétel. [99, Theorem 4.1] *Pontosan akkor létezik olyan konstans nemzérus görbületű Finsler-metrika, melynek a geodetikus sprayje egy adott $\mathcal{S}$, ha az egy nemzérus Ricci-görbületű spray, melynek Jacobi-endomorfizmusa eleget tesz a*

$$\text{rank } dd_J(\text{Tr } \Phi) = 2n, \quad 2(n-1)\Phi - 2(\text{Tr } \Phi)J + d_J(\text{Tr } \Phi) \otimes C = 0, \quad d_h(\text{Tr } \Phi) = 0, \quad (2.3)$$

feltételeknek.

2.4.2. Tétel. [99, Theorem 4.2] *Legyen $\mathcal{S}$ egy nemzérus Ricci-görbületű spray egy legalább háromdimenziós M sokaságon, melyre teljesül a (2.3) első, regularitási feltétele. Ekkor $\mathcal{S}$ -re az alábbi állítások ekvivalensek: i) Finsler-metrizálható; ii) Finsler-metrizálható egy nemzérus skalár görbületű Finsler-metrikával; iii) Finsler-metrizálható egy Einstein-metrikával; iv) Finsler-metrizálható egy nemzérus konstans görbületű Finsler-metrikával; v) Ricci-konstans görbületű.*

A skalár görbületű metrikával metrizableó sprayket az alábbi tétel jellemzi:

2.4.3. Tétel. [100, Theorem 3.1] *Egy $\mathcal{S}$ spray pontosan akkor metrizableó egy nemzérus skalár görbületű Finsler-metrikával, ha $\mathcal{S}$ izotróp, $\rho \neq 0$, továbbá minden $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{T}M)$ esetén $D_{hX}(\alpha/\rho) = 0$, valamint az $\Omega = d(\alpha/\rho) + 2i_{\mathbb{F}}\alpha/\rho \wedge \alpha/\rho$ 2-forma szimplektikus.*

A tétel bizonyítása egyben algoritmust is ad, melynek segítségével a sprayhez tartozó skalár görbületű Finsler-függvény megkonstruálható. Speciális esetként a módszer alkalmas arra, hogy olyan metrikákat találjunk, melyek megoldásai Hilbert negyedik problémájának.

2.5. Projektív Finsler-metrizálhatóság

Projektív ekvivalensnek nevezünk két sprayt, ha geodetikusaik egy irányítástartó átparaméterezés erejéig megegyeznek, azaz van olyan irányítástartó átparaméterezés, amely az egyik spray geodetikusait a másik spray geodetikusába viszi át. Egy sprayt projektív metrizableónak nevezünk, ha van olyan Finsler-metrika, melynek geodetikus sprayével projektív ekvivalens. A projektív metrizableóság vizsgálatára több módszer, illetve megközelítési mód is alkalmas. A Helmholtz-feltételek vizsgálatával kaptuk az alábbi eredményt.

2.5.1. Tétel. [97, Theorem 1.] Az $\mathcal{S}$ spray pontosan akkor projektív metrizálható, ha van olyan szemibázikus 1-forma $\theta \in \Lambda_v^1(TM)$, melyre teljesül, hogy $i_{\mathcal{S}}\theta > 0$, továbbá

$$\text{rank}(d\theta) = 2n - 2, \quad \mathcal{L}_C\theta = 0, \quad d_J\theta = 0, \quad d_h\theta = 0. \quad (2.4)$$

A projektív metrizálhatóság problémáját vizsgálhatjuk a Rapcsák-egyenletek segítségével is. Rapcsák András [75] cikkében megadta a projektív metrizálhatóságot leíró másodrendű parciális differenciálegyenlet-rendszert. A homogenitási feltételt is figyelembe véve ez nem más, mint az 1-homogén Finsler-függvényre vonatkozó Euler–Lagrange PDE. Ennek alapján azt gondolhatnánk, hogy a metrizálhatóságot és a projektív metrizálhatóságot leíró rendszer (azaz az Euler–Lagrange PDE kiegészítve a megfelelő 2- illetve 1-homogenitási feltétellel) vizsgálata hasonló, és a projektív metrizálhatóságra is a 2.3.1 tételhez hasonló eredményt kaphatunk. A várakozással ellentétben ez még sincs így, és a projektív metrizálhatóság vizsgálata – különösen azokban az esetekben, ahol a görbületi feltételeket is figyelembe kell venni – nagyon bonyolulttá válik. Ennek oka, hogy itt magasabb rendű kompatibilitási feltételek léphetnek fel.

Az első kompatibilitási egyenletek a csatolt (nemlineáris) konnexióra rónak ki feltételeket. Ezen feltételekkel kiegészített rendszerre vonatkozik az alábbi

2.5.4. Tétel. [110, Theorem 4.6] Az M sokaságon adott $\mathcal{S}$ homogén spray kibővített Rapcsák-rendszere pontosan akkor formálisan integrálható, ha $\mathcal{S}$ izotróp görbületű.

Következésként adódik, hogy analitikus esetben, ha a sokaság 2-dimenziós, vagy ha a spray lapos illetve izotróp görbületű, akkor az lokálisan projektív Finsler-metrizálható. A nem-izotróp esetben a görbületre vonatkozó kompatibilitási feltételekkel kiegészített Rapcsák rendszer megoldhatóságát kell vizsgálni. Erre vonatkozó eredményeink a [111]-ben találhatók.

2.6. A geodetikus struktúra projektív merevsége

Finsler sokaságok geometriai vizsgálata során felmerül az a természetes kérdés, hogy mennyire merev a geodetikus struktúra, azaz egy átparaméterezés, vagyis a geodetikus spray projektív transzformációja során megőrződnek-e bizonyos geometriai tulajdonságok, illetve mennyiségek. Ehhez kapcsolódóan vizsgáltuk, hogy bizonyos projektív transzformációk hogyan változtatják meg a metrizálhatóságot, illetve a görbületet.

Mivel a projektív transzformáció során fellépő projektív faktor egy 1-homogén függvény, így természetes választásnak tűnik magát a geodetikus struktúrát meghatározó Finsler függvényt, illetve ennek nemzérus konstansszorosát választani. Az így kapott projektív deformáció – azaz a megfelelően átparaméterezett geodetikus struktúra – metrizálhatóságára vonatkozik az alábbi tételünk:

2.6.1. Tétel. [98, Theorem 5.1] Legyen $\mathcal{S}$ az F Finsler-függvényhez tartozó geodetikus spray. Ekkor majdnem minden $\lambda \in \mathbb{R}$ értékre az $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} - 2\lambda F C$ projektív deformált nem Finsler-metrizálható.

Ez az eredmény világosan mutatja a geodetikus struktúra bizonyos éretelemben vett merevségét, illetve azt, hogy minden spray projektív osztályában végtelen sok nem metrizálható spray található. A 2.6.1 tétel általánosítja [95] konstans zászlógörbületű esetekre vonatkozó eredményeit.

Általánosabb eredményeket kapunk, ha a projektív faktorról csak annyit tételezünk fel, hogy az a Finsler struktúrára nézve egy holonómia invariáns függvény:

2.6.2. Tétel. [103, Theorem 1] Minden 1-homogén nemtriviális holonómia invariáns függvény és majdnem minden $\lambda \in \mathbb{R}$ konstans esetén az $\mathcal{S}$ Finsler spray $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} - 2\lambda \mathcal{P}C$ projektív deformációja nem metrizálható.

A tétel bizonyításából kiderül, hogy csak nagyon speciális holonómia invariáns függvény és skalárok esetén lehet az átparaméterezett struktúra Finsler-metrizálható. Ha $\{\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}\}$ jelöli a Finsler-sokaság főgörbületeit (ezek lényegében a görbületből származtatható Jacobi-endomorfizmus sajátértékei), akkor igaz az alábbi

2.6.7. Következmény. [103, Corollary 4.2] Legyen $\mathcal{S}$ egy (M, F) Finsler-sokaság geodetikus sprayje és $\tilde{\mathcal{P}}$ egy nemzérus holonómia invariáns függvény. Ha az $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} - 2\tilde{\mathcal{P}}C$ projektív deformáció Finsler-metrizálható, akkor $\tilde{\mathcal{P}}^2 + \kappa_i = 0$ a Finsler-tér valamely κ_i $i \in \{1, \dots, n-1\}$ főgörbületére.

Így ha a főgörbületek nemnegatívak, akkor a Finsler-tér geodetikus struktúrájának nincs metrizálható holonómia invariáns projektív deformációja.

A sprayknek tekinthetjük olyan speciális projektív deformációit is, melyek nem változtatják meg a görbületet. Ezeket Funk-függvényeknek nevezzük. Z. Shen [82, page 177]-ben vetette fel a kérdést, hogy vajon létezik-e minden sprayhez nem-triviális Funk-függvény, azaz görbület-tartó projektív deformáció. Erre vonatkozik az alábbi eredmény:

2.6.8. Tétel. [101, Theorem 3.1] Konstans, nemzérus zászlógörbületű Finsler-metrikának Funk-függvénye szükségképpen konstans.

2.7. Invariáns metrizálhatóság és projektív metrizálhatóság

Az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van egy Lie-csoport illetve geodetikus orbit struktúra kanonikus konnexiójának invariáns Riemann-, illetve Finsler-metrizálhatósága és invariáns projektív Riemann-, illetve projektív Finsler-metrizálhatósága között. A kérdés az, hogy az elvileg gyengébb invariáns projektív metrizálhatóságból vajon tudunk-e következtetni az erősebb invariáns metrizálhatósági tulajdonságra.

2.7.4. Állítás. [96, Proposition 4.4] Egy Lie-csoport kanonikus sprayje pontosan akkor invariáns Riemann-, illetve Finsler-metrizálható, ha invariáns projektív Riemann-, illetve Finsler-metrizálható.

Igaz továbbá az alábbi erősebb tulajdonság is:

2.7.5. Tétel. [96, Theorem 4.5] Egy Lie-csoport kanonikus sprayje pontosan akkor invariáns Riemann-metrizálható, ha invariáns projektív Finsler-metrizálható.

A tétel állítása az egyik irányban nyilván triviális, hiszen ha Riemann-metrizálható, akkor Finsler-metrizálható, és így projektív Finsler-metrizálható is. A megfordítás egyrészt használja a 2.7.4 tételt, illetve Szabó Zoltánnak a Berwald-típusú terek Riemann-metrizálhatóságára vonatkozó eredményét [88].

2.7.6. Következmény. [96, Corollary 4.6] *Egy G Lie-csoport kanonikus sprayje pontosan akkor invariáns Riemann-, Finsler-, projektív Riemann-, projektív Finsler-metrizálható, ha a G Lie-csoport $\mathfrak{g}$ Lie-algebráján megadható egy olyan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ belső szorzat, melyre minden $a, \alpha \in \mathfrak{g}$ esetén teljesül az $\langle [a, \alpha], \alpha \rangle = 0$ feltétel.*

Érdekességgként megjegyezzük, hogy annak ellenére, hogy a Lie-csoportok kanonikus sprayje egy igen természetes balinvariáns struktúra, nem igaz, hogy ez mindig balinvariáns metrikából lenne származtatható. Az 1.5 fejezetben található példa olyan Lie-csoportra, mely nem származtatható variációs elvből, így ez természetesen nem is metrizable. Érdemes azt is megemlíteni, hogy ennek a balinvariáns struktúrának még a metrizable-sága sem jelent automatikusan invariáns metrizable-ságot. Erre jó példa a 3-dimenziós Heisenberg-csoport, melynek kanonikus sprayje metrizable [40], de a 2.7.6 alapján mégsem származtatható invariáns metrikából.

Az alfejezet második részében homogén terek geodetikus orbit struktúráját vizsgáljuk. Legyen M egy összefüggő sokaság, melyen a G Lie-csoport tranzitíven hat. Jelölje H az $o \in M$ ponthoz tartozó stabilizátor részcsoportot és $\pi : G \rightarrow G/H$ a projekciót. Ekkor M izomorf a G/H homogén térrel és az $o \in M$ -beli érintőtér izomorf a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ -val, ahol $\mathfrak{g}$, illetve $\mathfrak{h}$ a G , illetve H Lie-csoportokhoz tartozó Lie-algebrák. Egy geodetikus struktúrát, sprayt, metrikát, Lagrange-függvényt invariánsnak nevezünk, ha ezek G hatásával szemben invariánsak.

Egy $o \in M$ -ból induló γ geodetikust *homogénnek* vagy *stacionáriusnak* nevezünk, ha van olyan $X_\gamma \in \mathfrak{g}$, hogy a γ a G -nek az $\{\exp tX_\gamma : t \in \mathbb{R}\}$ egyparaméteres részcsoportjának a pályája [89, 90]. Egy invariáns geodetikus struktúrát geodetikus orbit struktúrának (röviden g.o. struktúrának) nevezünk, ha az $o \in M$ pontból induló valamennyi geodetikusa a fenti értelemben véve homogén. A g.o. struktúrákra igaz a 2.7.4 állítás általánosítása:

2.7.9. Állítás. [96, Proposition 5.5] *Egy g.o. spray pontosan akkor invariáns Riemann-, illetve Finsler-metrizálható, ha invariáns projektív Riemann-, illetve Finsler-metrizálható.*

Ha egy g.o. spray kvadratikus, akkor 2.7.5 állításhoz hasonlóan igaz az alábbi:

2.7.10. Tétel. [96, Theorem 5.6] [96, Corollary 4.6] *Egy kvadratikus g.o. spray pontosan akkor invariáns Riemann-metrizálható, ha invariáns projektív Finsler-metrizálható.*

3. fejezet

Finsler-sokaságok holonómiájáról

3.1. Bevezetés

A Riemann- illetve Finsler-sokaságokon a görbe menti párhuzamos eltolás a kanonikus konnexióra vonatkozó kovariáns deriválás, azaz egy differenciálegyenlet-rendszer segítségével definiálható. A csatolt geometriai struktúra – az É. Cartan által bevezetett holonómiacsoport – természetes módon származtatható a zárt görbék mentén vett párhuzamos eltolások által generált transzformációk csoportjaként.

Riemann-sokaságok kanonikus konnexiója a Levi-Civita konnexió, mely lineáris és metrikus, aminek következtében a párhuzamos eltolások olyan lineáris transzformációk, melyek megőrzik a metrikát. Így egy Riemann-sokaság holonómiacsoportja szükségképpen az ortogonális csoport egy részcsoportha. Riemann esetben a holonómiacsoportok vizsgálata kiemelt figyelmet kapott, és kiváló matematikusok – mint például M. Berger, D. Alekseevski, A. Gray, R.B. Brown, R.L. Bryant – munkájának eredményeképpen mára ezek teljes klasszifikációja ismert.

Finsler esetben a kanonikus konnexió homogén (de általában nem lineáris) és megőrzi a Finsler-normát (de általában nem metrikus). A Riemann esethez képest a Finsler-terek holonómiacsoportjáról meglepően kevés információ áll rendelkezésünkre, és csak igen speciális esetekben sikerült meghatározni nem-Riemann típusú tér holonómiacsoportját. A legfontosabb eredmény Szabó Zoltántól származik, aki [88]-ban megmutatta, hogy minden Berwald-metrika (azaz olyan Finsler-metrika, melyhez tartozó kanonikus konnexió lineáris) esetén a sokaságon megadható olyan Riemann-metrika, melynek Levi-Civita konnexiója megegyezik a Berwald-metrika kanonikus konnexiójával. Így speciálisan minden Berwald-metrikához létezik olyan Riemann-metrika, hogy a holonómiacsoportjaik megegyeznek. Kozma László megmutatta, hogy Landsberg-metrikák (azaz olyan Finsler-metrikák, melyhez tartozó kanonikus konnexió metrikus) esetén a holonómiacsoport egy kompakt Lie-csoport, melynek elemei az indukált Riemann-metrikára vonatkozó izometriái [56, 57]. Homogén (nem-lineáris) konnexiók holonómiáját vizsgálva W. Barthelnél jelenik meg először a holonómia algebra fogalma [13], majd később P. Michor [69]-ben vizsgálta, hogyan lehet általános keretek között akár végtelen dimenziós holonómiacsoportokat és holonómia-algebrákat leírni. Ennek alapján kezdtük el vizsgálni a diffeomorfizmus-csoport részcsoporthjának érintőstruktúráját [119], melynek segítségével sikerült a Finsler-sokaságok holonómiájára vonatkozó új eredményeket elérni

(cf. [108, 109, 120, 121, 122, 123, 124]). Ezeket az eredményeket mutatjuk be ebben a fejezetben.

A 3.3 alfejezetben egy M sokaság diffeomorfizmus-csoportjának részcsoporthoz tartozó érintő struktúrát vizsgáljuk: a $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ -nek egy tetszőleges $\mathcal{G}$ részcsoporthoz bevezetjük a $\mathcal{G}$ -t érintő vektormező fogalmát. Ezek halmazát $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ -vel jelölve megmutatjuk, hogy $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ egy Lie-részalgebra az M sima vektormezőinek $\mathfrak{X}(M)$ Lie-algebrájában (3.3.3 tétel). Ennek következtében a $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ tetszőleges részhalmaza által generált Lie-algebra Lie-részalgebra lesz $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ -ben, és így valamennyi eleme rendelkezni fog az érintő tulajdonsággal. Ez különösen abban az esetben lehet érdekes, amikor a $\mathcal{G}$ -t érintő két vektormező Lie-zárójele egy új irányt generál, hiszen ekkor ebben az új irányban is garantálni tudjuk az érintési tulajdonságot. További fontos tulajdonság, hogy amennyiben az M kompakt, akkor a $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ exponenciális képét tartalmazza a $\mathcal{G}$ csoport $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ -beli topologikus lezártja. Így a $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ vizsgálatával értékes információt kaphatunk $\mathcal{G}$ lezártjáról, illetve magáról $\mathcal{G}$ -ről. A konstrukció nemcsak a diffeomorfizmus-csoport részcsoporthaira, hanem tetszőleges (véges, vagy végtelen dimenziós) Lie-csoport részcsoporthaira is alkalmazható.

A 3.4 és a 3.5 alfejezetekben a 3.3 alfejezet fogalmaira és eredményeire építve a Finsler-sokaságok holonómiacsoporthoz és a fibrált holonómiacsoporthoz az érintőalgebráját és ezek részalgebráit vizsgáljuk. Bevezetjük a görbületi-algebra és az infinitezimális holonómia-algebra fogalmát, és megmutatjuk, hogy elemeik érintik a holonómiacsoporthoz. Így mind a görbületi-algebra, mind az infinitezimális holonómia-algebra információval szolgálhatnak a Finsler-sokaság holonómiacsoporthoz.

A 3.6 alfejezetben megmutatjuk, hogy egy kettőnél magasabb dimenziós nemzérus konstans görbületű nem-Riemann Finsler-sokaság görbületi algebrájának a dimenziója nagyobb, mint az érintőterén ható ortogonális csoport dimenziója, így ebben az esetben a holonómiacsoporthoz nem lehet egy kompakt Lie-csoport. Adunk példát a 3-dimenziós Heisenberg-csoporton egy olyan szinguláris Berwald–Moór-típusú Finsler-metrikára, melynek görbületi algebrája végtelen dimenziós, ami azt mutatja, hogy ennek a térnek a holonómiacsoporthoz nem lehet egy véges-dimenziós Lie-csoport. Ez az eredmény pozitív választ ad S.S. Chern és Z. Shen kérdésére: *"Van-e olyan Finsler-sokaság, mely holonómiacsoporthoz nem lehet egyetlen Riemann-sokaság holonómiacsoporthoz sem?"* [28, page 85].

A 3.7 alfejezetben a konstans nemzérus görbületű lokálisan síkprojektív Finsler-sokaságok holonómiacsoporthoz vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy nem-Riemann esetben az infinitezimális holonómia-algebra nem lehet véges dimenziós. Az infinitezimális holonómia-algebra holonómiacsoporthoz érintő tulajdonsága alapján kapjuk, hogy egy konstans nemzérus görbületű lokálisan síkprojektív Finsler-sokaság holonómiacsoporthoz dimenziója pontosan akkor véges, ha a metrika Riemann-típusú, vagy ha a Finsler-struktúra zérus görbületű.

A 3.8 alfejezetben a konstans nemzérus görbületű lokálisan síkprojektív egyszeresen összefüggő Finsler 2-sokaságok egy speciális osztályának, valamint a konstans görbületű lokálisan síkprojektív egyszeresen összefüggő 2-dimenziós (nem Riemann) Randers-sokaságoknak a holonómiacsoporthoz vizsgáljuk. A vizsgálati módszerek és az eredmények a két esetben igen hasonlóak. Megmutatjuk, hogy ezen Finsler-felületek holonómiacsoporthoz a lezártja izomorf a kör irányítástartó diffeomorfizmusainak csoportjával, azaz $\mathcal{D}iff_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ -gyel. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben a holonómiacsoporthoz maximális. A kapott eredmény jelentőségét az adja, hogy ezek az első esetek, ahol végte-

len dimenziós Finsler holonómiacsoportot sikerült azonosítani. Eredményeinkből adódik, hogy a standard Funk-metrika (ami konstans negatív görbületű), illetve a Bryant–Shen-féle Finsler-metrika (mely konstans pozitív görbületű [21, 85]) holonómiacsoportjának a lezártja izomorf $\mathcal{D}iff_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ -gyel. Ami a Randers-tereket illeti, ezek elmélete azért különösen érdekes, mert ezen metrikák talán a legszemléletesebb Finsler-metrikák, hiszen Riemann-sokaságokon vett Zermelo navigációs problémákból származtathatóak [11]. Mivel egy Randers-norma nem más, mint egy Riemann-norma egy 1-formával deformálva, ennek alapján azt gondolhatnánk, hogy a Randers-sokaságok és a Riemann-sokaságok holonómia tulajdonságai hasonlóak. A fentebb említett eredményeink azonban azt mutatják, hogy ez messze nincs így.

A fejezet eredményei a [108, 109, 119, 120, 122, 123, 124] publikációkban jelentek meg.

3.2. Alapfogalmak

Legyen (M, F) egy n -dimenziós Finsler-sokaság, amihez tartozó geodetikus sprayt jelölje az $\mathcal{S}$. A 2.2 alfejezetben bevezetett horizontális disztribúcióhoz tartozó horizontális liftet használva bevezethetjük a horizontális kovariáns deriválást az alábbi formulával: ha $\xi = \xi^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}$ és $X(x) = X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, akkor $\nabla_X \xi = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - G_j^k \frac{\partial \xi^i}{\partial y^k} + G_{jk}^i \xi^k \right) X^j \frac{\partial}{\partial y^i}$. A $c: [0, 1] \rightarrow M$ görbe menti X vektormező párhuzamos, ha teljesül a $\nabla_c X = 0$ feltétel. A szokásos módon bevezethető a $\mathcal{P}_c: T_{c_0}M \rightarrow T_{c_1}M$ párhuzamos eltolás. Amennyiben a c kezdő és végpontja ugyanaz a $p \in M$ pont, akkor $P_c: T_pM \rightarrow T_pM$ egy homogén, Finsler-normát megőrző transzformáció. Az ilyen $\mathcal{P}_c$ transzformációt p -beli holonómia-transzformációnak, az ezek által generált csoportot pedig holonómiacsoportnak nevezzük. Finsler (és így a Riemann esetben is) a homogenitás és a normatartás miatt a holonómia-transzformáció, illetve a holonómiacsoport tekinthető az $\mathcal{I}_p := \{ y \in T_pM : \mathcal{F}(y) = 1 \}$ indikatrixon:

3.2.1. Definíció. Az (M, F) Finsler-sokaság $p \in M$ pontbeli holonómiacsoportja az $\mathcal{I}_p$ indikatrix $\mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}_p)$ diffeomorfizmus-csoportjának azon $\mathcal{H}ol_p(M)$ részcsoportha, melyet a p -ből induló, szakaszonként sima, zárt görbék menti párhuzamos eltolások generálnak.

3.3. Diffeomorfizmus-csoport részcsoporthjának érintő Lie-algebrája

Legyen $\mathcal{G}$ egy részcsoportha az M sima sokaság $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ diffeomorfizmus-csoportjának. (Nem tételezzük fel, hogy $\mathcal{G}$ egy Lie-részcsoportha a $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ -nek.)

3.3.1. Definíció. [109, Definition 3.1 and 3.2]

- A $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ egy sima $t \rightarrow \varphi_t$ görbét az $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező integrálgörbéjének nevezzük, ha $\varphi_0 = id_M$, és van olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre minden $p \in M$ esetén a $t \rightarrow \varphi_t(p)$ az $X(p)$ vektor egy k -ad rendű integrálgörbéje.
- Az $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező érinti a $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}iff^\infty(M)$ részcsoporthot, ha van X -nek $\mathcal{G}$ -beli integrálgörbéje. A $\mathcal{G}$ -t érintő vektormezők halmazát $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ -vel jelöljük.

Az $X \in \mathcal{T}_0\mathcal{G}$ pontosan akkor teljesül, ha létezik $\varphi: I \rightarrow \text{Diff}^\infty(M)$ diffeomorfizmusok olyan 1-paraméteres sima családjá, melyre $\varphi_t \in \mathcal{G}$, és valamilyen $k \in \mathbb{N}$ -re

$$\varphi_0 = \text{id}_M, \quad \left. \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad \dots \quad \left. \frac{\partial^{k-1} \varphi_t}{\partial t^{k-1}} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^k \varphi_t}{\partial t^k} \right|_{t=0} = X. \quad (3.1)$$

3.3.3. Tétel. [109, Theorem 3.4] Ha $\mathcal{G}$ egy részcsoportja a $\text{Diff}^\infty(M)$ -nek, akkor $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ egy Lie-részalgebrája $\mathfrak{X}(M)$ -nek.

$\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ -t a $\mathcal{G}$ részcsoport érintő Lie-algebrájának nevezzük. Nyilván tetszőleges $\Sigma \subset \mathcal{T}_0\mathcal{G}$ esetén $\langle \Sigma \rangle_{\text{Lie}} \subset \mathcal{T}_0\mathcal{G}$, azaz a generált Lie-algebra megőrzi az érintési tulajdonságot.

3.3.7. Tétel. [109, Theorem 3.10] Legyen M egy kompakt sokaság, $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^\infty(M)$ részcsoport, melynek a C^∞ topológiára nézve vett lezártját jelölje $\overline{\mathcal{G}}$. Ekkor a $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ érintő Lie-algebrának az $\exp: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Diff}^\infty(M)$ exponenciális leképezésre vonatkozó képe által generált csoport a $\overline{\mathcal{G}}$ egy részcsoportja.

Megjegyezzük, hogy a részcsoportot érintő Lie-algebra konstrukciója tetszőleges (véges, vagy végtelen dimenziós) Lie-csoport részcsoportjaira is alkalmazható. Abban az esetben, amikor $\mathcal{G}$ egy Lie-részcsoport, akkor a fent bevezetett $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ a $\mathcal{G}$ -nek a szokásos Lie-algebrája.

3.4. Fibrált holonómia-algebra és Lie-részalgebrái

Legyen (M, F) egy Finsler-sokaság. Fibrált holonómiacsoportnak nevezzük az $(\mathcal{I}M, \pi, M)$ induktrix nyaláb fibrummegörző Φ diffeomorfizmusainak azt a $\mathcal{H}ol_f(M)$ részcsoportját, melyre minden $p \in M$ esetén teljesül, hogy $\Phi_p = \Phi|_{\mathcal{I}_p}$ a p -beli $\mathcal{H}ol_p(M)$ holonómiacsoport eleme. A $\mathcal{H}ol_f(M)$ fibrált holonómiacsoport a $\text{Diff}^\infty(\mathcal{I}M)$ egy részcsoportja. A fibrált holonómiacsoport $\mathfrak{hol}_f(M) := \mathcal{T}_0(\mathcal{H}ol_f(M))$ érintő Lie-algebráját fibrált holonómia-algebrának nevezzük.

3.4.1. Tétel. [109, Theorem 4.2] A fibrált holonómia-algebra $\mathfrak{hol}_f(M)$ egy Lie-részalgebrája $\mathfrak{X}(\mathcal{I}M)$ -nek.

Mivel a fibrált holonómiacsoport elemei fibrummegörző diffeomorfizmusok, így a $\mathfrak{hol}_f(M)$ elemei az induktrixnyaláb vertikális vektormezői lesznek.

3.4.3. Definíció. Egy $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{I}M)$ vektormezőt görbületi vektormezőnek nevezünk, ha van olyan $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, melyekre $\xi = R(X^h, Y^h)$. A görbületi vektormezők által generált $\mathfrak{R}$ Lie-algebrát görbületi algebrának nevezzük.

Megmutatható, hogy minden görbületi vektormezőhöz konstruálható másodrendű integrálgörbe a fibrált holonómiacsoportban, ezért igaz az alábbi

3.4.4. Állítás. [109, Proposition 4.4]

1. A görbületi-algebra elemei érintik a $\mathcal{H}ol_f(M)$ fibrált holonómiacsoportot.
2. A görbületi-algebra egy Lie-részalgebrája $\mathfrak{hol}_f(M)$ -nek.

3.4.6. Definíció. Egy (M, F) Finsler-sokaság $\mathfrak{hol}^*(M)$ infinitezimális holonómia-algebrája az induktrixnyaláb sima vektormezőinek az a legszűkebb Lie-algebrája, mely tartalmazza a görbületi vektormezőket és zárt a horizontális Berwald deriválásra nézve.

3.4.7. Állítás. [109, Proposition 4.7]

1. Az infinitezimális holonómia-algebra elemei érintik a fibrált holonómiacsoportot.
2. Az infinitezimális holonómia-algebra egy Lie-részalgebrája $\mathfrak{hol}_f(M)$ -nek.

3.5. Holonómia-algebra és Lie-részalgebrái

Legyen (M, F) egy n -dimenziós Finsler-sokaság. Ekkor tetszőleges $p \in M$ pont esetén az $\mathcal{I}_p$ induktrix egy kompakt hiperfelület $T_p M$ -ben, így a $\mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}_p)$ diffeomorfizmus-csoportja egy végtelen dimenziós Fréchet–Lie-csoport, melyhez tartozó Lie-algebra az $\mathcal{I}_p$ sima vektormezőinek $\mathfrak{X}(\mathcal{I}_p)$ Lie-algebrája. Mivel a p -beli $\mathcal{H}ol_p(M)$ holonómiacsoport egy részcsoportha a $\mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}_p)$ diffeomorfizmus-csoportnak, így a 3.3 alfejezet alapján tekinthető a holonómiacsoport

$$\mathfrak{hol}_p(M) := \mathcal{T}_0(\mathcal{H}ol_p(M))$$

érintő Lie-algebrája, melyet a Finsler-sokaság p -beli *holonómia-algebrájának* nevezünk. A 3.3.3 tétel alapján

3.5.1. Tétel. [109, Theorem 4.9] Egy (M, F) Finsler-sokaság p -beli $\mathfrak{hol}_p(M)$ holonómia-algebrája az $\mathfrak{X}(\mathcal{I}_p)$ egy Lie-részalgebrája.

A továbbiakban a holonómia-algebra fontos Lie-részalgebráival, az adott pontbeli görbületi-algebrával és pontbeli infinitezimális holonómia-algebrával foglalkozunk. Mindkettő jelentőségét az adja, hogy konkrét Finsler-sokaságok esetén ezen Lie-algebrák segítségével a holonómiacsoportra vonatkozó információkhoz juthatunk.

3.5.4. Definíció. Legyen (M, F) egy Finsler-sokaság és $p \in M$. Ekkor a $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{I}_p)$ egy p -beli görbületi vektormező, ha van olyan $X_p, Y_p \in T_p M$, melyekre $\xi = R(X_p^h, Y_p^h)$. A p -beli görbületi vektormezők által generált $\mathfrak{R}_p$ Lie-algebrát p -beli görbületi algebrának nevezzük.

A 3.4.3 és a 3.5.4 definíciókban bevezetett görbületi algebrák közötti kapcsolatot az $\mathfrak{R}_p = \{ \xi|_{\mathcal{I}_p} \mid \xi \in \mathfrak{R} \}$ adja. Ennek alapján a 3.4.4 állításból adódik az alábbi

3.5.5. Állítás. [109, Proposition 4.4] Az $\mathfrak{R}_p$ görbületi-algebra elemei érintik a p -beli holonómiacsoportot, így a p -beli görbületi-algebra egy Lie-részalgebrája a $\mathfrak{hol}_p(M)$ holonómia-algebrának.

3.5.6. Definíció. Legyen (M, F) egy Finsler-sokaság és $p \in M$. Ekkor az $\mathcal{I}_p$ induktrix sima vektormezőinek $\mathfrak{hol}_p^*(M) := \{ \xi|_{\mathcal{I}_p} \mid \xi \in \mathfrak{hol}^*(M) \}$ részalgebráját a Finsler-sokaság p -beli infinitezimális holonómia-algebrájának nevezzük.

A 3.4.7 állítás alapján adódik az alábbi

3.5.7. Állítás. [109, Proposition 4.7] A $\mathfrak{hol}_p^*(M)$ infinitezimális holonómia-algebra egy Lie-részalgebrája $\mathfrak{hol}_p(M)$ -nek, elemei érintik a p -beli $\mathcal{H}ol_p(M)$ holonómiacsoportot.

Egy (M, F) Finsler-sokaság $p \in M$ pontjában az indikatrix sima vektormezőinek Lie-algebrájában a bevezetett rész Lie-algebrák közötti kapcsolat:

$$\mathfrak{R}_p(M) \subset \mathfrak{hol}_p^*(M) \subset \mathfrak{hol}_p(M) \subset \mathfrak{X}(\mathcal{I}_p). \quad (3.2)$$

Megjegyezzük, hogy egy adott pontban a görbületi-algebra általában szigorúan szűkebb, mint az infinitezimális holonómia-algebra, ugyanakkor előfordulhat az is, hogy e két Lie-algebra megegyezik. Erre adnak példát az olyan konstans, nemzérus görbületű Finsler-felületek, melyek Berwald-átlaggörbülete zérus. Z. Shen [84]-ben az $\mathbb{S}^2(\subset \mathbb{R}^3)$ -n, illetve a $\mathbb{D}^2(\subset \mathbb{R}^2)$ -n megadott Randers-metrikáknak egy olyan 1-paraméteres családját, mely konstans zászlógörbületű, nem síkprojektív és eltűnő S -görbületű [84, Thm 1.1 and 1.2]. Ezen metrikák Berwald-átlaggörbülete zérus, és bármely pontban a görbületi-algebra és az infinitezimális holonómia-algebra megegyezik.

3.6. Konstans görbületű Finsler-sokaság

Legyen $(M, \mathcal{F})$ egy n -dimenziós nemzérus, konstans görbületű Finsler-sokaság. Ekkor egy $p \in M$ pontban a görbületi vektormező $R(X, Y)(y) = \lambda(\delta_j^i g_{km}(y)y^m - \delta_k^i g_{jm}(y)y^m)X^j Y^k \frac{\partial}{\partial y^i}$ alakú, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Ezen vektormezők által generált Lie-algebra a p -beli $\mathfrak{R}_p$ görbületi-algebra. Riemann esetben a görbületi-algebra dimenziója éppen $\frac{n(n-1)}{2}$, és egy n -dimenziós konstans, nemzérus görbületű Riemann-sokaság holonómia-algebrája izomorf az $\mathfrak{o}(n)$ ortogonális Lie-algebrával. Finsler esetre vonatkozik az alábbi

3.6.3. Tétel. [120, Theorem 12.] *Legyen $(M, \mathcal{F})$ egy n -dimenziós, nemzérus konstans görbületű Finsler-sokaság, ahol $n > 2$. Ha $p \in M$ nem (szemi-)Riemann típusú pont, akkor $\dim \mathfrak{R}_x > \frac{n(n-1)}{2}$.*

Következésképpen adódik, hogy egy n -dimenziós, nemzérus konstans görbületű Finsler-sokaság esetén $\dim \mathfrak{R}_x = \frac{n(n-1)}{2}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $n=2$, vagy ha a $p \in M$ pont (szemi-)Riemann típusú. A görbületi-algebra holonómiacsoporthoz tartozó tulajdonságát felhasználva kapjuk az alábbi eredményeket:

3.6.5. Tétel. [120, Theorem 13.] *Egy $n > 2$ dimenziós, nemzérus konstans görbületű $(M, \mathcal{F})$ Finsler-sokaság holonómiacsoportha pontosan akkor véges dimenziós kompakt Lie-csoport, ha $(M, \mathcal{F})$ egy Riemann-sokaság.*

3.6.6. Tétel. [120, Theorem 14.] *A nem-Riemann típusú $n > 2$ dimenziós, nemzérus konstans görbületű Finsler-sokaság holonómiacsoportha nem lehet izomorf egyetlen Riemann-sokaság holonómiacsoporthjával sem.*

3.7. Konstans görbületű síkprojektív Finsler-sokaságok

Egy $D \subset \mathbb{R}^n$ tartományon vett (D, F) Finsler-sokaságot síkprojektívnek nevezünk, ha geodetikusai egyenesek. Egy (M, F) Finsler-sokaságot lokálisan síkprojektívnek nevezünk, ha minden $p \in M$ pont egy környezetében megadható olyan $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokális koordinátázás, hogy az F metrika által az $x(U)$ tartományon indukált metrika síkprojektív. Az ilyen

koordináta-rendszert projektív koordináta-rendszernek nevezzük. Egy lokálisan síkprojektív Finsler-sokaság geodetikus együtthatói projektív koordináta-rendszerben $G^i(x, y) = \mathcal{P}(x, y)y^i$ speciális alakúak, ahol a $\mathcal{P}$ projektív faktor egy 1-homogén függvény az y változóban (cf. [28, p. 63]). A projektív koordinátázás esetén 2-dimenziós síkok 2-dimenziós totálgeodetikus részsokaságokat határoznak meg. Igaz továbbá, hogy a kanonikus konnektió pontosan akkor lineáris, ha a projektív faktor az y változóban lineáris.

A célunk az, hogy karakterizáljuk mely esetben lehet véges illetve végtelen dimenziós a holonómiacsoport. Felhasználva a kovariáns deriválás síkprojektív esetre vonatkozó speciális összefüggéseit, a metrika kompatibilitási feltételeit, valamint S. Lie eredményét (cf. [1, Theorem 4.3.4]) belátható az alábbi

3.7.3. Állítás. [122, Proposition 3.2] *Egy nem-Riemann típusú konstans nemzérus görbületű síkprojektív Finsler-felület infinitezimális holonómia-algebrája végtelen dimenziós.*

Az állításból adódik, hogy egy ilyen Finsler-sokaság holonómia-algebrája is szükségképpen végtelen dimenziós. A Finsler-sokaság totál-geodetikus részsokaságainak geometriai tulajdonságait felhasználva kapjuk az alábbi eredményt:

3.7.9. Tétel. [122, Theorem 3.6] *Egy egyszeresen összefüggő, lokálisan síkprojektív, konstans λ görbületű $(M, \mathcal{F})$ Finsler-sokaság holonómiacsoportja véges dimenziós, ha $(M, \mathcal{F})$ egy Riemann-sokaság vagy $\lambda = 0$. Amennyiben $\lambda \neq 0$ és $(M, \mathcal{F})$ nem-Riemann típusú, akkor a holonómiacsoport végtelen dimenziós.*

A tétel nem használja ki a Finsler-metrika pozitív definit tulajdonságát, csak a regularitását, így szemi-Finsler-sokaságokra is igaz az állítás.

3.8. Finsler-felületek maximális holonómiacsoporttal

Ha (M, F) egy 2-dimenziós Finsler-sokaság, akkor egy tetszőleges $p \in M$ pontban az $\mathcal{I}_p$ induktrix diffeomorf az $\mathbb{S}^1$ egységkörrel, és a holonómiacsoport izomorf az $\mathbb{S}^1$ diffeomorfizmus-csoportjának egy részcssoportjával. Egyszeresen összefüggő Finsler-felületek esetén a holonómiacsoport szükségképpen irányítástartó, így a $\text{Hol}_p(M)$ izomorf az egységkör irányítástartó diffeomorfizmusainak, azaz $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ -nek egy részcssoportjával. Ennek alapján egy egyszeresen összefüggő Finsler-felület holonómiacsoportja maximális, ha a topologikus lezártja megegyezik a $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ -gyel.

A $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ diffeomorfizmus-csoport Lie-algebrája az $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$, melyben *Fourier algebrának* nevezzük azon $f \frac{d}{dt}$ alakú vektormezők $\mathfrak{F}(\mathbb{S}^1)$ rész Lie-algebráját, ahol $f(t)$ egy véges Fourier-sor, azaz egy Fourier-polinom. A Fourier algebra exponenciális képének topologikus lezártja által generált csoport a $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$.

3.8.2. Állítás. [123, Proposition 5.1] *Ha az egyszeresen összefüggő (M, F) Finsler-felület egy $p \in M$ pontjában a $\text{hol}_p^*(M)$ infinitezimális holonómia-algebra tartalmazza az $\mathfrak{F}(\mathbb{S}^1)$ Fourier-algebrát, akkor a holonómiacsoport topologikus lezártja izomorf a $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ -gyel.*

Az állítást felhasználva bizonyítható a

3.8.3. Tétel. [123, Theorem 5.2] Legyen $(M, \mathcal{F})$ egy egyszeresen összefüggő síkprojektív, konstans nemzérus görbületű Finsler-felület. Tegyük fel, hogy van olyan $p \in M$ pont, melyben az indukált Minkowski norma megegyezik az euklideszi normával, azaz $\mathcal{F}(p, y) = \|y\|$, és a projektív faktor eleget tesz a $\mathcal{P}(p, y) = c\|y\|$ feltételnek, ahol $c \neq 0$. Ekkor a p -beli holonómiacsoport lezártja megegyezik az egységkör irányítástartó diffeomorfizmus-csoportjával, azaz $\overline{\text{Hol}_p(M)} = \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Amennyiben a tétel feltételeit egy Finsler-felület teljesíti, akkor annak a holonómiacsoportja maximális. Erre az esetre konkrét példákat ad az alábbi tétel, mely elsőként ír le végtelen dimenziós Finsler-típusú holonómiacsoportot.

3.8.4. Tétel. [123, Theorem 5.3] A standard Funk-metrikának, továbbá a Bryant–Shen-féle gömbi metrikának a holonómiacsoportja maximális, azaz a topologikus lezártja megegyezik a kör irányítástartó diffeomorfizmus-csoportjával.

Z. Shen [86]-ban megadta a síkprojektív Randers-sokaságok klasszifikációját. Megmutatta, hogy minden síkprojektív konstans nemzérus görbületű Randers-sokaság negatív görbületű, és ezen metrikák egy konstans faktor segítségével átskalázhatók úgy, hogy a görbületük $\lambda = -1/4$ legyen. Ebben az esetben az (M, F) izometrikusan leképezhető azon Finsler-sokaságba, melyet az

$$F_a(x, y) = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - |x|^2} + \epsilon \left(\frac{\langle x, y \rangle}{1 - |x|^2} + \frac{\langle a, y \rangle}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \quad (3.3)$$

Finsler-függvény definiál a $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ -n, ahol $\epsilon = \pm 1$ és $a \in \mathbb{R}^n$ valamilyen konstans vektor, melyre $\|a\| < 1$. Erre a metrikára vonatkozik az alábbi

3.8.5. Állítás. [108, Proposition 1.] Ha $a \neq 0$, akkor a $(\mathbb{D}^2, F_a)$ Finsler-felület holonómiacsoportja maximális, azaz a holonómiacsoport lezártja izomorf $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ -gyel.

Z. Shen klasszifikációs eredményét használva kapjuk az alábbi tételt:

3.8.6. Tétel. [108, Theorem 3.] Egy egyszeresen összefüggő nem-Riemann típusú síkprojektív konstans nemzérus görbületű Finsler-felület holonómiacsoportja maximális, azaz lezártja izomorf $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ -gyel.

A tétel alapján igazolható a Randers-felületek holonómiájára vonatkozó eredmény:

3.8.7. Következmény. [108, Corollary 4.] Egy egyszeresen összefüggő síkprojektív, konstans λ görbületű Finsler-felület holonómiacsoportja

- $\{id\}$ triviális csoport, ha $\lambda = 0$;
- $SO(2)$ csoport, ha $\lambda \neq 0$ és a metrika Riemann-típusú;
- $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ csoport, ha $\lambda \neq 0$ és a metrika nem-Riemann típusú.

4. fejezet

Síkbeli 3-szövetek linearizálhatósága

4.1. Bevezetés

Legyen M egy 2-dimenziós valós, vagy komplex sokaság. A $D \subset M$ nyílt tartományon adott 3-szövet nem más, mint három, egymáshoz viszonyítva általános helyzetű sima görbékkel álló fóliázás. Adott $\mathcal{W}$ és $\widetilde{\mathcal{W}}$ 3-szövetek ekvivalensek, ha van olyan diffeomorfizmus, melyre igaz, hogy $\mathcal{W}$ képe a $\widetilde{\mathcal{W}}$ lesz. Adott $\mathcal{W}$ és $\widetilde{\mathcal{W}}$ 3-szövetek lokálisan ekvivalensek $p \in M$ -ben, ha van olyan lokális diffeomorfizmus a p egy környezetében, melyre igaz, hogy $\mathcal{W}$ képe a $\widetilde{\mathcal{W}}$.

Egy 3-szövetet lineárisnak (illetve párhuzamosnak) nevezünk, ha a három fóliázás mindegyike egyenesekből (illetve párhuzamos egyenesekből) áll. Egy 3-szövetet linearizálhatónak (illetve parallelizálhatónak) nevezünk, ha ekvivalens egy lineáris (illetve párhuzamos) 3-szövettel. A 3-szöveteknek mind a linearizálhatósága, mind a parallelizálhatósága igen érdekes geometriai probléma. 1924-ben H. Graf és W. Sauer bebizonyított egy tételt, mely a szövetgeometria nyelvén úgy fogalmazható meg, hogy egy lineáris $\mathcal{W}$ szövet pontosan akkor parallelizálható, ha van olyan harmadfokú algebrai görbe, melyhez asszociált szövet a $\mathcal{W}$, azaz a fóliázások görbéi a harmadfokú görbe érintőegyenesei [16, p. 24].

A 3-szövetek linearizálhatósága egy igen természetes, de korántsem triviális probléma. T.H. Gronwall 1912-ben fogalmazta meg a sejtést, miszerint egy linearizálható de nem parallelizálható síkbeli 3-szövet – projektív transzformáció erejéig – legfeljebb egyféleképpen linearizálható, azaz legfeljebb egy olyan diffeomorfizmus van, mely a kérdéses 3-szövetet egy lineáris 3-szövetbe viszi át. G. Bol javasolt egy megoldási módszert, hogyan lehet a linearizálhatóság kritériumát meghatározni [17], de a számolásokat nem tudta végigvinni. Bol megmutatta, hogy azon projektíven nem ekvivalens lineáris 3-szövetek száma, melyek ekvivalensek egy nem párhuzamosítható lineáris 3-szövettel, kisebb mint 17. 1973-ban M.A. Akivis egy moszkvai tudományos előadásán a linearizálhatóság problémáját a Chern-konnexió segítségével újfogalmazta. Ebben a megközelítésben a linearizálhatóság problémája az affin deformációs-tenzorra vonatkozó nemlineáris parciális differenciálegyenletrendszer megoldhatóságára vezethető vissza. Akivis gondolatmenetét követve V.V. Goldberg [42]-ben meghatározta az egyenletrendszer első integrálhatósági feltételeit.

2001-ben az Akivis által javasolt parciális differenciálegyenletrendszer további vizsgálatával [106]-ban sikerült meghatároznunk a linearizálhatóság teljes feltételrendszerét. Megmutattuk, hogy a linearizálható de nem párhuzamosítható 3-szövetek esetében min-

den $p \in M$ ponthoz megadható a vektorértékű szimmetrikus tenzorok egy $\mathcal{A}_p \subset S^2 T_p^* \otimes \otimes T_p$ algebrai részsokasága, melyre igaz, hogy az affin deformációs tenzor az $S^2 T^* \otimes T$ -nek egy olyan szelése, melynek értékei $\mathcal{A}$ -beliek. Az $\mathcal{A}$ -t meghatározza a 3-szövet Chern-konnexiója. A polinomok fokszámából következik, hogy legfeljebb 15 különböző, nem projektív ekvivalens linearizációja lehet egy nem párhuzamosítható síkbeli 3-szövetnek. A feltételrendszer segítségével konkrét szövetek esetén eldönthető, hogy az linearizálható-e vagy sem. Az $\mathcal{A}$ -t meghatározó polinomok megtalálhatók [107]-ben.

A polémia. 2006-ban V.V. Goldberg (a szövetgeometria elismert szaktekinetlye, számos szövetgeometriai könyv és tudományos cikk szerzője) és V.V. Lychagin (a parciális differenciálegyenlet-rendszerek nemzetközi szaktekinetlye, az Orosz Tudományos Akadémia tagja) szintén a 3-szövetek linearizálhatóságát vizsgálta, de [44] eredményei eltértek a [106]-ban leírt eredményeinktől. Cikkükben – anélkül, hogy állításaikat érvekkel alátámasztották volna – azt állították, hogy a 3-szövetek linearizálhatóságára vonatkozó feltételrendszerünk hiányos, illetve hibás ([43, p.171] és [44, p.70]). Mivel vannak olyan esetek, ahol a [106] és a [44] ellentétes eredményt ad, ez azt mutatja, hogy a linearizációra adott egyik feltételrendszer biztosan hibás. Ez bizonytalanságot okozott ezen a területen (lásd például [2, p.2], [3, p.2], [19, p.30], [94, p.40]).

Döntő példa. A [106] és a [44] feltételeinek közvetlen összehasonlítása nem egyszerű. Bár a gondolatmenet mindkét esetben hasonló, az eszközök különböznek, továbbá a Chern-konnexió kovariáns illetve parciális deriváltjait tartalmazó formulák igen hosszúak és bonyolultak. Így az egyik, illetve másik elmélet helyességét illetve hibáját nehéz megmutatni. Szerencsére van egy konkrét nem párhuzamosítható 3-szövet, mely linearizációjáról a két elmélet ellentétes eredményt ad: [106] feltételei szerint ez a szövet linearizálható, míg [44] szerint nem (lásd. [106, p.2653] és [44, p.171]). [116]-ban sikerült megmutatnom, hogy létezik a kérdéses 3-szövethez a megfelelő tulajdonságokkal rendelkező affin deformációs tenzor, így a szövet linearizálható. A [117] direkt módon bizonyítja a szövet linearizálhatóságát – így téve egyértelművé, hogy a [106] eredményei helyesek, a [44] eredményei pedig hibásak.

4.2. Alapfogalmak

Legyen $\mathcal{W}$ a páronként transzverzális irányú $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ fóliázások által meghatározott sima 3-szövet az M sokaságon. A $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ fóliázásokat rendre horizontálisnak, vertikálisnak és transzverzálisnak nevezzük és az érintő altereiket rendre T^h , T^v és T^t fogja jelölni. Egy 3-szövet megadása ekvivalens egy $(1,1)$ -típusú $\{h, j\}$ tenzorpár megadásával, melyek eleget tesznek az alábbi feltételeknek:

1. $h^2 = h$, $j^2 = id$,
2. $jh = vj$, ahol $v := id - h$,
3. $\text{Ker } h$, $\text{Im } h$, és $\text{Ker}(h + id)$ integrálható disztribúciók.

Minden 3-szövethez egyértelműen létezik egy olyan ∇ lineáris konnexió, mely eleget tesz a $\nabla h = 0$, $\nabla j = 0$ és $\mathcal{T}(hX, vY) = 0$, $\forall X, Y \in TM$, feltételeknek, ahol $\mathcal{T}$ a ∇ konnexió torziója. ∇ -t a 3-szövethez tartozó *Chern-konnexiónak* nevezzük [70]. A $\mathcal{W}$ szövet linearizálható, ha van olyan zérus görbületű ∇^L lineáris konnexió M -en, mely megőrzi a szövetet. Egy $(1,2)$ -típusú szimmetrikus L tenzormezőt *prelinearizációnak* nevezünk, ha

a $\nabla_X^L Y = \nabla_X Y + L(X, Y)$ konnexió megőrzi a szövetet, azaz a fóliázás elemei a ∇^L -re nézve autoparallel részsokaságok. A prelinearizációk halmazát E -vel jelöljük. Linearizációnak nevezünk egy L prelinearizációt, ha a ∇^L konnexió görbülete zérus. Egy $L \in E$ prelinearizációt jellemezhetünk az

$$x(X, Y) = L(hX, hY), \quad y(X, Y) = jL(jhX, jhY), \quad z(X, Y) = hL(hX, jhY),$$

tenzorokkal. Használjuk továbbá a jelölést, miszerint az x^2 az $(1,3)$ -típusú tenzor, melyre $x^2(X, Y, Z) := x(x(hX, hY), hZ)$. Hasonló értelemben használjuk az $xy, x^3, \dots$ jelöléseket. Az egyszerűsítés érdekében az alsó indexek egy adaptált bázisra vonatkozó kovariáns deriválást jelentenek. Ennek következtében a felcserélési formuláknál megjelenik a görbületi tenzor. Bevezetjük az $s := 2z - y$ és $t := \frac{1}{2}(x + y - 2z)$ tenzorokat a számítás egyszerűsítése érdekében. A prelinearizációk E tere az $\{s, t, z\}$ -vel generálható 3-dimenziós vektornyaláb M -en. Az s -et az L bázisának nevezzük. Az L és L' prelinearizáció pontosan akkor projektív ekvivalens, ha $s = s'$.

4.3. A linearizálhatóság feltétele

A síkbeli 3-szövetek linearizálhatóságának a problémája egy parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldhatóságának a vizsgálatára vezethető vissza. Legyen $F := \Lambda^2 T^* \otimes T$ és definiáljuk a prelinearizációk terén a $P_1: E \rightarrow F$ differenciáloperátort a

$$(P_1 L)(X, Y, Z) = (\nabla_X L)(Y, Z) - (\nabla_Y L)(X, Z) + L(X, L(Y, Z)) - L(Y, L(X, Z)) + R(X, Y)Z$$

formulával, ahol R a Chern-konnexió görbületét jelöli. Az L prelinearizáció pontosan akkor linearizáció, ha megoldása P_1 -nek. Az s, t, z tenzorokra ez egy elsőrendű parciális differenciálegyenlet-rendszert ad, melyek kompatibilitási feltétele az

$$P_2 = \begin{cases} s_{22} = 2s_{21} - ss_2 + 2ss_1 + \mathcal{R}s + \mathcal{R}_2, \\ s_{11} = 2s_{21} - 2ss_2 + ss_1 + \mathcal{R}s + \mathcal{R}_1, \end{cases} \quad (4.1)$$

másodrendű differenciálegyenlet-rendszer, melyben meglepő módon a Chern-konnexió mellett csak az s , azaz a projektív invariáns bázis tenzor és annak kovariáns deriváltjai jelennek meg. A Spencer-sorozatokat vizsgálva adódik a

4.3.2. Állítás. [107, Proposition 4.2.] *A P_2 nem 2-aciklikus, azaz magasabb rendű prolongáltaknál új kompatibilitási feltétel megjelenése várható.*

A megfelelő prolongálás és kompatibilitási feltételek vizsgálata alapján adódik, hogy amennyiben a 3-szövet Chern-konnexiója zérus görbületű, azaz parallelizálható, akkor bármely prelinearizáció lokálisan kiterjeszthető egy linearizációvá. Ez az eredmény összhangban van azzal a jól ismert ténnyel, hogy parallelizálható síkbeli 3-szövetek esetén léteznek olyan linearizációk, melyek nem projektív ekvivalensek. Abban az esetben, ha a Chern-konnexió nem zérus görbületű – azaz a 3-szövet nem parallelizálható – a parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldhatóságának további vizsgálatával adódik az alábbi eredmény:

4.3.5. Tétel. [107, Theorem 5.1] *A Chern-konnekció és annak legfeljebb hatodrendű deriváltjai segítségével megadhatók az s projektív invariánsra olyan $Q_1, \dots, Q_7$ polinomok, hogy egy nem parallelizálható 3-szövet pontosan akkor linearizálható, ha ezen polinomoknak van közös zérushelye. Ekkor minden olyan $p \in M$ és $L_0 \in E_p$ prelinearizáció esetén, melynek s_p bázisa $\mathcal{A} = \{Q_i = 0 \mid i = 1, \dots, 7\}$ -beli, létezik olyan L linearizáció, melyre $L_p = L_0$.*

Az $\mathcal{A}$ -t definiáló polinomok vizsgálatából adódik az alábbi

4.3.6. Tétel. [107, Theorem 5.2] *Egy nem parallelizálható 3-szövetnek legfeljebb 15 nem projektív ekvivalens linearizációja lehet.*

T.H. Gronwall által 1912-ben megfogalmazott sejtés [47], miszerint egy linearizálható de nem parallelizálható 3-szövet a síkon – projektív transzformációk erejéig – legfeljebb egyféleképpen linearizálható a fenti eredmény alapján azt jelenti, hogy nem parallelizálható 3-szövetek esetén a $Q_1, \dots, Q_7$ polinomok legnagyobb közös osztójának a fokszáma legfeljebb 1.

4.4. A vitatott 3-szövet és linearizációja

2006-ban jelent meg a [44] cikk, melyben V.V. Goldberg és V.V. Lychagin 3-szövetek linearizálhatóságát vizsgálta. Eredményeik eltértek a [106] eredményeitől. Cikkükben azt állították, hogy 3-szövetek linearizálhatóságára vonatkozó feltételrendszerünk hiányos, illetve hibás ([43, page 171] és [44, page 70]) anélkül, hogy állításaikat érvekkel alátámasztották volna. A meglehetősen agresszív kritikájuk igazolására az alábbi 3-szövetet adták példaként, melyben a $\mathcal{W}$ szövetet definiáló három görbesereg:

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}, \quad (x + y)e^{-x} = \text{const}. \quad (4.2)$$

E konkrét példa szerepelt a [106]-os cikkünkben, melyben a 4.3.5 tétel alapján azt az eredményt kaptuk, hogy a kérdéses 3-szövet linearizálható, viszont V.V. Goldberg és V.V. Lychagin későbbi eredményei alapján a kérdéses szövet nem linearizálható. A vitatott 3-szövet vizsgálatának szentelt [116] cikkben részletesen megvizsgálom a linearizálhatóság feltételét, bizonyítom az L affin deformációs tenzor létezését és megadom azt a ∇^L görbületmentes lineáris konnexiót, mely megőrzi a szövetet. Az eredmények igazolják a szövet linearizálhatóságát.

A kérdéses 3-szövet linearizálhatóságának igazolására van egy direkt bizonyítás is, mely konkrétan megadja a linearizáló diffeomorfizmust. Az $\bar{x} = f(x, y)$, $\bar{y} = y$ által meghatározott transzformáció ugyanis linearizálja a 3-szövetet, ami alátámasztja a [107] állításait. Ezt az eredményt kiváló francia kollégám, J.-P. Dufour küldte meg levelezésünk során.

Irodalomjegyzék

- [1] M. Ackermann and R. Herman, editors.: *Sophus Lie's 1880 transformation group paper*. Math Sci Press, Brookline, Mass., 1975. In part a translation of “Theorie der Transformations-gruppen” by S. Lie [Math. Ann. **16** (1880), 441–528], Translated by Michael Ackerman, Comments by Robert Hermann, Lie Groups: History, Frontiers and Applications, Vol. I.
- [2] S. I. Agafonov.: Gronwall’s conjecture for 3-webs with infinitesimal symmetries. *Arxiv preprint*, math.DG, math/1411.0874, 2014.
- [3] S. I. Agafonov.: Counterexample to gronwall’s conjecture. *Arxiv preprint*, math.DG, math/1708.01996, 2017.
- [4] J. C. Álvarez Paiva.: Symplectic geometry and Hilbert’s fourth problem. *J. Differential Geom.*, 69 (2): 353–378, 2005.
- [5] I. Anderson and G. Thompson.: The inverse problem of the calculus of variations for ordinary differential equations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 98 (473): vi+110, 1992.
- [6] I. M. Anderson.: Aspects of the inverse problem to the calculus of variations. *Arch. Math. (Brno)*, 24 (4): 181–202, 1988.
- [7] P. L. Antonelli, R. S. Ingarden, and M. Matsumoto.: *The theory of sprays and Finsler spaces with applications in physics and biology*, volume 58 of *Fundamental Theories of Physics*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.
- [8] V. Arnold.: Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l’hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16 (fasc. 1): 319–361, 1966.
- [9] D. Bao, S. Chern, and Z. Shen.: *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.
- [10] D. Bao and C. Robles.: Ricci and flag curvatures in Finsler geometry. In *A sampler of Riemann-Finsler geometry*, volume 50 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, page 197–259. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [11] D. Bao, C. Robles, and Z. Shen.: Zermelo navigation on Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 66 (3): 377–435, 2004.

- [12] D. Bao and Z. Shen.: Finsler metrics of constant positive curvature on the Lie group S^3 . *J. London Math. Soc. (2)*, 66 (2): 453–467, 2002.
- [13] W. Barthel.: Nichtlineare Zusammenhänge und deren Holonomiegruppen. *J. Reine Angew. Math.*, 212: 120–149, 1963.
- [14] M. Berger.: Sur les groupes d’holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bull. Soc. Math. France*, 83: 279–330, 1955.
- [15] L. Berwald.: On Finsler and Cartan geometries. III. Two-dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals. *Ann. of Math. (2)*, 42: 84–112, 1941.
- [16] W. Blaschke.: Einführung in die Geometrie der Waben. *Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart*, 1955.
- [17] G. Bol.: Topologische fragen der differentialgeometrie. 31: Geradlinige kurven- gewebe. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 8: 264–270, 1930.
- [18] A. Borel and A. Lichnerowicz.: Groupes d’holonomie des variétés riemanniennes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234: 1835–1837, 1952.
- [19] M. N. Boyom.: Foliations-webs-hessian geometry-information geometry-entropy and cohomology. *Entropy*, 18 (12): Paper 433, 2016.
- [20] R. Bryant.: Recent advances in the theory of holonomy. *Astérisque*, 266: Exp. No. 861, 5, 351–374, 2000. Séminaire Bourbaki, Vol. 1998/99.
- [21] R. L. Bryant.: Projectively flat Finsler 2-spheres of constant curvature. *Selecta Math. (N.S.)*, 3 (2): 161–203, 1997.
- [22] R. L. Bryant.: Some remarks on Finsler manifolds with constant flag curvature. *Houston J. Math.*, 28 (2): 221–262, 2002. Special issue for S. S. Chern.
- [23] R. L. Bryant, S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt, and P. Griffiths.: Exterior differential systems, volume 18 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. New York etc.: Springer-Verlag, 1991.
- [24] S. Bácsó and Z. Szilasi.: On the projective theory of sprays. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, 26 (2): 171–207, 2010.
- [25] I. Bucataru and M. F. Dahl.: Semi-basic 1-forms and Helmholtz conditions for the inverse problem of the calculus of variations. *J. Geom. Mech.*, 1 (2): 159–180, 2009.
- [26] E. Cartan and J. A. Schouten.: On the geometry of the group-manifold of simple and semi-simple groups. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, 29: 803–815, 1926.
- [27] S.-S. Chern.: Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quad- ratic restriction. *Notices Amer. Math. Soc.*, 43 (9): 959–963, 1996.

- [28] S.-S. Chern and Z. Shen.: *Riemann-Finsler geometry*, volume 6 of *Nankai Tracts in Mathematics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.
- [29] M. Crampin.: Isotropic and R-flat sprays. *Houston J. Math.*, 33 (2): 451–459, 2007.
- [30] M. Crampin.: On the inverse problem for sprays. *Publ. Math. Debrecen*, 70 (3-4): 319–335, 2007.
- [31] M. Crampin.: Some remarks on the Finslerian version of Hilbert’s fourth problem. *Houston J. Math.*, 37 (2): 369–391, 2011.
- [32] M. Crampin, T. Mestdag, and D. Saunders.: The multiplier approach to the projective finsler metrizable problem. *Differ. Geom. Appl.*, 30 (6): 604–621, 2012.
- [33] M. Crampin, T. Mestdag, and D. Saunders.: Hilbert forms for a finsler metrizable projective class of sprays. *Differ. Geom. Appl.*, 31 (1): 63–79, 2013.
- [34] M. Crampin, G. E. Prince, W. Sarlet, and G. Thompson.: The inverse problem of the calculus of variations: separable systems. *Acta Appl. Math.*, 57 (3): 239–254, 1999.
- [35] S. Deng and Z. Hou.: Invariant Finsler metrics on homogeneous manifolds. *J. Phys. A*, 37 (34): 8245–8253, 2004.
- [36] J. Douglas.: Solution of the inverse problem of the calculus of variations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 50: 71–128, 1941.
- [37] M. Eastwood and V. Matveev.: Metric connections in projective differential geometry. In *Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations*, volume 144 of *IMA Vol. Math. Appl.*, page 339–350. Springer, New York, 2008.
- [38] C. Ehresmann.: Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. In *Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950*, page 29–55. Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.
- [39] A. Frölicher and A. Nijenhuis.: Theory of vector-valued differential forms. i: Derivations in the graded ring of differential forms. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, 59: 338–350, 351–359, 1956.
- [40] R. Ghanam, G. Thompson, and E. J. Miller.: Variationality of four-dimensional Lie group connections. *J. Lie Theory*, 14 (2): 395–425, 2004.
- [41] C. Godbillon.: *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. Hermann, Paris, 1969.
- [42] V. V. Goldberg.: On a linearizability condition for a three-web on a two-dimensional manifold. In *Differential geometry (Peñíscola, 1988)*, volume 1410 of *Lecture Notes in Math.*, page 223–239. Springer, Berlin, 1989.

- [43] V. V. Goldberg and V. V. Lychagin.: On linearization of planar three-webs and Blaschke's conjecture. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 341 (3): 169–173, 2005.
- [44] V. V. Goldberg and V. V. Lychagin.: On the Blaschke conjecture for 3-webs. *J. Geom. Anal.*, 16 (1): 69–115, 2006.
- [45] P. A. Griffiths.: Variations on a theorem of Abel. *Invent. Math.*, 35: 321–390, 1976.
- [46] J. Grifone.: Structure presque-tangente et connexions. I. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 22 (1): 287–334, 1972.
- [47] T. H. Gronwall.: Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés. *Journ. de Math. (6)*, 8: 59–102, 1912.
- [48] M. R. Herman.: Sur le groupe des difféomorphismes du tore. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 23 (2): 75–86, 1973. Colloque International sur l'Analyse et la Topologie Différentielle (Colloques Internationaux CNRS, Strasbourg, 1972).
- [49] A. Hénaut.: Sur la linéarisation des tissus de $\mathbf{C}^2$. *Topology*, 32 (3): 531–542, 1993.
- [50] A. Hénaut.: Analytic web geometry. In *Web theory and related topics (Toulouse, 1996)*, page 6–47. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
- [51] D. D. Joyce.: *Compact manifolds with special holonomy*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [52] Y. Katznelson.: *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 2004.
- [53] J. Klein.: On variational second order differential equations; polynomial case. In *Differential geometry and its applications (Opava, 1992)*, volume 1 of *Math. Publ.*, page 449–459. Silesian Univ. Opava, Opava, 1993.
- [54] J. Klein and A. Voutier.: Formes extérieures génératrices de sprays. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 18 (fasc. 1): 241–260, 1968.
- [55] S. Kobayashi.: *Transformation groups in differential geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 70.
- [56] L. Kozma.: On Landsberg spaces and holonomy of Finsler manifolds. In *Finsler geometry (Seattle, WA, 1995)*, volume 196 of *Contemp. Math.*, page 177–186. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [57] L. Kozma.: Holonomy structures in Finsler geometry. In *Handbook of Finsler geometry. Vol. 1, 2*, page 445–488. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.

- [58] A. Kriegel and P. W. Michor.: *The convenient setting of global analysis*, volume 53 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [59] O. Krupková.: A note on the Helmholtz conditions. In *Differential geometry and its applications, (Brno, 1986)*, page 181–188. Univ. J. E. Purkyně, Brno, 1987.
- [60] O. Krupková.: Variational metric structures. *Publ. Math. Debrecen*, 62 (3-4): 461–495, 2003.
- [61] O. Krupková and G. E. Prince.: Second order ordinary differential equations in jet bundles and the inverse problem of the calculus of variations. In *Handbook of global analysis*, pages 837–904, 1215. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2008.
- [62] B. Li and Z. Shen.: On a class of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature. *Internat. J. Math.*, 18 (7): 749–760, 2007.
- [63] M. Matsumoto.: *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*. Kaiseisha Press, Shigaken, 1986.
- [64] Matsumoto M., Every path space of dimension two is projectively related to a Finsler space, *Open System and Information Dynamics* **3** no.3 (1995), 291–303.
- [65] V. S. Matveev.: On projective equivalence and pointwise projective relation of Randers metrics. *Internat. J. Math.*, 23 (9): 1250093, 14, 2012.
- [66] V. S. Matveev.: There exist no locally symmetric Finsler spaces of positive or negative flag curvature. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 353 (1): 81–83, 2015.
- [67] M. Mauhart and P. W. Michor.: Commutators of flows and fields. *Arch. Math. (Brno)*, 28 (3-4): 229–236, 1992.
- [68] T. Mestdag.: Finsler geodesics of Lagrangian systems through Routh reduction. *Mediterr. J. Math.*, 13 (2): 825–839, 2016.
- [69] P. W. Michor.: *Gauge theory for fiber bundles*, volume 19 of *Monographs and Textbooks in Physical Science. Lecture Notes*. Bibliopolis, Naples, 1991.
- [70] P. T. Nagy.: Invariant tensorfields and the canonical connection of a 3-web. *Aequationes Math.*, 35 (1): 31–44, 1988.
- [71] S. Numata.: On Landsberg spaces of scalar curvature. *J. Korean Math. Soc.*, 12 (2): 97–100, 1975.
- [72] H. Omori.: *Infinite-dimensional Lie groups*, volume 158 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Translated from the 1979 Japanese original and revised by the author.
- [73] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, and H. Zassenhaus.: Invariants of real low dimension Lie algebras. *J. Mathematical Phys.*, 17 (6): 986–994, 1976.

- [74] J. V. Pereira and L. Pirio.: *An invitation to web geometry*, volume 2 of *IMPA Monographs*. Springer, Cham, 2015.
- [75] A. Rapcsák.: Über die bahntreuen abbildungen metrischer räume. *Publ. Math.*, 8: 285–290, 1961.
- [76] A. Rapcsák.: Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiv-ebener metrischer Räume. *Publ. Math. Debrecen*, 9: 164–167, 1962.
- [77] H. Rund.: *The differential geometry of Finsler spaces*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 101. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.
- [78] W. Sarlet.: The Helmholtz conditions revisited. A new approach to the inverse problem of Lagrangian dynamics. *J. Phys. A*, 15 (5): 1503–1517, 1982.
- [79] W. Sarlet, M. Crampin, and E. Martínez.: The integrability conditions in the inverse problem of the calculus of variations for second-order ordinary differential equations. *Acta Appl. Math.*, 54 (3): 233–273, 1998.
- [80] W. Sarlet, G. Thompson, and G. E. Prince.: The inverse problem of the calculus of variations: the use of geometrical calculus in Douglas’s analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354 (7): 2897–2919, 2002.
- [81] D. Saunders.: Projective metrizability in Finsler geometry. *Commun. Math.*, 20 (1): 63–68, 2012.
- [82] Z. Shen.: *Differential geometry of spray and Finsler spaces*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [83] Z. Shen.: Geometric Meanings of Curvatures in Finsler Geometry. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Serie II, Suppl. 66, 165–178. 2001.
- [84] Z. Shen.: Two-dimensional Finsler metrics with constant flag curvature. *Manuscripta Math.*, 109 (3): 349–366, 2002.
- [85] Z. Shen.: Projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355 (4): 1713–1728, 2003.
- [86] Z. Shen.: Projectively flat Randers metrics with constant flag curvature. *Math. Ann.*, 325 (1): 19–30, 2003.
- [87] M. Spivak.: *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [88] Z. I. Szabó.: Positive definite Berwald spaces. Structure theorems on Berwald spaces. *Tensor (N.S.)*, 35 (1): 25–39, 1981.
- [89] J. Szenthe.: Homogeneous geodesics of left-invariant metrics. *Univ. Iagel. Acta Math.*, 38: 99–103, 2000.

- [90] J. Szenthe.: Existence of stationary geodesics of left-invariant Lagrangians. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 34: 165–175, 2001.
- [91] J. Szilasi and S. Vattamány.: On the Finsler-metrizabilities of spray manifolds. *Period. Math. Hungar.*, 44 (1): 81–100, 2002.
- [92] J. Teichmann.: Regularity of infinite-dimensional Lie groups by metric space methods. *Tokyo J. Math.*, 24 (1): 39–58, 2001.
- [93] G. Thompson.: Variational connections on Lie groups. *Differential Geom. Appl.*, 18 (3): 255–270, 2003.
- [94] J. S. Wang.: On the Gronwall conjecture. *J. Geom. Anal.*, 22 (1): 38–73, 2012.
- [95] G. Yang.: Some classes of sprays in projective spray geometry. *Differential Geom. Appl.*, 29 (4): 606–614, 2011.

A pályázó doktori disszerációjában megjelenő publikációinak listája:

- [96] I. Bucataru, T. Milkovszki, and Z. Muzsnay.: Invariant metrizable and projective metrizable on Lie groups and homogeneous spaces. *Mediterr. J. Math.*, 13 (6): 4567–4580, 2016.
- [97] I. Bucataru and Z. Muzsnay.: Projective metrizable and formal integrability. *SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 7: paper 114, 22, 2011.
- [98] I. Bucataru and Z. Muzsnay.: Projective and finsler metrizable: parameterization-rigidity of the geodesics. *Int. J. Math.*, 23 (9): 1250099, 15, 2012.
- [99] I. Bucataru and Z. Muzsnay.: Sprays metrizable by Finsler functions of constant flag curvature. *Differential Geom. Appl.*, 31 (3): 405–415, 2013.
- [100] I. Bucataru and Z. Muzsnay.: Finsler metrizable isotropic sprays and Hilbert’s fourth problem. *J. Aust. Math. Soc.*, 97 (1): 27–47, 2014.
- [101] I. Bucataru and Z. Muzsnay.: Non-existence of Funk functions for Finsler spaces of non-vanishing scalar flag curvature. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 354 (6): 619–622, 2016.
- [102] S. G. Elgendi and Z. Muzsnay.: Freedom of $h(2)$ -variationality and metrizable of sprays. *Differential Geom. Appl.*, 54: 194–207, 2017.
- [103] S. G. Elgendi and Z. Muzsnay.: Metrizable of holonomy invariant projective deformation of sprays. *Can. Math. Bulletin*, DOI: 10.4153/S0008439520000016, 2020.
- [104] J. Grifone and Z. Muzsnay.: Sur le problème inverse du calcul des variations: existence de lagrangiens associés à un spray dans le cas isotrope. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49 (4): 1387–1421, 1999.

- [105] J. Grifone and Z. Muzsnay.: *Variational principles for second-order differential equations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000. Application of the Spencer theory to characterize variational sprays.
- [106] J. Grifone, Z. Muzsnay, and J. Saab. On the linearizability of 3-webs. In *Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 4 (Catania, 2000)*, volume 47, page 2643–2654, 2001.
- [107] J. Grifone, Z. Muzsnay, and J. Saab. Linearizable 3-webs and the Gronwall conjecture.: *Publ. Math. Debrecen*, 71 (1-2): 207–227, 2007.
- [108] B. Hubicska and Z. Muzsnay.: The holonomy groups of projectively flat randers two-manifolds of constant curvature. *Arxiv preprint, math.DG, math/01805.05216*, 2018.
- [109] B. Hubicska and Z. Muzsnay.: Tangent lie algebra of a diffeomorphism group and application to holonomy theory. *J Geom Anal*, 30 (1): 107–123, 2020.
- [110] T. Milkovszki and Z. Muzsnay.: On the projective Finsler metrizability and the integrability of Rapcsák equation. *Czechoslovak Math. J.*, 67 (142) (2): 469–495, 2017.
- [111] T. Milkovszki and Z. Muzsnay.: About the projective finsler metrizability: First steps in the non-isotropic case. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, Vol.24, No.2, pp. 25-41., 2019.
- [112] Z. Muzsnay.: Sur le problème inverse du calcul des variations. *PhD thesis. Université Paul Sabatier, Toulouse*, 1997.
- [113] Z. Muzsnay.: Graded Lie algebra associated to a SODE. *Publ. Math. Debrecen*, 58 (1-2): 249–262, 2001.
- [114] Z. Muzsnay.: An invariant variational principle for canonical flows on Lie groups. *J. Math. Phys.*, 46 (11): 112902, 11, 2005.
- [115] Z. Muzsnay.: The Euler-Lagrange PDE and Finsler metrizability. *Houston J. Math.*, 32 (1): 79–98, 2006.
- [116] Z. Muzsnay.: On the problem of linearizability of a 3-web. *Nonlinear Anal.*, 68 (6): 1595–1602, 2008.
- [117] Z. Muzsnay.: On the linearizability of 3-webs: end of controversy. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 356 (1): 97–99, 2018.
- [118] Z. Muzsnay and P. T. Nagy.: Invariant Shen connections and geodesic orbit spaces. *Period. Math. Hungar.*, 51 (1): 37–51, 2005.
- [119] Z. Muzsnay and P. T. Nagy.: Tangent Lie algebras to the holonomy group of a Finsler manifold. *Commun. Math.*, 19 (2): 137–147, 2011.

- [120] Z. Muzsnay and P. T. Nagy.: Finsler manifolds with non-Riemannian holonomy. *Houston J. Math.*, 38 (1): 77–92, 2012.
- [121] Z. Muzsnay and P. T. Nagy.: Witt algebra and the curvature of the Heisenberg group. *Commun. Math.*, 20 (1): 33–40, 2012.
- [122] Z. Muzsnay and P. T. Nagy.: Characterization of projective finsler manifolds of constant curvature having infinite dimensional holonomy group. *Publ. Math. Debrecen*, 84 (1-2): 17–28, 2014.
- [123] Z. Muzsnay and P. T. Nagy.: Finsler 2-manifolds with maximal holonomy group of infinite dimension. *Differential Geom. Appl.*, 39: 1–9, 2015.
- [124] Z. Muzsnay and P. T. Nagy.: Projectively flat finsler manifolds with infinite dimensional holonomy. *Forum Math.*, 27 (2): 767–786, 2015.
- [125] Z. Muzsnay and P. T. Nagy.: Holonomy theory of Finsler manifolds. In *Lie groups, differential equations, and geometry*, UNIPA Springer Ser., page 265–320. Springer, Cham, 2017.
- [126] Z. Muzsnay and G. Thompson.: Inverse problem of the calculus of variations on Lie groups. *Differential Geom. Appl.*, 23 (3): 257–281, 2005.