

## Válasz Prof. Dr. Hajdu Andrásnak a

*Topology preservation and thinning / Topológia-megőrzés és vékonyítás*

*c. doktori műre adott*

### bírálatára

Pályázó / szerző: **Palágyi Kálmán**

Mindenekelőtt megköszönöm a Bírálnak az alapos bírálatát, lényegbevágó kérdéseit, megjegyzéseit.

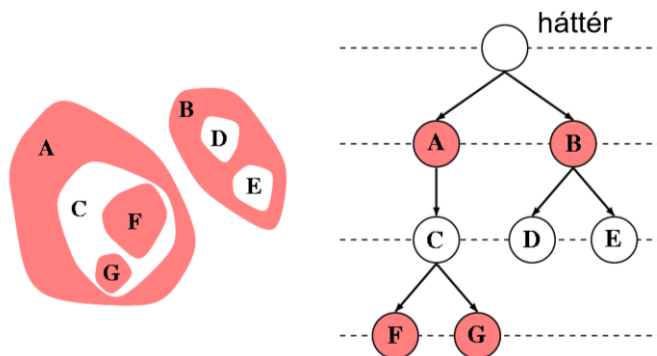
A bírálat választ igénylő részleteit behúzott bekezdésekben és kék fontokkal emelem ki.

„Két kisebb kérdés fogalmazódott meg bennem az alapfogalmakkal kapcsolatban, mivel itt kis különbséggel sokszor hasonló definíciós módszerek lehetségesek:

- meg lehetne-e fogalmazni a topológia megőrzést a homotópia-fa (megőrzésének) fogalmával? Mennyire lehetnek ekvivalensek ezek a definíciók?
- definíciós szempontból lehetne-e kizárólag duális operátorként megfogalmazni a törlő/hozzáadó operátorokat (értelmszerűen cserélve az előtér/háttér szerepét/szomszédsági viszonyait is)?”

A Bíráló mindkettő kérdésére igenlő választ tudok adni.

A Buneman által bevezetett homotópia-fa<sup>1</sup> (*homotopy tree*, más elnevezéssel *adjacency tree*) egy bináris képhez rendelt fa-gráf. A fa szögpontjai a kép fekete és fehér komponenseit reprezentálják, továbbá két szögpontot él köt össze, ha a megfelelő két komponens (egy fehér és egy fekete) „szomszédos”. Amennyiben a véges sok fekete pontot tartalmazó kép háttérét (az egyetlen végtelen sok pontból álló fehér komponens) tekintjük a fa gyökerének, úgy irányított gráfhoz jutunk, ld. 1. ábra.



**1. ábra.** Példa homotópia fára. A bal oldali bináris képen a piros pontok tartoznak az előtérhez (azok a kép fekete pontjai).

<sup>1</sup> O.P. Buneman: A grammar for the topological analysis, of plane figures, in Machine Intelligence Vol. 5 (B. Meltzer and D. Michie, Eds.), Edinburgh Univ. Press, Edinburgh, pp. 383-393, 1969.

Bináris képekre háromféle képműveletet különböztethetünk meg: a *redukciók* csak fekete pontokat színezhetnek át, az *addíciók* csak fehéreket, a vegyes képműveletek pedig a bemenő képen a fekete és a fehér pontok színét egyaránt megváltoztathatják.

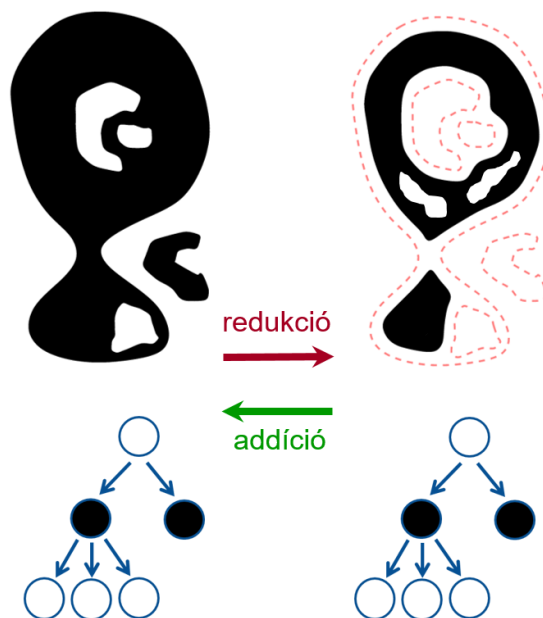
2D képeken egy redukció akkor és csakis akkor topológia-megőrző, ha az input kép minden egyes fekete komponense (mint ponthalmaz) az output kép pontosan egy fekete komponensét tartalmazza, továbbá az output kép minden egyes fehér komponense az input kép pontosan egy fehér komponensét tartalmazza.

Megfordítva: 2D képeken egy addíció akkor és csakis akkor topológia-megőrző, ha az output kép minden egyes fekete komponense az input kép pontosan egy fekete komponensét tartalmazza, továbbá az input kép minden egyes fehér komponense az output kép pontosan egy fehér komponensét tartalmazza.

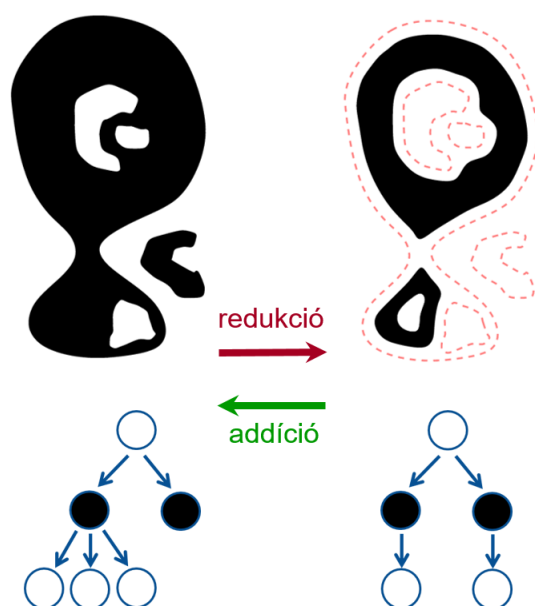
A fentiek alapján könnyen beláthatók az alábbi állítások:

1. 2D topológia-megőrző redukció/addíció input és output képeinek homotópia-fái izomorfak.
2. Nem topológia-megőrző 2D redukció/addíció input és output képeinek homotópia-fái is lehetnek izomorfak.
3. Ha egy 2D redukció/addíció input és output képeinek homotópia-fái nem izomorfak, akkor az adott redukció/addíció nem topológia-megőrző.
4. Izomorf homotópia-fákkal bíró 2D képek nem származtathatók egymásból minden esetben topológia-megőrző addícióval/redukcióval.

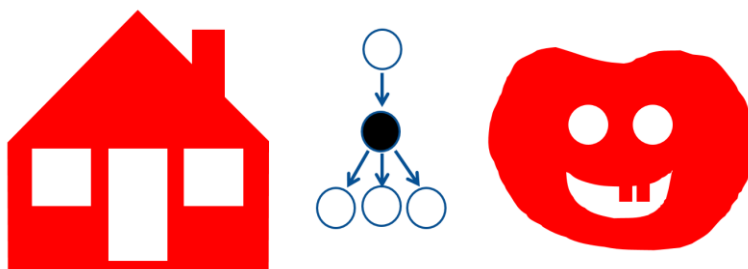
Az utolsó három állítást rendre a 2., a 3. és a 4. ábra szemlélteti.



**2. ábra.** A redukció és az addíció nem topológia-megőrző, ugyanakkor a homotópia-fáik izomorfak, ld. 2. állítás. (A jobb oldali képre a piros szaggatott vonalak a bal oldali kép kontúrjait mutatják.)



**3. ábra.** A homotópia fák nem izomorfak és a redukció/addíció nem topológia-megőrző, ld. 3. állítás.

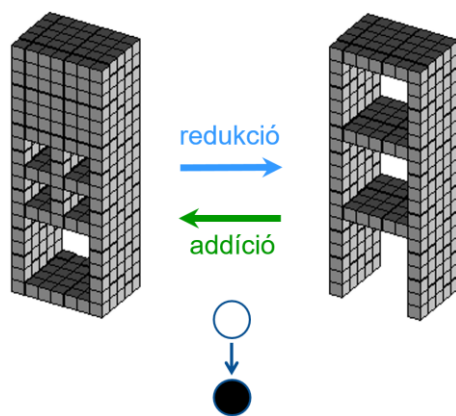


**5. ábra.** A stilizált házat és töklámpást ábrázoló képekhez ugyanaz a homotópia-fa tartozik, ugyanakkor vegyes képművelettel kaptuk meg őket egymásból (nem pedig redukcióval/addícióval), ld. 4. állítás.

Megjegyzem, hogy Mylopoulos és Pavlidis megmutatta<sup>2</sup>, hogy a 2D négyzetmozaik tetszőleges kettő (4,8) képe, amelyeken egyetlen fekete (8-)komponens és azonos számú üreg (véges fehér 4-komponens) található, egymásba vihető *egyszerű* pontok szekvenciális törlésével és hozzáadásával. A 4. ábra ilyen képekre mutat példát. (Egy fekete pont akkor és csakis akkor egyszerű, ha fehérre színezése topológia-megőrző redukció. Egy fehér pont akkor és csakis akkor egyszerű, ha feketére színezése topológia-megőrző addíció.)

A homotópia-fa hátránya, hogy a 3D képek esetén nem reprezentálja a lyukakat/alagutakat. A 5. ábra redukciója/addíciója nem topológiai-megőrző, a homotópia-fa pedig ugyanaz.

<sup>2</sup> J. Mylopoulos, T. Pavlidis: On the topological properties of quantized spaces II: Connectivity and order of connectivity, J. Assoc. Comput. Mach. 18, pp. 247-254, 1971.



**5. ábra.** A két képnek ugyanaz a homotópia-fája, ugyanakkor a 3D redukció/addíció nem topológia-megőrző. A redukció négy lyukat/alagutat olvaszt össze egymással, egy vadonatújat hoz létre, valamint egyet megszüntet. Ezeknek a tevékenységeknek egyike sem megengedett topológia-megőrző redukciók esetén.

Összegezve a fentieket: redukciók és addíciók topológia-megőrzésére a bemenő és a kimenő képek homotópia-fáinak izomorfia szükséges, de nem elégséges feltétel.

A redukciók és az addíciók közötti dualitás tárgyalásához szükség van néhány fogalom meghatározására.

Egy  $P$  bináris digitális képet a

$$P = (V, m, n, B)$$

rendezett négyes ír le, ahol  $V$  egy digitális tér (a rácspontok vagy mozaikalelemek halmaza),  $B$  a fekete pontok halmaza ( $V$  egy részhalmaza),  $V-B$  a fehér pontok halmaza,  $m$  és  $n$  rendre a fekete és a fehér pontokra érvényes reflexív és szimmetrikus szomszédsági reláció, amelyeknek tranzitív lezártja adja meg a kép fekete és fehér (maximálisan összefüggő) komponenseit.

A  $P = (V, m, n, B)$  kép inverze  $P^{-1} = (V, n, m, V-B)$ .

Az  $R$  redukció és az  $A$  addíció egymás duálisa, ha bármely  $P$  képre  $R(P^{-1}) = (A(P))^{-1}$ .

Könnyen belátható, hogy egy  $R$  redukció akkor és csakis akkor topológia-megőrző, ha a duális  $A$  addíció topológia-megőrző.

Kardos Péterrel a 2D szabályos mozaikok ötféle topológiájú képein a topológia-megőrző redukciókra adott elégséges feltételeinket kiterjesztettük addíciókra<sup>3</sup> és vegyes képműveletekre is<sup>4</sup>.

Itt jegyzem meg, hogy a topológia megőrzésére sikerült találnom egy univerzális elégséges feltételt is<sup>5</sup>. Univerzalitáson azt értem, hogy az eredményem tetszőleges dimenziójú és

<sup>3</sup> P. Kardos, K. Palágyi: On topology preservation in triangular, square, and hexagonal grids, In Proc. 8th Int. Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, IEEE/EURASIP, ISPA 2013, pp. 782-787, 2013.

<sup>4</sup> P. Kardos, K. Palágyi: On topology preservation of mixed operators in triangular, square, and hexagonal grids, Discrete Applied Mathematics 216, pp. 441-448, 2017.

<sup>5</sup> K. Palágyi: Topology-preserving general operators in arbitrary binary pictures, In Proc. 19th Iberoamerican Congress on Pattern Recognition, CIARP 2014, LNCS 8827, Springer, 22-29, 2014.

topológiájú képek bármilyen képműveleteire (redukciókra, addíciókra és vegyesekre is) érvényes. A dolgozathoz és a tézisekből kimaradt eredmény bemutatására itt ragadom meg az alkalmat:

**Definíció:** Egy képművelet  $T$  átíró szabálya *egyszerű-stabil*, ha

1.  $T$  csak egyszerű pont színét változtatja meg.
2. Egy pont színének  $T$  általi megváltoztathatósága nem függ egyetlen olyan pont színétől sem, amely  $T$  által megváltoztatható.

**Tétel:** Egy képművelet topológia-megőrző, ha az átíró szabálya egyszerű-stabil.

„A dolgozat második és harmadik – elsősorban elméleti megfontolásokat tartalmazó – fejezetének eredményeivel kapcsolatban a következő kérdéseim vannak:

- Van-e olyan alkalmazási példa, ahol a topológiamegőrzés kevésbé fontos, kisebb deformitások megengedettek? Ilyen esetekben mennyiben módosulhatnak a közölt eredmények?
- Mennyiben látja kiterjeszhetőnek a disszertációban látható eredményeket más képi reprezentációkra? Például a relatív szabályosnak mondható 4-fa reprezentációra (2- vagy akár 3D-ben is), vagy az inkább gráf alapú leíráshoz vezető szuperpixel-reprezentációra? Utóbbi eset a bináris képekre talán kevésbé releváns, a felvetés inkább a közölt eredmények potenciális gráfelméleti eredményekhez való kapcsolhatóságára vonatkozik.
- A bináris és szürkeskálás morfológiai eljárások mintájára mennyiben tűnik lehetségesnek a bemutatott eredmények szürkeskálás képekre való kiterjesztése? (Például a vázkijelölésre vagy a topológiamegőrzésre vonatkozólag.)”

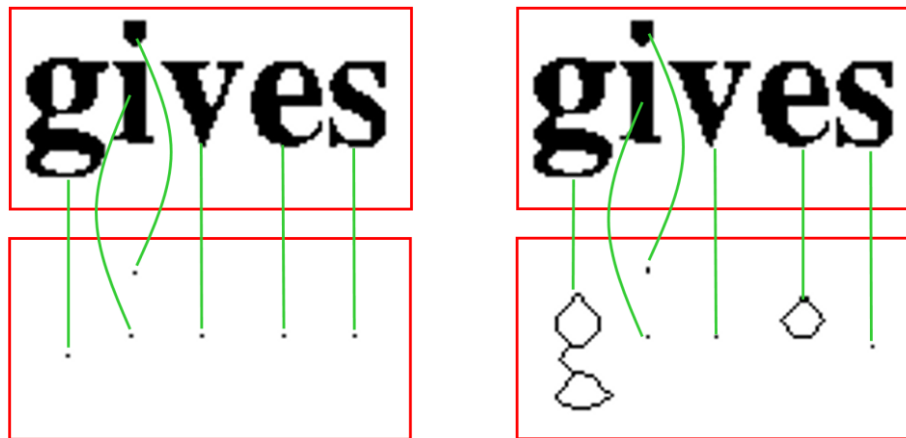
A kérdésblokk első eleméhez az alábbi kettő olyan topológiai problémát tudom említeni, amelyeknek a képműveletei nem őrzik meg a topológiát:

- zsugorítás (*reductive-augmentive shrinking*),
- üregfeltöltés (*cavity filling*).

A zsugorítás célja az, hogy minden egyes objektumot (fekete komponenst) egyetlen izolált ponttá húzzon össze<sup>6</sup>. A feladat két fő alkalmazási területe az objektum-címkézés és az objektum-számlálás. A zsugorítás és a topológia-megőrző redukcióval kapott topológiai mag különbözőségét a 6. ábra illusztrálja.

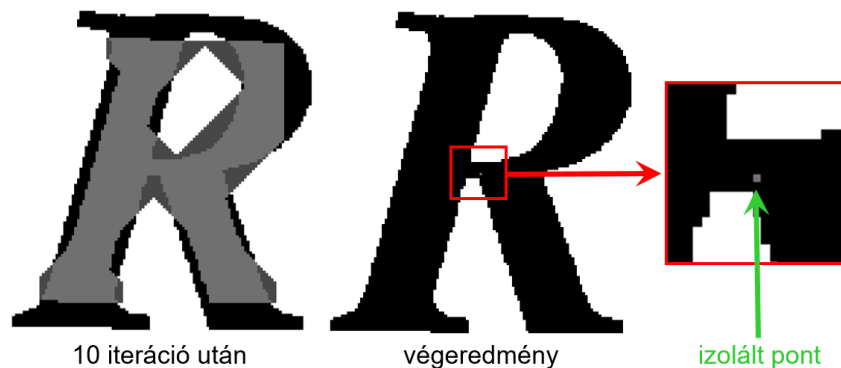
---

<sup>6</sup> R.W. Hall, T.Y. Kong, A. Rosenfeld: Shrinking binary images, In: T.Y. Kong, A. Rosenfeld (Eds.), Topological Algorithms for Digital Image Processing, Elsevier Science B. V., pp. 31-98, 1996.



**6. ábra.** A zsugorítás (bal) során minden egyes objektumból egy izolált pont keletkezik, vagyis eltűnnek a kép üregei, míg az üregmentes objektumok topológiai magja egy-egy izolált pont, az üregekből pedig egy pixel vékony zárt görbék keletkeznek (jobb). A – nem egyértelműen létező – topológiai magot<sup>7</sup> olyan topológia-megőrző redukcióval kapjuk meg, amelynek az eredményképén nincs egyszerű pont.

Zsugorításra számos, vegyes képműveletekből álló iteratív módszert javasoltak (hasonlóan a topológiai mag geometriai kényszerfeltételek nélküli vékonyítással történő) meghatározására. A 7. ábra egy ilyen párhuzamos algoritmus<sup>8</sup> működését szemlélteti.



**7. ábra.** Kameswara Rao és munkatársai iteratív párhuzamos algoritmus az objektum összehúzása közben eliminálja az üreget is.

A legtöbb zsugorító algoritmus kizárólag olyan képeken működik, amelyek homotópia-fáinak mélysége legfeljebb kettő, vagyis nem tartalmaznak üregbe ágyazott objektumokat. Tetszőleges 2D képeket csak Levaldi párhuzamos (és a képpontoknak mindössze a 2x2-es környezetét vizsgáló) iteratív algoritmus<sup>9</sup> képes zsugorítani. Az univerzalitás ára az, hogy az

<sup>7</sup> A topológiai magot mint vázszerű jellemzőt – a Hall, Kong és Rosenfeld idézett művében szereplő elnevezés szerint – a *shrinking to a topological equivalent* eljárások szolgáltatják.

<sup>8</sup> C.V. Kameswara Rao, B. Prasada, K.R. Sarma: A parallel shrinking algorithm for binary patterns, Computer Graphics and Image Processing 5, pp. 265-270, 1976.

<sup>9</sup> S. Levaldi: On shrinking binary picture patterns, Communications of the ACM 15, pp. 7-10, 1972.

eljárás törli az izolált pontokat is, így azokat minden egyes iterációs lépés előtt detektálni és feljegyezni kell ahhoz, hogy az objektumoknak nyoma maradjon.

Mivel minden általam ismert párhuzamos iteratív algoritmus csak olyan fekete pontokat törölhet, amelyeknek van fehér szomszédja (a fehér pontokra érvényes szomszédsági reláció szerint), továbbá csakis olyan fehér pontokat változtathat feketévé, amelyeknek létezik legalább egy fekete szomszédjuk (a fekete pontok szomszédságát nézve), így azok az algoritmusok is hatékonyan implementálhatók (keresőtáblákkal és határpont-listákkal) a dolgozat 3.1. pontjában leírt séma szerint. (Ez az implementációs módszer képezi az önálló 2.1. tézispontomat.)

A zsugorítás mellett az üregfeltöltést említettem olyan feladatnak, ahol a társított képműveletek nem őrzik meg a topológiát. Az üregfeltöltés problémája kétfelé ágazik:

1. Legyen az összes véges fehér komponens valamennyi pontja fekete, de a háttér (az egyetlen végtelen fehér komponens) pontjai közül egyet se színezzünk át.
2. Minden üregpont változzon feketévé, de megengedett az is, hogy a háttérpontok egy része is fekete legyen úgy, hogy objektumok ne olvadjanak össze.

Az 1-típusú üregfeltöltésre 2D-ben és 3D-ben is megoldást adtam, ami része a 3.1. tézisnek. (Az eljárásom lokális szekvenciális, hasonlít a távolságtérkép meghatározásának klasszikus algoritmusára.) A háttérpontokat változatlanul hagyó megközelítés alkalmazható pl. a szegmentálás hibáinak korrigálására.

A 2-típusú üregfeltöltés megoldható például a már említett Kameswara Rao és munkatársai által javasolt algoritmus kitöltő illesztőmintáival, ld. 8. ábra.



**8. ábra.** Shakespeare aláírásának üregfeltöltése. Kameswara Rao és munkatársai iteratív párhuzamos algoritmusának kitöltő illesztőmintái az üregpontok feketévé változtatása mellett az objektumokat az álló befoglaló téglalapjukra húzzák ki. Amennyiben a befoglaló téglalapok átfedik egymást, úgy marad közöttük egy egypixeles „szigetelő” réteg.

Megjegyzem, hogy amennyiben rendelkezünk egy 2-típusú üregfeltöltő algoritmussal, úgy az 1-típusú probléma is megoldható az alábbi eljárással:

- Hajtsuk végre a 2-típusú eljárást (amivel feketévé változtatjuk az összes üregpontot, továbbá a háttér bizonyos pontjait is – a „felhízalt” objektumok összeolvasztása nélkül).
- A kiindulási kép valamennyi pontját jelöljük meg horgonypontoknak.

- Alkalmazzunk egy topológiai magot meghatározó eljárást (pl. valamelyik geometriai kényszerfeltételt nem használó vékonyító algoritmusunkat) oly módon, hogy a horgonypontok mindvégig védettek maradjanak.

Az iteratív üregfeltöltő algoritmusokra is érvényes az a megállapítás, hogy azok is hatékonyan implementálhatók a dolgozat 3.1. pontjában leírt módszerrel.

A blokk első kérdésére adott válaszom összegezve: A zsugorítás és az üregfeltöltés nem őrzi meg a topológiát, viszont (eltekintve Levaldi említett zsugorító algoritmusától), megőrzi az előtérre az összefüggőséget. Mivel az összefüggőség megőrzését jóval könnyebb garantálni, mint a topológia megőrzését, így a topológia megőrzésére adott feltételek egyszerűsítésével elegendő feltételeket kapunk az összefüggőség megőrzésére is.

A második kérdés a dolgozatban szereplő eredmények más képi reprezentációkra való kiterjeszhetőségére vonatkozik.

A 2D bináris képek 4-fa (*quadtree*) és 3D-ben a 8-fa (*octree*) reprezentációjú bináris képeken történő vázkijelölésre csak egyetlen közleményt ismerek: Wong és munkatársai az alábbi fázisokból felépített vékonyító algoritmust javasolták a 2D középvonalak, illetve a 3D középfelszínnek kinyerésére<sup>10</sup>:

1. a 4-fa (8-fa) felépítése,
2. a fa bejárása,
3. a legalsó szinten lévő „biztonságos” blokkok törlése
4. a fa újraépítése.

A 2-4. fázisok képeznek egy iterációs lépést, amelyet a stabilitás eléréséig kell ismételni.

A szerzők a módszerük előnyét abban látják, hogy  $N \times N$ -es 2D bináris képek vékonyításának komplexitása  $O(N^3)$ -ról  $O(N^2)$ -re csökken,  $N \times N \times N$ -es 3D képekre pedig  $O(N^4)$  helyett  $O(N^3)$  lesz<sup>11</sup>.

A szerzők személye iránti tisztelem és úttörő munkájuk jelentőségének elismerése dacára, nem tervezem a dolgozatban bemutatott eredményeimet kiterjeszteni a 4-fa (8-fa) reprezentációra, mivel az nem invariáns még a legegyszerűbb geometriai transzformációra, az eltolásra nézve sem (ld. 9. ábra). Következésképpen az abban a reprezentációban előállított vázszerű jellemzők sem lesznek eltolás-invariánsok.

A szuperpixel-reprezentáció és a vázkijelölés kapcsolatával foglalkozó művek közül itt négy közelmúltban publikáltat említek meg:

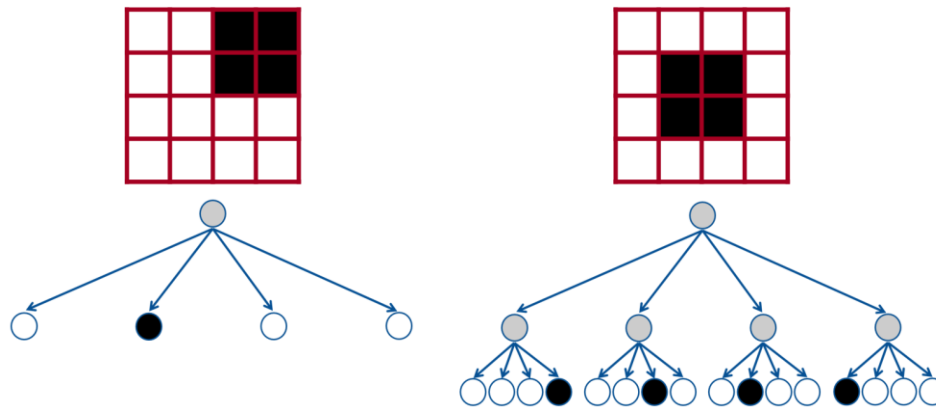
- Kihasnálva azt, hogy a vázszerű jellemzők lokális objektum-szimmetriákat reprezentálnak, Levinshtein, Sminchisescu és Dickinson többfelbontású szuperpixel-szegmentációval generál ki olyan képpontokat, amelyek a középvonalhoz tartoznak<sup>12</sup>.

<sup>10</sup> W-T. Wong, F.Y. Shih, T-F. Su: Thinning algorithms based on quadtree and octree representations, Information Sciences 176, pp. 1379-1394, 2006.

<sup>11</sup> Megjegyzem, hogy nem értek egyet azzal, hogy az  $N \times N$ -es tömbökben tárolt 2D képek vékonyításának időigénye, komplexitása  $O(N^3)$ . Az iterációk számát a képen található legvastagabb objektumrészlet határozza meg, az egyes iterációk műveletigénye pedig az aktuális kép potenciálisan törölhető határpontjainak számától függ (ráadásul ez utóbbi az iteratív objektum-redukció előrehaladtával egyre csökken). Ennélfogva az iterációk számára az  $O(N)$ , egy iteráció időigényére pedig az  $O(N^2)$  nem helytálló.

<sup>12</sup> A. Levinshtein, C. Sminchisescu, S. Dickinson: Multiscale Symmetric Part Detection and Grouping, Int. Journal of Computer Vision 104, pp.117-134, 2013.

- Mivel folytonos esetben a 2D vázat az objektumba beírható maximális (nyílt) körlapok középpontjai alkotják, a Tsogkas és Dickinson által bevezetett új leíró, az *Appearance-MAT* körlap-alakú superpixelekkel fedi le a színes (!) képeket<sup>13</sup>.
- Huang és Pun nem a vázkijelölésre alkalmazza a superpixeleket, hanem a mozgóképek szegmentálására javasolt módszerük alapul a Voronoi-vázból származtatott ún. váz-superpixelek generálásán<sup>14</sup>.
- Hasonlóan az előző megközelítéshez, Fodor és munkatársai is a mozgóképeken vizsgálták a superpixelek alakulását szomszédos képkockák között<sup>15</sup>. Az általuk javasolt módszerük a superpixelek középvonalán túl mélytanulásra is támaszkodik.



**9. ábra.** Mindkettő képen ugyanaz az objektum (2x2-es fekete négyzet) található, de a 4-fájuk különböző.

Az eredményeim kiterjeszthetőségét a superpixel reprezentációra még nem látom át, a bíráló megválaszolására kapott idő túl rövid annak alapos átgondolására. Azokban a módszerekben viszont, ahol a vázszerű jellemzők kijelölése segíti a superpixelekre bontást, ott a gyors és topológia-megőrző vékonyító algoritmusaimat alkalmazhatónak tartom.

A kérdésblokk második elemében az utolsó kérdés az eredményeim és a gráfelmélet kapcsolhatóságára vonatkozik.

A digitális képfeldolgozás és a gépi látás számos feladatára megoldást nyújtanak a gráfelméleti algoritmusok (pl. a szegmentálásra a minimális vágás keresése). A digitális topológia is támaszkodhat a gráfelmélet fogalmaira és eredményeire. Példaként itt most átfogalmazom a dolgozat 1.2.3. tételét (amely a 3D kockamozsaik (26,6) képeinek egyszerű pontjait adja meg).

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

<sup>13</sup> S. Tsogkas, S. Dickinson: AMAT: Medial axis transform for natural images, In. Proc. IEEE Int. Conf. Computer Vision, ICCV 2017, pp. 2708-2717, 2017.

<sup>14</sup> G. Huang, C-M. Pun: On-line video multi-object segmentation based on skeleton model and occlusion detection, Multimedia Tools and Applications 77, pp. 31313-31329, 2018.

<sup>15</sup> Á. Fodor, Á. Fóthi, L. Kopácsi, E. Somfai, A. Lőrincz: Skeletonization combined with deep neural networks for superpixel temporal propagation, In. Proc. Int. Joint Conf. Neural Networks, IJCNN, pp. 1-7, 2019.

- Legyen  $B$  a kép egy  $p$  fekete pontjának  $3 \times 3 \times 3$ -as környezetébe eső fekete pontok halmaza ( $p$ -t nem számítva).
- A  $p$ -körüli  $3 \times 3 \times 3$ -as rácskockában a fehér lapközéppontok (6-elemű) halmazát jelölje  $W_6$ .
- Legyen  $W_{18}$  ugyanabban a rácskockában a fehér lapközéppontok és élközéppontok (18-elemű) halmaza.
- Rendeljük  $p$ -hez a  $G_B=(B,E_B)$  és a  $G_{W_{18}}=(W_{18},E_{W_{18}})$  gráfokat, ahol az  $E_B$ -beli élek a  $B$  egymással 26-szomszédos pontjait kötik össze, míg az  $E_{W_{18}}$  a  $W_{18}$  halmazból a 6-szomszédosokat.

A fentiek után már kimondható az 1.2.3. tétel átfogalmazott változata:

*Tétel:* Az adott  $(26,6)$  képen a  $p$  pont akkor és csak akkor egyszerű, ha az alábbi három feltétel egyidejűleg teljesül:

1. A  $G_B$  gráfban bármely kettő csúcs összeköthető úttal.
2. A  $W_6$  halmaz nem üres.
3. A  $G_{W_{18}}$  gráfban bármely kettő  $W_6$ -beli csúcs összeköthető úttal.

Megjegyzem, hogy több 2D és 3D vázkijelölő módszer is a minimális költségű utak megkeresésére adott gráfalgoritmusokon alapul<sup>16</sup>, továbbá a 3. tézisemben szereplő formális fát (vár-gráfot) generáló algoritmusom szélességi keresést végez a maximálisan vékonyított középvonalból képzett gráfon (ahol a középvonal voxelei a szögpontok, az élek pedig a 26-szomszédos pontokat kötik össze)<sup>17</sup>.

A kérdésblokk harmadik eleme szűrkeskálás képekre való kiterjesztésre vonatkozik.

A dolgozat eredményei kizárólag a bináris képekre érvényesek, de a digitális topológia és a vázkijelölés szűrkeskálás képekre való kiterjesztését mások már több mint négy évtizede kutatják. Az eredmények teljes áttekintése szétfeszítené a válaszok megszokott keretét, így itt csak az általam kiemelkedő fontosságúnak tartottakat említem meg.

A szűrkeskálás képek geometriáját is Rosenfeld alapozta meg. Úttörő munkájában<sup>18</sup> kiterjesztette fuzzy részalmazatokra az összefüggőség és a konvexitás fogalmát, megadta számos alakleíró jellemzőjüket (kerület, terület, kompaktság, kiterjedés, átmérő), továbbá a

<sup>16</sup> Példaként öt közleményt idézek:

- I. Bitter, A.E. Kaufman, M. Sato: Penalized-Distance Volumetric Skeleton Algorithm, IEEE Trans. Visualization and Comp. Graphics 7, pp. 195-206, 2001.
- T. Deschamps, L.D. Cohen: Fast extraction of minimal paths in 3D images and applications to virtual endoscopy, Medical Image Analysis 5, pp. 281-299, 2001.
- L. Zhang, B. Chapman, D. Parker, J. Roberts, J. Guo, P. Vemuri, S. Moon, F. Noo: Automatic detection of three-dimensional vascular tree centerlines and bifurcations in high-resolution magnetic resonance angiography, Investigative Radiology 40, pp. 661-671, 2005.
- D. Jin, C. Chen, E.A. Hoffman, P.K. Saha: Curve skeletonization using minimum cost path, In: P.K. Saha, G. Borgefors, G. Sanniti di Baja (Eds.): Skeletonization: Theory, methods and applications, Academic Press, pp. 151-180, 2017.
- B. Liu, A.C. Telea, J.B.T.M. Roerdink, G.J. Clapworthy, D. Williams, P. Yang, F. Dong, V. Codreanu, A. Charini: Parallel centerline extraction on the GPU, Computers and Graphics 41, pp. 72-83, 2014.

<sup>17</sup> K. Palágyi, J. Tschirren, E.A. Hoffman, M. Sonka: Quantitative analysis of pulmonary airway tree structures, Computers in Biology and Medicine 36, pp. 974-996, 2006.

<sup>18</sup> A. Rosenfeld: The fuzzy geometry of image subsets, Pattern Recognition Letters 2, pp. 311-317, 1984.

lokális *max-min* operátorokkal megadta a zsugorítás egy lépését is. A legelső szűrkeskálás vékonyító algoritmus is Rosenfeldhez kötődik<sup>19</sup>.

Bertrand, Everat és Couprie a szűrkeskálás képek műveleteire a topológia megőrzését visszavezette a bináris esetre a keresztmetszeti topológia (*cross-section topology*) bevezetésével<sup>20</sup>. Ha az  $I(v)$  szűrkeskálás képen az intenzitások a  $\{0,1,\dots,L-1\}$  halmazból kerülnek ki, akkor az  $I_k(v)$  ( $k=0,1,\dots,L-1$ ) bináris kép az alábbi módon definiált:  $I_k(v)=1$ , ha  $I(v)\geq k$ , különben  $I_k(v)=0$ .

Egy képművelet topológia-megőrző, ha bináris értelemben megőrzi a topológiát minden egyes  $k$ -ra. A keresztmetszeti topológiájú szűrkeskálás képekre tehát kiterjeszthetők az általam adott elégséges feltételek (ld. a dolgozat 2. fejezete).

A számos szűrkeskálás 2D vázkijelölő algoritmus közül itt csak Sanniti di Baja és Nyström különleges megoldását<sup>21</sup> emelem ki. A szerzők a problémát a 3D bináris képek (vékony felszínek) középvonalainak meghatározására vezették vissza.

Tegyük fel, hogy az  $N\times M$ -es, a 2D négyzetmozaikon mintavételezett  $A(x,y)$  szűrkeskálás képen az intenzitások halmaza  $\{1,2,\dots,L\}$ . Az eljárás fázisai:

1. A 3D kockamozaikon mintavételezett  $N\times M\times L$  méretű, kezdetben fehér  $B(x,y,z)$  bináris képen a  $B(x,y,A(x,y))$  voxeleket fekete színre színezték át.
2. Képezték a  $B(x,y,z)$  kép fekete pontjaira „illeszkedő” összefüggő és alagutaktól mentes (egy voxel vékonyságú) felszínt.
3. A 2. lépésben kapott  $B$  3D bináris képre egy speciális, a vékony felszíneket a középvonalaikká vékonyító algoritmust<sup>22</sup> alkalmaztak.
4. A 3. lépésben kapott középvonalat egy voxel vastagságúra alakították, majd tisztították (eltávolították a középvonal feleslegesnek ítélt ágait).
5. A 4. lépésben kapott 3D bináris képet a  $z=1$  síkra vetítették.
6. Az 5. lépésben keletkezett  $N\times M$ -es (2D) bináris képen a levetített középvonal egy pixel vékonyságúra hozásával és tisztításával megkapták a kiindulási 2D szűrkeskálás kép bináris középvonalát.

Amennyiben Sanniti di Baja és Nyström algoritmusának 3. lépésében (a 3D bináris kép vékony felszínének középvonallá alakításakor) a dolgozatom 3.4. pontjának maximális 3D középvonalra vékonyító algoritmusait alkalmazzuk, úgy nem lenne szükség a 4. lépésben az egy voxel vékonyságúra alakításra. Ekkor a 4. fázisban várhatóan kevesebb „fölösleges” ágat eredményeznének a végpontokat újra-ellenőrző vagy a „földnyelv-pontokat” kigyűjtő algoritmusaim, valamint alkalmazni lehetne a légútfák középvonalának tisztítására javasolt eljárásomat is (ld. a dolgozat 4.5. pontja).

A Bíráló a kérdésblokk harmadik elemében kérdezett rá arra, hogy a morfológiai eljárások mintájára a dolgozat eredményei kiterjeszthetők-e szűrkeskálás képekre.

<sup>19</sup> C.R. Dyer and A. Rosenfeld: Thinning operations on gray-scale pictures. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence 1, pp. 88-89, 1979.

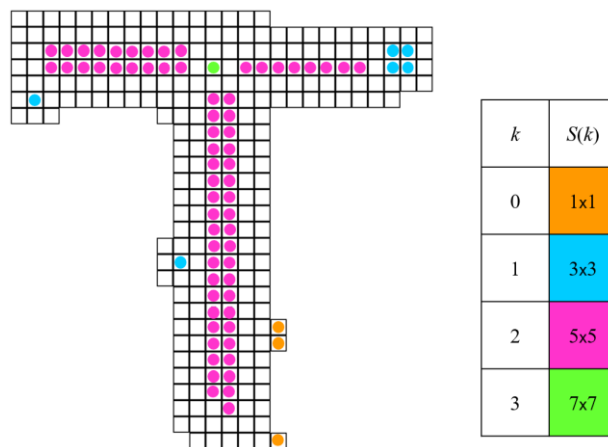
<sup>20</sup> G. Bertrand, J-C. Everat, M. Couprie: Image segmentation through operators based on topology, Journal of Electronic Imaging 6, pp. 395-405, 1997.

<sup>21</sup> G. Sanniti di Baja, I. Nyström: 2D grey-level skeleton computation: a discrete 3D approach, In Proc. 17th Int. Conf. Pattern Recognition, ICPR 2004. pp. 455-458, 2004.

<sup>22</sup> S. Svensson, I. Nyström, G. Sanniti di Baja: Curve skeletonization of surface-like objects in 3D images guided by voxel classification, Pattern Recognition Letters 23, pp. 1419-1426, 2002.

A *matematikai morfológia* számos, a bináris képekre adott műveletét kiterjesztették szürkeskálás képekre<sup>23</sup>. Ezek közé tartozik pl. a dilatació, az erózió, a nyitás, a zárás vagy a morfológiai szűrés. Bináris esetben a vázkijelöléshez kettő összetett morfológiai művelet tartozik: a morfológiai váz és a morfológiai vékonyítás<sup>24</sup>.

A morfológiai váz a folytonos váz közelítésére szolgál, mégpedig azt a váz-definíciót követve, miszerint a vázat az objektumba beírható maximális (nyílt) hipergömbök középpontjai alkotják. A morfológiai megadás ekkor csak a  $(2k+1)$ -átmérőjű ( $k=0,1,2,\dots$ ) hipergömböket (2D-ben körlapokat) vizsgálja, ahol az 1-átmérőjű hipergömb az origó (izolált képpont), a 3-átmérőjűt az eljárás  $Y$  szerkesztőeleme (*structuring element*) közelíti, a  $k>1$  esetek hipergömbjeit pedig a megelőző göbközelítés  $Y$ -nal történő dilataciója adja<sup>25</sup>. A morfológiai váz nem őrzi meg a topológiát, viszont amennyiben ismert az, hogy az egyes vázpontok az iteratív eljárás hányadik lépésében adódtak hozzá a vázhoz, úgy a morfológiai vázból pontosan rekonstruálható a kiindulási kép, ld. 10. ábra.



**10. ábra.** Egy T-szerű objektum morfológiai vázát a színes korongokkal jelzett pixelek alkotják, ha az  $Y$  szerkesztőelem az origó középpontú  $3 \times 3$ -as négyzet. Ha  $Y$ -t egyszer dilatáljuk önmagával, akkor az  $5 \times 5$ -ös, ha kétszer, akkor pedig a  $7 \times 7$ -es négyzetet (körlap-közelítést) kapjuk. Az iteratív eljárás  $k$ -adik fázisában az  $S(k)$  halmaz elemei kerülnek be a vázpontok közé, vagyis azok a pixelek, amelyek középpontjai egy beírható  $(2k+1)$ -átmérőjű „körlap”-nak, de a körükük írt  $(2(k+1)+1)$ -átmérőjű „körlap” már nem része az objektumnak. A színes korongok köré írt megfelelő méretű négyzetek egyesítésével visszakaphatjuk a kiindulási objektumot.

Mivel a morfológiai váz a folytonos váz diszkrét közelítésén alapul, így a vázszerű jellemzők közül 2D-ben kizárólag a középvonal, 3D esetén pedig a középfelület meghatározására

<sup>23</sup> R.C. Gonzalez, R.E. Woods: Digital Image Processing (3rd Edition), Prentice Hall, 2008.

<sup>24</sup> J. Serra: Image Analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, New York/London, 1982

<sup>25</sup> Megjegyzem, hogy Maragos általánosította a morfológiai vázat úgy, hogy iterációként más és más lehet a szerkesztőelem (P. Maragos: Unified Theory of Translation-Invariant Systems with Applications to Morphological Analysis, and Coding of Images. PhD Thesis, Atlanta, GA: School of Elect. Engineering, Georgia Inst. of Technology, 1985.).

A vázkijelölő algoritmusok kvantitatív kiértékeléséhez és rangsorolásához javasolt hasonlósági mértékünk jóságát olyan általánosított morfológiai vázakkal validáltuk, amelyekben a rangsorolt körlap-közelítéseket szomszédsági szekvenciákból származtattuk (G. Németh, Gy. Kovács, A. Fazekas, K. Palágyi: A method for quantitative comparison of 2D skeletons, Acta Polytechnica Hungarica 13, pp. 123-142, 2016.).

szolgál, így a topológiai mag és a – számos alkalmazásban fontos – 3D középvonallal kinyerésére a morfológiai megközelítés nem alkalmas.

A Heijmans által lefektetett *bounded gray-level morphology*<sup>26</sup> segítségével Wang és Ronsin megalkotta a *bounded skeleton transform*<sup>27</sup> műveletét, vagyis megoldották a bináris morfológiai váz kiterjesztését szürkeskálás képekre.

A bináris morfológia *hit-or-miss* transzformációja egy összetett szerkesztőelemmel adott bit-minta pontos előfordulásainak pozícióit adja meg. Amennyiben egy párhuzamos vékonyító algoritmus törlési szabályai bináris illesztőmintákkal adottak, úgy az egyes vékonyító fázisok leírhatók *hit-or-miss* transzformációkkal. Naegel, Passat és Ronse kiterjesztették szürkeskálás képekre a *hit-or-miss* transzformációt<sup>28</sup>, így a szürkeskálás képek párhuzamos vékonyító algoritmusai is megadhatók a matematikai morfológia eszköztárával.

„A dolgozat negyedik fejezetével kapcsolatban a következő kérésem van:

- Sikerült-e más alkalmazásokban is felhasználni a dolgozat eredményeit? Amennyiben igen, milyen megfontolásokat kellett tenni a leghatékonyabb eljárások kiválasztásakor?”

A 3D vékonyító algoritmusainkat mások – túl az orvosiakon – számos területen alkalmazzák. A teljesség igénye nélkül felsorolok néhány érdekes alkalmazást: közetrepedések és porózus szerkezetek jellemzése, fák (mint növények) 3D modellezése, rostos anyagok jellemzése, osztriga-kövületek digitális dokumentálása, vízgőz-diffúzió szimulálása betonban, akusztikus poliuretán habok mikro-szerkezetének jellemzése, növények gyökerének modellezése, (markerek nélküli) valós-idejű mozgáskövetés.

Algoritmusaink alkalmazása mellett minden bizonnyal azért döntött számos kutató, mivel azok garantáltan megőrzik a topológiát, valamint a dolgozat 3.4. pontjában ismertetettrekre bizonyított az is, hogy maximálisan vékonyított középvonalakokat eredményeznek. Többeknél az is fontos szempont volt, hogy az algoritmusaink törlési szabályai áttekinthetők, könnyen és egyértelműen megvalósíthatók kizárólag az azokat közlő publikációkra hagyatkozva. Talán az sem elhanyagolható tényező, hogy készséggel válaszolok mindenkinek, aki a kérdéseivel, problémáival hozzám fordul, továbbá megosztom velük az algoritmusaink kódjait is.

A légútjáratok kvantitatív elemzése (ld. a dolgozat 4. fejezete és a 3. tézis) mellett, a maximális 3D középvonallal vékonyító algoritmusaimon alapul az összes olyan alkalmazás, amelyekkel eddig Erich Sorantinna, a *Medizinische Universität Graz* professzorával foglalkoztunk. Ilyen, a dolgozatomban nem tárgyalt problémák:

---

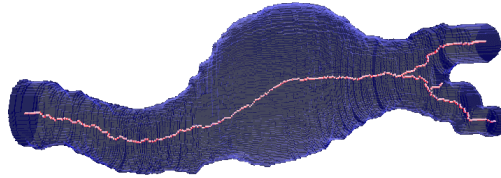
<sup>26</sup> H.J.A.M. Heijmans: Theoretical aspects of gray-level morphology, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence 13, pp. 568-582, 1991.

<sup>27</sup> D. Wang, J. Ronsin: Bounded gray-level morphology and its applications to image representation, IEEE Trans. Image Processing 5, pp. 1067-1073, 1996.

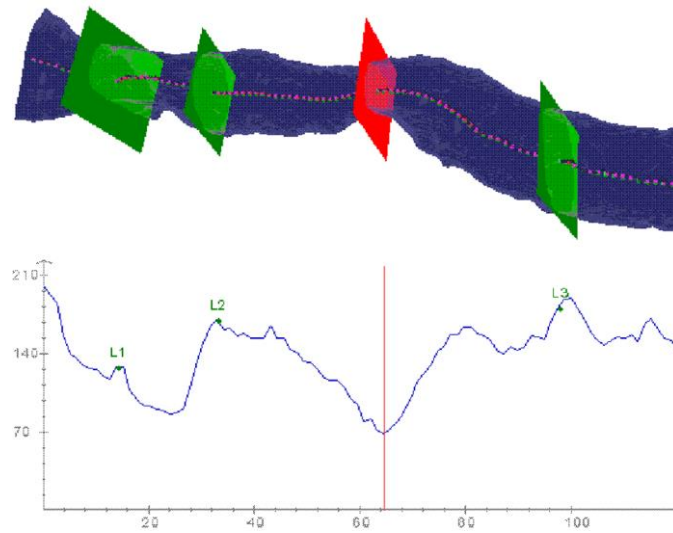
<sup>28</sup> B. Naegel, N. Passat, C. Ronse: Grey-level hit-or-miss transforms—Part I: Unified theory, Pattern Recognition 40, pp. 635-647, 2007.

B. Naegel, N. Passat, C. Ronse: Grey-level hit-or-miss transforms—part II: Application to angiographic image processing, Pattern Recognition 40, pp. 648-658, 2007.

- a veseerek alatti aorta szakasz kiboltosulásának mérése<sup>29</sup> (ld. 11. ábra),
- tracheális sztenózis (légcsőszűkület) detektálása és megítélése<sup>30</sup> (ld. 12. ábra),
- virtuális vastagbél-tükrözés, vastagbél virtuális boncolása<sup>31</sup> (ld. 13. ábra),
- májrezekció tervezés támogatása<sup>32</sup> (ld. 14. ábra).



**11. ábra.** A veseerek alatt elágazó aorta falának kiboltosulása (*infra-renal aortic aneurysms*) a 60 év feletti populáció 2%-ánál fordul elő. Az emberi szervezet legnagyobb verőér-falának átszakadása (aorta disszekció) az esetek 70–90%-ában halálhoz vezet. A szükséges beavatkozás megtervezéséhez és időzítéséhez ismerni kell az érszakasz átmérőjét, amely mérhető a szegmentált ér középvonalára merőleges 2D képszeleteken.



**12. ábra.** A légcső-szűkület (*laryngotracheal stenosis*) esetén életbevágó a légút-biztosítás. A szükséges beavatkozáshoz (pl. intubáció vagy légcsőmetszés) szükséges a légcső átmérőjének pontos ismerete. Fent egy CT-vizsgálatból szegmentált légcső, a középvonala és az arra merőleges 2D képszeletek közül négy látható. Az alsó kép a középvonal mentén ábrázolja a légcső átmérőjét.

<sup>29</sup> K. Palágyi, E. Sorantin, E. Balogh, A. Kuba, Cs. Halmi, B. Erdőhelyi, K. Hausegger: A sequential 3D thinning algorithm and its medical applications, In Proc. 17th Int. Conf. Information Processing in Medical Imaging, IPMI 2001, LNCS 2082, Springer, pp. 409-415, 2001.

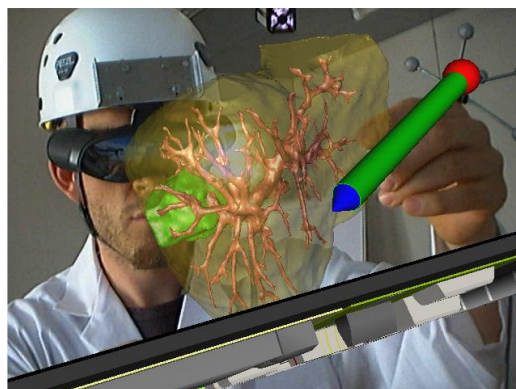
<sup>30</sup> E. Sorantin, Cs. Halmi, B. Erdőhelyi, K. Palágyi, L.G. Nyúl, K. Ollé, B. Geiger, F. Lindbichler, G. Friedrich, K. Kiesler: Spiral-CT-based assessment of tracheal stenoses using 3-D-skeletonization, IEEE Trans. Medical Imaging 21, pp. 263-273, 2002.

<sup>31</sup> E. Sorantin, E. Balogh, A. Vilanova i Bartrolí, K. Palágyi, L.G. Nyúl, F. Lindbichler, A. Ruppert: Virtual dissection of the colon based of spiral CT data, In E. Neri, D. Caramella, C. Bartolozzi (eds.) Image Processing in Radiology – Current Applications, Springer, pp. 257-268, 2008.

<sup>32</sup> R. Beichel, T. Pock, Ch. Janko, B. Zotter, B. Reitingner, A. Bornik, H. Bischof, K. Palágyi, E. Sorantin, G. Wergartner, M. Sonka: Liver segment approximation in CT data for surgical resection planning, Medical Imaging 2004: Image Processing, In Proceedings of SPIE Vol. 5370, pp. 1435-1446, 2005.



**13. ábra.** A 3D középvonal megbízható meghatározásán alapuló virtuális vastagbél-tükrözés betegbarát módszer, mivel nem kell endoszkópot feljuttatni a végbélén át. A középvonalon mint ideális röppályán végighaladó virtuális kamera képén felismerhetők az elváltozások, pl. a vastagbél-polipok, ld. bal oldali kép. Egy kadáverből kiemelt vastagbél-szakasz (ld. középső kép) virtuális boncolásának eredménye a jobb oldali képen látható. A középvonal mentén kiegyenesítettük a bélszakaszt, hengeres projekciót hajtottunk végre, majd a hengert az egyik alkotója mentén felvágva azonosítottuk a belső felszín elváltozásait.

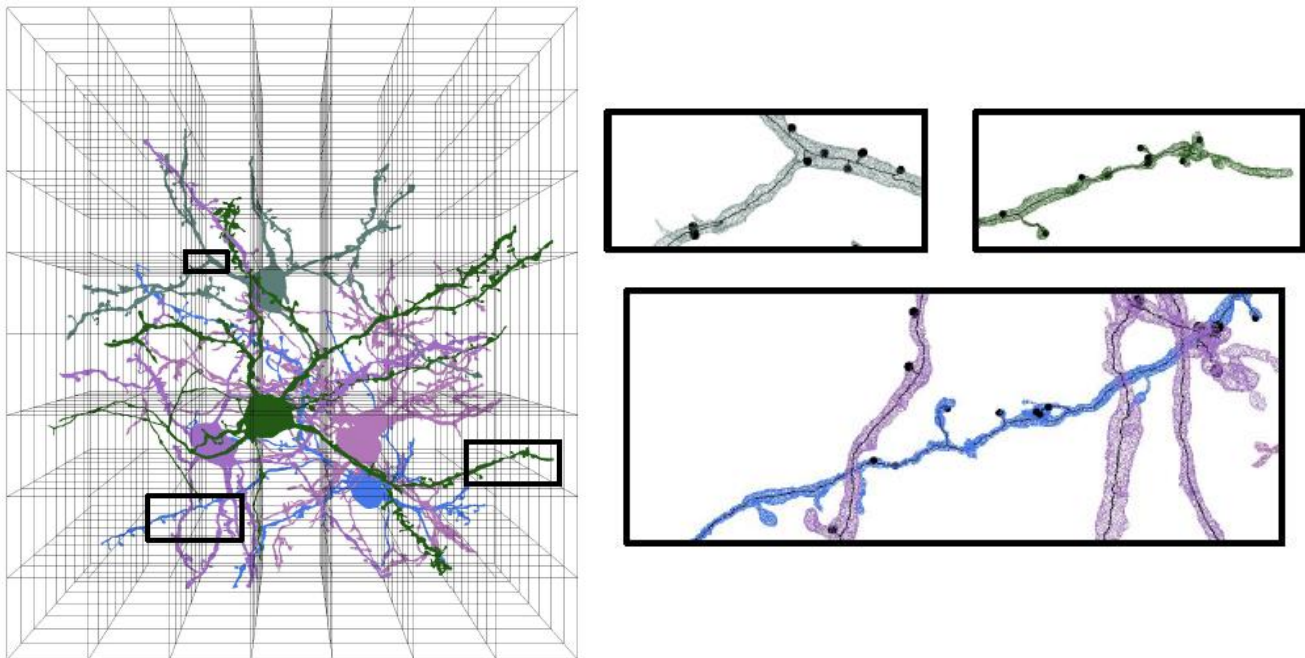


**14. ábra.** Kiterjesztett valóságon (*Augmented Reality*) alapuló májrezekció tervezés. A máj daganatainak sebészeti eltávolításakor ügyelni kell arra, hogy biztosított legyen a máj vérellátása a műtét után is. Az artériák és vénák átmérőjének meghatározása, valamint az elágazásaik azonosítása ennél az alkalmazásnál is a 3D középvonalakon alapult.

A fenti négy alkalmazás mellett megemlítem még azt is, hogy a *Harvard University* (*Cambridge, MA, USA*) kutatói megkerestek azzal, hogy a szinaptikus kapcsolatok azonosításához szükségük lenne olyan algoritmusra, amely képes 3D középvonalak gyors és pontos meghatározására elektronmikroszkópból származó (tera- és petabájtokban mérhető adatot tartalmazó) képeken, ld. 15. ábra. A dolgozatban nem szereplő, a „földnyelv-pontok” kigyűjtésén (mint geometriai kényszeren) alapuló algoritmusom<sup>33</sup> a célra alkalmasnak bizonyult.

<sup>33</sup> K. Palágyi: A sequential 3D curve-thinning algorithm based on isthmuses, In Proc. 10th Int. Symposium on Visual Computing, ISVC'14, LNCS 8888, Springer, pp. 406-415, 2014.

Első eredményeinket a szakterület legjelentősebb fórumán, a MICCAI konferencián mutattuk be<sup>34</sup>, jelenleg egy rangos folyóirathoz közlésre benyújtandó cikkben dolgozunk.



**15. ábra.** A 270 milliárd voxelből álló elektronmikroszkópos kép öt neuront tartalmaz. Az alsó képeken három felnagyított régió látható a „szinapszis-tudatos” középvonalakkal.

A felsorolt alkalmazásokban azért támaszkodtunk a saját 3D középvonalra vékonyító algoritmusokra, mivel mindegyik esetben fontos szempont volt a gyorsaság, a topológia megőrzése és a maximálisan vékony középvonal elérésére (minden lehetséges 3D képre). A felsorolt kívánalmak mindegyikét teljesítik az algoritmusaim.

A Bíráló kérdéseinek megválaszolása után még magyarázatot fűzök az értékelés kettő részletéhez.

„Az olvasmányosságot nagyban segíti, hogy a bizonyítások mellőzésre kerültek anélkül, hogy ez zavarná a fogalmak vagy eredmények értelmezhetőségét. Ez a megoldás azért is indokolt, mert a bemutatottakon túl a szerző nagy számú további eredménnyel rendelkezik a területen – a dolgozat ennek a több évtizedes munkának egyfajta kivonataként is tekinthető. Bár ez az észrevételem a közölt eredmények értékét nem csökkenti, szeretném itt megjegyezni, hogy

<sup>34</sup> B. Matejek, D. Wei, X. Wang, J. Zhao, K. Palágyi, H. Pfister: Synapse-aware skeleton generation for neural circuits, In Proc. 22nd Int. Conf. Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention, MICCAI 2019, LNCS 11764, Springer, pp. 227-235, 2019.

talán nem volt túl szerencsés, hogy a szerző viszonylag nagy hangsúlyt fektetett annak bemutatására is, hogy mely eredmények nem kerültek be az értekezésbe. Meglátásom szerint az olvasó számára érdekesebb lett volna jobban bemutatni, hogy miért éppen a közölt eredmények kerültek be, miért érezte a szerző ezeket a legfontosabbnak. Ezt különösen a magyar nyelvű tézisleveletnél éreztem, az értekezés esetében ez kevésbé zavaró.”

Köszönöm a Bírálónak a megerősítést abban a döntésben, hogy a bizonyítások utánközlésével nem szűkítettem tovább a bemutatható eredmények körét.

A dolgozat megírásakor az alábbi szempontok vezéreltek:

- átfogó képet adjak a (PhD fokozat megszerzése óta eltelt időszakban folytatott) tudományos tevékenységemről,
- olyan doktori művet nyújtsak be, amelynek van íve, a fejezetei egymásra épülnek,
- a dolgozatom ne lépje túl az ajánlottból kötelezően betartandóvá vált terjedelmi korlátot,
- a kimaradtak felsorolásával egyrészt érzékeltessem azt, hogy a dolgozatba és a tézisekbe az eredményeimnek csak egy szűk válogatása került be, másrészt pedig egy teljesebb kép bontakozzon ki a tudományos tevékenységemről.

A tézislevelet három oldalas első pontjában (1. A kutatás területei és módszerei) valóban aránytévésztés volt részemről az, hogy a dolgozatban nem ismertetett és tézisekbe sem foglalt eredményeim felsorolására közel egy oldalt szenteltem.

A dolgozat 2. fejezetébe (és az ahhoz tartozó 1. tézisbe) kizárólag a párhuzamos redukciók topológia-megőrzésére vonatkozó elégséges feltételeket emeltem be, mivel a dolgozat 3. fejezetében szereplő vékonyító algoritmusok redukciókból építkeznek. (Mivel az addíciók és a vegyes képműveletek topológia-megőrzése terén elért eredményeimre nem támaszkodnak a 2. és a 3. tézisek, így azokat a dolgozatban nem tárgyaltam. Ugyanez indokolta azt, hogy az egyszerű és a P-egyszerű pontok jellemzésére vonatkozó eredményeket sem ismertettem.)

A doktori mű 3. fejezetébe (és az ahhoz társított 2. tézisbe) a szekvenciális és párhuzamos vékonyító algoritmusok hatékony implementációja, az előző fejezet eredményein alapuló néhány párhuzamos 3D eljárás, valamint az orvosi alkalmazásokban használt maximálisan vékony 3D középvonalakat eredményező kettős szekvenciális vékonyító algoritmus került be, mivel egyrészt ezek támaszkodnak az 1. tézisre, másrészt pedig ezeken alapul a 3. tézis. (Ebből a fejezetből kimaradtak többek között a 2D vékonyító algoritmusok, az illesztőmintákkal adott 3D eljárások, valamint a vékonyításnak a redukciók fixpontjain alapuló gyorsítása is.)

A dolgozat 4. fejezete (és a vonatkozó 3. tézis) egyrészt megmutatja azt, hogy a matematikailag megalapozott elméleti eredményeim (az első két tézisem) alkalmazhatók a gyakorlatban, másrészt pedig demonstráltam azt, hogy (mérnöki megközelítéssel) a vázkijelölésen túli problémákat is meg tudok oldani. Mivel a fentiekre a légútjáratok kvantitatív analízisére kidolgozott módszerem a legkomplexebb példa, így annak bemutatása mellett döntöttem. (A Bíráló utolsó kérdésére adott válaszütemben ismertetett további öt orvosi alkalmazást csak felsoroltam a dolgozatban és a tézisleveletben, az azokhoz tartozó eredmények részletes tárgyalásától és tézispontokba foglalásától eltekintettem.)

„A megfogalmazott tézispontokat a 2.1. tézispont kivételével önálló eredményként elfogadom. A 2.1. tézispont is hasznos eredményeket közöl, de véleményem szerint indokoltabb lett volna ezt az általános keretrendszert egy eljáráshoz kötvé tárgyalni. Ez egyébként az értekezésben is lényegében így történik, mivel a 2.2 tézispontnál megfogalmazott algoritmus erre az implementációs keretrendszerre épül.”

A 2.1. tézisponthoz a szekvenciális és a párhuzamos vékonyító algoritmusok általános (tetszőleges dimenziójú és topológiájú képekre érvényes) implementációs sémáját rendeltem. Szerencsésebb lett volna többesszámot használnom, sémákról írnom, mivel a dolgozat 3.1. pontjában a 3. és a 4. algoritmusok külön kezelik a szekvenciális és a párhuzamos eseteket. Egy eljáráshoz kötvé azért nem tárgyalhattam ezeket a sémákat, mivel azzal egyrészt elfedtem volna a módszer univerzális mivoltát, másrészt pedig minden egyes vékonyító algoritmus vagy szekvenciális, vagy pedig párhuzamos (kivéve azokat, amelyeknek az átírási szabályaik általános-egyszerűek – azok ekvivalens szekvenciális és párhuzamos algoritmus-párokhoz vezetnek).

A 2.2. tézispont egy biztonságos tervezési módszert javasol, amelynek segítségével (egyedi bizonyítások nélkül is garantáltan) topológia-megőrző párhuzamos vékonyító algoritmusokhoz jutunk. Dacára annak, hogy a dolgozat 3.2.4. pontjában szereplő 9. algoritmusba valóban beépültek a párhuzamos implementációs séma elemei, az általánosítás és a szekvenciális eset tárgyalása – szerintem – szétfeszítette volna a dolgozatnak azt a pontját.

Megjegyzem, hogy a 2.1. tézispontba foglalt szekvenciális és párhuzamos implementációs sémákat követik a dolgozat 3.2. pontjában bemutatott generált algoritmusok, a 3.3. pontban leírt ekvivalens algoritmus-párok, valamint a 3.4. pontban ismertetett maximálisan vékony 3D középvezonalakat eredményező szekvenciális algoritmusok megvalósításai is. A légútjáratok kvantitatív analízisénel (ld. 3. tézis) és a dolgozatban nem tárgyalt további öt orvosi alkalmazásnál is a 2.1. tézispont szekvenciális sémája vezetett a 3D középvezonalak gyors kinyeréséhez.

Végezetül újra megköszönöm a Bírálónak a fáradozását, mindegyik kérdését és észrevételét.

Szeged, 2021.06.15.

Palágyi Kálmán