

## Válasz Prof. Dr. Szirmay-Kalos Lászlónak a

*Topology preservation and thinning / Topológia-megőrzés és vékonyítás*

*c. doktori műre adott*

### **bírálatára**

Pályázó / szerző: **Palágyi Kálmán**

Mindenekelőtt megköszönöm a Bírálónak az alapos bírálatát, lényegbevágó kérdéseit, megjegyzéseit.

A bírálat választ igénylő részleteit behúzott bekezdésekben és kék fontokkal emelem ki.

„Megjegyzem, hogy gyakorlatban valóban ennek van igazán jelentősége, de az elméletileg izgalmasabb topológiai viszonyok és geometriák is előkerülhetnek. Például érdekes volna tórusz, Möbiusz szalag, vagy akár projektív sík topológiájú képek vizsgálata, vagy annak felvetése, hogy nem euklideszi esetekben mi tartható meg és mi vethető el. Például hiperbolikus geometriában a rácsok szerkezete sokkal változatosabb lehet, mint euklideszi geometriában. Hasonlóképpen a topológia megőrzés kritériumai magától értetődők, de felmerül a kérdés, hogy ez milyen kapcsolatban van a nem diszkrét topológia Betti számainak vagy Euler karakterisztikájának a megőrzésével.”

Köszönöm a Bírálónak, hogy felhívta a figyelmemet a különleges terekre. A 2D és a 3D euklideszi tér mozaikjain (vagy az azokkal duális rácsokon) értelmezett digitális bináris képekre megfogalmazott eredmények (pl. az egyszerű pontok jellemzései, valamint a topológia-megőrző redukciókra adott elégséges feltételek) függetlenek a pixelek/voxelek alakjától, kizárólag azt veszik figyelembe, hogy a vizsgált mozaikcsempék miképpen osztoznak csúcson, élen vagy (3D-ben) lapon. Amennyiben az euklideszi tereket olyan (lineáris vagy nemlineáris) geometriai transzformációknak vetjük alá, amelyek nem változtatják meg csempék között a fenti viszonyokat, úgy a kiindulási terekre vonatkozó eredmények érvényesek a transzformált terekre is<sup>1</sup>.

Az algebrai topológia Betti-számait és – a Poincaré formula szerint – a velük kifejezhető Euler karakterisztikát a digitális geometria és topológia irodalma is tárgyalja<sup>2</sup>. Az Euler karakterisztika formulája a 2D  $P$  bináris képre  $X(P) = \#O - \#C$ , a 3D esetben pedig  $X(P) = \#O - \#H + \#C$ , ahol  $\#O$  az objektumok,  $\#C$  az üregek (buborékok) és  $\#H$  a lyukak (3D alagutak) számát jelöli. A redukciók topológia-megőrzéséhez nem elégséges a Betti-számoknak és az Euler

---

<sup>1</sup> Konstruálhatunk csúcs-gráfokat a kiindulási és a transzformált digitális terekre oly módon, hogy a mozaikcsempék alkotják a gráfok szögpontjait, éllel pedig azokat a szögpontokat kötjük össze, amelyek csempéi csúcson osztoznak. Hasonlóképpen kaphatjuk meg az él-gráfokat és 3D-ben a lap-gráfokat is. Ha a kiindulási tér gráfjai rendre izomorfak a transzformált tér gráfjaival, akkor az egyik digitális tér topológiai eredményei érvényesek a másik térre is.

<sup>2</sup> R. Klette, A. Rosenfeld: Digital geometry: Geometric methods for digital picture analysis, Elsevier - Morgan Kaufmann, 2004.

T.Y. Kong: Digital topology, In L.S. Davis (Ed.), Foundations of Image Understanding, Springer, pp. 73-93, 2001.

karakterisztikának (a nem-digitális topológia topológiai invariánsainak) a megőrzése, változatlanul hagyása.

A digitális topológiában az egyszerű pont fogalmát Morgenthaler vezette be: egy fekete pont akkor és csakis akkor egyszerű egy digitális bináris képen, ha törlése megőrzi a topológiát. A 3D kockarács (26,6) képeinek egyszerű pontjaira az első (a kérdéses pont 3x3x3-as környezetétől függő lokális) jellemzést<sup>3</sup> is Morgenthaler közölte. Tételében három feltételt fogalmazott meg, amelyek közül csak az utolsóban jut szerep az Euler karakterisztikának. (Az első két feltétel arra vonatkozik, hogy a kérdéses pont legyen 26-szomszédos a 3x3x3-as környezete pontosan egy fekete 26-komponensével és legyen 6-szomszédos a lokális környezetébe eső fehér pontok pontosan egy fehér 6-komponensével.)

A harmadik feltétel (jelölések bevezetése nélkül): Képezzük azt a képet, amelyen csak a vizsgált fekete  $p$  pont fekete 26-szomszédai alkotják a fekete pontok halmazát. Ekkor a kiindulási képen  $p$  egyszerűségéhez az is szükséges, hogy a „miniképre” az Euler karakterisztika  $p$  „színétől” független legyen (maradjon változatlan  $p$  fehérré változtatását követően).

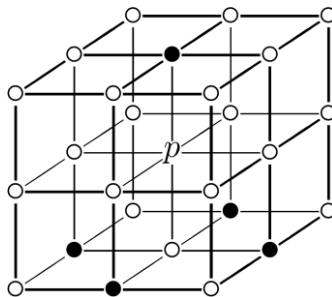
Az alábbi konfigurációban a  $p$  pontra teljesül Morgenthaler harmadik feltétele, mivel

$$X(P) = \#O - \#H + \#C = 1 - 0 + 0 = 1,$$

ha  $p$  fekete és

$$X(P) = \#O - \#H + \#C = 2 - 1 + 0 = 1,$$

amennyiben  $p$  fehér.



A kérdéses konfigurációban a  $p$  fekete pont mégsem egyszerű (vagyis a törlése nem őrzi meg a topológiát), mivel a fehérré változtatása kettévág(hat) egy objektumot és létrehoz(hat) egy új alagutat.

Fájlalom, hogy a dolgozatomban 1.2.3 pontjában nem tértem ki a fentiekre és az 1.10 ábra (amely példákat mutat egyszerű és nem egyszerű pontokra) nem tartalmazza a fenti érdekes esetet.

Morgenthaler tételéből következik, hogy diszkrét 3D tereken az Euler karakterisztika nem számít topológiai invariánsnak, ennél fogva az Euler karakterisztika változatlanságára hagyatkozó korai vázkijelölő algoritmusok<sup>4</sup> nem őrzik meg a topológiát.

<sup>3</sup> D.G. Morgenthaler: Three-dimensional simple points, serial erosion, parallel thinning, and skeletonization, Technical Report TR-1005, University of Maryland, 1981.

<sup>4</sup> S. Lobregt, P.W. Verbeek, F.C.A. Groen: Three-dimensional skeletonization: Principle and algorithm, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence 2, pp. 75-77. 1980.

S.N. Srihari, J.K. Udupa, M.M. Yau: Understanding the bin of parts, In Proc. IEEE Conf. Decision Control, pp. 44-49, 1979.

Megjegyzem, hogy a 3D kockarács (26,6) képeinek egyszerű pontjait jellemző, a dolgozatom 1. (bevezető) fejezetében idézett 1.2.3 tételben<sup>5</sup> nem szerepel az Euler karakterisztika.

A Bíráló kritikai észrevétele a dolgozat 1. fejezetében tárgyalt 1. téziscsoport állításaihoz:

„A tételek bizonyítását a disszertáció nem tartalmazza, holott jó lett volna egy olyan keretet látni – már ha létezik ilyen – amellyel ezek a tételek egyszerűen bizonyíthatók.”

A dolgozat 2. és 3. fejezetében szereplő (az 1. és a 2. téziscsoportához kapcsolódó) állítások bizonyításainak nincs egységes kerete, sémája. A szerteágazó eredmények egy részének bizonyítása triviális (pl. az, hogy a topológia-megőrzés pont-alapú feltételeinek teljesüléséből következik a konfiguráció alapúak teljesülése), míg pl. a 2.4.1. tétel igazolása (amely szerint a konfiguráció-alapú elégséges feltételeket kielégítő 2D redukciók csak P-egyszerű halmazokat törölhetnek) kombinatorikus megközelítéssel történt (képfajtanként 2-2 oldal terjedelemben). Annak megmutatása pedig, hogy egy törlési szabály ekvivalens 3D szekvenciális és párhuzamos vékonyító algoritmus-párhoz vezet, a vonatkozó 15-oldalas folyóiratcikkben<sup>6</sup> hat oldalt foglal el.

A 2.4. pontban ismertetett, a topológia-megőrzés elegendő feltételeinek kapcsolatát feltáró tételek bizonyítása azon alapult, hogy Kardos Péter kollégámmal sikerült a három szabályos 2D mozaik (vagyis a háromszög-, a négyzet- és a hatszög-mozaik) ötféle képein az egyszerű pontokat és a P-egyszerű pontokat néhány illesztőmintával jellemezni<sup>7</sup>. Ezeknek az értékes eredményeknek a beemelése sajnos már végképp szétfeszítette volna a doktori mű méretkorlátját, így – a bizonyítások bemásolása nélkül is – csupán az eredményeim egy részét tudtam bemutatni és tézispontokba foglalni.

A Bíráló alábbi észrevételei és kérdései is még a dolgozat 2. fejezetére vonatkoznak:

„Ebből a fejezetből az ekvivalens párhuzamos és szekvenciális operátorok felvetését és tárgyalását emelném ki. Ez a fejezet azt vizsgálja, hogy két redukció mikor eredményez nem csupán topológiai, hanem teljesen ugyanolyan eredményt. Az eredmények

<sup>5</sup> G. Malandain, G. Bertrand: Fast characterization of 3D simple points, In: IEEE Int. Conf. Pattern Recognition, pp. 232-235, 1992.

<sup>6</sup> K. Palágyi, G. Németh: A pair of equivalent sequential and fully parallel 3D surface thinning algorithms, Discrete Applied Mathematics 216, pp. 348-361, 2017.

<sup>7</sup> A bizonyításokat lerövidítő és áttekinthetővé tévő alap-illesztőmintákat az alábbi négy műben közzétük:

- P. Kardos, K. Palágyi: On topology preservation in triangular, square, and hexagonal grids, In: Proc. 8th Int. Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, IEEE/EURASIP, ISPA 2013, pp. 782-787, 2013.
- P. Kardos, K. Palágyi: Topology preservation on the triangular grid, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 75, pp. 53-68, 2015.
- P. Kardos, K. Palágyi: Unified characterization of P-simple points in triangular, square, and hexagonal grids, In Proc. 5th Int. Symposium on Computational Modeling of Objects Presented in Images: Fundamentals, Methods, and Applications, CompIMAGE'16, LNCS 10149, Springer, pp. 79-88, 2016.
- P. Kardos, K. Palágyi: On topology preservation of mixed operators in triangular, square, and hexagonal grids, Discrete Applied Mathematics 216, pp. 441-448, 2017.

tetszőleges típusú és dimenziójú képen érvényesnek látszanak, de a példák kizárólag a legegyszerűbb négyzetrácsos esetet szemléltetik. A különféle elégséges feltételek közötti kapcsolatokat a 2.4.5. fejezet mutatja be, ami felveti azt a kérdést, hogy van-e mód az egyszerűsítések rendszerének újragondolására és egy egyszerűbb keretbe helyezésére. Másrészt, mondható-e a szükséges feltételekről több, mint hogy a pontnak egyszerűnek kell lennie?”

Nagy örömmre szolgál az, hogy a Bíráló az elégséges feltételek közül kiemelte az ekvivalens szekvenciális és párhuzamos topológia-megőrző algoritmus-párokhoz vezető eredményeket. Azok előzmények nélküliek és teljességgel hozzám köthetők. Univerzálisak abban az értelemben, hogy tetszőleges dimenzióra, rácsra és összefüggőségi relációpárookra, továbbá nem csupán redukciókra, hanem addíciókra (a fekete pontokat meghagyó, de bizonyos fehér pontokat fehérre változtató) és általános képműveletekre is érvényesek. Az új elégséges feltétel az összes többi megközelítéstől eltérően nem a törölt ponthalmazokat és nem is az egyedi törölt pontokat vizsgálja, hanem magára a törlési szabályokra vonatkozik. Számomra talán azért is különösen értékesek a 2.3. pontban bemutatott eredmények, mivel a sejtéseimet másfél évnyi izgalmas munkával sikerült átformálni tételekké. A 2.3. pontban a három szemléltető ábra mindegyike valóban csak a 2D négyzetmozaikon mutat ellenpéldákat, de a 3.3. pontban szereplő törlési szabály (amellyel négy ekvivalens szekvenciális és párhuzamos algoritmus-pár dolgozik) egy 3D példával is szolgál. Sajnos a további 2D és 3D ekvivalens algoritmuspárok<sup>8</sup> törlési szabályainak bemutatása már szétfeszítette volna a disszertáció keretét.

A 2. fejezet ötféle elégséges feltételt ismertet a topológia-megőrző párhuzamos redukciókra, egyszerűsítésekre. (Közülük kettőt én vezettem be, továbbá feltártam egymással a kapcsolatukat.) Mindegyik feltétel atomja az egyszerű pont fogalmán alapul (vagyis azokon a pontokon, amelyeknek az egyedi törlése topológia-megőrző redukció). További kiindulási pont az, hogy egy párhuzamos redukció akkor és csakis akkor topológia-megőrző, ha minden lehetséges képről kizárólag olyan ponthalmazt töröl, amely sorozatba rendezhető úgy, hogy a sorozat első eleme egyszerű pont a kiindulási képen, valamint a sorozat minden további eleme egyszerű pont a sorozatban őt megelőzők törlésével kapott képen<sup>9</sup>. A párhuzamos redukciók topológia-megőrzését tehát az egyszerű pontok szekvenciális törlésére vezetjük vissza.

Ma még nem tudok elképzelni az általános-egyszerű (*general-simple*) átírási szabályokon alapuló elégséges feltételemnél (ld. 2.3.3. tétel) egyszerűbbet, mivel az közvetlenül képez hidat a szekvenciális és a párhuzamos redukciók között, ráadásul csak az egyszerű pontok jellemzésére van szüksége. (Amennyiben a kérdéses mozaik/rács adott topológiájú képein

---

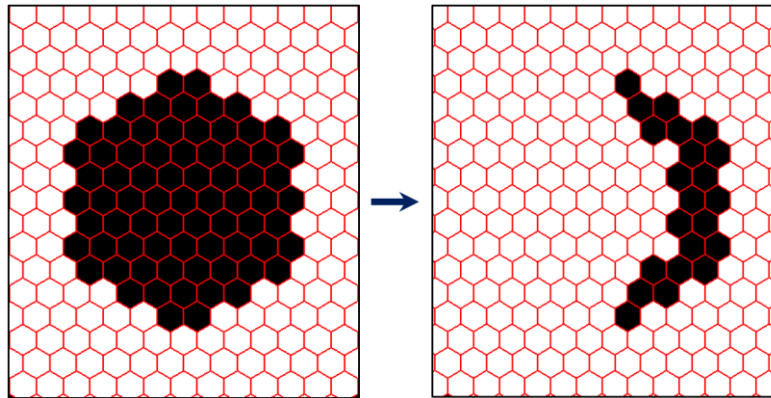
<sup>8</sup> A 3.3. pontban bemutatott négy ekvivalens szekvenciális és párhuzamos 3D algoritmuspár mögött álló közlemény nyerte el az IWCIÁ 2015 konferencián (Kolkata, India) a “Best Paper Award”-ot. További 2D és 3D algoritmuspárokat az alábbi három műben publikáltunk:

- K. Palágyi: Equivalent 2D sequential and parallel thinning algorithms, In: Proc. 16th Int. Workshop on Combinatorial Image Analysis, IWCIÁ 2014, LNCS 8466, Springer, pp. 91-100, 2014.
- K. Palágyi, G. Németh, P. Kardos: Topology-preserving equivalent parallel and sequential 4-subiteration 2D thinning algorithms, In: Proc. 9th Int. Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, IEEE/EURASIP, ISPA 2015, pp. 306-311, 2015.
- K. Palágyi, G. Németh: A pair of equivalent sequential and fully parallel 3D surface thinning algorithms, Discrete Applied Mathematics 216, pp. 348-361, 2017.

<sup>9</sup> T.Y. Kong: On topology preservation in 2-d and 3-d thinning, Int. J. Pattern Recognition and Artificial Intelligence 9, pp. 813-844, 1995.

létezik eredmény az egyszerű pontok jellemzése, úgy azokon a képeken máris rendelkezésre áll egy újabb elégséges feltétel a topológia-megőrző redukciókra.)

Mind az öt eddigi feltétel csak elégséges, de nem szükséges. A szükségességnél nem feltétel a törölhető pontok egyszerű volta. Tekintsük az alábbi ábrát, amelyen a telihold újhóddá alakult. (Az ábra hatszögmozaikos képein is – a digitális topológia konvenciója szerint – a fekete pontok tartoznak a fényes objektumokhoz.)



A kérdéses redukció belső (*interior*) pontokat is töröl (vagyis olyan fekete hatszögek is fehérre változnak, amelyeknek minden éle fekete hatszöggel közös). A belső pontok nem egyszerűek, mivel egy belső pont törlésével egy izolált üreg keletkezik. Dacára annak, hogy a kérdéses redukció nem-egyszerű pontokat is töröl, mégis megőrzi a topológiát, mivel az égitest nem szakadt több részre, nem tűnt el teljesen, továbbá üreg sem keletkezett benne<sup>10</sup>.

Lehet tehát topológia-megőrző egy párhuzamos redukció akkor is, ha töröl nem-egyszerű pontot, ugyanakkor egy egyszerű pontokból álló halmaz törlése sem elégséges önmagában a topológia-megőrzéséhez. Pl. a négyzetmozaikon egy 2x2-es négyzet alakú objektumnak mind a négy pontja egyszerű, de azoknak az egyszerű pontoknak a törlésével nyom nélkül eltűnik egy objektum. A topológia-megőrző redukciók pedig nem törölhetik teljesen a bemeneti kép egyetlen objektumát sem.

A Bírálónak a 3. fejezetre, a 2. téziscsoportra vonatkozó első kérdése:

„A lookup táblás megoldás generikus és elegáns, kérdésem, hogy más típusú rácsoknál nem vezet-e ez túlságosan nagy memóriaigényhez.”

A vékonyító algoritmusok keresőtáblái a törlési szabályok mint  $n$ -változós Boole-függvények teljes ( $2^n$ -elemű) igazságtábláit tárolják, ahol  $n$  a szabály lokális környezetébe eső képpontok számát jelöli. Egy  $n$ -pontos környezetre tehát a keresőtábla mérete (bittömör tárolás mellett)  $2^{n-3}$  byte. A kockarácson egy pont egyszerűsége (mint lokális tulajdonság) a pont 26-szomszédságától (a 3x3x3-as környezetétől) függ, így ebben az esetben az egyszerűséget eldöntő keresőtábla mérete 8 MB. A nem-konvencionális 3D lapcentrált kockarácson (FCC) az egyszerűség a 18 pontból álló 18-szomszédság ismeretében dönthető el, így a keresőtábla

<sup>10</sup> Más szavakkal: egy 2D redukció akkor és csakis akkor topológia-megőrző, ha az input kép minden egyes objektuma az output kép pontosan egy objektumát tartalmazza, valamint az eredménykép minden egyes fehér komponense a bemeneti kép pontosan egy fehér komponensét tartalmazza.

tárigénye mindössze 32 KB. A tércentrált kockarácson (BCC) az egyszerűség a (14 pontból álló) 14-szomszédságtól függ, vagyis a keresőtábla tárigénye csak 2 KB.

Megjegyzendő, hogy ahogy a keresőtáblák mérete a vizsgált környezetbe eső pontok számának csökkenésével rohamosan zsugorodik, úgy az elemszám növelésével a tárigény exponenciálisan nő. A hagyományos 3D kockarács párhuzamos vékonyító algoritmusai közül a teljesen párhuzamosak törlési szabályai a minimális 3x3x3-as környezetnél nagyobb vizsgálnak, így pl. a Manzanera és munkatársai által javasolt eljárás<sup>11</sup> 84-pontos környezettől függő szabályához a keresőtábla tárigénye  $2^{84}$  bit =  $2^{75}$  MB lenne, vagyis annak az algoritmusnak a hatékony megvalósítása nem lehetséges a keresőtáblás módszer mechanikus alkalmazásával.

A gigantikus keresőtáblák használatának elkerülésére jó példa egy teljesen párhuzamos vékonyító algoritmusom<sup>12</sup> megvalósítása, amelynek bemutatását (és a topológia-megőrző mivoltának 6-oldalas bizonyítását) is ki kellett hagynom a dolgozatból. A kérdéses algoritmus törlési szabálya 32 pontot vizsgál, így a keresőtáblája 512 MB-os lenne. Sikerült viszont a törölhetőség eldöntését megoldanom úgy, hogy legfeljebb három tesztelési menetet kell végrehajtani egyetlen 4 MB-os keresőtábla alkalmazásával.

A 3. fejezetben ismertetett 3D vékonyító algoritmusok teljesítményére vonatkozó kérdés:

„A keretet felhasználva a Jelölt számos egyedi algoritmust mutat be. A valódi teljesítményről röviden esik szó. Hogyan lehetne rangsorolni ezeket a módszereket futási idő szempontjából, valamint hogyan teljesítenének valódi masszívan párhuzamos környezetben (pl. GPU)?”

Mivel a vékonyító algoritmusok futási ideje tesztképenként változik, Richard Hall a párhuzamos vékonyító algoritmusok sebességét (egy adott tesztképre) a szükséges párhuzamos redukciók számával jellemezte<sup>13</sup>. A teljesen párhuzamos, az aliterációs és az almezős algoritmusok közül a teljesen párhuzamosak igénylik a legkevesebb számú redukciót, ugyanakkor azok törlési szabályai a másik két megközelítés szabályainál nagyobb lokális környezetet vizsgálnak. Ráadásul az összes határpontot ellenőrzik (nem csupán az adott aliteráció törlési irányának megfelelőkre, vagy csak az aktív almezőben lévőkre értékelik ki az egyszerűbb törlési szabályaikat). Ennélfogva Hall mérőszáma értékes információval szolgál, de nem tekinthető perdöntőnek a leggyorsabb algoritmus kiválasztásakor.

Az általam javasolt (a dolgozat 3.1. pontjában ismertetett) implementációs séma szerint nincs szükség a kép átpásztázására minden egyes redukció során, így a futási időt nem a kép mérete, hanem az adott vékonyító fázisban kiértékelendő határpontok száma határozza meg. Egy határpont törölhetőségének eldöntése keresőtáblás megközelítéssel is függ a vizsgált környezet méretétől, mivel nagyobb környezet esetén a választ tartalmazó táblarekesz címének meghatározásához több képpont értékét kell a cím-változó adott pozíciójú bitjén elhelyezni.

<sup>11</sup> A. Manzanera, T.M. Bernard, F. Preteux, B. Longuet: n-dimensional skeletonization: A unified mathematical framework. J. Electronic Imaging 11, pp. 25-37, 2002.

<sup>12</sup> K. Palágyi: A 3D fully parallel surface-thinning algorithm, Theoretical Computer Science 406, 119-135, 2008.

<sup>13</sup> R.W. Hall: Parallel connectivity-preserving thinning algorithms, In: T.Y. Kong, A. Rosenfeld (Eds.), Topological Algorithms for Digital Image Processing, Elsevier Science B. V., pp. 145-179, 1996.

A vizsgált környezet mérete alapján a szekvenciális, valamint az aliterációs és almezős párhuzamos algoritmusok tehát kedvezőbb pozícióból indulnak, mint a teljesen párhuzamosak. Megjegyzem, hogy a topológia-megőrzés pont-alapú elegendő feltételeiből származtatott algoritmusok közül az aszimmetrikus törlési szabályúak gyorsabbak a szimmetrikus szabályúaknál, mivel az előbbieknél szűkebbek a vizsgált környezetek (ld. a dolgozat 31. oldalán a 2.7-2.9 ábrákat).

A vékonyító algoritmusaimat CPU-n is gyorsnak tartom. Egy (Németh Gáborral közös) cikkünk<sup>14</sup> három 3D algoritmusunkra közöl futási időket 512x512x500-as (CT-vizsgálatokból szegmentált) légútfákra. Mindhárom algoritmus 0.3 másodpercen belül határozza meg a középvonalakat egy szokványos PC-n. Összehasonlításként megemlíthetek egy 2016-ban közölt (minimális költségű utakat kereső) eljárást<sup>15</sup>, amely PC-n 82 másodperc alatt nyeri ki a tüdőjáratok középvonalát.

A párhuzamos vékonyító algoritmusok hatékonyan gyorsíthatók GPU-n. A doktori fokozatom megszerzése előtt (Kuba Attilával közösen) publikált 6-aliterációs<sup>16</sup> és 12-aliterációs<sup>17</sup> 3D párhuzamos algoritmusokat Wagner<sup>18</sup>, valamint Jiménez és Miras<sup>19</sup>, implementálta GPU-ra. Wagner úgy találta, hogy a 6-aliterációs eljárás futási ideje 512x512x512-es képekre ~20 mikroszekundum GPU-n, valamint a gyorsítás 32-46-szoros a CPU-hoz képest. Jiménez és Miras a 12-aliterációs algoritmussal átlagosan 106-szoros gyorsítást ért el.

A vékonyító algoritmusok tehát jól teljesítenek GPU-n. Mivel még nem szereztem gyakorlatot a GPU-programozásban, így csupán azt tudom leírni, hogy a GPU képességei akkor használhatók ki igazán, ha sikerül az adatok elérését jól megszervezni. Amennyiben a vázkijelölést is igénylő komplex műveletsorban a többi komponens (pl. a vékonyítást megelőző előfeldolgozás és szegmentálás, valamint a kinyert vázszerű jellemző további feldolgozása) a CPU-n fut, úgy a CPU-hoz és a GPU-hoz társított memóriaterületek közötti adatmozgatás elemésztheti a GPU-n történő vázkijelölés nyereséget.

A Bírálónak a 3. fejezetre vonatkozó utolsó kérdése:

„Külön fejezet szól a maximális vékonyító algoritmusokról, amelyek a topológia megőrzéshez szükséges nem-egyszerű pontokon kívül csak görbe végpontokat tartalmazhatnak. Véleményem szerint ennek nagyobb gyakorlati jelentősége van, mint a felületre vékonyításnak, illetve érdekelne, hogy a Jelölt a felületre vékonyítást milyen alkalmazásokban javasolja.”

---

<sup>14</sup> K. Palágyi, G. Németh: Centerline extraction from 3D airway trees using anchored shrinking, In: Proc. 14th Int. Symposium on Visual Computing, ISVC 2019, LNCS 11845, Springer, pp. 419-430, 2019.

<sup>15</sup> D. Jin, K.S.Iyer, C. Chen, E.A. Hoffman, P.K. Saha: A robust and efficient curveskeletonization algorithm for tree-like objects using minimum cost paths, Pattern Recognition Letters 76, 32–40, 2016.

<sup>16</sup> K. Palágyi, A. Kuba: A 3D 6-subiteration thinning algorithm for extracting medial lines, Pattern Recognition Letters 19, pp. 613-627, 1998.

<sup>17</sup> K. Palágyi, A. Kuba: A parallel 3D 12-subiteration thinning algorithm, Graphical Models and Image Processing 61, pp. 199-221, 1999.

<sup>18</sup> M.G. Wagner: Real-time thinning algorithms for 2D and 3D images using GPU processors, Journal of Real-Time Image Processing volume 17, pp. 1255-1266, 2020.

<sup>19</sup> J. Jiménez, J.R.D. Miras: Three-dimensional thinning algorithms on graphics processing units and multicore CPUs. Concurrency and Computation: Practice and Experience 24, pp. 1551-1571, 2011.

Egyetértek a Bírálóval, a 3D vázszerű jellemzők közül nagyobb a gyakorlati jelentősége a középvonalnak, mint a középfelületnek. Egybecsengenek ezzel a dolgozat 1.3.3. pontjában leírtak, mivel az ott áttekintett 3D alkalmazások zöme középvonalakat igényel. Nem kívánom a középfelület (mint alakleíró jellemző) szerepét sem kisebbiteni, sőt megjegyzem, hogy a változatos méretet és formát öltő objektumok (pl. a testalkattól és kórelőzményektől függő máj) leírására és modell-alapú szegmentálására kiváló eszköz a Pizer és munkatársai által javasolt *deformable m-reps*<sup>20</sup>, ami az általános (nem-csőszerű) objektumok középfelületéből származtatott.

A három általános vázkijelölő módszer közül a távolság-transzformáció és a Voronoi diagramokon alapuló technikák 3D-ben alapértelmezés szerint középfelületet szolgáltatnak, a középvonalat és a topológiai magot csak körülményesen tudják produkálni. A harmadik módszert, a vékonyítást pedig éppen a középfelület kinyerésére tartom kevésbé megfelelőnek, mivel a felületre vékonyító algoritmusok a megőrzendő felületpontokról lokális jellemzés alapján döntenek (pl. a kockarácson a 3x3x3-as környezet alapján). A vonalvégpontok viszont jól jellemezhetők lokálisan, a topológiai mag meghatározásakor pedig egyáltalán nincs szükség geometriai kényszerfeltételekre (csupán a topológia megőrzését kell garantálni), így a 3D középvonal és a topológiai mag gyors meghatározására a vékonyítás jó megközelítés. A középfelület vékonyítással történő kinyerését csak olyan alkalmazások műveletsoraiba érdemes beilleszteni, ahol egyrészt megfelelő a vékonyítással produkált középfelület minősége, másrészt pedig szükség van a leggyorsabb vázkijelölő technikára.

A Bíráló első kérdése a 3. téziscsoporthoz:

„Kérdésem, a topológián túl a geometriai tulajdonságok mennyire lényegesek a felhasználás szempontjából, és lehetne-e ettől a ponttól folytonos görbereprezentációkat alkalmazni, pl. spline-t?”

A tüdő légjáratainak kvantitatív elemzésével a University of Iowa vendégkutatójaként foglalkoztam. A projektben a feladatom CT-vizsgálatokból szegmentált formális fák, váz-gráfok létrehozása volt, amelyekben minden egyes ághoz hozzárendeltem négy kvantitatív indexet (a térfogatot, a felületet, a hosszt és az átlagos átmérőt). Abban a kutatásban nem volt szempont az egyes ágak folytonos görbékkel való reprezentációja, de inspiráló a probléma felvetése. Biztos vagyok abban, hogy a vonalpontokból álló szegmensekre illesztett folytonos görbék segítségével pontosabban lehet meghatározni a középvonalra merőleges 2D képszeleteket, amelyek fontosak a pl. a légjáratok újra-szegmentálásánál, vagy a légjáratok falvastagságának mérésekor. (Ez utóbbi kulcsszerepet játszik az asztma kutatásában.) Az ugyanazon elágazáshoz csatlakozó ágak közötti térszögek és az ág-görbületek (mint további, az Iowa-i projektben mellőzött morfológiai jellemzők) megbízható kiszámítására is minden bizonnyal alkalmasabbak a folytonos görbereprezentációk.

A Bírálónak a 3. téziscsoportra vonatkozó második kérdése:

---

<sup>20</sup> S.M. Pizer, et al.: Deformable m-reps for 3D medical image segmentation. International Journal of Computer Vision 55, pp. 85-106, 2003.

„A további műveletek geometriai számításokkal, trifurkációk kezelésével és gráf csúcs párosítással foglalkoznak. Ez utóbbiban mennyire támaszkodhatunk a gráfelmélet óriási algoritmusgyűjteményére?”

A projektben a szegmentálás, a formális fa XML struktúrájának megtervezése, valamint a fák illesztése (az elágazások párosítása) Juerg Tschirren munkáját dicsérik, aki a projekt eredményeit termékké alakító cég, a *Vida Dignostics* fejlesztési igazgatója lett. (Az ő hozzájárulásait – természetesen – nem soroltam be a téziseim közé.)

A Tschirren által kidolgozott illesztési módszer kizárólag a légútfák elágazási pontjainak párosítására alkalmas, mivel kihasználta a légútfa specialitásait (pl. ismert a fa gyökérpontja és az adott mélységű csúcsokból kiinduló ágak száma). A nevezetes gráfalgoritmusok közül a szélességi keresésre és a maximális klikkeket meghatározóra támaszkodott.

A légútfák illesztésére és az elágazásaik anatómiai címkézésére szolgáló módszer jól-pozícionált elágazási pontokat igényel, de – a biztonság kedvéért – nem tételezte fel azt, hogy a (dolgozat 3.4.2. pontjában ismertetett) vékonyító algoritmusom minden esetben egy tökéletesen letisztult középvonalat ad. Tschirren eljárása felkészült arra is, hogy a középvonal nemkívánatos ágakkal terhelt, vagyis előfordulhatnak a modellen hamis elágazások, sőt azzal is számolt, hogy már a szegmentált fákról hiányoznak ágak vagy részfák.

Dacára annak, hogy az illesztés és az anatómiai címkézés megoldásában nem az én hozzájárulásom volt a meghatározó, nagy öröömre szolgál az, hogy az elágazások voxel-alatti pontosságú meghatározásával biztos alapot nyújthattam azoknak a problémáknak a megoldásához is.

Végezetül újra megköszönöm a Bírálónak a fáradozását, mindegyik kérdését és észrevételét.

Szeged, 2021.06.15.

Palágyi Kálmán