



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék
High-speed Networks Laboratory (*HSNLab*)
MTA–BME Információs Rendszerek Kutatócsoport

Hálózati problémák interdiszciplináris megközelítésben

MTA doktori disszertáció tézisei

Rétvári Gábor, Ph.D.

Budapest
2020

Kivonat

Az Internet, és a ráépülő alkalmazások, szolgáltatások, üzleti modellek, publikus felhők, és kritikus kommunikációs eszközök széles körű elterjedésével a kapcsolódó elméleti és technológiai kihívások komplexitása jelentős mértékben megnőtt. Ahhoz, hogy ezeket a sokrétű kihívásokat eredményesen tudjuk kezelni, egészen újfajta, az egyes hagyományos kutatási diszciplínákon átívelő metodológiát kell alkalmazni. Ebben a munkában 4 ilyen interdiszciplináris kutatást mutatunk be, melyek a hálózattudomány, a kommunikáció és a tágabb értelemben vett mérnöki tudományok hagyományosan egymástól elkülönülő tématerületeinek modelljeit és technikáit ötvözik új megközelítésekkel, megoldást kínálva pár régóta feltáratlan problémára.

Az elsőként bemutatásra kerülő kutatás a *hálózati erőforrások fair allokációjának* kérdését vizsgálja új, geometriai megközelítésben. Ebben a modellben a hálózat kapacitását meg nem haladó erőforrás-allokációk halmazát egy geometriai objektum segítségével írjuk le, majd ezen objektum tulajdonságainak vizsgálatával geometriai jellemzését adjuk a lehetséges fair allokációknak. A geometriai megközelítés segítségével új, könnyen vizualizálható formában tudjuk reprezentálni a hálózat szűk átviteli keresztmetszeteit, ami nagy segítség lehet az operátorok számára a hálózati kapacitások tervezésének fázisában.

A második interdiszciplináris megközelítés az *adaptív útvonalválasztás* elméleti kérdéseibe nyújt betekintést egy új, szabályozáselméleti modell segítségével. A bemutatott optimális szabályozó a felhasználók által felajánlott forgalom függvényében online vezérli az egyes továbbítási útvonalakra küldött adatfolyamok mennyiségét, oly módon, hogy a létrejövő forgalomelvezetés nem haladja meg a hálózatban rendelkezésre álló kapacitást a felajánlott forgalomtól függetlenül. A bemutatott szabályozó továbbá elsőként biztosít káros oszcillációktól mentes stabil működést és optimális útválasztást bármilyen, az operátor által meghatározott célfüggvény értelmében.

A hátralevő két kutatás a skálázható útvonalválasztás igencsak aktuális kérdéseit járja körül interdiszciplináris megközelítésben. Először kiterjesztjük a forgalomtovábbítás elvi skálázódását vizsgáló *kompakt útválasztás* elméletét több, az Interneten jelenleg is elterjedten használt, az alapértelmezett legrövidebb utak választására alapuló modellnél gazdagabb szabályrendszer esetére. A megközelítésünk eredetiségét az adja, hogy az útválasztási szabályrendszereket absztrakt algebrai úton írjuk le, és a skálázhatósági karakterizációkat az absztrakt algebrai leírás felett, általános érvényűen adjuk meg. Végül ennek a megközelítésnek a gyakorlati alkalmazhatóságát vizsgáljuk: az utolsó bemutatásra kerülő kutatásban adott *forgalomtovábbítási táblák tömöríthetőségét* vizsgáljuk újszerű információelméleti módszerekkel, és először adunk olyan tömörítő eljárásokat, melyek valós, akár több százezer bejegyzést tartalmazó Internet forgalomtovábbítási táblákat képesek alig száz kilobyte méretre tömöríteni úgy, hogy továbbra is biztosítják a táblák gyors kereshetőségét.

1. Bevezető

Az Internet mára több tízezer kormányzati, akadémiai, katonai, és vállalati operátor autonóm hálózatait összekötő globális világhálózattá vált, melyhez tízmilliárdnyi eszközön keresztül több milliárd felhasználó csatlakozik, évente több trillió USD üzleti forgalmat lebonyolítva [1]. A globális Internet drámai növekedésével a kapcsolatos elméleti, technológiai, szociális és gazdasági kihívások mérete és komplexitása mára oly mértékben növekedett, hogy az már meghaladja az egyes „klasszikus” specializált mérnöki diszciplínák határait. Emiatt új, *interdiszciplináris* megközelítésekre van szükség, amelyek képesek több, hagyományosan egymástól elkülönülő, önálló diszciplína modelljeinek, metodológiájának és technológiájának egyesítésével olyan mérnöki keretrendszereket kidolgozni, melyek hatékonyan vethetők be még a mai, rendkívül komplex problémák és kihívások megoldására is.

Az alábbi Disszertációban ismertetett, a kommunikációs hálózatok bővebb területéről válogatott kutatási eredmények közös jellemzője hogy ilyen, alapvetően interdiszciplináris megközelítésben születtek. A cél annak bemutatása volt, hogy amennyiben valamely régóta megoldásra váró problémára már a modellalkotás fázisától kezdve konzekvensen egy új, a probléma megoldására hagyományosan választott diszciplínától eltérő megközelítés metodológiáját alkalmazzuk, akkor az új diszciplína teljes eszköztára (modellek, elméleti eredmények, algoritmusok, szoftver könyvtárak) megnyílik a probléma megoldására. Az interdiszciplináris megközelítés gyakran váratlan új bepillantást ad a probléma természetébe és az egyes eltérő diszciplínák metodológiájának szintéziséből egészen új metodológiák, megoldások, és eszköztárak nyerhetők. A Disszertáció négy ilyen tipikus kommunikációs hálózatokkal kapcsolatos problémát és az azok megoldására használt interdiszciplináris megközelítést mutat be.

2. Kutatási előzmények és célkitűzések

Hálózati erőforrások max-min fair allokációja. A Disszertáció 2. fejezetében bemutatásra kerülő kutatás a *hálózati erőforrások fair allokációjának* témáját járja körül. A gyakorlatban gyakran szembesülünk olyan jellegű problémával, hogy valamely erőforrásból csak limitált mennyiség áll rendelkezésre és ezeket valamilyen „fair” módon kell kiosztanunk az igénylők között. A közgazdaság területén például a kompetitív piacok és a piaci allokáció elmélete olyan egyensúlyi állapotokat vizsgál, amikor a szükségletek kielégítésére alkalmas erőforrások a felhasználási lehetőségekhez képest korlátozott mennyiségben állnak a társadalom rendelkezésére, és a cél a társadalmi jólét maximalizálását célzó erőforrás-allokáció kiválasztása. A játékelméleti megközelítésben több, mohó játékos célja a saját allokációjának egyoldalú növelése és játékosok egyéni stratégiáinak egyensúlyi helyzetét például a Nash-egyensúly fogalma írja le. A több felhasználót kiszolgáló felhőhálózatokban az adatközpont számítási, tárolási, és hálózati kapacitásait kell az egyes felhasználók közt igazságosan allokálni, míg a kommunikációs hálózatokban a szűkös erőforrás a hálózat összes átviteli kapacitása és az operátor célja ezen átviteli erőforrások a felhasználók közti kiosztása valamilyen „igazságossági” kritériumok szerint.

Az általunk vizsgált feladatban az egyes felhasználók szeretnének egy kommunikációs hálózat két adott végpontja közt minél több forgalmat elvezetni, ugyanakkor a hálózat átviteli összeköttetéseinek sávszélessége véges, és a cél az átviteli utak és

adási sebességek fair meghatározása. Egy ilyen „fair” allokációt például axiomatikusán [2–6] a következő 4 kritériummal jellemezhetünk [7, D. függelék]: (1) a felhasználókat az erőforrások megosztására készteti (*sharing incentive*), (2) kizárja az igények eltúlzásából eredő csalást (*strategy-proof*), (3) „irigységmentes” (*envy-free*), és (4) Pareto-i értelemben pazarlásmentes (*Pareto-efficient*). A hálózati erőforrás-allokáció problémakörében ezek a szabályok az úgynevezett *max-min fair* egyensúlyi állapotot definiálják [8], mely egyszerűen az alábbi módon lenne definiálható: „a max-min fair allokáció olyan, hogy nincs mód arra, hogy bármelyik felhasználó adási sebességét megnöveljük anélkül, hogy valamelyik másik olyan felhasználó adási sebességét csökkentsük, amely számára már eleve kisebb, vagy legfeljebb egyenlő, adási sebességet allokkáltunk”. A max-min fair kritériumok elterjedten használtak a torlódásvezérlés [9–14], ütemezés [15, 16], illetve a hálózati [17, 18], számítási [19–21], tárolási [7, 22], memória [23], vagy egyéb hálózati erőforrások [11, 13, 15, 16, 18, 24, 25] allokációjának területén, lásd még [2, 7, 26–28].

A hálózati erőforrások max-min fair allokációjának vizsgálata tipikusan a *hálózati folyamatok* elméletének felhasználásával történik. Ennek a megközelítésnek azonban az az ára, hogy az allokációk meghatározásakor az egyes felhasználók számára átviteli útvonalakat rögzíteni kell, és az *átviteli sebességek meghatározása után a kapott allokáció csak az egyes, az adott fix útvonalakon lehetséges megengedett allokációk halmazára nézve lesz max-min fair*. Ez azonban könnyen igazságtalan allokációt eredményezhet, hiszen a felhasználók jogosan érvelhetnek amellett, hogy a számukra allokkált átviteli sebességnél jobb allokáció is lehetséges lenne, ha a fix útvonalakat az operátor megváltoztatná. Sajnos azonban a hagyományos folyamelméleti megközelítésben az ilyen, útvonalfüggetlen max-min fair allokációk tárgyalása mind elméleti, mind gyakorlati úton nehézkes, hiszen a kapott *általánosított max-min fair erőforrás-allokáció* problémájában egyszerre kellene változtatni a felhasználók átviteli útjait és az átviteli sebességét. Erre a nehézségre már korábban is felfigyeltek (lásd: [29, Section „When bottleneck and water-filling become less obvious”]), de a probléma azóta is nyitott.

A 4.1 fejezetben röviden ismertetett tézisek témája az *általánosított max-min fair erőforrás-allokáció problémájának interdiszciplináris megközelítése*. A bemutatott módszer a folyamelmélet megközelítése helyett egy alapvetően *geometriai* módszertant követ, melynek során a megengedett, útvonalfüggetlen erőforrás-allokációk halmazát egy geometriai objektum, az ún. *átviteli politóp* segítségével írjuk le, majd ezen objektum tulajdonságainak vizsgálatával geometriai jellemzését adjuk a „fair” allokációknak a fair allokációk többfajta definíciójára (Pareto-optimalitás, dominálatlanság, max-min fair). A geometriai megközelítés segítségével egyszerű és könnyen vizualizálható formában tudjuk reprezentálni a hálózat szűk átviteli keresztmetszeit és megmutatjuk, hogy az erőforrás-allokáció feladat ebben a megközelítésben megegyezik a szűk keresztmetszetek erőforrásainak megfelelő allokációival (*bottleneck argumentation*). Végül visszatérünk a hagyományos folyamelméleti modellre, és bebizonyítjuk, hogy a geometriai értelemben vett szűk keresztmetszetek könnyen megfeleltethetők a hálózat gráfjának egyes kritikus vágásaival.

Adaptív útvonalválasztás. A Disszertáció 3. fejezetében az kommunikációs hálózatok erőforrásainak optimalizációját egy másik vetületben vizsgáljuk. Míg az erőforrás-allokációs feladatban az operátor osztja ki a hálózat erőforrásait a felhasználók között, addig az itt tárgyalt *adaptív útvonalválasztás* modelljében az operátor

feladata a felhasználók által felajánlott, minden pillanatban változó átviteli igények elvezetése a hálózatban, annak szűkös erőforrásait figyelembe véve. Ez praktikus azt jelenti, hogy a felhasználók számára allokált egy vagy több átviteli utat, illetve az egyes utakra irányított forgalom mennyiségét olyan módon kell meghatározni, hogy a hálózat egyetlen összeköttetésén se alakuljon ki torlódás.

Természetesen az adaptív útvonalválasztás alapja a felhasználók pillanatnyi forgalmi igényeinek dinamikája. Amennyiben az átviteli igényeket leíró forgalmi mátrix többé-kevésbé változatlan egy adott időtávban, úgy a statikus útvonalválasztás megfelelő választ nyújt [30,31]. Amennyiben azonban az igények dinamikusan változnak, úgy két lehetőség van: vagy tervezünk egy statikus útvonalkiosztást, amely minden forgalmi mátrixra „egészen jó” megoldást jelent (lásd, *oblivious routing* [32–38]) vagy pedig olyan *adaptív útválasztó algoritmust* tervezünk, amely képes az igények dinamikáját lekövetni az útvonalak kiosztásának mechanizmusában [39–42].

A 4.2. fejezetben bemutatott kutatás ilyen adaptív útvonalválasztó módszereket vizsgál interdiszciplináris, *szabályozáselméleti* megközelítésben. Míg a gyakorlatban alapvetően folyamelméleti modelleket használnak, az itt bemutatott, az optimális, modell-alapú prediktív szabályozók felhasználásán alapuló adaptív útvonalválasztó algoritmusok egészen új irányt képviselnek a kapcsolódó irodalomban. A szabályozó a gyakorlatban minden periódusban meghatározza, hogy az egyes elérhető útvonalakra a felhasználók forgalmának mekkora részét kell irányítani. Megmutatjuk, hogy létezik olyan szabályozó, amely egyszerre *megengedett*, vagyis tetszőleges felhasználói igényt képes torlódás nélkül elvezetni a hálózatban annak előzetes ismerete nélkül, feltéve hogy az adott igények egyáltalán kiszolgálhatóak valamilyen módon, szabályozáselméleti értelemben *stabil* (különösképpen pont a stabilitás hiánya volt az, ami ahhoz vezetett, hogy a korai ARPANETben használt adaptív útvonalválasztást egy statikus módszerre cserélték [43–45]), és *optimális* tetszőleges lineáris vagy kvadratikus célfüggvény szerint [46]. Tudomásunk szerint ez az első olyan adaptív algoritmus, mely egyszerre biztosítja ezt a három, a gyakorlatban nélkülözhetetlen tulajdonságot, köszönhetően az interdiszciplináris megközelítésnek.

Skálázható útvonalválasztás. Az erőforrás-allokáció és az adaptív útvonalválasztás fenti modelljei az Internet tipikusan egyetlen operátor által üzemeltetett tartományán belül értelmezettek. Az útválasztási feladatok nagy léptékű, tartományok közötti megfogalmazásában az Internetet, mint több tízezer autonóm szolgáltató által elosztottan üzemeltetett extrém nagy méretű komplex hálózatot képzeljük el. A Disszertáció 4. fejezetében az ilyen nagy léptékű hálózatok kontextusában felmerülő legfontosabb kritérium, a skálázhatóság szempontját vizsgáljuk interdiszciplináris megközelítésben.

A *skálázható útvonalválasztás* azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy a nagy méretű hálózatokban az egyes hálózati eszközöknek (a gráf pontjainak) mennyi információt kell ahhoz lokálisan eltárolnia, hogy képesek legyenek bármilyen célponthoz az „optimális” útvonalon eljuttatni egy-egy adatsomagot, illetve hogy ez az információ-mennyiség hogyan nő a hálózat növekedésének függvényében. Kulcsfontosságú itt az útvonalválasztás által leképezett útvonalak optimalitásának pontos definíciója, hiszen az, hogy a hálózat egyes pontjain mely útvonalakat tekintünk „optimálisnak”, széles skálán változhat. Míg tartományokon belül hagyományosan a legrövidebb útvonalak kiválasztása a cél, napjainkban egyre inkább előtérbe kerülnek alternatív optimalitási szabályok, úgy mint a *legszelesebb út*, vagyis a legnagyobb szabad sáv-

szélességű pont-pont út kiválasztása [51–53], a *legmegbízhatóbb út*, amelynek az élei a legkisebb valószínűséggel hibásodnak meg [54], vagy akár a *legbiztonságosabb út*, vagy ezen szabályrendszerek bármely kombinációjának kiválasztása [55]. Az Internet tartományok közti útválasztása mindig is ilyen *policy routing* protokollok felett futott, hiszen ebben a léptékben nem az útvonalak hossza a döntő, hanem az azokon való átvitel biztonsági, megbízhatósági, illetve költségvonzatai [56].

A skálázható útválasztás elméleti kutatása a *kompakt útválasztás* (compact routing) területéhez tartozik. Fontos látni azonban, hogy az elérhető, igen terjedelmes irodalom kizárólag a legrövidebb útválasztás szabályrendszerére koncentrál [57–63]. Az elméleti vizsgálódások azt mutatják, hogy nem létezik olyan útválasztási algoritmus, amely *minden* hálózatban képes lenne a legrövidebb utakat úgy lekódolni, hogy az egyes pontoknak ne kéne a hálózat méretével lineáris, vagy szuperlineáris, mennyiségű információt tárolni. Másképpen, a *legrövidebb útvonalak választásán alapuló szabályrendszer nem tömöríthető*, hiszen a lineáris tárolási méretet már a legegyszerűbb, táblázatos tárolási mód is megvalósítja [57, 61, 62]. Ugyanakkor ha hajlandók vagyunk feladni az útvonalak „optimalitásából” keveset, akkor megmutatható, hogy létezik olyan „jól skálázódó” (tömöríthető) kompakt útválasztási algoritmus, amely az egyes pontokban bizonyíthatóan lineárisnál kevesebb információval le tud tárolni a legrövidebb útvonalnál legfeljebb háromszor hosszabb útvonalakat (*stretch-3 routing*) [59, 60].

A 4.3. fejezetben azt a kérdést járjuk körül, hogy a fenti, szigorúan a legrövidebb utak kiválasztásán alapuló eredmények hogyan általánosíthatóak arra az esetre, ha a cél nem a legrövidebb, hanem éppen a legszélesebb vagy a legmegbízhatóbb útvonal kiválasztása. A legfontosabb észrevételünk, hogy a gyakorlatban használt útvonaválasztási szabályok sokfélesége nem teszi lehetővé [51–56], hogy az egyes nagyszámú szabályrendszerekre egyenként végezzük el a skálázhatósági és tömöríthetőségi analízist. Ehelyett egy általánosabb megközelítést vizsgálunk, amikor az egyes szabályok legfontosabb jellemzőit *absztrakt algebrai* modellben általánosítjuk, és a skálázhatósági analízist ezeken az algebrai modelleken végezzük el [64–69]. Az általunk bevezetett új, általános modell neve *algebrai kompakt útválasztás*. Megmutatjuk az algebrai kompakt útválasztás két saroktételét, melyek segítségével szinte az összes tartományon belüli útválasztási szabályrendszer skálázhatósága jellemezhetővé válik. További eredményünk a útvonalak megnyúlását jellemző *stretch* fogalom algebrai általánosítása: itt megmutatjuk, hogy egyes, a gyakorlatban gyakran előforduló *reguláris* algebraikra az irodalomban legrövidebb utakra definiált *stretch-3* útválasztási módszerek korrekt módon általánosíthatóak, ugyanakkor először mutatunk rá arra, hogy léteznek olyan útválasztási algebraik, például a *legrövidebb-legszélesebb út*, amelyekre semmilyen konstans megnyúlással nem létezik tömöríthető kompakt útválasztási algoritmus.

Forgalomtovábbítási táblák tömörítése. A Disszertáció 5. fejezetben utolsóként ismertetett kutatás az útvonalválasztási algoritmusok skálázhatóságának kérdését egy más megközelítésben vizsgálja: míg az előző fejezetben a pontokban tárolt állapot mennyiségének tekintetében a legrosszabb esetet (*worst-case*) kerestük, addig most a feladat egy *konkrét* forgalomtovábbítási tábla méretének tömörítéssel való csökkentése. Az eddigi eredményeink alapvetően negatívak voltak: szinte minden útválasztási szabályra van olyan „worst-case” hálózat, amelyen nem érhető el lineárisnál lassabban növekedő memóriamennyiség minden pontban. Ebben a kutatásban

viszont inkább pozitív eredményeket mutatunk: bár valóban vannak „rosszul tömöríthető” esetek, a valóságban előforduló hálózatok, például az Internet-topológia, nem ilyen jellegűek. Megmutatjuk, hogy a megfelelő, forgalomtovábbítási táblákra specializált tömörítő algoritmus bevetésével akár nagyságrendnyi méretcsökkenést is el lehet érni a gyakorlatban.

A 4.4. fejezetben alkalmazott megközelítésünk ismét alapvetően interdiszciplináris. Míg az irodalomban a forgalomtovábbítási táblák tömörítésére általában heurisztikus megközelítéseket használnak [70–89], az alábbiakban először tesztünk kísérletet arra, hogy egy új *információelméleti* modell segítségével analitikusan jellemezzük adott útválasztási tábla méretét és az elérhető legnagyobb tömörítést. A legjelentősebb eredmény egy új entrópia-jellegű mennyiség bevezetése, amellyel több modellben precízen leírható egy útválasztási tábla méretbeli komplexitása, és olyan tömörítő algoritmusok kifejlesztése, amelyek nemcsak képesek az elméleti entrópia-korlát elérésére, de, eltérően a tömörítő-algoritmusok többségétől, valós időben tesznek lehetővé komplex kereséseket közvetlenül a *tömörített* reprezentáción, annak előzetes explicit kitömörítése nélkül. Végül először teremtünk kapcsolatot a strukturálatlan címterek és a strukturált, hierarchikus címterekben elérhető entrópia fogalmak között.

3. Kutatási módszerek

Az itt bemutatott kutatási eredmények közös jellemzője a már a modellalkotás során konzekvensen alkalmazott *interdiszciplináris* megközelítés. Mind a négy esetben egy olyan modellt alkalmaztunk egy, a kommunikációs hálózatok elméletében és gyakorlatában régóta kutatott problémára, amely egy olyan területről származik, amely az irodalomban adott kontextusban nem, vagy csak elvétve tűnik fel. Az erőforrás-allokáció problémájára alkalmazott geometriai, az adaptív útválasztásra használt szabályozáselméleti, és a skálázhatósági analízisre használt algebrai és információelméleti modell megnyitotta az új diszciplína teljes elméleti és algoritmikus eszköztárát, így a legtöbb esetben egyszerű metodológiák alkalmazásával is egészen új eredményeket tudtunk elérni az eredeti probléma kontextusában. Ennek megfelelően a legtöbb alább megtalálható eredmény egyszerű technikákra épül, azonban egyes esetekben a megoldandó problémákra merőben új, az irodalomban korábban előzménnyel nem rendelkező megközelítéseket és eredményeket tett lehetővé. Ilyen új eredményt ismertet például a 1.6., 2.7., 3.1., 3.2., 3.4., és a 4.5. tézis.

4. Új tudományos eredmények

4.1. Max-min fair hálózati erőforrás-allokáció geometriai megközelítésben

Az itt ismertetett kutatás célja a hálózatelmélet egy klasszikus problémájának megválaszolása [29, Section „When bottleneck and water-filling become less obvious”]. Az *általánosított max-min fair hálózati erőforrás-allokáció* feladatában a cél a hálózat átviteli kapacitásainak kiosztása oly módon, hogy az egyes felhasználók számára biztosított átviteli kapacitás megfeleljen bizonyos „igazságossági” feltételeknek anélkül, hogy a felhasználók átviteli útvonalait előre rögzítenénk (a pontos definíciót lásd alább). Az eredmények az alábbi állításban vannak összefoglalva.

1. Tézis. *Definiáltam az általánosított max-min fair hálózati erőforrás-allokáció problémáját, amely a hagyományos megközelítéssel ellentétben nem igényli a felhasználók átviteli útvonalainak előzetes rögzítését. A problémát geometriai modellben vizsgáltam: először szoros geometriai karakterizációt adtam megengedett allokációk halmazának jellemzésére, majd több valós fairness kritériumhoz geometriai értelmezést mutattam. Kiterjesztettem a hálózatok szűk keresztmetszetének definícióját az útvonalfüggetlen esetre, megmutattam, hogy a geometriai értelemben vett szűk keresztmetszetek a hagyományos folyamelméleti modellben a hálózat gráfjának egyes vágásaiként értelmezhetők. Végül adtam egy módszert a max-min fair allokációk kiszámítására, amely polinom időben fut abban az esetben, ha az algoritmus bemenetét alkotó megengedett allokációk halmaza polinom méretű.*

A fenti eredményt egyszerűbb állítások sorozataként bizonyítottam. Tekintsük a hálózat egy G_c konfigurációját, amely egy V pontthalmaz és egy E élthalmaz fölött definiált egyszerű irányított $G(V, E)$ gráf, $c = [c_{ij} > 0 : (i, j) \in E]$ élkapacitások, a felhasználókat reprezentáló $(s_k, d_k) : k \in \mathcal{K}$ forrás-cél párok, és a felhasználók számára kijelölt átviteli útvonalak $\mathcal{P}_k$ halmazának összessége. A megközelítés „útvonalfüggetlen” jellege abban áll, hogy az útvonalthalmaz $\mathcal{P}_k$ tetszőleges, akár a rendelkezésre álló összes útvonalat is jelölheti, illetve nincs megszabva a $\mathcal{P}_k$ egyes P útvonalaira terelendő forgalom aránya sem, ellentétben a hagyományos, rögzített útvonalakra alapuló megközelítéssel. Legyen u_P a $k \in \mathcal{K}$ felhasználó által a $P \in \mathcal{P}_k$ útvonalra irányított forgalom mennyisége, legyen $u_k = [u_P : P \in \mathcal{P}_k]$, és legyen $\theta_k = 1^T u_k = \sum_{P \in \mathcal{P}_k} u_P$ a k felhasználó számára a $P \in \mathcal{P}_k$ útvonalakon allokált teljes átviteli kapacitás. Az alábbiakban csak olyan reguláris G_c hálózati konfigurációkkal foglalkozunk, amelyekre igaz, hogy minden $k \in \mathcal{K}$ felhasználó számára elérhető legalább egy irányított $s_k \rightarrow d_k$ út a $\mathcal{P}_k$ útvonalthalmazban, és minden élkapacitás pozitív és véges (lásd a Disszertáció 2.1. definícióját).

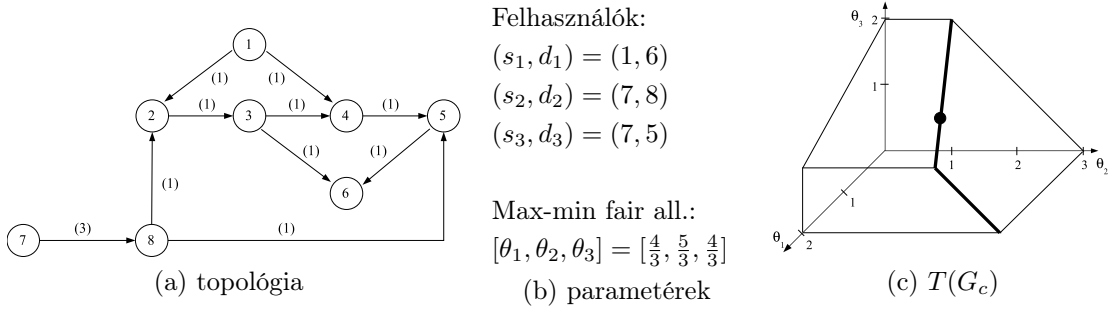
A max-min fair erőforrás-allokáció problémáját az alábbi formában definiálhatjuk.

1. Definíció. *A valamely G_c hálózati konfiguráció felett definiált általánosított max-min fair hálózati erőforrás-allokáció célja olyan θ allokáció meghatározása, amely*

- *megengedett: létezik olyan $u_k : k \in \mathcal{K}$ útvonalválasztás, amely az egyes felhasználók számára pontosan $\theta_k = 1^T u_k$ átvitelt garantál és nem terheli túl az egyes $(i, j) \in E$ éleket: $\sum_{k \in \mathcal{K}} u_k \leq c$;*
- *Pareto-optimalis: bármely k allokációját θ_k értékről $\theta_k + \epsilon$ értékre növelve, közben a többi felhasználó allokációját fixen tartva, nem megengedett allokációt kapunk bármely $\epsilon > 0$ esetén; és végül*
- *irigylésmentes: bármely megengedett θ' allokációra igaz, hogy*

$$\theta'_k > \theta_k \Rightarrow \exists l \in \mathcal{K} \setminus \{k\} \text{ úgy, hogy } \theta'_l < \theta_l \text{ és } \theta_l \leq \theta_k. \quad (1)$$

Az első állításban az útvonalfüggetlenül megengedett allokációk halmazának geometriai meghatározását adjuk. Az állítás és annak bizonyítása a Disszertáció 2.8. tételében található, lásd még [C33, C40–C42].



1. ábra. Egy hálózati konfiguráció és a hozzá tartozó átviteli politóp. Az élek kapacitását zárójelben, a Pareto-optimális allokációk halmazát vastag vonallal, a max-min fair allokációt pedig vastag ponttal jelöltük.

1.1. Tézis. Tekintsünk egy G_c hálózati konfiguráció felett definiált általánosított max-min fair hálózati erőforrás-allokáció problémát. Ekkor a probléma $T(G_c)$ megengedett tartománya egy konvex poliédert alkot. Ha G_c reguláris akkor $T(G_c)$ korlátos, teljes-dimenziós, és lefelé monoton. Általános esetben nem létezik polinom méretű felső határ $T(G_c)$ feltér reprezentációjának méretére.

A megengedett megoldások halmazát *átviteli politóp*nak hívjuk. Az 1. ábra az átviteli politópokra ad példát.

A max-min fair allokációk legegyszerűbb tulajdonsága dominálatlanság fogalommal írható le: egyszerűen fogalmazva egy allokáció valamely adott k felhasználóra vonatkozóan dominálatlan, ha k allokációját csak azon az áron tudjuk növelni, hogy egy másik felhasználó allokációját csökkentjük (a precíz meghatározást lásd a Disszertáció 2.5. definíciójában). A következő állítás az ilyen dominálatlan erőforrás-allokációk egy geometriai jellemzését adja. Az állítás és annak bizonyítása a Disszertáció 2.8. tételében található, lásd még [C33, C40–C42]. Az alábbiakban az egyszerűség kedvéért a G_c hálózati konfigurációt adottnak tekintjük.

1.2. Tézis. Tekintsünk egy megengedett $\theta \in T(G_c)$ allokációt és jelölje $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{K}$ a θ allokációban dominálatlan felhasználók halmazát. Ekkor $\mathcal{N} \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\beta^T \theta \leq b$ egyenlőtlenség, amely (i) érvényes: $\forall \theta' \in T(G_c) : \beta^T \theta' \leq b$, (ii) feszes: $\beta^T \theta = b$; és (iii) komplementáris: $(\beta)_k > 0 \Leftrightarrow k \in \mathcal{N}$.

A dominálatlanságnál egy fokozattal erősebb definíció a Pareto-optimalitás: egyszerűen szólva, egy θ megengedett allokáció Pareto értelemben optimális, ha θ -ban mindegyik felhasználó dominálatlan (a precíz meghatározást lásd a Disszertáció 2.5. definíciójában). A következő állítás az ilyen Pareto-optimális erőforrás-allokációk geometriai jellemzését adja. Az állítás és annak bizonyítása a Disszertáció 2.14. tételében található, lásd még [C33, C40–C42].

1.3. Tézis. Egy megengedett $\theta \in T(G_c)$ allokáció akkor és csak akkor Pareto-optimális, ha létezik olyan $\beta^T \theta \leq b$ egyenlőtlenség, amely (i) érvényes: $\forall \theta' \in T(G_c) : \beta^T \theta' \leq b$, (ii) feszes: $\beta^T \theta = b$; és (iii) szigorúan pozitív: $\forall k \in \mathcal{K} : (\beta)_k > 0$.

A fenti karakterizációk birtokában a következő állítás a max-min fair allokációk geometriai jellemzését adja. Az állítás és annak bizonyítása a Disszertáció 2.15. tételében található, lásd még [C33, C40–C42].

1. algoritmus Általánosított water-filling algoritmus egy G_c hálózati konfigurációra.

```

 $\mathcal{B} = \emptyset; \theta = 0$ 
while  $\mathcal{B} \neq \mathcal{K}$  do
   $\lambda \leftarrow \max_{\lambda > 0} \{ \lambda : \theta_k + \lambda \text{ is feasible for each } k \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{B} \}$ 
   $\theta_k \leftarrow \theta_k + \lambda$  for each  $k \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{B}$ 
   $\mathcal{B} \leftarrow \{k \in \mathcal{K} : k \text{ is non-dominated at } \theta\}$ 
end while

```

1.4. Tézis. Egy megengedett $\theta \in T(G_c)$ allokáció akkor és csak akkor *max-min fair*, ha minden $k \in \mathcal{K}$ felhasználó esetén létezik olyan $\beta^T \theta \leq b$ egyenlőtlenség, amely (i) érvényes: $\forall \theta' \in T(G_c) : \beta^T \theta' \leq b$, (ii) feszes: $\beta^T \theta = b$; és (iii) *max-min komplementáris*: $\forall l \in \mathcal{K} : (\beta)_l > 0 \Leftrightarrow \theta_l \leq \theta_k$.

A rögzített útvonalak felett definiált max-min fair allokáció megoldását a gyakorlatban általában az ún. *water-filling* algoritmussal lehet kiszámítani [26–28]. Az algoritmus az általános esetre való triviális kiterjesztését az 1. algoritmus adja meg. A következő állítás megmutatja, hogy ez a triviális kiterjesztés helyes. Az állítás és annak bizonyítása a Disszertáció 2.16. következményében található, lásd még [C33, C40–C42].

1.5. Tézis. Az 1. algoritmus helyes az általános max-min fair allokáció számítására.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha $T(G_c)$ polinom méretű akkor az 1. algoritmus is polinom időben lefut, azonban ez az általános esetben nem garantált (lásd az 1.1. tézist).

Egyszerűen adódik, hogy az 1.4. tézisben meghatározott egyenlőtlenségek egyfajta „szűk keresztmetszetként” működnek az általánosított problémában, a rögzített útvonalak felett definiált hagyományos megközelítés hálózati élek formájában adott szűk keresztmetszeteinek látványos geometriai értelmezését adva. Az utolsó állítás ezeket a geometriai értelemben vett szűk keresztmetszeteket transzformálja vissza a, talán könnyebben érthető, folyamelméleti keretrendszerbe. A teljes érvelés a Disszertáció 2.4.2 fejezetében kerül kifejtésre, az állítás és annak bizonyítása a Disszertáció 2.16. tételében található, lásd még [C33, C40–C42].

1.6. Tézis. Adott $\theta \in T(G_c)$ allokáció akkor és csak akkor *max-min fair*, ha minden $k \in \mathcal{K}$ felhasználóra adható G_c egy olyan $\mathcal{C}_k$ vágása, amelyre

- $\forall (i, j) \in \mathcal{C}_k : \sum_{l \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}_k}} \sum_{P \in \mathcal{P}_l : (i, j) \in P} u_P = c_{ij}$ bármely olyan megengedett $u_k : k \in \mathcal{K}$ útválasztás esetén, amelyre $\theta_k = 1^T u_k$, és
- $l \in \mathcal{K}_{\mathcal{C}_k} \Leftrightarrow \theta_l \leq \theta_k$,

ahol $\mathcal{K}_{\mathcal{C}_k} \subseteq \mathcal{K}$ azokat a felhasználókat jelöli, amelyek minden forrásponttól a végpontba vezető útvonala metszi $\mathcal{C}_k$ vágást.

4.2. Adaptív útvonalválasztás szabályozásméleti megközelítésben

Az alábbiakban egy új, szabályozásméleti megközelítésen alapuló adaptív útvonalválasztó (*rate-adaptive multipath routing*) algoritmust mutatunk, amely képes

a felhasználók útvonalait és az azokon átvitt forgalom mennyiségét valós időben állítani oly módon, hogy a kapott forgalomelvezetés *bizonyíthatóan* megengedett, stabil, és optimális. Az adaptív megközelítés lényege, hogy minimális feltételekkel élünk az algoritmus bemeneteként kapott felhasználói forgalomról. Az eredmények az alábbi állításban vannak összefoglalva.

2. Tézis. *Modellt adtam, amely az adaptív útvonalválasztás problémáját a kényszerfeltételek melletti modell-alapú prediktív szabályozók tervezésének feladataként írja le. Megmutattam, hogy enyhe regularitási feltételek mellett tetszőleges hálózati konfigurációhoz létezik olyan modell-alapú prediktív szabályozó, amely (i) stabil, (ii) optimális tetszőleges lineáris vagy kvadratikus célfüggvényre, és (iii) megengedett, amennyiben tetszőleges megengedett forgalmi mátrixot képes torlódás nélkül elvezetni a hálózatban. Végül új karakterizációt adtam a kapott szabályozók komplexitására.*

A fenti eredményt ismét egyszerűbb állítások sorozataként bizonyítottam. Legyen G_c egy adott hálózati konfiguráció, legyen $T(G_c)$ a megengedett θ forgalmi mátrixokat leíró átviteli politóp (lásd az 1.1. tézist), és legyen $u_k = [u_P : P \in \mathcal{P}_k]$ valamilyen útválasztás, amely az egyes $k \in \mathcal{K}$ felhasználók számára pontosan θ_k átvitelt biztosít: $\theta_k = 1^T u_k$. Legyenek most $\theta_k(t)$ és $u_k(t)$ egy tetszőleges t pillanatban érvényes forgalmi mátrix és útválasztás, és jelölje $x_k(t)$ a t időpillanatban a k felhasználó által a s_k forráspontban akkumulált forgalom mennyiségét.

A hálózat leírására a Disszertáció 3.2.3. fejezetében bevezettem az ún. ORAR (*Optimal Rate-adaptive Routing*) modellt, melyet az alábbi (D) dinamika és (I) kezdeti feltétel, a (C1)–(C3) kényszerfeltételek összességéként adódó (C) feltételrendszer:

$$x_k(t+1) = x_k(t) - \tau \sum_{P \in \mathcal{P}_k} u_P(t) \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (\text{D})$$

$$x_k(0) = \theta_k \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (\text{I})$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} P_k u_k(t) \leq c \quad (\text{C1})$$

$$u_k(t) \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (\text{C2})$$

$$x_k(t) \geq 0 \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad (\text{C3})$$

illetve a (P) kritériumfüggvény (célfüggvény) jellemez:

$$\min P(u(\cdot), x(0)) = q_f^T x(N) + \sum_{t=0}^{N-1} r^T u(t) + q^T x(t) \quad (\text{P})$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy (P) lineáris. A kvadratikus esetért lásd [47].

Az első állításban belátjuk, hogy egyszerű regularitási feltétel mellett minden hálózati konfiguráció szabályozáselméleti értelemben irányítható (*controllable*) és megfigyelhető (*observable*). A pontos definíciók, az állítás és a bizonyítás a Disszertáció 3.4. lemmájában találhatóak, lásd még [C29–C31, J12].

2.1. Tézis. *Ha G_c hálózati konfiguráció reguláris és $q_f^T > 0$, $r^T \geq 0$ és $q^T \geq 0$, akkor az ORAR modell irányítható és megfigyelhető.*

A második állítás garantálja, hogy a fenti ORAR modellhez létezik megfelelő modell-alapú prediktív szabályozó. A teljes állítás és a bizonyítás a Disszertáció 3.5. lemmájában található, lásd még [C29–C31, J12].

2.2. Tézis. *Tekintsünk egy reguláris G_c konfigurációt és legyen az ORAR modell adott a (D) dinamikával, (I) kezdeti feltétellel, a (C) feltételekkel, és a (P) kritériumfüggvénnyel, továbbá tegyük fel, hogy $q_f^T > 0$, $r^T \geq 0$ és $q^T \geq 0$. Ekkor minden $N > 0$ szabályozási horizonthoz létezik olyan $u_k(\cdot)$ szabályozó jel, hogy az (I) kezdeti feltételtől indulva a (D) dinamikával megadott $(x_k(t), u_k(t)) : t \in [0, N]$ trajektória nem sérti a (C) kényszerfeltételeket és optimalizálja a (P) kritériumfüggvényt.*

Az alábbiakban az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy $N = 1$. Ekkor a $u_k(\theta) : k \in \mathcal{K}$ szabályozó jel maga az adaptív útválasztási feladat megoldása, amely megadja, hogy a $x_k(0) = \theta_k$ kezdeti feltétel függvényében k felhasználó milyen arányban ossza meg a forgalmát a $\mathcal{P}_k$ útvonalakon. Az $u_k(\theta) : k \in \mathcal{K}$ függvény meghatározásához egy multi-parametrikus lineáris vagy kvadratikus programot kell megoldani: legyen az optimális 1-lépéses $u_k(\theta)$ adaptív útválasztási függvény neve *ORAR szabályozó*.

A következő állítások a fenti multi-parametrikus program eredményeként kapott $u(\theta)$ ORAR szabályozó függvény pár hasznos tulajdonságát rögzítik, úgy mint folytonosság (Disszertáció, 3.6. lemma), aszimptotikus stabilitás (3.7. lemma), konvexitás (3.8. lemma), és torlódásmentesség (3.9. lemma). Az eredmények az alábbi [47–50] referenciákban található állítások egyszerű következményeként adódnak, a teljes állításokért és bizonyításokért lásd [C29–C31, J12].

2.3. Tézis. *Az ORAR szabályozó θ folytonos és szakaszosan affin (continuous and piecewise affine) függvénye: $u(\theta) = F_i\theta + g_i$ ha $\theta \in \mathcal{R}_i$, ahol $\mathcal{R}_i$ szabályozási régiók zárt poliéderek az $\mathbb{R}^K$ -n.*

2.4. Tézis. *Az ORAR szabályozó aszimptotikusan stabil.*

2.5. Tézis. *Az ORAR szabályozó minimalizálja a (P) lineáris függvényt ha $q_f^T > 0$, $r^T \geq 0$ és $q^T \geq 0$, és az értékfüggvény folytonos, konvex, és szakaszosan affin (continuous, convex, and piecewise affine).*

2.6. Tézis. *Azoknak a kezdeti állapotoknak a halmaza, amelyekből a rendszer N lépésben az origóba konvergál (az N -lépéses megengedett halmaz), konvex. Az 1-lépéses megengedett halmaz megegyezik a $T(G_c)$ átviteli politóppal.*

A 2.6. tézis jelentősége, hogy a szabályozónk minden megengedett θ forgalmi mátrixot képes torlódás nélkül egy lépésben elvezetni anélkül, hogy bármit feltételeznénk a pillanatnyi θ forgalmi igényekről (természetesen $\theta \in T(G_c)$ mellett).

Az utolsó állítás egy új karakterizációt ad az ORAR szabályozó komplexitására. Az állítás és a bizonyítás a Disszertáció 3.10. tételében található, lásd még [J12].

2.7. Tézis. *Legyen G_c egy reguláris hálózati konfiguráció és tekintsük a (D) dinamikával, (I) kezdeti feltételekkel, (C) feltételrendszerrel, és a következő (T) végállapot-feltételekkel adott rendszert: $x_k(1) = 0 : \forall k \in \mathcal{K}$. Ekkor a (D) – (I) – (C) – (T) rendszerre értelmezett 1-lépéses ORAR szabályozó $\mathcal{R}_i$ szabályozási régióinak minimális számára felső korlát $T(G_c)$ bármelyik határponti triangulációjának (boundary-triangulation) mérete.*

4.3. Skálázható útvonalválasztás algebrai megközelítésben

A következőkben a nagy méretű hálózatokban használt útvonalválasztó protokollok skálázhatósági kérdéseit járjuk körül. Az eredményeket az alábbi állításban foglaljuk össze.

3. Tézis. *Bevezettem az algebrai kompakt útvonalválasztás modelljét, amely a hagyományos kompakt útvonalválasztás modelljének általánosítása legrövidebb útvonalválasztásról tetszőleges, algebrai úton jellemezhető útvonalválasztási szabályrendszerre. Azonosítottam azokat az algebrai tulajdonságokat, amelyek biztosítják, hogy egy útvonalválasztási szabály lekódolható legyen a hálózat minden pontjaiban szublineáris mennyiségű memóriával („tömöríthető”), megmutattam, hogy egyes algebrai tulajdonságok szuperlineáris skálázódást eredményeznek („tömöríthetetlen”), és az eredményeim alapján karakterizáltam a legtöbb, tartományon belüli útvonalválasztásra a gyakorlatban használt szabály skálázhatóságát. A „megnyúlás” (stretch) fogalmának algebrai általánosításával megmutattam, hogy minden véges reguláris tömöríthetetlen útválasztási szabály tömöríthetővé válik hármas megnyúlást megengedve, és először mutattam példát olyan szabályrendszerre, amely nem tömöríthető semmilyen konstans megnyúlást megengedve sem.*

Az algebrai kompakt útvonalválasztás alapja, Sobrinho és Griffin alapján, az útválasztási szabályrendszerek útválasztási algebrákkal való leírása [64–69]. Legyen $\mathcal{A} = (W, \phi, \oplus, \preceq)$ egy útválasztási algebra, ahol W az élekhez/utakhoz rendelhető absztrakt leírók („élköltségek”) halmaza, ϕ egy végtelen elem, $\oplus$ az absztrakt költségek kompozícióját reprezentáló művelet és $\preceq$ rendezés az absztrakt költségeken. Feltesszük, hogy $(W, \oplus)$ egy *kommutatív félcsoporthoz*, $\preceq$ *teljes rendezés* W -n, és ϕ *kompatibilis* a $(W, \oplus)$ félcsoporthal. Ennek megfelelően egy $p = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ útvonal költsége $w(p) = \bigoplus_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$ ahol $w(u, v)$ az (u, v) él „költsége”, és p^* egy *preferált* $s - t$ út, ha $w(p^*) \preceq w(p)$ minden $s - t$ közötti p útra. Az $\mathcal{A}$ algebra *monoton* (M) ha $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 \preceq w_2 \oplus w_1$, *izoton* (I) ha $\forall w_1, w_2, w_3 \in W : w_1 \preceq w_2 \Rightarrow w_3 \oplus w_1 \preceq w_3 \oplus w_2$, *reguláris* ha monoton és izoton, *véges* (D) ha $\forall w_1, w_2 \in W \setminus \{\phi\} : w_1 \oplus w_2 \neq \phi$, *szigorúan monoton* (SM) ha $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 \prec w_2 \oplus w_1$, és *szelek-tív* (S) ha $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 \oplus w_2 \in \{w_1, w_2\}$. Legyen az $\mathcal{A}$ útválasztási algebra gráfpontokban való tárolásához szükséges „worst-case” memória méret

$$M_{\mathcal{A}} = \max_{G \in \mathcal{G}_n} \min_{R \in \mathcal{R}} \max_{u \in V} M_{\mathcal{A}}(R, u) ,$$

ahol $M_{\mathcal{A}}(R, u)$ a minimális számú bit amely az u pont R_u lokális útválasztási függvényének lekódolásához szükséges, $\mathcal{R}$ az összes lehetséges útválasztási függvény halmaza amely megvalósítja $\mathcal{A}$ algebrát egy G gráfon, és $\mathcal{G}_n$ az összes n pontú gráf halmaza. Az $\mathcal{A}$ algebra *tömöríthetetlen* ha $M_{\mathcal{A}} = \Omega(n)$, egyébként *tömöríthető*.

A forgalomtovábbítási táblák triviális használatával tetszőleges célpont-alapú $\mathcal{A}$ útválasztási szabály lekódolható minden pontban $M_{\mathcal{A}} = \tilde{O}(n)$ biten, és Gavaille és Pérennès alapján tudjuk, hogy a legrövidebb útválasztást leíró $\mathcal{S} = (\mathbb{N}, \infty, +, \leq)$ algebrára $M_{\mathcal{S}} = \Omega(n)$ [57, 58], tehát $M_{\mathcal{S}} = \Theta(n)$. Az alábbiakban ezt a karakterizációt terjesztjük ki tetszőleges véges algebrára. Az alábbiakban az útválasztási szabályokat és az azokat leíró algebrákat felcserélhetően használjuk.

Az első állítás azokat a szabályokat jellemzi, amelyekre a szublineáris skálázódás biztosított. A formális állítás és a bizonyítás a Disszertáció 4.9. tételében található, lásd még [C17, C26, J14, J15].

1. táblázat. Egyes útválasztási szabályok elméleti skálázhatósága.

Algebra	Definíció	Tulajdonságok	Memória
Legrövidebb út	$\mathcal{S} = (\mathbb{N}, \infty, +, \leq)$	SM, I	$\Theta(n)$
Legszélesebb út	$\mathcal{W} = (\mathbb{N}, 0, \min, \geq)$	S, I, M	$\Theta(\log n)$
Legmegbízhatóbb út	$\mathcal{R} = ((0, 1], 0, *, \geq)$	SM, I	$\Theta(n)$
Elérhető út	$\mathcal{U} = (\{1\}, 0, *, \geq)$	S, I, M	$\Theta(\log n)$
Legszélesebb-legrövidebb út	$\mathcal{WS} = \mathcal{S} \times \mathcal{W}$	SM, I	$\Theta(n)$
Legrövidebb-legszélesebb út	$\mathcal{SW} = \mathcal{W} \times \mathcal{S}$	SM, $\neg I$	$\Omega(n), \tilde{O}(n^2)$

3.1. Tézis. *Ha egy útválasztási algebra szelektív és monoton, akkor tömöríthető.*

A második állítás a rosszul skálázódó szabályokat jellemzi, ezek közt például a legrövidebb-út választást is. A formális állítás és a bizonyítás a Disszertáció 4.11. tételében található, továbbá az állítás egy általánosítását fogalmazza meg a 4.12. lemma, lásd még [C17, C26, J14, J15].

3.2. Tézis. *Ha egy algebra véges és szigorúan monoton, akkor tömöríthetetlen.*

Ez a két eredmény, és a fentiekben mutatott triviális, forgalomtovábbítási táblák használatán alapuló felső korlát elég, hogy a legtöbb, gyakorlatban használt tartományon belüli útválasztási szabályrendszerre szoros skálázhatósági karakterizációt adjunk, a legrövidebb-legszélesebb utak szabályrendszerének kivételével; lásd a 1. táblázatot.

Az alábbiakban a fenti eredmények egy gyengítését vizsgáljuk. Ebben a modellben a cél nem a p_{st}^* preferált $s - t$ út lekódolása, hanem megfelelő lehet egy attól eltérő p_{st} út is, feltéve hogy p_{st} „költsége” egy k mértékű *algebrai megnyúlási* határon belül van (*stretch-k*): $w(p_{st}) \preceq w(p_{st}^*)^k$. Ez a választási szabadság, legalábbis legrövidebb útválasztás esetén, lehetővé teszi az egyébként tömöríthetetlen szabályok tömöríthető lekódolását. A következő eredmény ezt az észrevételt általánosítja reguláris algebraikra: a formális állítás és a bizonyítás a Disszertáció 4.14. tételében található, lásd még [C17, C26, J14, J15].

3.3. Tézis. *Ha egy útválasztási algebra véges és reguláris, akkor létezik tömöríthető implementációja hármass megnyúlással (stretch-3).*

Az utolsó állítás azonban egy erős negatív eredményt fogalmaz meg: míg legrövidebb utak esetén már hármass megnyúlás is elég a szublineáris skálázódáshoz és a megnyúlás növelésével a memóriaigény monoton csökken, ez a stratégia egyes útválasztási szabályok esetén hatástalan, abban az értelemben, hogy nem létezik skálázható implementáció *semmilyen* konstans megnyúlással. A formális állítás és a bizonyítás a Disszertáció 4.17. tételében található, lásd még [C17, C26, J14, J15].

3.4. Tézis. *Legyen $k \geq 1$ konstans és legyen $\mathcal{A} = (W, \phi, \oplus, \preceq)$ egy monoton algebra úgy, hogy tetszőleges $p \geq 2$ esetén létezik az élköltségek egy $\{w_1, w_2, \dots, w_p\} \subseteq W$ halmaza, hogy $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j: w_i \oplus w_j \succ w_i^{2^k}$ és $w_i \oplus w_j \succ w_j^{2^k}$. Ekkor nincs tömöríthető implementáció k megnyúlással (stretch-k) az $\mathcal{A}$ algebrahoz.*

Könnyen megmutatható, hogy a legrövidebb-legszélesebb út szabályrendszer teljesíti az állítás feltételeit, tehát semmilyen konstans megnyúlással sem tömöríthető.

Jelenleg nyitott probléma, hogy az $\Omega(n)$ alsó korlát (3.2. tétel) és a triviális, minden forrás-cél párra egy bejegyzést tároló $\tilde{O}(n^2)$ felső korlát közül melyik éles (ha bármelyik is).

4.4. Forgalomtovábbítási táblák tömörítése információelméleti megközelítésben

Az utolsó itt bemutatott kutatás az előző fejezet „legrosszabb esetre” (worst-case) adott skálázhatósági karakterizációit egészíti ki egy új, praktikus szemponttal. Míg az algebrai kompakt útválasztás elméletében egy útválasztási szabályrendszer tömöríthetlenségének feltétele, hogy létezik *legalább egy* patológikus hálózat, amelyen nem lehetséges minden pontban biztosítani a szublineáris skálázódást, alább megelégszünk azzal, ha egy, az input részét képező *konkrét* gráfon sikerül skálázható (tömöríthető) útválasztást megvalósítanunk. A megközelítésünk alapvetően *információelméleti*: mutatunk egy entrópia jellegű mennyiséget, amellyel egy konkrét forgalomtovábbítási tábla méretkomplexitása jellemezhető, és kódolási módszereket mutatunk, amelyek képesek a gyakorlatban is entrópiával arányos tömörítést elérni. Az eredményeket az alábbi állításban foglaljuk össze.

4. Tétel. *Definiáltam az információelméleti modellek egy egyre élesebb sorozatát, amely segítségével egy entrópia jellegű mennyiségben leírható a strukturálatlan címterek felett elérhető tömörítési ráta miközben fokozatosan egyre több információ válik elérhetővé a kódoló számára az inputként adott forgalomtovábbítási tábláról. Minden modellhez mutattam megfelelő tömörítési algoritmusokat, amelyek képesek valós inputon is elérni az elméleti entrópiakorlátot, de továbbra is lehetővé teszik a gyors lekérdezéseket közvetlenül a tömörített útválasztási táblákon. A modellt kiterjesztettem az Interneten használt strukturált címterek esetére, megadtam a megfelelő entrópia mennyiséget erre a modellre is, továbbá kódolókat mutattam, amelyek képesek ezt az entrópiakorlátot valós inputon is elérni.*

A strukturálatlan („flat”) címterek modelljét a Disszertáció 5.3.1. fejezete ismereti. Ebben a modellben a hálózat n pontját egy egyedi egész szám azonosítja az $[1, n]$ tartományon, és az egyes v pontok útválasztási állapota egy n hosszú s_v karakterláncként reprezentálható, ahol s_v karakterlánc i -edik szimbóluma azonosítja a v pontból az i -edik pontba vezető preferált úthoz tartozó kimenő élet (a v -hez tartozó elem tetszőleges). A karakterláncként adott forgalomtovábbítási táblákra ezek után közvetlenül alkalmazhatóak az információelméleti tömörítési korlátok és algoritmusok.

Az első állítás éles tömörítési korlátokat ad a legelemibb, ún. gráf-független (*graph-independent*) modellben, amikor a tömörítendő forgalomtovábbítási tábláról nem érhető el egyéb információ, mint annak n hossza (vagyis a hálózat pontjainak száma). A modell, a formális állítás és a bizonyítás a Disszertáció 5.1. fejezetében található, lásd továbbá [F1, J1].

4.1. Tétel. *Tekintsünk egy tetszőleges n pontú $G(V, E)$ gráfot és tegyük fel, hogy a kódoló számára egyedül a hálózat n mérete elérhető. Ekkor bármely $v \in V$ pont s_v forgalomtovábbítási táblájának tárolásához legalább $n \log n$ bit¹ memória szükséges.*

¹Kettes alapú logaritmust feltételezünk és az egyszerűség kedvéért $\lceil \log x \rceil$ és $\log x$ felcserélhető.

ges. Továbbá, mutatható olyan kódoló, amely bármely v pont s_v forgalomtovábbítási tábláját $n \log n$ bit méreten tárolja és $O(1)$ időben biztosít azon véletlen elérést.

Vegyük észre, hogy ez a korlát logaritmikus faktortól eltekintve egybeesik az előző fejezetben definiált legrosszabb esetben („worst-case”) elérhető tömörítéssel. Ez arra enged következtetni, hogy ha a tömörítendő forgalomtovábbítási tábláról több információ lenne elérhető a kódoló számára, akkor esetleg gyakorlati példákban lenne lehetőség „opportunistikusan” kisebb tárolási méretet is elérni. A következő állítás ezt a sejtést igazolja. Az irodalomban gyakran vizsgálják az ún. név-független (*name-independent*) modellt, ahol a forgalomtovábbítási táblában az egyes célpontokhoz rendelt preferált kimenő élek is elérhetőek, azonban a pontok azonosítói (a „címkiosztás”) nem képezik részét az inputnak. Ebben az esetben fel kell készülnünk a preferált élcímkek bármilyen sorrendben történő tárolására, hiszen a pontok címének felcserélése pontosan megegyezik a forgalomtovábbítási tábla (amely most egy karakterlánc) permutációjával. A modell, a formális állítás és a bizonyítás a Disszertáció 5.2. tételében található, lásd továbbá [F1, J1].

4.2. Tézis. *Tekintsünk egy tetszőleges n pontú $G(V, E)$ gráfot és tegyük fel, hogy ismert az egyes célpontokhoz tartozó preferált élcímke, azonban a pontok azonosítója nem. Ekkor bármely $v \in V$ pont s_v forgalomtovábbítási táblájának tárolásához legalább $nH_0(v)$ bit szükséges a pontok azonosítóinak bármely hozzárendelése esetén, ahol $H_0(v) = \sum_{i \in [1, \delta_v]} \frac{n_i}{n} \log \frac{n}{n_i}$ az s_v nulladrendű empirikus entrópiája (tetszőleges pont azonosítók esetén) és n_i jelöli azt, hogy az egyes $i \in [1, \delta_v]$ élcímkek hányszor szerepelnek preferált élcímkeként s_v -ben. Továbbá, mutatható olyan kódoló, amely s_v forgalomtovábbítási táblát garantáltan $nH_0(v) + o(n)$ biten tárolja és $O(\log n)$ időben biztosít azon véletlen elérést.*

Mivel $H_0(v) \leq \log n$, ezért a név-független modellben garantáltan legfeljebb akkora tárolási méretet kapunk, mint a gráf-független modellben, azonban a gyakorlatban sokszor adódik $H_0(v) \ll \log n$ és így a fenti módszer segítségével jelentős méretcsökkenés érhető el.

A név-független modellben a tömörítőalgoritmusnak bármely címkiosztásra fel kell készülnie, ami nagy mértékben korlátozza az elérhető tömörítés mértékét, hiszen a forgalomtovábbítási tábla bármely permutációját le kell tudnunk tárolni. Az irodalomból ismert legerősebb modell, az ún. név-függő (*name-dependent*) modell feltételezi, hogy a címkiosztás is részét képezi az inputnak, és ezért a kódoló ezt az extra információt is felhasználhatja a tömörítéshez. Értelemszerűen ebben a modellben érhető el a legnagyobb tömörítés, ahogy a következő állítás mutatja. A modell, a formális állítás és a bizonyítás a Disszertáció 5.3. tételében található, lásd továbbá [F1, J1].

4.3. Tézis. *Tekintsünk egy tetszőleges n pontú $G(V, E)$ gráfot és tegyük fel, hogy ismertek az egyes célpontokhoz tartozó preferált élcímkek illetve a pontokhoz rendelt (fix) egyedi azonosítók. Ekkor tetszőleges $v \in V$ pont s_v forgalomtovábbítási táblájának tárolásához legalább $nH_k(v)$ bit szükséges, ahol $H_k(v) = \sum_{q \in [1, \delta_v]^k} \sum_{i \in [1, \delta_v]} \frac{n_{qi}}{n} \log \frac{n}{n_{qi}}$ az s_v karakterlánc k -rendű empirikus entrópiája, n_i jelöli, hogy az egyes $i \in [1, \delta_v]$*

élcímkek hányszor szerepelnek preferált élcímkeként s_v -ben, és n_{qi} azt jelöli, hogy az i élcímke hányszor követi a k -hosszú $q \in [1, \delta_v]^k$ élcímke-sorozatot s_v -ben. Továbbá, mutatható olyan kódoló, amely s_v forgalomtovábbítási táblát garantáltan $nH_k(v) + o(n)$ biten tárolja bármely $k = o(\frac{\log n}{\log \log n})$ esetén és $O(\log n \log \log n)$ időben biztosít azon véletlen elérést.

Mivel $H_k(v) \leq H_0(v) \leq \log n$, ezért garantáltan ebben a modellben kapjuk a legjobb tömörítést. A gyakorlatban „megfelelő” címkézés esetén (lásd alább) akár több nagyságrendnyi méretcsökkenés tapasztalható a név-függő kódolás használatával.

A következő állítás az előző, strukturálatlan címterekre adott korlátokat értelmezi újra ún. strukturált, hierarchikus címterekre, mint például az Interneten használt IP protokoll címzési modellje. Ebben a modellben a címek kiosztása maga is információt hordoz, hiszen egy pont címének pozíciója a címtér hierarchiájában általában jelentős információt elárul annak hálózati elhelyezkedéséről. A modell nehézsége, hogy a strukturált címterek felett a forgalomtovábbítási táblák is rendelkeznek belső struktúrával, és az információelméleti modellnek megfelelően kell reprezentálni ezt a belső struktúrát a tárolási korlátokban (vagyis az entrópiában). A hierarchikus címterek modelljét a Disszertáció 5.4.1. fejezetében ismertetjük részletesen.

A hierarchikus címterekre adott alábbi állítás először mond analitikus korlátot az elérhető tömörítés mértékére. A formális állítás és a bizonyítás a Disszertáció 5.3. tételében található, lásd továbbá [C15, C19, C21, J13].

4.4. Tézis. *Legyen egy IP forgalomtovábbítási tábla egy T valódi, bináris, levélcímkezett prefix fával adva, legyen T fa L leveleinek száma n , legyen a levélcímkek halmaza $\Sigma = [1, \delta]$, és legyen $s : L \mapsto \Sigma$ egy függvény, amely minden levélhez megmondja annak címkéjét. Ekkor T tárolása legalább $2n + nH_0(s)$ bitet igényel, ahol $H_0(s)$ az s függvény nulladrendű empirikus entrópiája. Továbbá, mutatható egy kódolás, amely képes T prefix fát legfeljebb $2n + nH_0(s) + o(n)$ biten tárolni úgy, hogy a legspecifikusabb prefix keresése a tömörített reprezentáción $O(W)$ időben elvégezhető ha $\delta = O(\text{polylog } n)$, ahol W a címtér bitszélessége.*

Az utolsó eredmény összegzi a fenti információelméleti eredményeket. A fentiekben a címterek belső struktúrájának reprezentációját kétféle modellben is megvizsgáltuk. Érdekes módon a strukturálatlan címterek felett is lehetséges a címek belső struktúrájának egyfajta implicit modellezése, mégpedig a forgalomtovábbítási táblák magasabb-rendű entrópia fogalmán keresztül. Ezzel szemben a strukturált címterekre mutatott prefix-fa reprezentáció belső struktúrája explicit (a „fa” struktúrájában), így a címkék entrópiájának modellezésére itt már elég a nulladrendű modell.

Az alábbi állítás először teremt kapcsolatot a két reprezentáció között. A formális állítás és a bizonyítás a Disszertáció 5.8. tételében található, lásd továbbá [F1, J1].

4.5. Tézis. *Legyen T egy IP forgalomtovábbítási táblához rendelt valódi, bináris, levélcímkezett prefix fa, és legyen M_T a T prefix fa tárolásához szükséges bitek minimális száma. Továbbá, legyen S egy ekvivalens 2^W méretű karakterlánc reprezentáció, amelyet úgy kapunk, hogy minden lehetséges W -bites címhez sorrendben felírjuk a T által a címhez rendelt élcímket, és legyen M_S az S reprezentáció tárolásához szükséges bitek minimális száma. Ekkor M_T és M_S között az alábbi kapcsolat áll fenn: $M_T \leq M_S \leq KM_T$, ahol $1 \leq K \leq 1 + \frac{1}{2} \log \frac{2^W}{n}$.*

2. táblázat. Néhány valós IPv4 forgalomtovábbítási tábla tömörített mérete a 4.4. tézis szerinti prefix-fa tömörítő használatával (M_T), illetve a 4.3. tézis szerinti karakterlánc reprezentáció magasabb rendű tömörítésével (M_S).

	M_T [Kbytes]	M_S [Kbytes]	K
taz	56	85	1.52
hbone	142	186	1.3
as1221	115	162	1.4
as4637	41	66	1.6
as6447	277	294	1.06
as6730	209	253	1.21

A 4.5. tézis szerinti analízist elvégezve IPv4 forgalomtovábbítási táblák esetén a $K \sim 3$ elméleti arányossági tényező adódik, míg IPv6 esetén ez a szám $K \sim 7$. A 2. táblázat néhány valós forgalomtovábbítási tábla tömörített méretét mutatja az egyes modellekben. Ezen eredmények alapján K valós értéke közelebb lehet 1.1–1.5 tartományhoz IPv4 esetén. Az eredmények jelentős, nagyságrendnyi méretcsökkenést mutatnak a kapcsolódó irodalomban elérhető tömörítési arányokhoz képest [70–89].

5. Az eredmények hasznosíthatósága és hatása

Tudományos munkám során elsősorban a csomagkapcsolt hálózatok útvonalválasztási, forgalomtovábbítási, skálázhatósági, programozhatósági és optimalizálási kérdéseivel foglalkozom több mint 20 éve. A kutatási módszereim ötvözik az elméleti vizsgálódásokat és az elmélyült feltáró jellegű tudományos munkát, illetve a kimondottan gyakorlati, a hálózatok építésével és hatékony működtetésével kapcsolatos, az operátori gyakorlatban gyakran előforduló problémák megoldására irányuló mérnöki megközelítést.

A területen több mint 60 konferencia közlemény, 23 folyóirat, és két könyvfejezet szerzője vagyok, ezek több mint 50 százalékában mint első vagy utolsó szerző szerepelek. Legjelentősebb eredményeim rendre a kommunikációs hálózatok legjelentősebb fórumain jelennek meg. Magyarországon egyedülként kétszer is szerepeltem előadással az *ACM SIGCOMM* konferencián (H-5 index: 72): az első SIGCOMM előadásomban a 4. tézisben bemutatott forgalomtovábbítási táblák tömörítését célzó kutatásunk eredményeit ismertettem [C19], míg a második előadás az ipari partnerekkel szoros együttműködésben folytatott, a szoftver alapú hálózati kapcsolóelemek egészen új architektúráját bemutató kutatásunkat ismertette [C12]. Legújabb, Lévai Tamás doktoranduszhallgatómmal a szoftver alapú csomagfeldolgozók kötegelt ütemezését bemutató kutatásunk pedig a *USENIX NSDI* fórumán (H-5 index: 62) jelent meg [C2]. Fontos tudni, hogy a *USENIX NSDI* és a *ACM SIGCOMM* a kommunikációs hálózatok legjelentősebb éves konferenciái, többek közt az Internet alapját képező TCP transzport protokoll, a napjaink hálózatait meghatározó szoftver-alapú hálózatok (SDN) paradigmája, vagy az elosztott hash táblák elmélete is ezeken a fórumokon került először bemutatásra. A nemzetközi kutatóvilág ezen meghatározó fórumait, nem véletlenül, a nagy amerikai egyesült államokbeli egyetemek (*MIT*, *Princeton*, *Berkeley*) és privát kutatóközpontok (*Google*, *Microsoft Research*) dominálják: az *NSDI 2020* programjába az elfogadott 40+ cikk közé

összesen 4 európai kutatás került be (ebből kettő az *ETH Zürich* egyetemről), köztük Közép-kelet Európából egyedül a miénk.

A hálózatok bővebb kontextusában végzett elméleti, feltáró kutatási eredményeink szintén gyakran váltanak ki széles nemzetközi érdeklődést: a *Nature Communications* folyóiratban nemrég megjelent cikkünk több száz Twitter üzenetet, Facebook megosztást és médiamegjelenést kapott², és ma is a legjelentősebb nyilvános megjelenést kapott cikkek felső 1 százalékában található.³

A kutatási munka mellett aktívan járulok hozzá az *Internet Engineering Task Force* (IETF), az Internet protokollok szabványosításáért felelős szervezet munkájához is: részt veszek több munkacsoport megbeszéléseiben, mint az *IETF Routing Area* (rtgwg) vagy az *Open Shortest Path First IGP* (ospf) munkacsoport, és a korábbi PhD hallgatóm, Enyedi Gábor, doktori téziseit alkotó közös munkánk Internet szabványok (Proposed Standard) formájában is elérhető: lásd az „*RFC 7811: An Algorithm for Computing IP/LDP Fast Reroute Using Maximally Redundant Trees (MRT-FRR)*” és az „*RFC 7812: An Architecture for IP/LDP Fast Reroute Using Maximally Redundant Trees (MRT-FRR)*” szabványokat [C35].

Az elmúlt 15 évben a kutatási tevékenységemet magyar és nemzetközi egyedi kutatói ösztöndíjpályázatokból (*Bolyai János Kutatási Ösztöndíj*, *OTKA Posztdoktori Kiválósági Program*), magyar kutatócsoportok célzott támogatásából (*MTA–BME Lendület Jövő Internet Kutatócsoport*, *MTA–BME Információs Rendszerek Kutatócsoport*, *MTA–BME Lendület Hálózat Szoftverizációs Kutatócsoport*), nemzetközi EU pályázatokból (*FP6-IST NOBEL 1–2*, *FP7-IST Efipsans*), és nagy presztízsű ipari kutatási programokból (*Google Faculty Research Award*) fedeztem. Évtizedes kapcsolatam van ipari és nemzetközi partnerekkel és széles kutatási körben vezetek nemzetközi kutatási projekteket az elméleti kutatások [C4, C26, C41, C41, J4, J14, J15, J15, J18, J19, J21], a hálózatbiztonság [C5, C6], a programozható hálózatok [C8, C10, C12, J3], a forgalommenedzsment [C13, C20, C44, C46, J5, J20, J22], az adaptív útválasztás [C30, C31, J12], a komplex hálózatok [J8, J10], a gyors hibavédelem [C18, C22, C25, C27, C36, J11, J16, J17], a tömörített adatstruktúrák [C15, C19, C21, J13], az Internet mérések [C28], és az alkalmazott kutatások [C18, C24, C32, J6, J9, J22] tágabb területén.

A kutatómunkámat széles körű nemzetközi együttműködésben végzem: az elmúlt években közös kutatásokat vezettem izraeli (Michael Schapira, *Hebrew University of Jerusalem* [C13, J5]), svéd (Marcus Hidell és Peter Sjödin, *KTH Stockholm* [J21], Marco Chiesa, *KTH Stockholm* [C4, C13, J5]), angol (Gianni Antichi, *Queen Mary University of London* [C1], amerikai egyesült államokbeli (Barath Raghavan, *USC* [C2]), szingapúri (Min Suk Kang és Dinil Mon Divakaran, *National University of Singapore* [C5]), osztrák (Stefan Schmid, *University of Vienna* [C5–C7]), francia (Dario Rossi, Leonardo Linguaglossa, *Télécom ParisTech* [J2]), olasz (Giuseppe Bianchi, *University of Rome* [J2]) és német (Wolfgang Kellerer és Andreas Blenk, *TU München* [C3], Thomas Zinner, *TU Berlin* [J2], Roberto Bifulco, *NEC Laboratories* [J2]) kollégákkal. Több mint egy évtizedes kapcsolatam az ipari partnerekkel, több cikket közöltem például az *Ericsson Research*, *TrafficLab* [C9, C10, C12, C21, J4], a *Nokia Research*, a *Télécom ParisTech*, vagy a *NEC Laboratories* [C8, J2] kutató-

²Lásd: „Hatalmas sikert értek el a BME kutatói”, *Index.hu*, https://index.hu/tudomany/2015/07/06/bme_vik_nature_halozatok_nash_equilibrium.

³Altmetric: <http://www.nature.com/articles/ncomms8651/metrics>.

ival. Az *Ericsson* hazai kutatógárdájával kiemelten szoros az együttműködés: a gyors hibajavítást célzó kutatásaink eredménye [C27,J16,J17] az *Ericsson* egyik hálózatmonitorozó termékének részeként több száz operátor számára vált elérhetővé.

Jelenleg vezető kutatóként dolgozom a *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Távközlési és Média Informatikai Tanszékén* és az *MTA–BME Információs Rendszerek Kutatócsoportban*, és meghívott kutatóként közreműködöm az *Ericsson Research*, *TrafficLab* munkájában.

A tézisek témájában megjelent közlemények

Folyóirat cikkek

- [J1] A. Kőrösi, A. Gulyás, Z. Heszberger, J. Bíró, and G. Rétvári, „On the memory requirement of hop-by-hop routing: Tight bounds and optimal address spaces,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, pp. 1–11, 2020.
- [J2] L. Linguaglossa, S. Lange, S. Pontarelli, G. Rétvári, D. Rossi, T. Zinner, R. Bifulco, M. Jarschel, and G. Bianchi, „Survey of performance acceleration techniques for Network Function Virtualization,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 107, no. 4, pp. 746–764, 2019.
- [J3] J. Tapolcai, G. Rétvári, P. Babarczi, and E. R. Bérczi-Kovács, „Scalable and efficient multipath routing via redundant trees,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 37, no. 5, pp. 982–996, May 2019.
- [J4] T. Lévai, G. Pongrácz, P. Megyesi, P. Vörös, S. Laki, F. Németh, and G. Rétvári, „The price for programmability in the software data plane: The vendor perspective,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 36, no. 12, pp. 2621–2630, Dec. 2018.
- [J5] M. Chiesa, G. Retvari, and M. Schapira, „Oblivious routing in IP networks,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 26, no. 3, pp. 1292–1305, Jun. 2018.
- [J6] M. Nagy, J. Tapolcai, and G. Rétvári, „Node virtualization for IP level resilience,” *IEEE/ACM Transactions of Networking*, vol. 26, no. 3, pp. 1250–1263, Jun. 2018.
- [J7] A. Kőrösi, A. Csoma, G. Rétvári, Z. Heszberger, J. Bíró, J. Tapolcai, I. Pelle, D. Klajbár, M. Novák, V. Halasi *et al.*, „A dataset on human navigation strategies in foreign networked systems,” *Scientific data*, vol. 5, p. 180037, 2018.
- [J8] A. Csoma, A. Kőrösi, G. Rétvári, Z. Heszberger, J. J. Bíró, M. Slíz, A. Avena-Koenigsberger, A. Griffa, P. Hagmann, and A. Gulyás, „Routes obey hierarchy in complex networks,” *Nature Scientific Reports*, vol. 7, 2017.

- [J9] K. Németh, A. Körösi, and G. Rétvári, „Optimal resource pooling over legacy equal-split load balancing schemes,” *Computer Networks*, vol. 127, pp. 243–265, 2017.
- [J10] A. Gulyás, J. J. Bíró, A. Körösi, G. Rétvári, and D. Krioukov, „Navigable networks as Nash equilibria of navigation games,” *Nature Communications*, vol. 6, no. 7651, July 2015.
- [J11] L. Csikor and G. Rétvári, „On providing fast protection with remote loop-free alternates – analyzing and optimizing unit cost networks,” *Telecommunication Systems Journal*, March 2015.
- [J12] G. Németh and G. Rétvári, „Rate-adaptive multipath routing: Distributed, centralized, and hybrid architectures,” *Networks*, pp. 1–12, 2015.
- [J13] G. Rétvári, J. Tapolcai, A. Körösi, A. Majdán, and Z. Heszberger, „Compressing IP forwarding tables: Towards entropy bounds and beyond,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 24, no. 1, pp. 149–162, 2016.
- [J14] A. Gulyás, G. Rétvári, Z. Heszberger, and R. Agarwal, „On the scalability of routing with policies,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 23, no. 5, pp. 1610–1618, Oct. 2015.
- [J15] G. Rétvári, A. Gulyás, Z. Heszberger, M. Csernai, and J. Bíró, „Compact policy routing,” *Distributed Computing*, vol. 26, no. 5, pp. 309–320, 2013.
- [J16] L. Csikor, J. Tapolcai, and G. Rétvári, „Optimizing IGP link costs for improving IP-level resilience with Loop-Free Alternates,” *Computer Communications*, 2012.
- [J17] M. Nagy, J. Tapolcai, and G. Rétvári, „Optimization methods for improving IP-level fast protection for local Shared Risk Groups with Loop-Free Alternates,” *Telecommunication Systems*, 2012.
- [J18] G. Németh and G. Rétvári, „Towards a statistical characterization of the competitiveness of oblivious routing (short paper),” *SIGMETRICS Perform. Eval. Rev.*, vol. 40, no. 1, pp. 387–388, June 2012.
- [J19] G. Enyedi and G. Rétvári, „Finding multiple maximally redundant trees in linear time,” *Periodica Polytechnica*, vol. 54, pp. 29–40, 2010.
- [J20] P. Fodor, G. Enyedi, G. Rétvári, and T. Cinkler, „Layer-preference policies in multi-layer GMPLS networks,” *Photonic Network Communications*, vol. 18, pp. 300–313, 2009.
- [J21] A. Császár, G. Enyedi, M. Hidell, G. Rétvári, and P. Sjödin, „Converging the evolution of router architectures and IP networks,” *IEEE Network Magazine, Special Issue on Advances in Network Systems Architecture*, vol. 21, no. 4, pp. 8–14, July 2007.

- [J22] G. Rétvári, J. J. Bíró, and T. Cinkler, „On shortest path representation,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 15, no. 6, pp. 1293–1306, December 2007.
- [J23] G. Rétvári and T. Cinkler, „Practical OSPF traffic engineering,” *IEEE Communications Letters*, vol. 8, pp. 689–691, November 2004.
- [J24] T. Szénási and G. Rétvári, „Design and implementation of a traffic management functionality for RSVP,” *Híradástechnika (Communications)*, vol. 57, pp. 21–27, December 2002.

Könyv és könyvfejezetek

- [B1] L. Csikor, G. Rétvári, and J. Tapolcai, „High availability in the Future Internet,” in *The Future Internet*, ser. Lecture Notes in Computer Science, A. Galis and A. Gavras, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2013, vol. 7858, pp. 64–76.
- [B2] G. Rétvári, F. Németh, I. Hokelek, M. Fecko, A. Prakash, R. Chaparadza, M. Wodzak, and B. Vidalenc, „A guideline for realizing the vision on Autonomic Networking: Implementing self-adaptive routing on top of OSPF,” in *Formal and Practical Aspects of Autonomic Computing and Networking: Specification, Development, and Verification*, 1st ed., P. Cong-vinh, Ed. Hershey, PA: Information Science Reference - Imprint of: IGI Publishing, 2011.

Konferencia cikkek

- [C1] G. Antichi and G. Rétvári, „Full-stack SDN: The next big challenge?” in *Proceedings of the Symposium on SDN Research*, ser. SOSR '20. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2020, p. 48–54.
- [C2] T. Lévai, F. Németh, B. Raghavan, and G. Rétvári, „Batchy: Batch-scheduling data flow graphs with service-level objectives,” in *17th USENIX Symposium on Networked Systems Design and Implementation (NSDI 20)*. Santa Clara, CA: USENIX Association, 2020, pp. 633–649.
- [C3] J. Zerwas, P. Kalmbach, L. Henkel, G. Rétvári, W. Kellerer, A. Blenk, and S. Schmid, „Netboa: Self-driving network benchmarking,” in *Proceedings of the 2019 Workshop on Network Meets AI & ML*, 2019, p. 8–14.
- [C4] F. Németh, M. Chiesa, and G. Rétvári, „Normal forms for match-action programs,” in *ACM CoNEXT*, 2019, pp. 44–50.

- [C5] L. Csikor, D. Divakaran, M. Kang, A. Kőrösi, B. Sonkoly, D. Haja, D. Pezaros, S. Schmid, and G. Rétfvári, „Tuple space explosion: A denial-of-service attack against a software packet classifier,” in *ACM CoNEXT*, 2019, pp. 292–304.
- [C6] K. Thimmaraju, S. Hermak, G. Rétfvári, and S. Schmid, „MTS: Bringing multi-tenancy to virtual networking,” in *2019 USENIX Annual Technical Conference (USENIX ATC 19)*. Renton, WA: USENIX Association, Jul. 2019, pp. 521–536.
- [C7] K. Thimmaraju, G. Rétfvári, and S. Schmid, „Virtual network isolation: Are we there yet?” in *Proc. ACM SIGCOMM 2018 Workshop on Security in Softwarized Networks: Prospects and Challenges (SecSon)*, 2018.
- [C8] R. Bifulco and G. Rétfvári, „A survey on the programmable data plane: Abstractions architectures and open problems,” in *Proc. IEEE HPSR*, 2018.
- [C9] L. Csikor, L. Toka, M. Szalay, G. Pongrácz, D. P. Pezaros, and G. Rétfvári, „Harmless: Cost-effective transitioning to SDN for small enterprises,” in *Proc. IFIP Netw.*, 2018, pp. 1–9.
- [C10] G. Rétfvári, L. Molnár, G. Pongrácz, and G. Enyedi, „Dynamic compilation and optimization of packet processing programs,” in *ACM SIGCOMM 2017 The Third Workshop on Networking and Programming Languages (NetPL)*, 2017.
- [C11] S. Nikolenko, K. Kogan, G. Rétfvári, E. Bérczi-Kovács, and A. Shalimov, „How to represent IPv6 forwarding tables on IPv4 or MPLS dataplanes,” in *Proc. 2016 IEEE Conference on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS): GI 2016: 19th IEEE Global Internet Symposium*, 2016.
- [C12] L. Molnár, G. Pongrácz, G. Enyedi, Z. L. Kis, L. Csikor, F. Juhász, A. Kőrösi, and G. Rétfvári, „Dataplane specialization for high performance OpenFlow software switching,” in *ACM SIGCOMM*, 2016, pp. 539–552.
- [C13] M. Chiesa, G. Rétfvári, and M. Schapira, „Lying your way to better traffic engineering,” in *ACM CoNEXT*, 2016, pp. 391–398.
- [C14] J. Tapolcai, G. Rétfvári, P. Babarczi, E. Bérczi-Kovács, P. Kristóf, and G. Enyedi, „Scalable and efficient multipath routing: Complexity and algorithms,” in *23rd IEEE International Conference on Network Protocols (ICNP)*, San Francisco, CA, USA, 2015, pp. 1–10.
- [C15] A. Kőrösi, J. Tapolcai, B. Mihálka, G. Mészáros, and G. Rétfvári, „Compressing IP forwarding tables: Realizing information-theoretical space bounds and fast lookups simultaneously,” in *Proc. IEEE ICNP*, 2014.
- [C16] G. Rétfvári, D. Szabó, A. Gulyás, A. Kőrösi, and J. Tapolcai, „An information-theoretic approach to routing scalability,” in *ACM HotNets-XIII*, 2014, pp. 2:1–2:7.

- [C17] M. Zubor, A. Korösi, A. Gulyás, and G. Rétvári, „On the computational complexity of policy routing,” in *Advances in Communication Networking*, ser. Lecture Notes in Computer Science, Y. Kermarrec, Ed., vol. 8846. Springer International Publishing, 2014, pp. 202–214.
- [C18] J. Tapolcai and G. Rétvári, „Router virtualization for improving IP-level resilience,” in *IEEE INFOCOM*, April 2013, pp. 935–943.
- [C19] G. Rétvári, J. Tapolcai, A. Kőrösi, A. Majdán, and Z. Heszberger, „Compressing IP forwarding tables: Towards entropy bounds and beyond,” in *ACM SIGCOMM*, 2013, pp. 111–122.
- [C20] K. Németh, A. Kőrösi, and G. Rétvári, „Optimal OSPF traffic engineering using legacy Equal Cost Multipath load balancing,” in *IFIP Networking Conference 2013*, 2013, pp. 1–9.
- [C21] G. Rétvári, Z. Csernátóny, A. Kőrösi, J. Tapolcai, A. Császár, G. Enyedi, and G. Pongrácz, „Compressing IP forwarding tables for fun and profit,” in *ACM HotNets-XI*. ACM, October 2012.
- [C22] L. Csikor and G. Rétvári, „IP Fast Reroute with Remote Loop-Free Alternates: The unit link cost case,” in *Proceedings of RNDM 2012, the 4th International Workshop on Reliable Networks Design and Modeling*, October 2012, pp. 16–22.
- [C23] M. Nagy and G. Rétvári, „An evaluation of approximate network optimization methods for improving IP-level fast protection with Loop-free Alternates,” in *Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 2011 3rd International Congress on*, October 2011, pp. 1–7.
- [C24] C. Simon, F. Németh, F. Uzsák, G. Rétvári, F. Ficsor, and R. Vida, „Autonomic DHCPv6 architecture,” in *GLOBECOM Workshops, 2011 IEEE*, December 2011, pp. 620–624.
- [C25] G. Rétvári, L. Csikor, J. Tapolcai, G. Enyedi, and A. Császár, „Optimizing IGP link costs for improving IP-level resilience (best paper award),” in *Design of Reliable Communication Networks (DRCN), 2011 8th International Workshop on the*, October 2011, pp. 62–69.
- [C26] G. Rétvári, A. Gulyás, Z. Heszberger, M. Csernai, and J. Bíró, „Compact policy routing,” in *ACM PODC 2011*. New York, NY, USA: ACM, 2011, pp. 149–158.
- [C27] G. Rétvári, J. Tapolcai, G. Enyedi, and A. Császár, „IP Fast ReRoute: Loop Free Alternates revisited,” in *IEEE INFOCOM 2011*, 2011, pp. 2948–2956.
- [C28] M. Csernai, A. Gulyás, G. Rétvári, Z. Heszberger, and A. Császár, „The skeleton of the internet,” in *IEEE GLOBECOM*, November 2010, pp. 1–5.

- [C29] G. Németh and G. Rétvári, „Hybrid demand oblivious routing: Hyper-cubic partitions and theoretical upper bounds,” in *7th International ICST Conference on Broadband Communications, Networks, and Systems (BROADNETS 2010)*, 2010, pp. 25–27.
- [C30] G. Rétvári and G. Németh, „On optimal multipath rate-adaptive routing,” in *15th IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC 2010)*, Riccione, Italy, June 2010.
- [C31] G. Rétvári and G. Németh, „Demand-oblivious routing: Distributed vs. centralized approaches,” in *IEEE INFOCOM 2010*, March 2010.
- [C32] F. Németh, G. Rétvári, Z. Heszberber, and A. Gulyás, „Demystifying self-awareness of autonomic systems,” in *Proc., ICT Mobile and Wireless Communications Summit (MobileSummit)*, Santander, Spain, June 2009.
- [C33] G. Rétvári, „The geometry of networking, part II,” in *Proceedings of High Speed Networking 2009 Spring Workshop*, Balatonkenese, Hungary, May 2009.
- [C34] G. Rétvári, F. Németh, C. Ranganai, and R. Szabó, „OSPF for implementing self-adaptive routing in autonomic networks: A case study,” in *MACE’09, the 4th International Workshop on Modelling Autonomic Communications Environments*, October 2009.
- [C35] G. Enyedi, G. Rétvári, and A. Császár, „On finding maximally redundant trees in strictly linear time,” in *IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC 2009)*, Tunesia, 2009, pp. 206–211.
- [C36] G. Enyedi, P. Szilágyi, G. Rétvári, and A. Császár, „IP fast reroute: Lightweight Not-Via without additional addresses,” in *IEEE INFOCOM’09 Mini-Conference*, Rio de Janeiro, Brasil, 2009, pp. 2771–2775.
- [C37] G. Enyedi, P. Szilágyi, G. Rétvári, and A. Császár, „IP fast reroute: Lightweight Not-Via,” in *Lecture Notes in Computer Science: Proceedings of the IFIP Networking’09*, Aachen, Germany, 2009, pp. 157–168.
- [C38] P. Fodor, G. Enyedi, G. Rétvári, and T. Cinkler, „An efficient and practical layer-preference policy for routing in GMPLS networks,” in *the 13th International Telecommunications Network Strategy and Planning Symposium, (Networks 2008)*, September 2008.
- [C39] G. Enyedi, G. Rétvári, and T. Cinkler, „A novel loop-free IP Fast Reroute algorithm,” in *Proc., 13th EUNICE Open European Summer School*, July 2007.
- [C40] G. Rétvári, J. J. Bíró, and T. Cinkler, „Routing-independent fairness in capacitated networks,” in *Proc., IEEE International Conference on Communications (ICC 2007)*, Glasgow, Scotland, June 2007.
- [C41] G. Rétvári, J. J. Bíró, and T. Cinkler, „Fairness in capacitated networks: a polyhedral approach,” in *IEEE INFOCOM 2007*, Anchorage, Alaska, USA, May 2007.

- [C42] G. Rétvári, „The geometry of networking, part I,” in *Proceedings of High Speed Networking 2007 Spring Workshop*, Balatonkenese, Hungary, May 2007.
- [C43] G. Rétvári, J. J. Bíró, and T. Cinkler, „Novel methods for traffic engineering in legacy IP networks,” in *Proc., World Telecommunications Congress (WTC)*, Budapest, Hungary, May 2006.
- [C44] G. Rétvári, J. J. Bíró, and T. Cinkler, „On improving the accuracy of OSPF Traffic Engineering,” in *Lecture Notes in Computer Science: Proceedings of the Fifth International IFIP-TC6 Networking Conference*, Coimbra, Portugal, 2006, pp. 51–62.
- [C45] J. Tapolcai, P. Fodor, G. Rétvári, M. Maliosz, and T. Cinkler, „Class-based minimum interference routing for traffic engineering in optical networks,” in *Proc., 1st EuroNGI Conference on Next Generation Internet Networks Traffic Engineering*, Rome, Italy, April 2005.
- [C46] G. Rétvári, J. J. Bíró, T. Cinkler, and T. Henk, „A precomputation scheme for minimum interference routing: the Least-Critical-Path-First algorithm,” in *IEEE INFOCOM 2005*, Miami, Florida, USA, March 2005.
- [C47] G. Rétvári, J. J. Bíró, and T. Cinkler, „A novel Lagrangian-relaxation to the minimum cost multicommodity flow problem and its application to OSPF traffic engineering,” in *Proceedings of the The Ninth IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC'2004)*, vol. 2, Alexandria, Egypt, June 2004, pp. 957–962.
- [C48] G. Rétvári, R. Szabó, and J. J. Bíró, „On the representability of arbitrary path sets as shortest paths: Theory, algorithms, and complexity,” in *Lecture Notes in Computer Science: Proceedings of the Third International IFIP-TC6 Networking Conference*, Athens, Greece, May 2004, pp. 1180–1191.
- [C49] G. Rétvári, „Minimum interference routing: The precomputation perspective,” in *Proc., 6th IFIP/IEEE International Conference on Management of Multimedia Networks and Services (MMNS)*, ser. Lecture Notes in Computer Science, Belfast, UK, September 2003, pp. 246–258.
- [C50] J. Levendovszky, A. Fancsali, G. Rétvári, and C. Végső, „QoS routing with incomplete information by analog computing algorithms,” in *Proceedings of 2nd International Workshop on Quality of future Internet Services*, vol. 56, Coimbra, Portugal, September 2001, pp. 127–137.
- [C51] J. Levendovszky, T. Dávid, A. Fancsali, G. Rétvári, and C. Végső, „QoS routing in packet switched networks – novel algorithms for routing with incomplete information,” in *Proceedings of 9th IFIP Conference on Performance Modelling and Evaluation of ATM & IP Networks*, Budapest, Hungary, June 2001, pp. 249–260.

Magyar nyelvű folyóirat cikkek

- [F1] A. Kőrösi and G. Rétvári, „A csomagtovábbítás skálázhatósága: korlátok és optimumok,” *ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK*, vol. 36, 2019.
- [F2] J. Bíró, A. Gulyás, G. Rétvári, A. Kőrösi, Z. Heszberger, and A. Majdán, „Navigáció hálózatokban Bolyai János geometriája segítségével,” *ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK*, vol. 36, 2019.
- [F3] G. Enyedi and G. Rétvári, „Gyors hibajavítás IP hálózatokban (in hungarian),” *Híradástechnika*, vol. 64, pp. 20–24, 2009.
- [F4] J. Szigeti, J. Tapolcai, G. Rétvári, L. Láposi, and T. Cinkler, „Útvonalkijelölés és forgalomelvezetés több tartományú kapcsolt optikai hálózatokban (hungarian),” *Híradástechnika*, vol. 59, pp. 42–49, February 2004.
- [F5] J. Levendovszky, G. Rétvári, and C. Végső, „Statisztikus egyenlőtlenségek elméletén alapuló QoS útvonalkeresés hiányos linkinformáció esetén (hungarian),” *Híradástechnika*, vol. 56, pp. 3–13, November 2001.

További hivatkozások

- [1] „Internet Live Stats,” <https://www.internetlivestats.com>.
- [2] T. Lan and M. Chiang, „An axiomatic theory of fairness in resource allocation,” available online: <http://www.princeton.edu/~chiangm/fairness.pdf>, 2012.
- [3] A. B. Atkinson, „On the measurement of inequality,” *Journal of Economic Theory*, vol. 2, no. 3, pp. 244 – 263, 1970. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022053170900396>
- [4] H. R. Varian, „Equity, envy, and efficiency,” *Journal of economic theory*, vol. 9, no. 1, pp. 63–91, 1974.
- [5] J. F. Nash Jr, „The bargaining problem,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 155–162, 1950.
- [6] L. S. Shapley, „A value for n-person games,” *Contributions to the Theory of Games*, vol. 2, no. 28, pp. 307–317, 1953.
- [7] C. Joe-Wong, S. Sen, T. Lan, and M. Chiang, „Multiresource allocation: Fairness-efficiency tradeoffs in a unifying framework,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 21, no. 6, pp. 1785–1798, 2013.
- [8] J. M. Jaffe, „Bottleneck flow control,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 29, no. 7, pp. 954–962, Jul. 1981.

- [9] E. L. Hahne, „Round-robin scheduling for max-min fairness in data networks,” *IEEE Journal on Selected Areas of Communication*, vol. 9, no. 7, pp. 1024–1039, Sep. 1991.
- [10] J. C. R. Bennett and H. Zhang, „WF2Q: Worst-case fair weighted fair queueing,” in *IEEE INFOCOM*, vol. 1, 1996, pp. 120–128.
- [11] A. Demers, S. Keshav, and S. Shenker, „Analysis and simulation of a fair queueing algorithm,” in *ACM SIGCOMM*, 1989, pp. 1–12.
- [12] M. Shreedhar and G. Varghese, „Efficient fair queueing using deficit round-robin,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 4, no. 3, pp. 375–385, 1996.
- [13] I. Stoica, S. Shenker, and H. Zhang, „Core-stateless fair queueing: Achieving approximately fair bandwidth allocations in high speed networks,” in *ACM SIGCOMM*, 1998, pp. 118–130.
- [14] E. Danna, A. Hassidim, H. Kaplan, A. Kumar, Y. Mansour, D. Raz, and M. Segalov, „Upward max-min fairness,” *J. ACM*, vol. 64, no. 1, pp. 1–24, 2017.
- [15] A. Ghodsi, M. Zaharia, B. Hindman, A. Konwinski, S. Shenker, and I. Stoica, „Dominant resource fairness: Fair allocation of multiple resource types,” in *USENIX NSDI*, 2011, pp. 323–336.
- [16] A. Ghodsi, M. Zaharia, S. Shenker, and I. Stoica, „Choosy: Max-min fair sharing for datacenter jobs with constraints,” in *ACM EuroSys*, 2013, pp. 365–378.
- [17] A. F. T. Committee, „Traffic Management Specification - Version 4.0,” ATM Forum/95-0013R13, Feb 1996.
- [18] F. P. Kelly, A. K. Maulloo, and D. K. H. Tan, „Rate control for communication networks: Shadow prices, proportional fairness and stability,” *Journal of the Operational Research Society*, vol. 49, no. 3, pp. 237–252, Mar 1998.
- [19] R. Jain, D.-M. Chiu, and W. R. Hawe, *A quantitative measure of fairness and discrimination for resource allocation in shared computer system*. Eastern Research Laboratory, Digital Equipment Corporation Hudson, MA, 1984, vol. 38.
- [20] B. Caprita, W. C. Chan, J. Nieh, C. Stein, and H. Zheng, „Group ratio round-robin: $O(1)$ proportional share scheduling for uniprocessor and multiprocessor systems,” in *USENIX Annual Technical Conference*, 2005, pp. 337–352.
- [21] I. Stoica, H. Abdel-Wahab, K. Jeffay, S. K. Baruah, J. E. Gehrke, and C. G. Plaxton, „A proportional share resource allocation algorithm for real-time, time-shared systems,” in *IEEE Real-Time Systems Symposium*, 1996, pp. 288–299.

- [22] J. Axboe, „Linux block IO – present and future,” in *Ottawa Linux Symp*, 2004, pp. 51–61.
- [23] A. K. Agrawala and R. M. Bryant, „Models of memory scheduling,” in *SOSP*, 1975, pp. 217–222.
- [24] D. Zarchy, D. Hay, and M. Schapira, „Capturing resource tradeoffs in fair multi-resource allocation,” in *IEEE INFOCOM*, 2015, pp. 1062–1070.
- [25] C. Joe-Wong, S. Sen, T. Lan, and M. Chiang, „Multi-resource allocation: Fairness-efficiency tradeoffs in a unifying framework,” in *IEEE INFOCOM*, 2012, pp. 1206–1214.
- [26] D. P. Bertsekas and R. Gallager, *Data Networks*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1987.
- [27] J. Le Boudec, „Rate adaptation, congestion control and fairness: A tutorial,” available online: http://ica1www.epfl.ch/PS_files/LEB3132.pdf, Feb 2005.
- [28] R. Denda, „The fairness challenge in computer networks,” Department for Mathematics and Computer Science, University of Mannheim, Tech. Rep. TR-00-006, 2000.
- [29] J. Le Boudec and B. Radunovic, „A unified framework for max-min and min-max fairness with applications,” in *Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, Oct 2002.
- [30] D. G. Cantor and M. Gerla, „Optimal routing in a packet-switched computer network,” *IEEE Transactions on Computer*, vol. 23, no. 10, pp. 1062–1069, 1974.
- [31] B. Fortz, J. Rexford, and M. Thorup, „Traffic engineering with traditional IP routing protocols,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 40, no. 10, pp. 118–124, Oct 2002.
- [32] L. G. Valiant and G. J. Brebner, „Universal schemes for parallel communication,” in *ACM symposium on Theory of computing*, ser. STOC ’81, 1981, pp. 263–277.
- [33] H. Räcke, „Minimizing congestion in general networks,” in *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, ser. FOCS ’02, 2002, pp. 43–52.
- [34] H. Räcke, „Optimal hierarchical decompositions for congestion minimization in networks,” in *ACM symposium on Theory of computing*, ser. STOC ’08, 2008, pp. 255–264.
- [35] Y. Azar, E. Cohen, A. Fiat, H. Kaplan, and H. Räcke, „Optimal oblivious routing in polynomial time,” in *ACM symposium on Theory of computing*, ser. STOC ’03, 2003, pp. 383–388.

- [36] D. Applegate and E. Cohen, „Making intra-domain routing robust to changing and uncertain traffic demands: Understanding fundamental tradeoffs,” in *ACM SIGCOMM*, 2003, pp. 313–324.
- [37] M. Englert and H. Räcke, „Oblivious Routing for the L_p -norm,” *IEEE Foundations of Computer Science*, pp. 32–40, 2009.
- [38] H. Räcke, „Survey on oblivious routing strategies,” in *Conference on Computability in Europe: Mathematical Theory and Computational Practice*, ser. CiE '09, 2009, pp. 419–429.
- [39] J. He, M. Bresler, M. Chiang, and J. Rexford, „Towards robust multi-layer traffic engineering: Optimization of congestion control and routing,” *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, vol. 25, no. 5, pp. 868–880, June 2007.
- [40] S. Kandula, D. Katabi, B. Davie, and A. Charny, „Walking the Tightrope: Responsive Yet Stable Traffic Engineering,” in *ACM SIGCOMM*, August 2005.
- [41] S. Fischer, N. Kammenhuber, and A. Feldmann, „REPLEX: Dynamic traffic engineering based on wardrop routing policies,” in *CoNEXT'06*, 2006, pp. 1–12.
- [42] H. Wang, H. Xie, L. Qiu, Y. R. Yang, Y. Zhang, and A. Greenberg, „COPE: traffic engineering in dynamic networks,” *SIGCOMM Comput. Commun. Rev.*, vol. 36, no. 4, pp. 99–110, 2006.
- [43] R. Gallager, „A minimum delay routing algorithm using distributed computation,” *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 25, no. 1, pp. 73–85, jan 1977.
- [44] D. P. Bertsekas, „Dynamic behavior of shortest path routing algorithms for communication networks,” *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 27, pp. 60–74, 1982.
- [45] F. Kelly and T. Voice, „Stability of end-to-end algorithms for joint routing and rate control,” *SIGCOMM Comput. Commun. Rev.*, vol. 35, no. 2, pp. 5–12, 2005.
- [46] J.-W. Lee, R. R. Mazumdar, and N. B. Shroff, „Non-convex optimization and rate control for multi-class services in the Internet,” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 13, no. 4, pp. 827–840, 2005.
- [47] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. N. Pistikopoulos, „The explicit linear quadratic regulator for constrained systems,” *Automatica*, vol. 38, pp. 3–20, January 2002.
- [48] J. Rawlings and K. Muske, „The stability of constrained receding horizon control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, no. 10, pp. 1512–1516, 1993.

- [49] P. Grieder, M. Kvasnica, M. Baotic, and M. Morari, „Low complexity control of piecewise affine systems with stability guarantee,” in *American Control Conference*, vol. 2, June 2004.
- [50] P. Grieder and M. Morari, „Complexity reduction of receding horizon control,” *IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, December 2003.
- [51] Z. Wang and J. Crowcroft, „Quality-of-service routing for supporting multimedia applications,” *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, vol. 14, no. 7, pp. 1228–1234, 1996.
- [52] G. Apostolopoulos, R. Guerin, S. Kamat, and S. K. Tripathi, „Quality of service based routing: A performance perspective,” in *ACM SIGCOMM*, 1998, pp. 17–28.
- [53] Q. Ma and P. Steenkiste, „On path selection for traffic with bandwidth guarantees,” in *International Conference on Network Protocols (ICNP '97)*, 1997, p. 191.
- [54] O. Younis and S. Fahmy, „Constraint-based routing in the Internet: Basic principles and recent research,” *Communications Surveys Tutorials, IEEE*, vol. 5, no. 1, pp. 2–13, 2003.
- [55] W. Lee, M. Hluchyi, and P. Humblet, „Routing subject to quality of service constraints in integrated communication networks,” *IEEE Network Magazine*, vol. 9, no. 4, pp. 46–55, July-August 1999.
- [56] M. Caesar and J. Rexford, „BGP routing policies in ISP networks,” EECS Department, University of California, Berkeley, Tech. Rep. UCB/CSD-05-1377, 2005. [Online]. Available: <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2005/6507.html>
- [57] P. Fraigniaud and C. Gavoille, „Memory requirement for universal routing schemes,” in *ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, ser. PODC '95, 1995, pp. 223–230.
- [58] C. Gavoille and S. Pérennès, „Memory requirement for routing in distributed networks,” in *ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, ser. PODC '96, 1996, pp. 125–133.
- [59] L. Cowen, „Compact routing with minimum stretch,” in *ACM-SIAM SODA '99*, 1999, pp. 255–260.
- [60] M. Thorup and U. Zwick, „Compact routing schemes,” in *ACM SPAA '01*, 2001, pp. 1–10.
- [61] C. Gavoille, „Routing in distributed networks: Overview and open problems,” *ACM SIGACT News*, vol. 32, no. 1, p. 52, 2001.
- [62] D. Krioukov, kc claffy, K. Fall, and A. Brady, „On compact routing for the Internet,” *ACM Comp. Comm. Review*, vol. 37, no. 3, pp. 41–52, 2007.

- [63] C. Gavoille, „An overview on compact routing,” in *Workshop on Peer-to-Peer, Routing in Complex Graphs, and Network Coding*, 2007.
- [64] J. Sobrinho, „Algebra and algorithms for QoS path computation and hop-by-hop routing in the Internet,” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 10, pp. 541–550, August 2002.
- [65] J. Sobrinho, „Network routing with path vector protocols: Theory and applications,” in *ACM SIGCOMM*, 2003, pp. 49–60.
- [66] T. Griffin and J. Sobrinho, „Metarouting,” in *ACM SIGCOMM*, 2005, pp. 1–12.
- [67] A. Gurney and T. Griffin, „Lexicographic products in metarouting,” in *Network Protocols, IEEE International Conference on*, 2007, pp. 113–122.
- [68] C.-K. Chau, R. Gibbens, and T. G. Griffin, „Towards a unified theory of policy-based routing,” in *IEEE INFOCOM*, 2006, pp. 1–12.
- [69] M. Gondran and M. Minoux, *Graphs, Dioids and Semirings: New Models and Algorithms*, 1st ed., ser. Operations Research/Computer Science Interfaces Series. New York: Springer Publishing Company, 2008.
- [70] W. Wu, *Packet Forwarding Technologies*. Auerbach, 2008.
- [71] A. McAuley and P. Francis, „Fast routing table lookup using CAMs,” in *IEEE INFOCOM*, 1993, pp. 1382–1391.
- [72] S. Nilsson and G. Karlsson, „IP-address lookup using LC-tries,” *IEEE JSAC*, vol. 17, no. 6, pp. 1083–1092, 1999.
- [73] G. Cheung and S. McCanne, „Optimal routing table design for IP address lookups under memory constraints,” in *IEEE INFOCOM*, 1999, pp. 1437–1444.
- [74] M. Bando, Y.-L. Lin, and H. J. Chao, „FlashTrie: Beyond 100-Gb/s IP route lookup using hash-based prefix-compressed trie,” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 20, no. 4, pp. 1262–1275, 2012.
- [75] P. Gupta, B. Prabhakar, and S. P. Boyd, „Near optimal routing lookups with bounded worst case performance,” in *IEEE INFOCOM*, 2000, pp. 1184–1192.
- [76] M. Degermark, A. Brodnik, S. Carlsson, and S. Pink, „Small forwarding tables for fast routing lookups,” in *ACM SIGCOMM*, 1997, pp. 3–14.
- [77] S. Dharmapurikar, P. Krishnamurthy, and D. E. Taylor, „Longest prefix matching using Bloom filters,” in *ACM SIGCOMM*, 2003, pp. 201–212.
- [78] R. Draves, C. King, S. Venkatachary, and B. Zill, „Constructing optimal IP routing tables,” in *IEEE INFOCOM*, 1999.

- [79] W. Eatherton, G. Varghese, and Z. Dittia, „Tree bitmap: Hardware/software IP lookups with incremental updates,” *SIGCOMM Comput. Commun. Rev.*, vol. 34, no. 2, pp. 97–122, 2004.
- [80] S. Han, K. Jang, K. Park, and S. Moon, „PacketShader: a GPU-accelerated software router,” in *ACM SIGCOMM*, 2010, pp. 195–206.
- [81] J. Hasan and T. N. Vijaykumar, „Dynamic pipelining: Making IP-lookup truly scalable,” in *ACM SIGCOMM*, 2005, pp. 205–216.
- [82] I. Ioannidis and A. Grama, „Level compressed DAGs for lookup tables,” *Comput. Netw.*, vol. 49, no. 2, pp. 147–160, 2005.
- [83] Y. Liu, S. O. Amin, and L. Wang, „Efficient FIB caching using minimal non-overlapping prefixes,” *SIGCOMM Comput. Commun. Rev.*, vol. 43, no. 1, pp. 14–21, Jan. 2012.
- [84] K. Sklower, „A tree-based packet routing table for Berkeley UNIX,” Technical Report, Berkeley, 1991.
- [85] H. Song, J. Turner, and J. Lockwood, „Shape shifting tries for faster IP route lookup,” in *IEEE ICNP*, 2005, pp. 358–367.
- [86] V. Srinivasan and G. Varghese, „Faster IP lookups using controlled prefix expansion,” *SIGMETRICS Perform. Eval. Rev.*, vol. 26, no. 1, pp. 1–10, 1998.
- [87] Z. A. Uzmi, M. Nebel, A. Tariq, S. Jawad, R. Chen, A. Shaikh, J. Wang, and P. Francis, „SMALTA: Practical and near-optimal FIB aggregation,” in *ACM CoNEXT*, 2011, pp. 1–12.
- [88] M. Zec, L. Rizzo, and M. Mikuc, „DXR: Towards a billion routing lookups per second in software,” *SIGCOMM Comput. Commun. Rev.*, vol. 42, no. 5, pp. 29–36, 2012.
- [89] M. Waldvogel, G. Varghese, J. Turner, and B. Plattner, „Scalable high speed IP routing lookups,” in *ACM SIGCOMM*, 1997, pp. 25–36.