Hiperbolikus wavelet transzformált és alkalmazásai

MTA doktori értekezés tézisei

Pap Margit

Pécsi Tudományegyetem

2021

dc_1842_20

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Jelölések

- $\mathbb{C}$ a komplex számok halmaza
- $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : |z| < 1 \ \}$ az egységkörlap
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : |z| = 1 \ \}$ az egységkör
- $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ a felső félsík
- $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ a $\mathbb{D}$-n analitikus függvények halmaza
- $\mathcal{A}(\mathbb{C}_+)$ a $\mathbb{C}_+$-n analitikus függvények halmaza
- $\|f_r\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt\right)^{1/2}$
- $H^2(\mathbb{D})$ az egységkörlapon vett Hardy-tér
- $H^2(\mathbb{T})$ az egységkör Hardy-tere
- $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+)$ a felső félsík Hardy-tere
- $H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \, sup\hat{f} \subset [0, +\infty)\}$
- $A(\mathbb{D})$ a diszk-algebra
- $K(z,w) = k_w(z) = \frac{1}{1-\overline{w}z} \quad z, w \in \mathbb{D}$ az egységkör Cauchy-féle magfüggvénye
- $C : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D}, C(\omega) = \frac{i-\omega}{i+\omega}$ Cayley-transzformált
- $dA_\alpha(z) := \frac{\alpha+1}{\pi}(1-|z|^2)^\alpha \, dxdy$, $z = x+iy$ a $\mathbb{D}$-n vett súlyozott területmérték

- ${A_\alpha}^p := \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) < \infty\}$, $\alpha > -1$, $0 < p < \infty$, a súlyozott Bergman-tér
- $A^2 = A_0^2$ a Bergman-tér
- $K_\alpha(\xi, z) = \frac{1}{(1-\bar{z}\xi)^{\alpha+2}}$ az A_α^2 súlyozott Bergman-tér reprodukáló magfüggvénye
- $P_\alpha : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \to A_\alpha^2$, $P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\xi) \frac{1}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}} dA_\alpha(\xi)$ a súlyozott Bergman-projekció
- Affin csoport: $\mathbb{A} = \{(a, b) : a \in (0, +\infty), b \in \mathbb{R}\}$, $(a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1)$
- $U_{(a,b)}f(x) = |a|^{-1/2} f(a^{-1}x - b)$ az affin csoport $L^2(\mathbb{R})$-re vett reprezentációja
- $W_\psi f(a, b) = \langle f, U_{(a,b)}\psi \rangle$ a folytonos affin wavelet transzformált
- $(\mathbb{G}, \cdot)$ lokálisan kompakt topologikus csoport
- $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert-tér
- $U_x : H \to H$ $(x \in \mathbb{G})$ a csoport unitér reprezentációja a H Hilbert-térre
- $(V_g f)(x) := \langle f, U_x g \rangle$ $(x \in \mathbb{G}, f, g \in H)$ az f, g paraméter és az U reprezentáció által generált voice-transzformáltja
- $\mathcal{A}_w = \{g \in H : V_g g \in L_w^1(G)\} \neq \{0\}$ egy integrálható reprezentáció w súlyfüggvényhez tartozó elemző vektorainak a halmaza
- $\mathcal{H}_w^1 = \{f \in H : V_g f \in L_w^1(G)\}$ a legegyszerűbb Banach-tér, ahol atomos felbontás érvényes
- $B_a(z) := \epsilon \frac{z-b}{1-\bar{b}z}$ $(z \in \mathbb{C}, \bar{b}z \neq 1)$ Blaschke-függvény
- $\mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}$ $a = (b, \epsilon) \in \mathbb{B}$ a paraméter halmaz
- $\rho(z_1, z_2) := \frac{|z_1-z_2|}{|1-z_1\bar{z}_2|} = |B_{(z_2,1)}(z_1)|$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{D})$ a pszeudo-hiperbolikus metrika
- Blaschke-csoport a $\mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}$ paraméter halmaz a $B_{a_1} \circ B_{a_2} = B_{a_1 \circ a_2}$ függvény-kompozíció által indukált művelettel
- $(U_{a^{-1}} f)(z) := \frac{\sqrt{e^{i\theta}(1-|b|^2)}}{(1-\bar{b}z)} f\left(\frac{e^{i\theta}(z-b)}{1-\bar{b}z}\right)$ $\left(z = e^{it} \in \mathbb{T}, a = (b, e^{i\theta}) \in \mathbf{B}\right)$ a Blaschke-csoport $H^2(\mathbb{T})$-re vett reprezentációja
- $Z_n^\ell(\rho, \theta) := \sqrt{2n + |\ell| + 1}\, R_{|\ell|+2n}^{|\ell|}(\rho) e^{i\ell\theta}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a komplex Zernike-polinomok polárkoordinátás alakja

- $R^{|\ell|}_{|\ell|+2n}(\rho) = \rho^{|\ell|} P_n^{(0,|\ell|)}(2\rho^2 - 1)$ a radiális rész a Jacobi-polinomokkal kifejezve
- $(U^{\alpha}_{a^{-1}} f)(z) := e^{i\frac{\alpha+2}{2}\psi} \frac{(1-|b|^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}{(1-\bar{b}z)^{\alpha+2}} f\left(e^{i\psi}\frac{z-b}{1-\bar{b}z}\right)$ $(a = (b, e^{i\psi}) \in \mathbb{B})$ a Blaschke-csoport reprezentációja az A^2_α súlyozott Bergman-térre
- $\Phi_n = \Phi_n^a\,(n \in \mathbb{N}^*)$, $\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{1-|a_1|^2}}{1-\overline{a_1}z}, \Phi_n(z) = \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{1-\overline{a_n}z}\prod_{k=1}^{n-1} B_{a_k}(z)$, $n \geqslant 2$ a Malmquist-Takenaka (M-T) rendszer $H^2(\mathbb{T})$-ben
- $\Psi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Phi_1(-1)}{z-\bar{\lambda}_{a_1}}$, $\quad \Psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Phi_n(-1)}{z-\bar{\lambda}_{a_n}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{z-\lambda_{a_k}}{z-\bar{\lambda}_{a_k}}$, $\lambda_a := C^{-1}(a) = i\frac{1-a}{1+a}$ a Malmquist-Takenaka (M-T) rendszer a $H^2(\mathbb{C}_+)$-ben

1.2. Affine wavelek és multirezolúció az $L^2(\mathbb{R})$ térben

A "wavelet" fogalmát Morlet vezette be 1982-ban [49]. A "wavelet" kis hullámot jelent. A wavelet transzformáltat legelőször a szeizmatikus mozgások tanulmányozására használták. Az inverz wavelet transzformáltat Grossmann tanulmányozta. Így Morlet és Grossmann [32] közreműködésével kezdődött el a folytonos wavelet transzformált tulajdonságainak vizsgálata és alkalmazása. Az általuk vizsgált transzformációt affin wavelet transzformációnak is szokás nevezni, mert az affin csoport egy reprezentációja generálja.

A 80-as évektől kezdődően nagyon sok eredményt publikáltak ezen a területen: Grossman, Morlet [32], Grossman, Morlet, Paul [33], Daubechies [14], Meyer [48], Chui [11] stb.

Egy fontos kérdéskör a folytonos wavelet transzformált diszkretizációja volt, azaz olyan ψ függvény keresése, amelyből kiindulva diszkrét dilatációval és eltolással

$$\psi_{n,k} = 2^{-n/2}\psi(2^{-n}x - k) \tag{1.1}$$

alakú (ortonormált) bázis szerkeszthető $L^2(\mathbb{R})$-ben, és amely multirezolúció analízist generál (Daubechies [14], Heil, Walnut [38], Mallat[46] stb.).

Az affin wavelet multirezolúció definíciója a következő:

1.2.1. Definíció. *Az $L^2(\mathbb{R})$ tér $(V_j,\ j \in \mathbb{Z})$ alterei ψ wavelet függvényhez tartozó multirezolúció analízist alkotnak, ha a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:*

1. *(egymásba ágyazott alterek)* $V_j \subset V_{j+1}$
2. *(sűrűségi feltétel)* $\overline{\cup V_j} = L^2(R)$
3. *(szeparálhatósági feltétel)* $\cap V_j = \{0\}$
4. *(wavelet bázis létezése) A ψ függvénynek a V_0 eleme és a $\{2^{n/2}\psi(2^n x - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ egy (ortonormált) bázis a V_n-ben.*

Kettővel való dilatációval egy magasabb rezolúciós szintre jutunk, azaz teljesül a következő tulajdonság:($f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(2x) \in V_{n+1}$). Egész számmal való transzlációval pedig ugyanazon a szinten maradunk.

A legegyszerűbb multirezolúciót a Haar-wavelet generálja az $L^2 := L^2([0,1))$-ben. A Haar-waveletet Haar Alfréd vezette be 1909-ben. Elemeit a következő függvényből lehet generálni transzlációval és dilatációval:

$$h(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0,1/2)) \\ -1 & (x \in [1/2,1)) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}\backslash[0,1)), \end{cases}$$

$$h_0(x) = h(x),\ h_{nk}(x) := 2^{-n/2}h(2^n x - k),\ (x \in [0,1),\ n,k \in \mathbb{N}).$$

Mivel a Haar-rendszer tagjai nem folytonosak, ezért nem alkalmasak simasági feltételeknek eleget tevő függvények approximálására. Az 1980-as évektől kezdődően Meyer és Daubechies - többek közt - kiindulva egy ψ anyawaveletből

$$\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\psi(2^n x - k)\ \ (x \in \mathbb{R}, \psi \in L^2(\mathbb{R}), \|\psi\|_2 = 1).$$

alakú simasági feltételeknek eleget tevő ortonormált wavelet rendszerek konstrukcióját vizsgálta. A Haar-rendszer kivételével ez a konstrukció nem könnyű feladat. A konstrukció során a ψ anyawavelet $\widehat{\psi}$ Fourier-transzformáltjára lehet kezelhető összefüggést megadni. Annak ellenére, hogy a ψ függvényt nem lehet általában expliciten megadni, mégis a wavelet-Fourier sorfejtés jó konvergencia tulajdonságokkal rendelkezik, ennek magfüggvénye és együtthatói jól közelíthetőek.

A wavelet analízist nagyon sok helyen alkalmazzák a matematikában, fizikában, mérnöki alkalmazásoknál, jel- és képfeldolgozásban.

Reguláris (analitikus) affin waveletek és ezek által generált multirezolúció szerkesztését először Meyer fogalmazta meg a $H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}),\, sup\hat{f} \subset [0,+\infty)\}$ térben. Auscher 1995-ben publikált erre vonatkozóan eredményeket [4].

Később látni fogjuk, hogy a $H^2(\mathbb{R})$-beli konstrukciót úgy közelítjük meg, hogy helyette tekintjük ezen függvények felső félsíkra vett analitikus kiterjesztését, és a $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+)$ térben vezetünk be multirezolúciót. Kiindulási pontnak az affin csoport helyett a racionális törtfüggvények egy alosztálya által generált csoportot tekintjük, az ú.n. Blasche-csoportot. Ezen csoport reprezentációi által generálunk wavelet transzformáltat az egységkör Hardyterében és a súlyozott Bergman-terekben. Vizsgáljuk ezen transzformáltak tulajdonságait és ezen terekben konstruálunk adaptált multirezolúciókat.

A tézisben feltüntetett eredményeket a következő cikkekben publikáltam: [20, 21, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67]. Ezen cikkek közül 9 egyszerzős és 9 társszerzős cikk.

Köszönettel tartozom szerzőtársaimnak, akikkel közösen elért eredményeink is szerepelnek a dolgozatokban:

- Schipp Ferenc, professzor emeritus, ELTE IK, Numerikus Analízis Tanszék, a PTE díszdoktora és professzor emeritusa, aki tanszékvezetőmként elindított ezen a kutatási területen,
- Feichtinger Hans Georg, professzor, University of Vienna, a Numerical Harmonic Analysis Group (NuHAG) vezetője, aki a Marie Curie FP7 Individual pályázatom ideje alatt koordinálta a csoportban töltött 2 évem munkáját.

1.3. Analikus függvényterek

A következő függvényterek fordulnak elő a tézisben: $\mathcal{A}(\mathbb{D})$-vel jelölöm a $\mathbb{D}$ egységkörlapon analitikus függvények halmazát, $\mathcal{A}(\mathbb{C}_+)$ a $\mathbb{C}_+$ felső félsíkon analitikus függvények halmaza. További jelölések: $H^2(\mathbb{D})$ az egységkörlapon vett Hardy-tér, $H^2(\mathbb{T})$ az egységkör Hardy-tere, $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+)$ a felső félsík Hardy-tere, $A(\mathbb{D})$ pedig a diszk-algebra.

Tekintjük a $dA_\alpha(z) := \frac{\alpha+1}{\pi}(1-|z|^2)^\alpha\, dxdy$, $z = x+iy$ a $\mathbb{D}$-n vett súlyozott területmértéket és az általa indukált $A^p_\alpha := \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) < \infty\}$, $\alpha > -1$, $0 < p < \infty$, súlyozott Bergman-teret.

1.4. A voice transzformált

Grosman, Morlet, Paul [33] észrevette, hogy a folytonos affin wavelet traszformált tulajdonságai az affin csoport reprezentációjának tulajdonságaitól függnek.

Ha az affin csoport helyett kiindulási pontnak egy $(\mathbb{G}, \cdot)$ lokálisan kompakt topologikus csoportot tekintünk, és annak vesszük valamely H Hilbert-térre az $U_x : H \to H$ $(x \in \mathbb{G})$ unitér reprezentációját, akkor egy általános transzformációt, az ún. voice transzformációt definiálhatunk a következőképpen:

$$(V_g f)(x) := \langle f, U_x g\rangle \quad (x \in \mathbb{G}, f, g \in H). \tag{1.2}$$

A $(V_g f)(x)$ az f elem U reprezentáció által generált g paramétertől függő voice transzformáltja, amely egy G csoporton definiált komplex értékű függvény lesz. A "voice transzformált" nevet először Grossman, Morlet, Paul használták a [33] cikkükben.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából nagyon fontos Gábor-transzformált a Heisenberg-csoport reprezentációja által generált voice transzformáltként fogható fel (Heil, Walnut [38], Gröchenig [36], stb.). Nagyon gazdag a Gábor-transzformálttal kapcsolatos szakirodalom is. Ezek közül kiemelném Feichtinger és Weisz cikkeit [22, 81, 23, 82].

A különböző speciális voice-transzformáltak diszkretizációját különböző technikákkal lehet megvalósítani. Az affin wavelet transzformált esetén a multirezolúció analízis szerkesztése egy járható út, amelyet Mallat vezetett be [46]. A Gábor-transzformált esetében, ún. atomos felbontások lehetségesek. Feichtinger és Gröchenig egy egységes eljárást adott olyan voice transzformált diszkretizációjára, amelyet négyzetesen integrálható és integrálható reprezentáció generál. Ezzel a módszerrel az ún. coorbit-terekben kapunk atomos felbontásokat (Fiechtinger, Gröchenig [17, 19, 18, 35]).

1.5. Az értekezés eredményeiről

Ezt az értekezést az utóbbi 17 évben kifejtett kutatómunkám alapján írtam. Azokat az eredményeimet gyűjtöttem össze, amelyeket a legfontosabbaknak tartok és amelyek kapcsolódnak az 1.4 szakaszban leírtakhoz. Ezeket az eredményeimet a következő egyszerzős dolgozataimban: [53, 54, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 67], valamint a következő társszerzős cikkeimben: [20, 21], (társszerző Hans Georg Feichtinger), [52, 55, 56, 57, 58, 64, 65] (társszerző Schipp Ferenc) publikáltam. Bemutatom az irodalombeli fontosabb előzetes eredményeket és azokat, amelyek az én dolgozataim után születtek. Kiemelek alkalmazási vonatkozásokat is.

Mivel a Blaschke-függvények fontos szerepet játszanak az analitikus függvények elméletében (például a Hardy-térbeli függvények faktorizálásában), ezért természetesen merült fel, hogy a lineáris függvények kompozíciója által generált affin csoport helyett tekintsük a Blaschke-függvények kompozíciója által generált csoport voice transzformáltjait és ezek diszkretizálásával szerkesszünk multirezolúció analízist és atomos felbontásokat az analitikus függvények altereiben.

A 2.1 fejezetben bevezetjük a Blaschke-csoportot és vizsgáljuk a legfontosabb tulajdonságait. Mivel a pszeudo-hiperbolikus metrika és a hiperbolikus kongruenciák kifejezhetők a Blaschke-függvények segítségével, ezért a Blaschke-csoport voice transzformáltjait hiperbolikus wavelet transzformáltaknak nevezzük.

A 2.2 fejezet a Blaschke-csoport egységkör Hardy-terére vett reprezentációja által generált hiperbolikus wavelet transzformálttal kapcsolatos eredményeket tartalmazza [56, 57].

A 2.2.1 alfejezetben a $H^2(\mathbb{T})$ térre vonatkozó, [60, 63] cikkekben publikált, adaptált multirezolúciós analízis szerkesztését és tulajdonságait mutatom be. Ennek a konstrukciónak számos előnye van, jól alkalmazható jelek transzferfüggvényeinek approximálására. A konstrukció során a Fourier-technika helyett a lokalizált Cauchy-magfüggvényeket használjuk, a bizonyításban pedig a Cauchy-formulát. A multirezolúció szintjei véges dimenziósak, de mégis eleget tesznek a sűrűségi feltételnek. Az ortonormált wavelet rendszer függvényei zárt explicit alakban adhatók meg a speciálisan lokalizált pólusú Malmquist-Takenaka rendszer segítségével.

A 2.2.2 alfejezetben az n-edik multirezolúciós szintre vett ($P_n f$, $n \in \mathbb{N}$) projekciós operátor tulajdonságait mutatom be. Ez a projekciós operátor egyben interpolációs tulajdonságokkal is rendelkezik, amely nem teljesül az affin waveletek esetében.

A 2.2.3 alfejezet egy algoritmust tartalmaz a wavelet együtthatók és $P_n f$ kiszámolására, ha ismert a függvény értéke a megadott $\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ halmazon.

A 2.2.4 alfejezetben igazoljuk, hogy a szerkesztett hiperbolikus wavelet rendszer diszkrét ortogonális tulajdonsággal is rendelkezik.

A 2.3 fejezetben megmutatjuk, hogy az előző konstrukciót hogyan lehet átvinni a felső félsíkon vett Hardy-térre (Feichtinger, Pap [20]). Mivel a felső félsíkon vett Hardy-tér határfüggvényei adják a $H^2(\mathbb{R})$ teret, így itt is egy adaptált multirezolúciót generáltunk. Ez a wavelet konstrukció kapcsolódik a Meyer által megfogalmazott problémához.

A 2.4 fejezet az egységkör Hardy-terén bevezetett hiperbolikus wavelet transzformált és a Zernike-függvények kapcsolatát tartalmazza. Ezen függvényeket Fritz Zernike Nobel-díjas fizikus vezette be [84]. Igazoltuk, hogy a tanszformáltat generáló reprezentáció mátrix-elemei kifejezhetők a Zernike-függvényekkel. Egy fontos következménye ennek az eredménynek a Zernike-függvényekre vonatkozó addíciós képlet, amely nyitott kérdés volt hosszú ideig (Pap, Schipp [57]).

Zernike-függvényeket az optikában, a hullámfront abberációk, a szem hibáink leírására is használják. Ezek kifejezhetőek a Zernike-függvény szerinti sorfejtés együtthatói segítségével.

Az együtthatók approximálására különböző mérési eljárásokat javasoltak. Ezzel kapcsolatosan merült fel a Zernike-függvények diszkrét ortogonalitásának kérdése például Wyant, Creath [80] munkáiban. A 2.4.3 alfejezt a Zernike-függvények diszkrét ortogonalitására vonatkozó eredményeket tartalmazza (Pap, Schipp [55]).

A 2.4.4 alfejezetben megmutatjuk, hogy hogyan lehet közelíteni, bizonyos függvények esetében pontosan kiszámolni, a Zernike-függvények szerinti sorfejtés együtthatóit és bizonyítjuk matematikailag az állításunkat (Banach-Steinhaus tétel alkalmazásával). Ezen elméleti eredményeket numerikusan implementáltuk és teszteltük szaruhártya-szerű teszt felületeken is (Soumelidis, Fazekas, Schipp, Pap [72, 73, 74]).

A 3. fejezet a Blaschke-csoport A^2_α ($\alpha \geqslant 0$) súlyozott Bergman-térre vett reprezentációja által generált hiperbolikus wavelet transzformálttal kapcsolatos legfontosabb eredményeket tartalmazza.

A 3.1 fejezetben bemutatjuk, hogy a Blaschke-csoport A^2_α súlyozott Bergman-térre vett reprezentációja unitér és irreducibilis (Pap [59]).

A 3.2, 3.3 fejezetek a súlyozott Bergman-téren vett hiperbolikus wavelet transzformált legfontosabb tulajdonságait és a súlyozott Bergman-tér projekciós operátora közötti kapcsolatát tartalmazza (Pap [59, 61]).

A 3.4 fejezet az A^2_α súlyozott Bergman-téren vett hiperbolikus wavelet transzformált diszkretizációjával foglalkozik. Az α paraméter értékétől függően különböző technikákat kell alkalmazni. Először bemutatjuk a Feichtinger-Gröchenig által bevezetett általános technikát, amelyet négyzetesen integrálható és integrálható reprezentációk által indukált voice transzformáltak diszkretizációjára alkalmaztak.

A 3.4.2 alfejezetben azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor alkalmazható a Feichtinger-Gröchenig elmélet. Ezzel a technikával új atomos felbontásokat kapunk ezekben súlyozott Bergman-terekben (Pap [61]). Megmutatjuk, hogy a $\mathcal{B}_1$ minimális Möbius invariáns tér minden eleme egy új atomos felbontást generál. Pontosabban, ha $f \in \mathcal{H}^1$, akkor minden $g \in \mathcal{B}_1 \cup \{1\}$ egy $U^{\alpha}_{x_i^{-1}} g$ alakú atomos felbontást generál. Továbbá ha $p > 2 + \frac{4}{\alpha}$, akkor $A^p_\alpha \subset \mathcal{H}^1$, és bármely $f \in A^p_\alpha$, előállítható a következő atomos felbontás segítségével

$$f = \sum \lambda_i(f) U^{\alpha}_{x_i^{-1}} g, \tag{1.3}$$

feltéve ha az $\alpha > 0$ és $p > 2 + \frac{4}{\alpha}$ feltételek teljesülnek.

Az előző feltételekből látszik, hogy a Feichtinger-Gröchenig módszer alkalmazásához szükséges integrálhatósági feltétel nem minden esetben teljesül. Igazoltam, hogy ezekben az esetekben, hasonlóan mint az egységkör Hardy-terében, adaptált multirezolúciós analízis szerkeszthető (Pap [62, 67]). Ezeket az eredményeket a 3.5. fejezetben mutatom be. Először ezeket az eredményeket a Bergman-térben igazoltam (Pap [62]), majd később kiterjesztettem a súlyozott Bergman-terekre is (Pap[67]). Ebben az esetben a konstrukcióhoz először a Blaschke-csoport olyan diszkrét részhalmazát kell tekinteni, amely rendelkezik a mérési pontok (sampling set) tulajdonságával (3.5.1 alfejezet). Ilyen ponthalmaz szerkesztése általában nem könnyű feladat. Ha a súlyozott Bergman-tér magfüggvényét lokalizáljuk egy mérési ponthalmazon, akkor ezáltal framet generálunk. Ezek segítségével definiáltam a multirezolúció szintjeit (3.5.2 alfejezet). A következő nehézség ebben az esetben a multirezolúciós szinteken az ortonormált wavelet rendszer szerkesztése. Míg a Hardy-téren zárt alakban meg tudtuk adni, a spciálisan lokalizált pólusú Malmquist-Takenaka rendszert kaptuk, addig ebben az esetben ez nem lehetséges. De egy algoritmust adtunk a rendszer függvényeinek generálására.

Hasonlóan mint a Hardy-térben, igazolni lehet, hogy bár a multirezolúció szintjei véges dimenziósak, de mégis eleget tesznek a sűrűségi feltételnek. Az n-edik multirezolúciós szintre vett ($P_n f$, $n \in \mathbb{N}$) projekciós operátor ebben az esetben is egyben interpolációs tulajdonságokkal is rendelkezik, amely nem teljesül az affin waveletek esetében (3.5.3 alfejezet). Algoritmust lehet itt is adni a wavelet együtthatók és $P_n f$ kiszámolására, ha ismert a függvény értéke a megadott mérési halmazon (3.5.4 alfejezet).

A Hardy-téren és a súlyozott Bergman-téren kapott konstrukciók alapján ([60, 62, 67]) a Nowak, Pap [51] dolgozatban összegeztük a konstrukció főbb ötletét általában reprodukáló magfüggvénnyel rendelkező Hilbert-terekben.

Amint láttuk a 2. fejezetben kapott analitikus wavelet rendszerek speciális pólusokkal rendelkező Malquist-Takenaka rendszerek. A 4. fejezetben az egységkörön és félsíkon általános paraméterekkel rendelkező Malmquist-Takenaka rendszerek diszkretizációjával és a diszkretizációs pontrendszerek tulajdonságaival foglalkozunk. Igazoljuk, hogy a diszkretizáció alapjául szolgáló pontrendszerek mindkét esetben bizonyos egyensúlyi feltételeknek tesznek eleget és logaritmikus potenciálok stacionárius pontjai. Ezen eredmények a következő cikkekből vannak: Pap, Schipp [52, 53, 64], ahol megfogalmaztuk azt a kérdést is, hogy ezen stacionárius pontok minimumhelyei lesznek-e a logaritmikus potenciáloknak. Speciális esetben pozitív választ adtunk erre a kérdésre. Az általános esetben feltett kérdésre adott pozitív választ nemrég Gaál, Nagy-Csiha, Révész adták meg a [27] cikkben.

Az 5. fejezetben néhány eredmény kvaterniókra vett kiterjesztését mutatjuk be. Az 5.2 fejezetben a Pap, Schipp [65] cikk alapján bevezetjük a Blaschke-csoport analogonját a kvaterniók halmazában és bemutatjuk a legfontosabb tulajdonságait. Az analitikus függvények fogalma többféle módon is kiterjeszthető a kvaterniókra. Ezen kiterjesztések közül az ún. reguláris (slice regular) függvény fogalmat 2006-ban vezette be Gentili, Stoppato, Struppa [28, 29, 30]). Nagyon sok komplex analitikus függvényekkel kapcsolatos eredmény analogonja érvényes ezekre a függvényekre is. Az reguláris függvények terében Pap a [66] bevezette a Malmquist-Takenaka rendszer általánosítását. Ez a rendszer egyidőben reguláris és zárt alakra hozható, továbbá rendelkezik a komplex rendszer legfontosabb tulajdonságaival. Ezeket az eredményeket az 5.3 fejezetben mutatjuk be.

2. fejezet

Hiperbolikus wavelet transzformált a Hardy-téren

2.1. A Blaschke-csoport

Tekintsük az egységkörlapot és az egységkört: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. A lineáris függvények kompozíciója helyett tekintjük a $\mathbb{B} := \mathbb{D} \times \mathbb{T}$ paraméter tartományban a

$$B_a(z) := \epsilon \frac{z-b}{1-\bar{b}z} \quad (z \in \mathbb{C},\, \bar{b}z \neq 1)$$

Blaschke-függvények kompozíciója által generált csoportot, az ún. Blaschke-csoportot.

A Blaschke-csoport jelölése $(\mathbb{B}, \circ)$, ahol két elem között a $(B_{a_1} \circ B_{a_2})(z) := B_{(a_1 \circ a_2)}(z)$ generálja a műveletet.

A $\mathbb{D}$-n értelmezett pszeudo-hiperbolikus metrika kifejezhető a Blaschke-függvényekkel:

$$\rho(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 \bar{z}_2|} = |B_{(z_2,1)}(z_1)| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{D}).$$

Tanulmányoztuk a Blaschke-csoport reprezentáció által indukált hiperbolikus wavelet transzformáltakat az egységkör Hardy-terén, valamint a súlyozott Bergman-térben. Ezen reprezentációk egy közös formulával a következőképpen adhatók meg:

$$(U^m_{a^{-1}} f)(z) := \left(e^{i\frac{1}{2}\psi} \frac{(1-|b|^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-\bar{b}z)} \right)^m f\left(e^{i\psi} \frac{z-b}{1-\bar{b}z} \right), (a = (b, e^{i\psi}) \in \mathbb{B}). \tag{2.1}$$

Ha $m = 1$ és $f \in H^2(\mathbb{T})$, akkor (2.1) a Blaschke-csoportnak a $H^2(\mathbb{T})$ Hardy-térre vett reprezentációja.

Ha $m = \alpha + 2$ és $f \in A^2_\alpha$, akkor a fenti a (2.1) formula a Blaschke-csoportnak az A^2_α súlyozott Bergman-térre reprezentációját definiálja.

Értekezésemben a Blaschke-csoport (2.1) reprezentációi által generált voice transzformáltjaival, a

$$(V_g^m f)(a^{-1}) := \langle f, U_{a^{-1}}^m g \rangle, \tag{2.2}$$

képlettel definiált ún. hiperbolikus wavelet taraszformáltjaival kapcsolatos eredményeimet mutatom be. Különböző esetekben vizsgálom a diszkretizálás kérdését, multirezolúció analízist és atomos felbontásokat szerkesztek az analitikus függvények altereiben.

2.2. A hiperbolikus wavelet transzformált a $H^2(\mathbb{T})$-n

2.2.1. Multirezolúció a $H^2(\mathbb{T})$-ben

Ebben a szakaszban az $m = 1$ esetet tekintjük. Igazoltuk, hogy

$$(U_{a^{-1}} f)(z) := \frac{\sqrt{e^{i\theta}(1-|b|^2)}}{(1-\bar{b}z)} f\left(\frac{e^{i\theta}(z-b)}{1-\bar{b}z}\right) \quad \big(z = e^{it} \in \mathbb{T}, a = (b, e^{i\theta}) \in \mathbf{B}\big), \tag{2.3}$$

egy unitér reprezentációja a Blaschke-csoportnak a $H^2(\mathbb{T})$-re. Továbbá tanulmányoztuk az általa indukált hiperbolikus wavelet transzformált, a

$$(V_g f)(a^{-1}) := \langle f, U_{a^{-1}} g \rangle \quad (f, g \in H^2(\mathbb{T})) \tag{2.4}$$

tulajdonságait [56, 57].

A 2.2.1 alfejezetben a $H^2(\mathbb{T})$ térre vonatkozóan, a [60, 63] cikkemben publikált, adaptált multirezolúciós analízis szerkesztését és tulajdonságait mutatom be.

Tekintsük a Blaschke-csoport következő diszkrét részcsoportját:

$$\mathbf{B}_1 = \left\{(r_k, 1) : \ r_k = \frac{2^k - 2^{-k}}{2^k + 2^{-k}}, \ k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{2.5}$$

Könnyű belátni, hogy $(r_k, 1) \circ (r_n, 1) = (r_{k+n}, 1)$ és $\rho(r_k, r_n) = |r_{k-n}|$. Következésképpen a $(r_k,\ k \in \mathbb{N})$ sorozat a $[0, 1)$ intervallum egy ekvidisztans felosztását alkotja a pszeodo-hiperbolikus metrikában.

Tekintsük az egységkörlap következő diszkrét részhalmazát

$$A = \{z_{k\ell} = r_k e^{i\frac{2\pi\ell}{2^{2k}}}, \quad \ell = 0, 1, \cdots, 2^{2k} - 1, \ \ k = 0, 1, 2, \cdots, \infty\} \tag{2.6}$$

és rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén a k-adik szint legyen az r_k sugarú körről a következő pontok halmaza:

$$A_k = \{z_{k\ell} = r_k e^{i\frac{2\pi\ell}{2^{2k}}}, \ \ell \in \{0, 1, \cdots, 2^{2k} - 1\}\}. \tag{2.7}$$

Tekintsük a $\varphi = 1$ skálázási függvényt és legyen a rezolúció 0-dik szintje: $V_0 = \{c\varphi,\ c \in \mathbb{C}\}$. A rezolúció V_n szintjét a következő $\cup_{k=0}^{n} A_k$ halmazhoz tartozó lokalizált és normalizált Cauchy-magfüggvényekkel definiáljuk:

$$\varphi_{k\ell}(z) = \frac{\sqrt{(1-r_k^2)}}{(1-\overline{z_{k\ell}}z)} = (U_{((r_k,1)^{-1}}\varphi)(e^{i(t-\frac{2\pi\ell}{2^{2k}})}), \quad k = 0,\cdots,n, \quad \ell = 0,1,\cdots,2^{2k}-1, \tag{2.8}$$

$$V_n = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{2^{2k}-1} c_{k\ell}\varphi_{k\ell},\ c_{k,\ell} \in \mathbb{C}\ \}. \tag{2.9}$$

A [60] cikkben igazoltam, hogy a $\{V_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ alterek rendelkeznek az adaptált multirezolúció tulajdonságaival (MRA):

1. (egymásba ágyazottak) $V_j \subset V_{j+1}$,
2. (sürűségi feltétel) $\overline{\cup V_j} = H^2(T)$
3. (dilatáció analogonja) $U_{(r_1,1)^{-1}}(V_j) \subset V_{j+1}$
4. (bázis létezése) Létezik $\{\psi_{k\ell},\ k = 0,\cdots,n,\ \ell = 0,1,\cdots,2^{2k}-1\}$ (ortonormált) bázis V_n-ben.

Az ortonormált bázis V_n-ben a $\cup_{k=0}^{n} A_k$ ponthalmazhoz tartozó Malmquist-Takenaka rendszer ([47], [77]):

$$\psi_{m\ell}(z) = \frac{\sqrt{1-r_m^2}}{1-\overline{z_{m\ell}}z} \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{j=0}^{2^{2k}-1} \frac{z-z_{kj}}{1-\overline{z_{kj}}z} \prod_{j'=0}^{\ell-1} \frac{z-z_{mj'}}{1-\overline{z_{mj'}}z} \tag{2.10}$$

$$(\ell = 0,1,\cdots,2^{2m}-1,\ \ m = 0,1,2,\cdots,n).$$

Igazoltam, hogy $\cup_{k=1}^{\infty} V_k$ sűrű az $A(\mathbb{D})$ diszkalgebrában is.

2.2.2. A V_n-re vett projekciós operátor tulajdonságai

A 2.2.2 alfejezetben a V_n n-edik multirezolúciós szintre vett ($P_n f$, $n \in \mathbb{N}$) projekciós operátor tulajdonságait mutatom be. Ez a projekciós operátor olyan interpolációs tulajdonságokkal is rendelkezik, amelyek nem teljesülnek az affin waveletek esetében.

Tekintsük az $f \in H^2(\mathbb{T})$ függvény V_n multirezolúciós szintre vett projekcióját:

$$P_n f(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{2^{2k}-1} \langle f, \psi_{k,\ell} \rangle \psi_{k,\ell}(z). \tag{2.11}$$

2.2.1. Tétel (Pap [60]). *Bármely $f \in H^2(\mathbb{T})$ esetén az f függvény V_n-re vett projekciója normában konvergál f-hez. A $P_n f(z) \to f(z)$ konvergencia egyenletes az egységkörlap bármely kompakt részhalmazán. Mi több, bármely $f \in H^2(\mathbb{T})$ esetén a $P_n f$ egyben interpolálja a függvény analitikus kiterjesztését a körlapon a $z_{mj} = r_m e^{i\frac{2\pi j}{2^{2m}}}$, $(j = 0, \cdots, 2^{2m}-1, \;\; m = 0, \cdots, n)$ pontokban, azaz $P_n f(z_{mj}) = f(z_{mj})$.*

Racionális függvények egy osztályára igaz, hogy $P_n f$ a H^∞ normában is konvergál f-hez. (Pap [63]).

2.2.3. Rekonstrukciós algoritmus

A [60] cikkben új eljárást vezettem be a $P_n f$ együtthatóinak kiszámolására. Ezeket az együtthatókat, a $\{b_{k\ell} = \langle f, \psi_{k\ell}\rangle, \; \ell = 0.1, \cdots, 2^{2k}-1 \;\; k = 0, 1, \cdots, n\}$, az f függvény diszkrét hiperbolikus wavelet transzformáltjának nevezzük. Ha mérni tudjuk az f értékeit a $\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ halmazon, akkor az együtthatók pontosan kiszámíthatók és $P_n f$ is pontosan felírható. Kiindulva a $\psi_{k\ell}$ parciális törtekkel való felírásából és felhasználva a Cauchy-formulát az együtthatókat a következőképpen tudjuk meghatározni:

$$\langle f, \psi_{k\ell}\rangle == \sum_{k'=0}^{k-1} \sum_{\ell'=0}^{2^{2k'}-1} \overline{c_{k'\ell'}} f(z_{k'\ell'}) + \sum_{j=0}^{\ell} \overline{c_{kj}} f(z_{kj}),$$

ahol a $c_{kj}, c_{k'\ell'}$ meghatározását is pontosan megadtuk.

Totik a [78] cikkében H^p-beli, illetve diszk-algebra-beli függvények rekonstrukciójára adott eljárást, ha ismert ezek értéke egy egységkörlapbeli $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nem-Blaschke sorozaton. Megmutatta, hogy léteznek olyan $p_{n,j}$ polinomok, amelyekre $\sum_{j=1}^{n} f(z_j)p_{n,j}$ normában konvergál f-hez. A $p_{n,j}$ együtthatóit azonban nem lehet pontosan meghatározni $f(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ismeretében.

Cerejeiras, Chen, Gomes és Hartmann a [8] cikkükben adott jelek transzferfüggvényére adtak tömörítési eljárást a Takenaka-Malmquist rendszer segítségével. Numerikus eljárásokat vizsgáltak, hogy hol érdemes mérni az függvény értékeit. Az általam bevezetett (2.6) pontrendszerből indultak ki és Matlab 8.5.0(R2015a) szimulációval jelentősen kisebb futási időt értek el és kisebb hibatagot mint Shuang [71].

A [9] cikkben Cerejeiras, Kähler és Legatiuk az $\mathbb{R}^{d+1}$ egységgömbjén monogén függvények halmazában konstruált interpolációs operátort felhasználva a tér reprodukáló magfüggvényét és egy interpoláló pontrendszert, amely rendelkezik bizonyos egyenletesen szeparálhatósági tulajdonsággal. Magasabb dimenzióban ilyen pontrendszer szerkesztése sokkal nehezebb feladat. Megjegyezték, hogy a komplex síkban példa egy ilyen pontrendszerre az általam [60]-ben bevezetett (2.6) halmaz.

2.2.4. A hiperbolikus wavelet rendszer diszkrét ortogonalitása

A 2.2.4 alfejezetben igazoljuk, hogy a szerkesztett hiperbolikus wavelet rendszer diszkrét ortogonális tulajdonsággal is rendelkezik. Ez a tulajdonság nem jellemzi az affin-waveleteket.

2.3. Multirezolúció a $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+)$-ben

A 2.3 fejezetben megmutatjuk, hogy az előző konstrukciót hogyan lehet átvinni a felső félsíkon vett Hardy-térre (Feichtinger, Pap [20]). Mivel a felső félsíkon vett Hardy-tér határfüggvényei adják a $H^2(\mathbb{R})$ teret, így itt is egy adaptált multirezolúciót generáltunk. Ez a wavelet konstrukció kapcsolódik a Meyer által megfogalmazott problémához.

2.3.1. Áttérés a felső félsíkra

Tekintsük a felső félsík Hardy-terét:

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+) = \left\{ h \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_+) : \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} |h(x+iy)|^2 \, dx : y > 0 \right\} < \infty \right\}.$$

Ha $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+)$, akkor majdnem mindenütt létezik az f nem-tangenciális határfüggvénye. A határfüggvények halmaza a $H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}),\ sup\hat{f} \subset [0, +\infty)\}$ teret adja.

A $\mathbb{C}_+$ felső félsík a Cayley-transzformációval kölcsönösen egyértelműen képezhető le az $\mathbb{D}$ egségkörlapra:

$$C(\omega) = \frac{i-\omega}{i+\omega},\ \omega \in \mathbb{C}_+. \tag{2.12}$$

A $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ és $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+)$ közötti izomorfizmust a következőképpen definiáljuk: $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$,

$$Tf := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega + i} (f \circ C). \tag{2.13}$$

2.3.2. A multirezolúciót generáló ponthalmaz a felső félsíkban

Induljunk ki az előző konstrukciónál bevezetett (2.6) ponthalmazból

$$A = \{z_{k\ell} = r_k e^{i\frac{2\pi\ell}{2^{2k}}}, \quad \ell = 0, 1, \cdots, 2^{2k} - 1, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \infty\},$$

$$A_k = \{z_{k\ell} = r_k e^{i\frac{2\pi\ell}{2^{2k}}},\ \ell \in \{0, 1, \cdots, 2^{2k} - 1\}\}.$$

Tekintsük ezen pontok inverz Cayley-transzformáltját: $C^{-1}(z) = i\frac{1-z}{1+z}$,

$$a_{k\ell} = C^{-1}(z_{k\ell}) = \frac{2r_k \sin\frac{2\pi\ell}{2^{2k}}}{1 - 2r_k \cos\frac{2\pi\ell}{2^{2k}} + r_k^2} + i\frac{1 - r_k^2}{1 - 2r_k \cos\frac{2\pi\ell}{2^{2k}} + r_k^2} = \alpha_{k\ell} + i\beta_{k\ell}, \tag{2.14}$$

$$B_k = \{a_{k\ell},\ \ell \in \{0, 1, \cdots, 2^{2k} - 1\}\}, \tag{2.15}$$

$$B = \{a_{k\ell},\quad \ell = 0, 1, \cdots, 2^{2k} - 1,\ \ k = 0, 1, 2, \cdots, \infty\}. \tag{2.16}$$

A B ponthalmaz a felső félsíkon lesz, a B_k pontjai pedig $(0, \frac{1+r_k^2}{1-r_k^2})$ középpontú $R_k = \frac{2r_k}{1-r_k^2}$ sugarú körön helyezkednek el. A B a felső félsíkon nem-Blaschke halmaz, azaz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{2^{2k}-1} \frac{\beta_{k\ell}}{1 + |a_{k\ell}|^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{2^{2k}-1} \frac{1 - r_k^2}{2(1 + r_k^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{2^{2k} + 2^{-2k}} = \infty. \tag{2.17}$$

2.3.3. A $\mathrm{H}^2(\mathbb{C}_+)$ térben bevezetett multirezolúció

A B által indukált adaptált multirezolúció a $H^2(\mathbb{C}_+)$-ben a következő tulajdonságoknak tesz eleget:

Definició A $H^2(\mathbb{C}_+)$-ben a $\{V_j',\ j \in \mathbb{N}\}$ alterek multirezolúciót alkotnak, ha:
1. (egymásban ágyazottak) $V_j' \subset V_{j+1}'$,
2. (sűrűségi feltétel) $\overline{\cup V_j'} = H^2(\mathbb{C}_+)$,
3. (dilatáció analogonja) $(TU_{(r_1,1)^{-1}}T^{-1})V_n' \subset V_{n+1}'$,
4. (bázis) létezik $\Psi_{n,\ell}$ (ortonormált) bázis V_n'-ben.

A multirezolúció szintjeit a felső félsík Cauchy-féle reprodukáló magfüggvényének a B halmazon vett lokalizálciójával generáljuk. Legyen $\phi = \frac{1}{\sqrt{\pi}(z+i)}$, $V_0' = \{c\phi,\ c \in \mathbb{C}\}$. Tekintsük a multirezolúció n-dik szintjét generáló a $\cup_{k=1}^{n} B_k$ halmazhoz tartozó lokalizált Cauchy-magfüggvényeket

$$\phi_{k\ell}(z) = \sqrt{\frac{\beta_{k\ell}}{\pi}} \frac{1}{z - \overline{a_{k\ell}}} \quad k = 0, \cdots, n, \quad \ell = 0, 1, \cdots, 2^{2k} - 1,$$

és legyen az n-edik rezolúciós szint:

$$V_n' = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{2^{2k}-1} c_{k\ell}\phi_{k\ell},\ c_{k\ell} \in \mathbb{C}\ \}.$$

V_n' rezolúciós szinten az ortogonális wavelet bázis a $\cup_{k=0}^{n} B_k$ paraméter halmazhoz tartozó Malmqiust -Takenaka rendszer lesz, amelynek tagjait a következő képlet adja:

$$\Psi_{m\ell}(z) = \sqrt{\frac{\beta_{m\ell}}{\pi}} \frac{1}{z - \overline{a_{m\ell}}} \prod_{k=0}^{m-1} \prod_{j=0}^{2^{2k}-1} \frac{z - a_{kj}}{z - \overline{a_{kj}}} \prod_{j'=0}^{\ell-1} \frac{z - a_{mj'}}{z - \overline{a_{mj'}}},$$

$$(m = 0, 1, \cdots, n,\ \ell = 0, 1, \cdots, 2^{2m} - 1).$$

Bár a multirezolúció szintjei véges dimenziósak, mégis a (2.17) tulajdonság implikálja, hogy a sűrűségi feltétel teljesül, azaz:

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n'} = H^2(\mathbb{C}_+).$$

A dilatáció analogonja ebben az esetben a következő lesz:

$$TU_{(r_1,1)^{-1}}T^{-1}V_n' \subset V_{n+1}'.$$

2.3.4. A multirezolúció n-edik szintjére vett projekciós operátor tulajdonságai

Tekintsük az $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ függvény V_n'-re vett projekcióját:

$$P_n'f(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{2^{2k}-1} \langle f, \Psi_{k\ell}\rangle \Psi_{k\ell}(z).$$

2.3.1. Tétel (Feichtinger, Pap [20]). *Bármely $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ esetén $P_n'f$ interpolál az*

$$a_{mj} \ (j = 0, \cdots, 2^{2m} - 1, \quad m = 0, \cdots, n).$$

pontokban, azaz

$$P_n'f(a_{mj}) = f(a_{mj}) \quad (j = 0, ..., 2^{2m} - 1, \quad m = 0, ..., n).$$

A $\{\Psi_{k\ell},\ \ell = 0, 1, \cdots, 2^{2k} - 1,\ k = 0, \cdots, n\}$ wavelet rendszer szerinti együtthatók meghatározására és a $P_n'f$ felírására hasonló algoritmus adható meg mint az egységkörlap esetében (Pap, Feichtinger [20]). Eisner, Pap [15] igazolta, hogy ez a wavelet rendszer is diszkrét ortogonális ([16]).

Nemrég Coifman és Peyriére [12] hasonló szellemben vizsgálták a Hardy-tér invariáns altereiben explicit wavelet bázis szerkesztését, a Malmquist-Takenaka rendszer különböző általánosításaival való kapcsolatukat. Megmutatták, hogy létezik ún. "multiscale analysis" a $H^2(R)$-ben és minden szintén van egy függvény, amelynek transzlatáltjai ortonormált bázist generálnak. A különbség az előző konstrukcióhoz képest az, hogy egy másik diszkretizációs pontrendszert használnak, amelyre nézve a bizonyítások közelebb vannak az affin wavelet formalizmushoz.

2.4. A hiperbolikus wavelet transzformált és a Zernike polinomok közti kapcsolat. Alkalmazások.

2.4.1. A Zernike-polinomok

A Zernike-polinomok olyan egységkörlapon értelmezett kétváltozós polinomok, amelyek ortogonálisak a körlap terület mértéke által indukált skalárszorzatra nézve és rotáció invariánsak [84]. Polárkoordinátákkal kifejezve a komplex Zenike-polinomok a

$$Z_n^\ell(\rho,\theta) := \sqrt{2n+|\ell|+1}\, R_{|\ell|+2n}^{|\ell|}(\rho)e^{i\ell\theta},\ \ell \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \tag{2.18}$$

alakban írhatóak, ahol $R_{|\ell|+2n}^{|\ell|}(\rho)$ a radiális rész kifejezhető a Jacobi-polinomokkal

$$R_{|\ell|+2n}^{|\ell|}(\rho) = \rho^{|\ell|} P_n^{(0,|\ell|)}(2\rho^2-1).$$

2.4.2. A reprezentáció mátrix elemei

Az U_a (2.3) reprezentáció $\{\epsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ trigonometrikus bázis szerinti mátrixának elemeit a $v_{mn}(a^{-1}) := \langle \epsilon_n, U_{a^{-1}}\epsilon_m\rangle$ formulával definiáljuk. Igazoltuk, hogy ezek kifejezhetőek a Zernike-függvények segítségével. A [57] cikkben igazoltuk, hogy ha $a = (re^{i\varphi}, e^{i\psi})$, akkor

$$v_{mn}(a^{-1}) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{m+n+1}} e^{-i(m+1/2)\psi}(-1)^m Z_{min\{n,m\}}^{|m-n|}(r,\varphi).$$

A reprezentáció tulajdonságaiból következik, hogy általában a mátrix elemeire érvényes a következő addíciós formula:

$$v_{mn}(a_1 \circ a_2) = \sum_k v_{mk}(a_1)v_{kn}(a_2)\ (a_1, a_2 \in \mathbb{B}).$$

Innen megkapjuk a Zernike-függvényekre vonatkozó addíciós formulát (Pap, Schipp [57]):

$$\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{(n+m+1)(1-r_1^2)(1-r_2^2)}} e^{-i(m+1/2)\psi} Z_{min\{m,n\}}^{|n-m|}(r,\varphi) =$$

$$\sum_k \frac{(-1)^k e^{-i(m+1/2)\psi_1} e^{-i(k+1/2)\psi_2}}{\sqrt{(m+k+1)(n+k+1)}} Z_{min\{m,k\}}^{|k-m|}(r_1,\varphi_1) Z_{min\{k,n\}}^{|n-k|}(r_2,\varphi_2),$$

ahol $a_j := (r_j e^{i\varphi_j}, e^{i\psi_j})$, $j \in \{1,2\}$ and $a := (re^{i\varphi}, e^{i\psi}) = a_1 \circ a_2$.

Lócsi és Schipp a Zernike függvényekből kiindulva, a Poincare vagy a Cayley-Klein modellben a kongruenciák segítségével, egy még általánosabb ortonormált rendszert vezettek be az egységkörben, az ún. racionális Zernike függvényeket és vizsgálták ezek tulajdonságait [45]. A konstrukcióban használták az U_a (2.3) reprezentáció tulajdonságait.

2.4.3. A Zernike-függvények diszkrét ortogonalitása

Tekintsük az f hullám front (wave front) Zernike-függvények szerinti sorfejtésének az együtthatóit: $A_{n\ell} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(\rho,\phi)\overline{Z_n^\ell(\rho,\phi)}\rho d\rho d\phi$. Az együtthatók approximálására különböző mérési eljárásokat javasoltak. Ezzel kapcsolatosan merült fel a Zernike-függvények diszkrét ortogonalitásának kérdése például a Wyant, Creath [80] munkáiban. A 2.4.3 alfejezet a Zernike-függvények diszkrét ortogonalitására vonatkozó eredményeket tartalmazza (Pap, Schipp [55]).

Tekintsük a $2N$-nél kisebb fokszámú Zernike-polinomok halmazát:

$$\{Z_n^\ell(\rho,\theta) := \sqrt{2n+|\ell|+1}\, R_{|\ell|+2n}^{|\ell|}(\rho)e^{i\ell\theta},\ \ell \in Z,\ n \in \mathbb{N},\ |\ell|+2n < 2N\}.$$

Ez a halmaz $N(2N+1)$ számú lineárisan független függvényt tartalmaz. Tekintsük a P_N, N-edfokú Legendre-polinom $\lambda_k^N \in (-1,1), k \in \{1,...,N\}$ gyökeit, és $j = 1,...,N$ értékeire tekintsük a gyökökhöz tartozó Lagrange-féle interpoláció alap polinomjait:

$$\ell_j^N(x) := \frac{(x-\lambda_1^N)...(x-\lambda_{j-1}^N)(x-\lambda_{j+1}^N)...(x-\lambda_N^N)}{(\lambda_j^N-\lambda_1^N)...(\lambda_j^N-\lambda_{j-1}^N)(\lambda_j^N-\lambda_{j+1}^N)...(\lambda_j^N-\lambda_N^N)}.$$

Tekintsük az ezeknek megfelelő Cristoffel-számokat:

$$\mathcal{A}_k^N := \int_{-1}^1 \ell_k^N(x)dx, \quad (1 \leqslant k \leqslant N).$$

A diszkrét ortogonalitás igazolásához a P_N, N-edfokú Legendre-polinom gyökei segítségével vezessük be a következő számokat:

$$\rho_k^N := \sqrt{\frac{1+\lambda_k^N}{2}}, \quad k = \overline{1,N}.$$

Tekintsük az egységkörlapban a következő polárkoordinátákkal adott ponthalmazt:

$$X := \left\{ z_{jk} := \left(\rho_k^N, \frac{2\pi j}{4N+1}\right), \quad k = \overline{1,N}, \quad j = \overline{0,4N} \right\}. \tag{2.19}$$

Minden ponthoz rendeljünk egy neki megfelelő súlyt:

$$\nu(z_{jk}) := \frac{\mathcal{A}_k^N}{2(4N+1)}.$$

Az X ponthalmazon tekintjük a következő diszkrét integrált:

$$\int_X f(\rho,\phi)d\nu_N := \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{4N} f\left(\rho_k^N, \frac{2\pi j}{4N+1}\right)\frac{\mathcal{A}_k^N}{2(4N+1)}. \tag{2.20}$$

2.4.1. Tétel (Pap, Schipp [55]). *A $2N$-nél kisebb fokszámú Zernike-polinomok diszkrét ortogonálisak a* (2.20) *által indukált diszkrét skalárszorzatra nézve, azaz*

$$\int_X Z_n^m(\rho,\phi)\overline{Z_{n'}^{m'}(\rho,\phi)}d\nu_N = \delta_{nn'}\delta_{mm'},$$

if $n+n'+|m| \leqslant 2N-1, n+n'+|m'| \leqslant 2N-1$, $n,n' \in \mathbb{N}$, $m,m' \in \mathbb{Z}$.

A Banach-Steinhaus tétel alkalmazásával igazolható a következő eredmény:

2.4.2. Tétel (Pap, Schipp [55]). *Bármely zárt körlapon folytonos ($f \in C(\overline{D})$) függvény esetén,*

$$\lim_{N\to\infty}\int_X f d\nu_N = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(\rho,\phi)\rho d\rho d\phi.$$

Ez a tétel azt jelenti, hogy a $(0,0)-$ indexű diszkrét Zernike-együttható határértéke egyenlő a $(0,0)$ indexű folytonos Zernike-együtthatóval. Hasonlóan igazolható, hogy általában a diszkrét Zernike-együttható határértéke egyenlő a megfelelő indexű folytonos Zernike-együtthatóval. Ez az elméleti eredmény képezi az alapját az általunk javasolt eljárásnak a Zernike-együtthatók approximálására vonatkozóan.

2.4.4. Zernike-együtthatók, alkalmazások

A szaruhártya felületet úgy képzeljük el, mint az egységkörön értelmezett $g(x,y)$ függvény grafikus képét. Ez felírható a polárkoordináták segítségével is, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\cos\phi$, ahol $\rho \in [0,1]$ és $\phi \in [0,2\phi]$, $G(\rho,\phi) = g(\rho\cos\phi,\rho\cos\phi)$.

A 2.4.2 Tétel alapján a folytonos mértékre vett Zernike-együtthatókat a megfelelő diszkrét Zernike határértékeként kapjuk, ha $N \to \infty$.

Ha a $G(\rho,\phi)$ helyett $2N$-nél kisebb fokszámú Zernike-polinomok lineáris kombinációját a

$$T_N(\rho,\phi) = \sum_{2n+|m|\leqq 2N-1} A_{mn}Z_n^m(\rho,\phi),$$

tekintjük, akkor a diszkrét ortogonalitás alapján A_{mn} egyenlő a megfelelő indexű diszkrét Zernike-együtthatóval:

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 T_N(\rho',\phi')\overline{Z_n^m(\rho',\phi')}\rho' d\rho' d\phi = A'_{mn} = \int_X T_N(\rho',\phi')\overline{Z_n^m(\rho',\phi')}d\nu_N(\rho',\phi').$$

Ez azt jelenti, hogy az X halmazon vett mérések alapján a T_N pontosan rekonstruálható:

$$T_N(\rho,\phi) = \int_X T_N(\rho',\phi')\sum_{2n+|m|\leqq 2N-1}\overline{Z_n^m(\rho',\phi')}Z_n^m(\rho,\phi)d\nu_N(\rho',\phi').$$

Navarro és Arines [50] három különböző diszkrét mérési ponthalmazon (köztük a (2.19)-n is) vizsgálta és összehasonlította a mérések eredménye alapján a szaruhártya hibáira kapott eredményeket. Ezek alapján megfogalmazták, hogy a mérési ponthalmaz választása nagy mértékben befolyásolja a rekonstrukció pontosságát. A (2.19) halmazon kapott mérési eredmények nagyon jó közelítést adnak a gyakorlatban is. Egyedüli hátránya az, hogy több ponton kell mérni, mind ahány Zernike-függvényt használunk az approximálásban (oversampling).

Carnicer és Godes [6] vizsgálta az interpoláció kérdését minimális számú, ún. krtikus mérési pontokon (critical sampling). Meghatározták az általunk javasolt (2.19) mérési pontokra is a Lebesque-konstanst. Ahogy a mi esetünkben is van, a több mérési pont (oversampling) csökkenti a Lebesque-konstans értékét, de növeli a műveletigényt. A (2.19) mérési pontok előnye viszont a Zernike-függvények ezekre vonatkozó diszkrét ortogonalitása és ez alapján a Zernike-együtthatókra adott explicit approximációs formula.

Shi, Sui, Liu, Peng, és Yang [70] vizsgálták a (2.19) halmazon a diszkrét ortogonális Zernike-függvények perturbáció analízisét (perturbation analysis). Tovább folytatták a mi eredményünket, vizsgálva az általunk javasolt ideális mérési pontokhoz viszonyított nagyon közel eső mérési pontokon a perturbáció analízist. Megmutatták, hogy még így is nagyon pontos rekonstrukciót kapunk a hullámfronta.

Gray [31] megvizsgálta a forgásonként nem szimmetrikus optikai képalkotó rendszerek aberrációs függvényeinek térfüggését. Ehhez neki a komplex Zernike-függvények valós és képzetes részére, az ún valós Zernike-függvényekre volt szüksége. Az általunk [55]-ben igazolt diszkrét ortogonalitás a komplex Zernike-függvényekre vonatkozott. Ezért a [31] dolgozat III. Appendixében levezeti a valós Zernike-függvények diszkrét ortogonalitását és ezeket alkalmazza a vizsgálataiban.

Kaye, Personen [39] új MRI eszközöket fejlesztett ki a fókuszpont megjelenítéséhez és az ultrahang adaptív fókuszálásához. Ebben a munkában bemutatja, hogyan lehet az optikában aktívan használt Zernike polinomok használatával növelni a az MR-ARFI-alapú adaptív fókuszálás hatékonyságát, ezáltal alkalmasabb technika kidolgozását a klinikai alkalmazásokhoz. Nem iteratív adaptív fókuszáló algoritmust szerkesztenek Zernike-polinomok alapján. A diszkrét Zernike-polinomokat a Matlab Zernike alkalmazásával számolták (zernfun.m) (Fricker P., MATLAB Központi Fájlcsere, 2005) Az új adaptív algoritmus szerkesztésében figyelembe vették az általunk javasolt (2.20) diszkrét mintavételt.

3. fejezet

Hiperbolikus wavelet transzformált, atomos és multirezolúciós felbontások a súlyozott Bergman-terekben

A 3. fejezet a Blaschke-csoport A^2_α $(\alpha \geqslant 0)$ súlyozott Bergman-térre vett reprezentációja által generált hiperbolikus wavelet transzformálttal kapcsolatos legfontosabb eredményeket tartalmazza.

3.1. A Blaschke-csoport A^2_α súlyozott Bergman-térre vett reprezentációja

A Blaschke-csoport A^2_α súlyozott Bergman-térre vett reprezentációjának vizsgálatát a [59], [58] dolgozatokban kezdtük el. A reprezentáció explicit alakja a következő:

$$(U^\alpha_{a^{-1}} f)(z) := e^{i\frac{\alpha+2}{2}\psi} \frac{(1-|b|^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}{(1-\overline{b}z)^{\alpha+2}} f\left(e^{i\psi}\frac{z-b}{1-\overline{b}z}\right) \quad (a = (b, e^{i\psi}) \in \mathbb{B}). \tag{3.1}$$

A (3.1) reprezentáció tulajdonságainak vizsgálatát Pap a [59] cikkben kezdte el.

3.1.1. Tétel (Pap [59]). *Tetszőleges $\alpha \geqslant 0$ esetén a (3.1) formulával megadott $U^\alpha_a (a \in \mathbb{B})$ a $\mathbb{B}$ Blaschke-csoport A^2_α súlyozott Bergman-térre vett unitér reprezentációja.*

Az $\alpha \in \mathbb{N}$ értékeire a [59] cikkben kiszámoltam a (3.1) reprezentáció elemit. Ezek kifejezhetők a Jacobi-polinomok segítségével.

3.1.2. Tétel (Pap [59]). *Az U_a $(a \in \mathbb{B})$ reprezentáció irreducibilis a A^2_α, $(\alpha \geqslant 0)$ súlyozott Bergman térben.*

3.2. Az U_a^α által indukált hiperbolikus wavelet transzformált tulajdonságai

Tekintsük az (3.1) által indukált hiperbolikus wavelet transzformált értékét az a^{-1}-ben, $a^{-1} \in \mathbb{B}, (a = (b, e^{i\psi}) \in \mathbb{B},\ f, \rho \in A^2_\alpha)$:

$$(V_g f)(a^{-1}) = (V_g f)(-b\epsilon, \overline{\epsilon}) := \langle f, U^\alpha_{a^{-1}} g\rangle_\alpha. \tag{3.2}$$

A 3.1.1 Tétel és a 3.1.2 Tétel alapján a reprezentáció unitér és irreducibilis. Ezek alapján a voice-transzformáltakra vonatkozó általános eredményekből következik, hogy érvényes a Plancherel-formula analogonja a (3.2) által definiált hiperbolikus wavelet transzformáltra ([38, 69]). Jelöljük a megengedett elemek halmazát $(A^2_\alpha)^* = \{g \in A^2_\alpha : (V_g g) \in L^2(\mathbb{B})\}$-vel.

3.2.1. Tétel (**Pap** [59])**.** *Ha $(A^2_\alpha)^*$ a megengedett elemek halmaza, akkor létezik egy pozitív szimmetrikus bilineáris $B : (A^2_\alpha)^* \times (A^2_\alpha)^* \to \mathbb{R}$ leképzés, úgy hogy*

$$[V_{\rho_1} f_1, V_{\rho_2} f_2] = B(\rho_1, \rho_2)\langle f_1, f_2\rangle_\alpha \quad (f_1, f_2 \in A^2_\alpha,\ \rho_1, \rho_2 \in (A^2_\alpha)^*), \tag{3.3}$$

ahol

$$[F, G] := \int_{\mathbb{B}} F(a)\overline{G(a)}\, dm(a)$$

$dm(a)$ a $\mathbb{B}$ csoport Haar-mértéke.

A Bergman-térben, $\alpha = 0$ értékére, Pap, Schipp a [58] cikkben adott egy direkt bizonyítást erre a tételre. Igazolták, hogy bármely ρ a Bergman térből megengedett elem és meghatározták a bilineáris függvényt is ebben az esetben:

$$[V_{\rho_1} f, V_{\rho_2} g] = 4\pi\langle \rho_1, \rho_2\rangle\, \langle f, g\rangle \ \ (f, g, \rho_1, \rho_2 \in A^2_0(\mathbb{D})).$$

Az előző tétel alapján (lásd [69], [38]) következik, hogy:

3.2.2. Tétel (**Pap** [59])**.** *Az U^α_a $(a \in \mathbb{B})$ reprezentáció által generált (3.2) hiperbolikus wavelet transzformált injektív az A^2_α-n.*

A $V_g f$ folytonos korlátos függvény a $\mathbb{B}$-n. A 3.2.1 Tételből következik, hogy $\alpha \geqslant 0$ esetén bármely függvény A^2_α-ból megengedett. Mi több, ha $f, g \in A^2_\alpha$, úgy hogy $g \neq 0$ és $B(g, g) = \|Cg\|^2 = 1$, akkor érvényes a következő reprodukciós képlet:

$$V_g f = V_g f * V_g g, \quad \text{i.e.,} \quad V_g f(y^{-1}) = \int_{\mathbb{B}} V_g f(x^{-1}) V_g g(x \circ y^{-1}) dm(x). \tag{3.4}$$

A (3.4) konvolúciós operátor diszkretizálásával lehet atomos felbontást generálni az ún. coorbit-terekben.

3.3. Ortogonális racionális waveletek szerkesztése a súlyozott Bergman-térben

Ha $\alpha \geqslant 0, m = \alpha + 2 \in \mathbb{N}$, akkor eljárást adunk ortogonális racionális waveletek szerkesztésére a súlyozott Bergman térben, és megmutatjuk, hogy a súlyozott Bergman projekciós operátor kifejezhető ezek segítségével [58, 59]. Legyen

$$(S\varphi)(z) = z\varphi(z) \quad (\varphi \in A_\alpha^2),\ \varphi_{a,n}(z) := \sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!\Gamma(m)}}(U_{a^{-1}}S^n\varphi)(z)$$

$$\big(a = (b,\epsilon) \in \mathbb{B}, m \in \mathbb{N}, m \geqslant 2,\ \varphi \in A_\alpha^2, n \in \mathbb{N}.\big)\,.$$

Ha az anyawavelet $\varphi = 1 \in A_\alpha^2$, akkor az általa generált racionális wavelet rendszer:

$$\varphi_{a,n}(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!\Gamma(m)}}\frac{[\epsilon(1-|b|^2)]^{\frac{m}{2}}}{(1-\bar{b}z)^m}\left(\frac{\epsilon(z-b)}{1-\bar{b}z}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A reprezentáció unitér voltából következik, hogy bármely $a \in \mathbb{B}$ esetén így egy ortonormált rendszert generáltunk. Ha $a = e = (0,1) \in \mathbb{B}$ a csoport egységeleme, akkor visszakapjuk a A_α^2 tér közismert ortonormált rendszerét:

$$\varphi_n(z) = \varphi_{e,n}(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!\Gamma(m)}}z^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.3.1. Tétel (**Pap** [59])**.** *Bármely $z \in \mathbb{D}$, $a \in \mathbb{B}$ és $m = \alpha+2 \geqslant 2, \alpha \in \mathbb{N}$ esetén a súlyozott Bergman projekciós operátor $P_\alpha : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \to A_\alpha^2$ a következő alakban írható:*

$$P_\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{\varphi_n} f(a^{-1})\varphi_{a,n}(z) \quad (a \in \mathbb{B}).$$

Következmény: Bármely $a \in \mathbb{B}$, $m = \alpha + 2, \alpha \in \mathbb{N}$ esetén a

$$\varphi_{a,n}(z) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+m)}{n!\Gamma(m)}}\frac{[\epsilon(1-|b|^2)]^{\frac{m}{2}}}{(1-\bar{b}z)^m}\left(\frac{\epsilon(z-b)}{1-\bar{b}z}\right)^n, \quad (z \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N})$$

függvények a A_α^2 térben ortonormált bázist alkotnak.

3.4. A súlyozott Bergman-téren bevezett hiperbolikus wavelet transzformált és a coorbit elmélet kapcsolata

Feichtinger és Gröchenig a négyzetesen integrálható és integrálható reprezentációk által generált voice transzformáltak diszkretizációjára vonatkozóan bevezetett egy egységes megközelítést, amellyel a transzformált által generált Banach-terek tág osztályában, az ún. coorbit terekben lehet atomos felbontásokat adni (Fiechtinger, Gröchenig [17, 19, 18, 35]).

A 3.4 fejezet az A^2_α súlyozott Bergman-téren vett hiperbolikus wavelet transzformált diszkretizációjával foglalkozik. Az α paraméter értékétől függően különböző technikákat kell alkalmazni. Először bemutatjuk a Feichtinger, Gröchenig által bevezetett általános technikát, amelyet négyzetesen integrálható és integrálható reprezentációk által indukált voice-transzformáltak diszkretizációjára alkalmaztak.

3.4.1. Az egység egyenletes korlátos felosztása a Blaschke-csoportban

A (3.4) konvolúciós operátor diszkretizálásával lehet atomos felbontást generálni az ún. coorbit terekben. Ehhez szükséges az ún. "bounded uniform partition of unity" egység egyenletes korlátos felosztásának (BUPU) szerkesztése.

3.4.1. Lemma (**Pap** [61])**.** *Legyen $r > 0$ és $Q = Q_1 \times \mathbb{T}$, ahol $Q_1 = \{z \in \mathbb{D} : |z| < \tanh r\}$. Létezik egy $x_n = (b_n, -1) \in \mathbb{B}$ sorozat amely jobbról Q-sűrű a Blaschke csoportban (azaz $\bigcup Qx_n = \mathbb{B}$) és jobbról V-szeparálható (azaz $Vx_n \cap Vx_m = \emptyset, n \neq m$), és ehez a sorozathoz létezik egy jobb-BUPU.*

Példa jobb-BUPU-ra A [86] 63 oldalán a Lemma 2.28 alapján van olyan D_k Borel halmaz, amelyre igazak a következő tulajdonságok: $D(b_k, \frac{r}{4}) \subset D_k \subset D(b_k, r)$, $D_m \cap D_n = \phi$, $\mathbb{D} = \bigcup D_k$.

Ekkor teljesül a következő: $B_{(b_k,-1)}(\{z \in \mathbb{D} : |z| < \tanh \frac{r}{4}\}) \subset D_k \subset B_{(b_k,-1)}(\{z \in \mathbb{D} : |z| < \tanh r\})$. Tekintsük a $D_k \times \mathbb{T}$ halmazok karakterisztikus függvényeit: $\psi_k = \chi_{D_k \times \mathbb{T}}$. A $\Psi = \{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ jobb-BUPU, amelyet a Q generál. Valóban, bármely $i \in \mathbb{N}$ esetén, $0 \leqslant \psi_i(x) \leqslant 1$, $\operatorname{supp} \psi_i \subset Qx_i$, $\sum_i \psi_i(x) = 1$, $x \in \mathbb{B}$, $\sup_{z \in \mathbb{B}} \#\{i \in \mathbb{N} : z \in Q'x_i\} < \infty$ for any $Q' \subset \mathbb{B}$ kompakt.

3.4.2. Az U^α_a reprezentáció által indukált hiperbolikus wavelet transzformált integrálhatósága

A hyperbolikus wavelet-transzformált integrálható, ha van olyan $g \in A^2_\alpha$, $g \neq 0$, amelyre igaz a következő: $\int_{\mathbb{B}} |V_g g(a^{-1})| dm(a) < \infty$.

3.4.2. Tétel (Pap [61]). *Ha $\alpha > 0$, akkor teljesül az integrálhatósági feltétel, azaz van olyan $g \in A^2_\alpha$, $g \neq 0$ amelyre igaz a következő:*

$$\int_{\mathbb{B}} |V_g g(a^{-1})| dm(a) < \infty.$$

Az integrálhatósági feltételnek eleget tesz például a $g = 1 \in A^2_\alpha$.

Tekintsük az analitikus függvények minimális Möbius invariáns alterét ([2], [3]). Ezt a halmazt $\mathcal{B}_1$-gyel jelöljük, és a halmazhoz tartozó g függvények előállíthatók a következő alakban:

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \frac{z - b_j}{1 - \overline{b_j} z}, \quad |b_j| \leqslant 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| < \infty. \tag{3.5}$$

Ha $1 \leqslant p$ és $-1 < \alpha$, akkor $\mathcal{B}_1$ részhalmaza A^p_α-nak.

3.4.3. Tétel (Pap [61]). *Ha $\alpha > 0$, akkor $g \in \mathcal{B}_1$ eleget tesz az integrálhatósági feltételnek, azaz $\mathcal{B}_1$ részhalmaza $\mathcal{A}^1$-nek.*

Innen tovább legyen g a $\mathcal{B}_1 \cup \{1\}$ halmaz eleme. Leszűkítjük a hiperbolikus wavelet-transzformált értelmezési halmazát az $a = (b, 1) \in \mathbb{B}$ alakú elemekre. Megmutatjuk, hogy a $V_g f$ nemcsak a A^2_α-beli f függvényekre értelmezett, hanem a paraméterekre tett bizonyos kikötések mellett jól értelmezett akkor is, ha $f \in A^p_\beta$.

A következő tétel a legegyszerűbb Banach-térről ad információt, ahol atomos felbontást lehet adni a Feichtinger-Gröchenig technikával. Ezt a következőképpen definiáljuk:

$$\mathcal{H}^1 = \{f \in A^2_\alpha : V_g f \in L^1(\mathbb{B})\}. \tag{3.6}$$

3.4.4. Tétel (Pap [61]). *Legyen $g \in \mathcal{B}_1 \cup \{1\}$, $\alpha > 0$, $p \geqslant 1$ és $p > \max\left\{\frac{\beta+1}{\alpha+1}, \frac{4+2\beta}{\alpha}\right\}$. Akkor bármely $f \in A^p_\beta$ estén $V_g f$ integrálható, azaz $V_g f \in L^1(\mathbb{B})$. Innen azonnal következik $\alpha = \beta > 0$, $p > 2 + \frac{4}{\alpha}$ esetére, a $A^p_\alpha \subset \mathcal{H}^1$ bennfoglalás.*

3.4.3. Új atomos felbontások a súlyozott Bergman-terekben

3.4.5. Tétel (Pap [61]). *Bármely $g \in \mathcal{A}^1$, $g \neq 0$, $\|Cg\| = 1$ esetén létezik csak g-től függően a Blaschke csoport egységelemének egy Q környezete és egy $C_1 > 0$ konstans, úgy hogy bármely jobbról Q-sűrű $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ elemekre a Blaschke-csoportból tetszőleges $f \in \mathcal{H}^1$ előállítható a következő atomos felbontás segítségével:*

$$f(z) = \sum_i \lambda_i (U^\alpha_{x_i^{-1}} g)(z) \textit{ az együtthatókra teljesül a } \sum_i |\lambda_i| \leqslant C_1 \|f\|_{\mathcal{H}^1}. \tag{3.7}$$

A fenti sor $\mathcal{H}^1$-ben abszolút konvergens. Az együtthatók lineárisan függenek f-től: $\lambda_i = \int_{\mathbb{D}} T_\Psi^{-1}(V_g f(y^{-1}))\psi_i(y) dA(y)$.

Az előző eredmények értelmében, ha $f \in \mathcal{H}^1$, akkor minden $g \in \mathcal{B}_1 \cup \{1\}$ egy $U^{\alpha}_{x_i^{-1}} g$ alakú atomos felbontást generál. Ha a $g = 1$, akkor innen a komplex technikákkal kapott atomos felbontáshoz hasonló ereményt kapjuk vissza (lásd páldául [86], 69 o.). Az a különbség, hogy az együtthatókra itt ℓ^1 feltétel teljesül és a konvergenciát $\mathcal{H}^1$ normában értjük a A^p_α norma helyett. A komplex technikákkal kapott atomos felbontásban az $f \in A^p_\beta$ függvényre vonatkozó atomok

$$\frac{(1-|x_i|^2)^a}{(1-\overline{x_i}z)^b}.$$

alakúak. A Feichtinger-Gröchenig technikával azt kapjuk, hogy az $f \in A^p_\alpha$ függvény esetén nemcsak a $g = 1$ generál atomos felbontást, hanem bármely $g \in \mathcal{B}_1$ is, az atomok pedig $U^{\alpha}_{x_i^{-1}} g$. alakúak.

3.5. Multirezolúció a súlyozott Bergman-terekben

Az előző feltételekből látszik, hogy a Feichtinger-Gröchenig módszer alkalmazásához szükséges integrálhatósági feltétel nem minden esetben teljesül. Igazoltam, hogy ezekben az esetekben, hasonlóan mint az egység kör Hardy-terében, adaptált multirezolúciós analízis szerkeszthető (Pap [62, 67]). Ezeket az eredményeket a 3.5. fejezetben mutatom be. Először az eredményeket a Bergman-térre vonatkozóan publikáltam (Pap [62]), majd később kiterjesztettem a súlyozott Bergman-terekre is (Pap[67]).

3.5.1. A Blaschke-csoport diszkrét mérési (sampling) részhalmaza

A konstrukcióhoz először a Blaschke-csoport olyan diszkrét részhalmazát kell tekinteni, amely rendelkezik a mérési pontok (sampling set) tulajdonságával. Ilyen ponthalmaz szerkesztése általában nem könnyű feladat. Ha a súlyozott Bergman tér magfüggvényét lokalizáljuk egy mérési ponthalmazon, akkor ezáltal framet generálunk. Ezek segítségével fogjuk majd bevezetni a multirezolúció szintjeit.

Legyen $0 < p < \infty$. A $\Gamma = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$ ponthalmaz az egységkörben mérési ponthalmaz (sampling set) az A^p_α térben, ha létezik két A és B pozitív konstans, úgy hogy $A||f||^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |f(z_k)|^p (1-|z_k|^2)^{2+\alpha} \leqslant B||f||^p, \quad f \in A^p_\alpha$. Ha $p = 2$, akkor a fenti egyenlőtlenség kifejezhető a mérési pontokon lokalizált és normalizált reprodukáló magfügvények segítségével

$$\varphi_k(z) = K_\alpha(z, z_k)/\|K_\alpha(z, z_k)\| = \frac{(1-|z_k|^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}{(1-\overline{z_k}z)^{\alpha+2}}.$$

A $\{\varphi_k(z), k \in \mathbb{N}\}$ egy frame rendszer az A^2_α-ban, akkor és csak akkor, ha $\Gamma = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$ mérési ponthalmaz (sampling set) A^2_α-ban.

Tekintsük a Blaschke-csoport $a > 1$ paramétertől függő diszkrét részcsoportját:

$$\mathbb{B}_3 = \left\{(r_k, 1):\ r_k = \frac{a^k - a^{-k}}{a^k + a^{-k}},\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{3.8}$$

A $(\mathbb{B}_3, \circ)$ részcsoportja $(\mathbb{B}, \circ)$-nek, és a részcsoport műveletére a következő tulajdonság igaz $(r_k, 1) \circ (r_n, 1) = (r_{k+n}, 1)$. Az $(r_k, k \in \mathbb{N})$ sorozat tagjai a $[0, 1)$ intervallumot a pszeudo-hiperbolikus metrikában egyenlő közűen osztja fel.

Legyen $N(a, 0) := 1$, $N(a, k), k \geqslant 1$, egy növekvő természetes számsorozat és tekintsük a következő ponthalmazt az egységkörlapon: $z_{00} := 0$,

$$\mathcal{A} = \{z_{k\ell} = r_k e^{i\frac{2\pi\ell}{N}},\ \ \ell = 0, 1, ..., N(a, k) - 1,\ \ k = 0, 1, 2, ...\}. \tag{3.9}$$

Rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\mathcal{A}_k = \{z_{k\ell} = r_k e^{i\frac{2\pi\ell}{N(a,k)}},\ \ell \in \{0, 1, ..., N(a, k) - 1\}\}. \tag{3.10}$$

3.5.1. Tétel (Pap [67]). *Legyen $a > 1$, $0 < b < \infty$ és $(N(a, k) = a^{2k}b, k \geqslant 1)$. Úgy válasszuk meg az a, b értékét, hogy $N(a, k) \in \mathbb{N}$. Ezen értékeknek megfelelően tekintsük a (3.9) által definiált $\mathcal{A}$ ponthalmazt. Legyen $K := 1 + \frac{(a-a^{-1})^2}{4} + \frac{a^2}{4b^2}\pi^2$. Ha $\sqrt{1 - 1/K} < \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2(\alpha+1)}{p}}}$, akkor $\mathcal{A}$ egy mérési halmaz A^p_α-ban.*

Megjegyzések

1. A számítások szempontjából a legegyszerűbb, ha $p = 2, \alpha = 0$, $a = 2$-t választunk. Ennek megfelelően $N(2, k) = 2^{2k+\beta}$, $k \geqslant 1$, β egy természetes szám. A legkisebb érték a $\beta = 3$ teljesíti a fenti tétel feltételeit. Ha $a = \sqrt{2}$, akkor $N_1(\sqrt{2}, k) = 2^{k+2}$ egy alkalmas választás, hogy a mérési pontokat kapjunk.

2. Ha $p = 2, \alpha > -1$ ahoz hogy $\mathcal{A}$ mérési ponthalmaz legyen A^2_α-ben úgy kell megválasztanunk a-t és $N(a, k) = a^{2k}b$-t, hogy $\frac{(a-a^{-1})^2}{4} + \frac{a^2}{4b^2}\pi^2 < \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}$. Innen tovább feltesszük, hogy ez a feltétel teljesül, és ezen feltétel mellett generálunk multirezolúciót A^2_α-ben.

3.5.2. Multirezolúció az A^2_α súlyozott Bergman-térben

Ha a 3.5.1 Tétel feltételei teljesülnek a (3.9) által definiált $\mathcal{A}$ mérési halmaz lesz A^2_α-ben. Az $\mathcal{A}$ pontjaiban lokalizált és normalizált súlyozott Bergman reprodukáló magfüggvények

$$\left\{\varphi_{k\ell}(z) = \frac{(1 - r_k^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}}{(1 - \overline{z_{k\ell}}z)^{2+\alpha}},\ \varphi_{00} = 1,\ k = 0, 1, \cdots,\ \ell = 0, 1, \cdots N(a, k) - 1\right\}$$

frame rendszert alkotnak A^2_α-ban. Ez a frame rendszer egyetlen függvényből kiindulva a Blaschke-csoport reprezentációja által generálható:

$$\varphi_{k\ell}(z) = (U^\alpha_{(z_{k\ell},1)^{-1}}\varphi_{00})(z),$$

a $\varphi_{00} = 1$ függvény segítségével. A $V_0 := \{c\varphi_{00},\ c \in \mathbb{C}\}$ a multirezolúció 0-dik szintje. A multirezolúció n-edik szintje

$$V_n := \left\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{N(a,k)-1} c_{k\ell}\varphi_{k\ell},\ c_{k\ell} \in \mathbb{C} \right\}. \tag{3.11}$$

Teljesülnek a következő tulajdonságok:

- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset .....V_n \subset ....\ A^2_\alpha$.
- $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n} = A^2_\alpha$.
- Ha $a = 2$ és $N(2,k) = 2^{2k}b, b \in \mathbb{N}$ teljesíti a következő feltételt $0 < b < \infty$, $(2 - 2^{-1})^2 + \pi^2\frac{2^2}{b^2} < 4\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}$. akkor $f \in V_n$ implikálja, hogy $U^\alpha_{(r_1,1)^{-1}}f \in V_{n+1}$. Ez a dilatáció analogonja.

Míg a Hardy téren zárt alakban meg tudtuk adni a Gram-Schmidt ortogonalizáció eredményét (a spciálisan lokalizált pólusú Malmquist-Takenaka rendszert), addig ebben az esetben nem ismert ennek a zárt explicit alakja. Egy algoritmust lehet adni a rendszer függvényeinek generálására. Ennek leírása érdekében újraindexeljük az $\mathcal{A}$ halmaz elemeit. Legyen $a_1 = z_{00}, a_2 = z_{10}, a_3 = z_{11}, \cdots, a_{N(2,1)+1} = z_{1N(2,1)-1}, \cdots, a_m = z_{k\ell} \cdots, k = 0, 1, ..., \ell = 0, 1, ..., N(2,k) - 1$, és jelöljük $K_\alpha(z, z_{k\ell}) = \frac{1}{(1-\overline{z_{k\ell}}z)^{2+\alpha}} := K(z, a_m)$. Zhu eredménye alapján az ortogonalizáció eredménye kapcsolatos az alterek reprodukáló magfüggvényeivel és az ún. kontraktív zérusosztókkal [85]. Tekintsük az $A_m = \{a_1, a_2, \cdots a_m\}$ halmazt, H_{A_m} a A^2_α tér azon részhalmaza, amelyek az A_m halmazon nulla értéket vesznek fel. A H_{A_m} az A^2_α zárt altere, jelöljük a reprodukáló magfüggvényét K_{A_m}-val. Ez a reprodukáló magfüggvény eleget tesz a következő rekurziónak:

$$K_{A_{m+1}}(z,w) = K_{A_m}(z,w) - \frac{K_{A_m}(z, a_{m+1})K_{A_m}(a_{m+1}, w)}{K_{A_m}(a_{m+1}, a_{m+1})}, m \geqslant 0, \tag{3.12}$$

$$K_{A_1} := K_\alpha(z, a_1) = \frac{1}{(1 - \overline{a_1}z)^{2+\alpha}}.$$

A Gram-Schmidt ortogonalizáció eredménye az alábbi lesz:

$$\frac{K_\alpha(z,a_1)}{\sqrt{K_\alpha(a_1,a_1)}}, \frac{K_{A_1}(z,a_2)}{\sqrt{K_{A_1}(a_2,a_2)}}, \cdots \frac{K_{A_{m-1}}(z,a_m)}{\sqrt{K_{A_{m-1}}(a_m,a_m)}}, \cdots . \tag{3.13}$$

Ez lesz az ortogonális hiperbolikus wavelet rendszer a súlyozott Bergman-térben. A $z_{k\ell} = a_m$ elemnek megfelelő függvényt jelöljük

$$\psi_{k\ell}(z) = \frac{K_{A_{m-1}}(z, a_m)}{\sqrt{K_{A_{m-1}}(a_m, a_m)}}. \tag{3.14}$$

Hedenmalm [37] igazolta, hogy ez a függvény kontraktív zérusosztó, amelynek értéke nulla az A_{m-1} halmazon. A Hardy-térben a kontraktív zérusosztók a Blaschke-szorzatok részszorzataival fejezhetők ki.

Christensen, Gröchening, Olafsson [10] a többváltozós súlyozott Berrgman-terekben vezetettek le atomos felbontásokat és frameket. A cikkbeli 1.2 Tétel n dimenziós általánosítása a Pap [61] beli atomos felbontásnak. Frame sorfejtéseket is adtak az n-dimenziós esetre, amelyet hasonlóan mind az előzőkben egy mérési ponthalmazzal generáltak.

3.5.3. Az n-dik rezolúciós szintre vett projekciós operátor

Az előző eredmények alapján igazolni lehet, hogy az n-edik multirezolúciós szintre vett ($P_n f$, $n \in \mathbb{N}$) projekciós operátor ebben az esetben is interpolációs tulajdonságokkal is rendelkezik, amely nem teljesül az affin waveletek esetében.

Legyen az A^2_α-ben szerkesztett multirezolúció V_n (3.11) szintjére vett projekciós operátor

$$P_n f(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{N(2,n)-1} \langle f, \psi_{k\ell} \rangle \psi_{k\ell}(z). \tag{3.15}$$

3.5.2. Tétel (Pap [67]**).** *Bármely $f \in A^2_\alpha$ függvény esetén a $P_n f$ interpolál a következő pontokban:*

$$z_{k\ell} = r_k e^{i\frac{2\pi\ell}{N(2,k)}}, \ (\ell = 0, ..., N(2,k) - 1, \quad k = 0, ..., n).$$

Bármely $f \in A^2_\alpha$ függvény $P_n f$ projekciója A^2_α normában konvergál f-hez $\|f - P_n f\| \to 0, \quad n \to \infty$, és kompakt egyenletesen konvergál az egységkörlap belsejében.

3.5.4. Rekonstrukciós algoritmus

Hasonlóan mint a Hardy-tereknél algoritmust lehet itt is adni a wavelet együtthatók és $P_n f$ kiszámolására, ha ismert a függvény értéke a megadott mérési halmazon [67].

4. fejezet

Malmquist-Takenaka rendszerek diszkrét ortogonalitása és egyensúlyi feltételek

Amint láttuk a 2. fejezetben kapott analitikus wavelet rendszerek speciális pólusokkal rendelkező Malquist-Takenaka rendszerek. A 4. fejezetben az egységkörön és félsíkon általános paraméterekkel rendelkező Malmquist-Takenaka rendszerek diszkretizációjával és a diszkretizációs pontrendszerek tulajdonságaival foglalkozunk.

4.1. Malmquist–Takenaka rendszerek

A Malmquist–Takenaka (M-T) rendszert Takenaka és Malmquist vezette be [47, 77], és a trigonometrikus rendszer általánosításaként fogható fel. Ez a rendszer az $a = (a_1, a_2, ...)$ sorozattól függ, melynek a_n elemei a $\mathbb{D}$ az egységkörlapon vannak, és a következőképpen definiáljuk $\Phi_n = \Phi_n^a \, (n \in \mathbb{N}^*)$:

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_1|^2}}{1 - \overline{a_1} z}, \Phi_n(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_n|^2}}{1 - \overline{a_n} z} \prod_{k=1}^{n-1} B_{a_k}(z), \; n \geqslant 2. \tag{4.1}$$

Ez a rendszer teljes ortonormált rendszert alkot az egységkör Hardy-terében, ha a paraméterek eleget tesznek az ún. nem-Blaschke feltételnek: $\sum_{n \geqslant 1}(1 - |a_n|) = +\infty$.

Az M-T rendszert sok esetben használják jelek transzfer függvényeinek közelítésére. Erre vonatkozóan a disszertációban van irodalmi utalás. Nemrég például Fridli, Locsi és Schipp [25] EKG görbék elemzésére és adatok tömörítésére használták az M-T rendszert. Fridli, Gilian and Schipp bevezették az M-T rendszer analogonját, amely az egységkörlap területmértéke által indukált skalárszorzatra nézve biortogonális [24, 26].

A (2.12) Cayley és a (2.13) transzformáltak segítségével megadhatjuk a felső félsíkon vett Hardy-térben az M-T rendszer analogonját

$$\Psi_n(z) := (T\Phi_n)(z) = (Tf)(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{i+z}\Phi_n(C(z)) \ (\Im z \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}^*).$$

Ha $a \in \mathbb{D}$, $a^* := 1/\overline{a}$, akkor a félsíkon vett rendszer kifejezhető a következő paraméterekkel:

$$\lambda_a := C^{-1}(a) = i\frac{1-a}{1+a} \in \mathbb{C}_+,\ \lambda_{a^*} = \overline{\lambda}_a, \quad \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{|1+\overline{a}|} = \sqrt{\Im\lambda_a}, \tag{4.2}$$

$$\tilde{b}_a(z) = b_a(-1)\frac{z-\lambda_a}{z-\overline{\lambda}_a}, \quad \tilde{r}_a(z) = r_a(-1)\frac{z+i}{z-\overline{\lambda}_a} \quad (z \in \overline{\mathbb{C}}_+). \tag{4.3}$$

Ekkor $\Psi_n = T\Phi_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ a következő alakban írható fel:

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Phi_1(-1)}{z-\overline{\lambda}_{a_1}}, \quad \Psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Phi_n(-1)}{z-\overline{\lambda}_{a_n}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{z-\lambda_{a_k}}{z-\overline{\lambda}_{a_k}}. \tag{4.4}$$

Ha a paraméterek eleget tesznek a félsíkon vett nem-Blaschke feltételnek, azaz $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Im\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2} = \infty$, akkor $(\Psi_n,\ n \in \mathbb{N}^*)$ egy teljes ortonormált rendszer a felső félsík $H^2(\mathbb{C}_+)$ Hardy-terében.

4.2. A Malmquist-Takenka rendszerek diszkrét ortogonalitása

Először tekintsük az egységkörön vett diszkrét ortogonalitást. A $B_N = \prod_{j=1}^N B_{a_j}$ Blaschke-szorzat az egységkörön a következő alakban írható fel: $B_N(e^{it}) = \prod_{j=1}^N B_{a_j}(e^{it}) = e^{i(\beta_{a_1}(t)+\cdots+\beta_{a_N}(t))}$ $(t \in \mathbb{R}, N = 1, 2...)$. Ebből adódik, hogy az

$$\frac{w-a_1}{1-\overline{a}_1 w}\cdot\frac{w-a_2}{1-\overline{a}_2 w}\cdots\frac{w-a_N}{1-\overline{a}_N w} = e^{2\pi i\delta} \quad (\delta \in \mathbb{R}) \tag{4.5}$$

egyenletnek n különböző megoldása van az egységkörön és ezek felírhatók a következő alakban:

$$w_k := e^{i\tau_k}, \quad \tau_k := \theta_N^{-1}(2\pi((k-1)+\delta)/N) \quad (k = 1, 2, ...N), \tag{4.6}$$

ahol θ_N^{-1} a következő függvény inverze $\theta_N(t) := \frac{1}{N}(\beta_{a_1}(t)+\cdots+\beta_{a_N}(t))$ $(t \in \mathbb{R})$. Tekintsük a fenti (4.5) egyenlet megoldásainak halmazát, ez lesz a diszkretizáció ponthalmaza a körön:

$$\mathbb{T}_N := \mathbb{T}_N^{\mathfrak{a},\delta} := \{w_k = e^{i\tau_k} : k = 1, 2, ..., N\} \ (N = 1, 2, ...), \tag{4.7}$$

A diszkretizációs ponthalmaz minden $w \in \mathbb{T}$ pontjához rendelünk egy ρ_N súlyfüggvény értéket $\frac{1}{\rho_N(w)} := \sum_{k=1}^{N} \frac{1-|a_k|^2}{|1-\overline{a}_k w|^2} \quad (w \in \mathbb{T}, N = 1, 2, ...)$. Az M-T rendszer speciális eseteire, a Laguerre, Kautz rendszerek esetén Schipp igazolta a diszkrét ortogonalitást. Később az eredményt Pap és Schipp [52], kiterjesztették általános paraméterekkel rendelkező M-T rendszerekre is.

4.2.1. Tétel (Pap, Schipp [52]). *Az M-T rendszer Φ_n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ részhalmaza diszkrét ortogonális a következő skalárszorzatra nézve:*

$$[F, G]_N := \sum_{w \in \mathbb{T}_N^{\mathfrak{a},\delta}} F(w)\overline{G(w)}\rho_N(w),$$

azaz, $[\Phi_n, \Phi_m]_N = \delta_{mn} \quad (1 \leqslant m, n \leqslant N)$.

Lócsi a diszkretizációs pontrendszer numerikus meghatározására adott hatékony eljárást a cikkében [44]. Kovács a PhD dolgozatában [41] további, a Blaschke fuggvényekkek és diszkrét és folytonos M-T rendszerekkel kapcsolatos közelítésekre szubrutinokat dolgozott ki, és alkalmazta EKG jelek feldolgozásában. Ezeket Kovács és Lócsi a [42, 43] cikkekben publikálták közösen. Eisner és Pap [15] az előző tétel analogonját igazolta a felső félsík Hardy-terében az M-T függvényekre. Erre a rendszerre vonatkozó diszkretizációs ponthalmazt az előző diszkretizációs ponthalmaz és az inverz Caley-transzformált segítségével adjuk meg: $\mathbb{R}_N^{\mathfrak{a},\delta} := \{C^{-1}(w) : w \in \mathbb{T}_N^{\mathfrak{a},\delta}\} = C^{-1}(\mathbb{T}_n^{\mathfrak{a},\delta})$, $\tilde{\rho}_N(t) := \pi(1+t^2)\rho_N(C(t))$ $(t \in \mathbb{R})$.

4.2.2. Tétel (Eisner, Pap [15]). *A felső félsíkon vett M-T rendszer Ψ_n $(1 \leqslant n \leqslant N)$ részhalmaza diszkrét ortogonális a $\tilde{\rho}_N$ súlyfüggvény által generált diszkrét skalárszorzatra nézve:*

$$\sum_{z \in \mathbb{R}_N^{\mathfrak{a},\delta}} \Psi(z)\overline{\Psi}_m(z)\tilde{\rho}_N(z) = \delta_{mn} \quad (1 \leqslant m, n \leqslant N).$$

4.3. Az egységkörön és félsíkon vett diszkretizációs pontrendszer egyensúly feltétele

Igazoltuk, hogy a diszkretizáció alapjául szolgáló pontrendszerek, mindkét esetben bizonyos egyensúlyi feltételeknek tesznek eleget és logaritmikus potenciálok stacionárius pontjai. Ezen eredmények a következő cikkekből vannak: Pap, Schipp [52, 53, 64], ahol megfogalmaztuk azt a kérdést is, hogy ezen stacionárius pontok minimumhelyei lesznek-e a logaritmikus potenciáloknak. Speciális esetben adtunk pozitív választ erre a kérdésre. A bizonyításban használt technikával Totik a [79]-ben egy elemi bizonyítást adott az kör transzfinit átmérőjére.

Teljes általánosságban, hogy ezen stacionárius pontok minimumhelyei lesznek-e a logaritmikus potenciáloknak a pozitív választ nemrég Gaál,Nagy, Nagy-Csiha, Révész adták meg a [27] cikkben.

5. fejezet

Néhány eredmény kiterjesztése a kvaterniókra

5.1. Kavaterniók

A kvaternióknak kétféle reprezentációja használatos: a mátrix reprezentáció és az ún. algebrai alak.

Tekintsük a következő egység kvaterniókat:

$$E := E_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

ahol $i \in \mathbb{C}$ a komplex imaginárius egység. A komplex egység $i^2 = -1$ tulajdonságához hasonlóan a kvaternió egységekre igazak a következők: $E_j^2 = -E$ $(j = 1, 2, 3)$, $E_1E_2 = -E_2E_1 = E_3$, $E_2E_3 = -E_3E_2 = E_1$,$E_3E_1 = -E_1E_3 = E_2$. A $\{\pm E_j : j = 0, 1, 2, 3\}$ halmaz zárt a szorzásra nézve. Tekintsük a kvaterniók mátrix reprezentációját, a

$$\mathbf{Q} := \left\{ Z := \sum_{j=0}^{3} z_j E_j : z = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^4 \right\} \tag{5.2}$$

halmazt. Ez egy ferdetest a szokásos mátrix összeadásra és szorzásra nézve. Az egységelem az E, a null elem a $\Theta \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ null mátrix.

Legyen $\overline{Z} := z_0E_0 - \sum_{j=1}^{3} z_jE_j = Z^*$, $|Z| := \left(\sum_{j=0}^{3} z_j^2\right)^{1/2}$, $ZZ^* = |Z|^2E$, a konjugált analogonja, amelyet a mátrixos alakban Z^*-al jelölünk, és ez a $Z \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ adjungált mátrixa, és az abszolút értéke a $Z = \sum_{j=0}^{3} z_jE_j \in \mathbf{Q}$-nek. A multiplikatív inverze a $Z \in \mathbf{Q}\backslash\Theta$-nak a $Z^{-1} = Z^*/|Z|^2$. A komplex egységkör és egységkörlap kvaterniós analogonja a $\mathbf{T} := \{Z \in \mathbf{Q} : |Z| = 1\}$, és $\mathbf{D} := \{Z \in \mathbf{Q} : |Z| < 1\}$.

A tiszta imaginárius kvaterniókra $I_{\mathbf{c}} := \sum_{j=1}^{3} c_jE_j$ $(\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3)$ érvényes a következő tulajdonság: $I_{\mathbf{c}}^2 = -|\mathbf{c}|^2E$. A $\mathbf{c} \to I_{\mathbf{c}}$ leképezés egy lineáris izomorfizmus az

$\mathbb{R}^3$ és a tiszta imaginárius kvaterniók között, $\mathbf{J} := \{Z = I_{\mathbf{c}} : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3\}$, tehát $\mathbb{R}^3$ és $\mathbf{J}$ identifikálhatók.

A $\mathbf{Q}$ következő kétdimenziós altere

$$\mathbf{Q_c} := \{Q_{\mathbf{c}}(z) := xE + yI_{\mathbf{c}} : z = x + \imath y \in \mathbb{C}\} \subset \mathbf{Q} \quad (\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{c}| = 1) \tag{5.3}$$

a $\mathbf{Q}$ $\mathbf{c}$ vektor irányában mutató szeletének nevezzük (slice in the direction of $\mathbf{c}$).

A kvaterniók egy másik gyakran használt reprezentációja az algebrai alak. Tekintsük az i, j és k-t úgy hogy teljesüljenek az ún. Hamilton-féle műveleti szabályok: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad ki = -ik = j$. Egy kvaternió algebrai alakja a következő: $q = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k, \quad (z_n \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, 3)$. Az algebrai alakban adott kvaterniók halmazára a következő jelölést szokás használni:

$$\mathbb{H} := \{q = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k : \quad z_n \in \mathbb{R},\ n = 0, 1, 2, 3\}.$$

A q kvaternió konjugáltja a $\overline{q} = z_0 - z_1 i - z_2 j - z_3 k$, és abszolút értéke (normája) $\|q\| = \sqrt{q.\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}.q} = \sqrt{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$.

A kvaterniók szorzása nem kommutatív általában, de igaz, hogy $\overline{a.b} = \overline{b}.\overline{a}$. A nullától különböző q multiplikatív inverze a $q^{-1} = \overline{q}/q\overline{q}$. A $(\mathbb{H}, +, .)$ egy ferdetest.

A két reprezentáció ekvivalens, E_0 megfelel az 1-nek, E_1 az i-nek, E_2 a j-nek, E_3 a k-nak, Z a q-nak és Z^* a $\overline{q}$-nak. Mindkettő használatos a szakirodalomban, attól függően, hogy melyik kényelmesebb.

5.2. A Blaschke-csoport a kvaterniók halmazában

Pap és Schipp a [65] cikkben a kvaterniók mátrix reprezentációját használva bevezette a Blaschke-csoportot a kvaterniók halmazában. Mivel a kvaterniók szorzása nem kommutativ, az eredmények kiterjesztése nem triviális.

Tekintsük a kvaternió Blaschke-függvényt:

$$B_A(Z) := (Z - A)(E - A^* Z)^{-1} \quad (A \in \mathbf{D}, Z \in \overline{\mathbf{D}} := \{Z \in \mathbf{Q} : |Z| \leqslant 1\}). \tag{5.4}$$

Igazolni lehet, hogy ez a kvaternió-változós kvaternió értékű függvény sok hasonló tulajdonsággal rendelkezik, mint a komplex Blaschke-függvény. Például igazolni lehet, hogy:

$$1 - |B_A(Z)|^2 = \frac{(1 - |A|^2)(1 - |Z|^2)}{|E - A^* Z|^2} \quad (A \in \mathbf{D}, Z \in \overline{\mathbf{D}}). \tag{5.5}$$

Innen következik, hogy hasonlóan mint a komplex esetben, bármely $A \in \mathbf{D}$ esetén a B_A a kvaternió egységkörlapot a $\mathbf{D}$-t $\mathbf{D}$-be, a kvaternió egységkört a $\mathbf{T}$-t a $\mathbf{T}$-be viszi át.

Mivel a kvaternió szorzás nem kommutativ, ezért ebben az esetben, hogy a kompozíció belső művelet maradjon, az (5.4) definícióba be kell vezetni egy jobb és egy bal egység kvaternióval való szorzást . Tekintsük $\mathbf{Q}$-ban a következő függvényt:

$$C_A(Z) := (E - ZA^*)_0 := \frac{E - ZA^*}{|E - ZA^*|} \quad (A \in \mathbf{D}, Z \in \overline{\mathbf{D}}). \tag{5.6}$$

A C_A a $\overline{\mathbf{D}}$-t a $\mathbf{T}$-be viszi át és $C_Z(A) = C_A^*(Z) \quad (A, Z \in \mathbf{D})$.

5.2.1. Tétel (**Pap, Schipp** [65])**.** *Bármely* $A_1, A_2 \in \mathbf{D}$ *és* $Z \in \overline{\mathbf{D}}$ *esetén*

$$B_{A_1}(B_{A_2}(Z)) = UB_A(Z)V^*,$$

ahol

$$A = B_{-A_2}(A_1), \quad U = C_{-A_2}(A_1), \; V = C_{-A_2^*}(A_1^*). \tag{5.7}$$

A komplex ϵ-nak a kvaterniós Blaschke esetében jobb- és baloldalról egy-egy egységkvaternióval való szorzás felel meg. Mivel a szorzás nem kommutatív, ezért itt a sorrend nem cserélhető fel. Komplex esetben viszont a kettő szorzata adja az ϵ faktort.

Tekintsük a $\mathbf{B} := \mathbf{T} \times \mathbf{D} \times \mathbf{T}$ paraméterhalmazt és a hozzá tartozó

$$\mathfrak{B} := \{\mathcal{B}_{\mathfrak{a}} := UB_AV^* : \mathfrak{a} = (U, A, V) \in \mathbf{B}\} \tag{5.8}$$

függvények halmazát, amely zárt lesz a $\circ$ függvénykompozícióra nézve.

Tekintsük a $\mathfrak{a} = (U, A, V) \to \widehat{\mathfrak{a}} := UAV^*$ leképzést a $\mathbf{B}$-ből $\mathbf{D}$-re. Ekkor az inverz elem a következőképpen fejezhető ki:

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{a}}^{-1}(Z) = U^*B_{-UAV^*}(Z)V = U^*B_{-\widehat{\mathfrak{a}}}(Z)V. \tag{5.9}$$

5.2.2. Tétel (**Pap, Schipp** [65])**.** *Bármely két* $\mathcal{B}_{\mathfrak{a}_1}, \mathcal{B}_{\mathfrak{a}_2} \in \mathfrak{B}$

$$(\mathfrak{a}_j = (U_j, A_j, V_j) \in \mathbf{B}, j = 1, 2),$$

függvény esetén

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{a}_1} \circ \mathcal{B}_{\mathfrak{a}_2} = \mathcal{B}_{\mathfrak{a}} \quad (\mathfrak{a} = (U, A, V) \in \mathbf{B}),$$

ahol

$$A = \mathcal{B}_{\mathfrak{a}_2}^{-1}(A_1), \quad U = U_1C_{-\widehat{\mathfrak{a}}_2}(A_1)U_2, \quad V = V_1C_{-(\widehat{\mathfrak{a}}_2)^*}(A_1^*)V_2. \tag{5.10}$$

Az egységelem a $\mathcal{B}_{\mathfrak{e}}$, ahol $\mathfrak{e} = (E, \Theta, E)$.

A $\mathbf{B} \ni \mathfrak{a} \to \mathcal{B}_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{B}$ bijektív leképzés a $\mathbf{B}$ paraméterhalmazban indukál egy műveletet, $\mathfrak{a}_1 \odot \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}$, amelyre $\mathcal{B}_{\mathfrak{a}_1} \circ \mathcal{B}_{\mathfrak{a}_2} = \mathcal{B}_{\mathfrak{a}}$. A paraméterhalmaz az indukált műveletre nézve csoportot alkot. Ezt nevezzük kvaternió Blaschke-csoportnak. A paraméterhalmazban az $\mathfrak{a} = (U, A, V)$ inverz eleme $\mathfrak{a}^-$ az az elem, amelyre $\mathcal{B}_{\mathfrak{a}^-} = \mathcal{B}_{\mathfrak{a}}^{-1}$, ahol $\mathfrak{a}^- = (U^*, -\widehat{\mathfrak{a}}, V^*)$.

Vizsgáltuk a csoport tulajdonságait és meghatároztuk a legfontosabb részcsoportjait.

5.3. Reguláris (Slice regular) Malmquist-Takenaka rendszer

5.3.1. Reguláris (Slice regular) függvények

A $\mathbf{D}$ kvaternió egységgömbön reguláris függvények halmaza a $\sum_{n\geqslant 0} q^n a_n,\ a_n \in \mathbb{H}$ konvergens hatványsorok összegfüggvényei lesznek [29].

Az előző részben bemutatott Blaschke-függvény kiterjesztése a kvaterniókra nem reguláris. Általában két reguláris függvény szorzata sem lesz reguláris.

A hatványsoros alakból kiindulva be lehet vezetni két függvény konvolúciós szorzatát, amely megőrzi a reguláris tulajdonságot. Legyen $f, g : \mathbf{D} \to \mathbb{H}$, $f(q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n a_n$ és $g(q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n b_n$ két reguláris függvény. Akkor a reguláris szorzata az f és g-nek ($*$-szorzat) a következő függvény lesz a $\mathbf{D}$-n:

$$f * g(q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{5.11}$$

Ezen kívül még két másik műveletet is bevezettek a reguláris függvények halmazában.

5.3.1. Definíció. *Legyen $f : \mathbf{D} \to \mathbb{H}$ reguláris függvény, $f(q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n a_n$. Az f reguláris konjugáltja a következő függvény lesz a $\mathbf{D}$-n: $f^c(q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n \overline{a_n}$. Az f szimmetrizálója az a függvény, amelyet a következőképpen kapunk: $f^s = f * f^c = f^c * f$.*

5.3.2. Definíció. *Legyen az Ω szimmetrikus tartományon értelmezett f függvény reguláris. Ha $f \neq 0$ az Ω-n, akkor f-nek van reguláris inverze, és ezt a következőképpen adjuk meg: $f^{-*} = (f^s)^{-1} f^c$.*

Az előzőekben láttuk a Blaschke-függvények egy kiterjesztését a kvaterniókra. Ez a kiterjesztés nem reguláris. Nemrég a következő cikkekben bevezették és vizsgálták a Blaschke-függvények reguláris analogonját: [1, 5, 75], amelyet a következő formula ad meg:

5.3.3. Definíció.

$$\mathcal{B}_a(q) = (1 - q\overline{a})^{-*} * (q - a),\ a \in \mathbf{D}, q \in \overline{\mathbf{D}}. \tag{5.12}$$

Ez a függvény örökli a komplex Blaschke-függvények legfontosabb tulajdonságait.

A reguláris függvényekre meg lehet adni a Hardy-tér fogalmának analogonját. Legyen $f : \mathbf{D} \to \mathbb{H}$ egy reguláris függvény,

$$\|f\|_2 = \sup_{I\in\mathbb{S}} \lim_{r\to 1_-} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{I\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2}, \tag{5.13}$$

Akkor a kiterjesztett Hardy-teret $H^p(\mathbf{D})$ a következőképpen definiáljuk:

$$H^2(\mathbf{D}) = \{f : \mathbf{D} \to \mathbb{H} | f \text{ reguláris és } \|f\|_2 < +\infty\}. \tag{5.14}$$

5.3.2. A reguláris Malmquist-Takenaka rendszer

A reguláris Malmquist-Takenaka rendszert a [66] cikkben vezettem be és tanulmányoztam a tulajdonságait.

Tekintsük az $a = (a_1, a_2, ...)$ a kvaternió egységgömből vett elemekkel rendelkező sorozatot $|a_n| < 1$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Ezen paraméterekhez tartozó reguláris Malmquist-Takenaka rendszert a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{\Phi}_1(z) = \sqrt{1-|a_1|^2}(1 - z\overline{a_1})^{-*},$$

$$\mathbf{\Phi}_n(z) = \sqrt{1-|a_n|^2}\left(*\prod_{k=1}^{n-1}\mathcal{B}_{a_k}(z)\right) * (1 - z\overline{a_n})^{-*} \quad (z \in \overline{\mathbb{B}},\, n = 2, 3, ...), \tag{5.15}$$

ahol $*\prod$ a tagok $*$-szorzatát jeleti. Mivel $\mathcal{B}_a(q)$ reguláris és $*$-szorzat megőrzi a reguláris tulajdonságot, ezért így egy reguláris függvényrendszert generáltunk.

5.3.4. Tétel (**Pap** [66])**.** *Ha a reguláris Malmquist -Takenaka rendszer paraméterei egy szeleten vannak, azaz van olyan* $I \in \mathbb{S}$*, hogy* $a_n = r_n e^{\theta_n I}$ $(r_n < 1,\, n \in \mathbb{N}^*)$*, akkor* $\mathbf{\Phi}_n, (n \in \mathbb{N}^*)$ *ortonormált reguláris rendszer* $H^2(\mathbf{D})$*-ben.*

5.3.5. Tétel (**Pap** [66])**.** *Ha a paraméterek egy szeleten vannak és nem-Blaschke sorozatot alkotnak,* $\sum_{n\geqslant 0}(1 - |a_n|) = +\infty$*, akkor a* $\mathbf{\Phi}_n, (n \in \mathbb{N}^*)$ *rendszer teljes a* $H^2(\mathbf{D})$*-ben.*

5.3.3. A projekciós operátor tulajdonságai

Ha $f \in H^2(\mathbf{D})$ és a reguláris Malmquist -Takenaka paraméterei teljesítik az előző két tétel feltételeit, akkor az f függvénynek a $\{\mathbf{\Phi}_k,\, k = 1, \cdots, n\}$ fügvények által kifeszített V_n alterére vett projekciója

$$P_n f(z) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{\Phi}_k(z)\langle f, \mathbf{\Phi}_k\rangle, \tag{5.16}$$

ahol $\langle f, \mathbf{\Phi}_k\rangle$ a következőt jelenti:

$$\langle f, \mathbf{\Phi}_k\rangle = \lim_{r\to 1_-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\mathbf{\Phi}_k(re^{I\theta})}f(re^{I\theta})d\theta.$$

5.3.6. Tétel. *Ha a paraméterek egy szeleten vannak, azaz van olyan* $I \in \mathbb{S}$*, hogy* $a_n = r_n e^{\theta_n I}$ $(r_n < 1,\, n \in \mathbb{N}^*)$*, akkor bármely* $f \in H^2(\mathbf{D})$ *esetén* $P_n f$ *leszűkítése a* $\mathbf{D}_I$*-ra interpolál a* $a_\ell = r_\ell e^{\theta_\ell I}$ $(\ell \in \{1, \cdots, n\})$ *pontokban.*

Irodalomjegyzék

[1] Alpay D., Colombo F., Sabadini I., Schur functions and their realizations in the slice hyperholomorphic setting, *Integral Equations Operator Theory* **72** (2012), 253–289.

[2] Arazy J., Fisher S., Peetre J., Möbius invariant function spaces, *J. Reine Angew. Math.* **363** (1985), 110–145.

[3] Arazy J., *Some aspects of the minimal, Möbius-invariant space of analytic functions on the unit disc*, Interpolation spaces and allied topics in analysis, Proc. Conf., Lund, Sweden, 1983, Lect. Notes Math. 1070, (1984), 24–44.

[4] Auscher P., Solution of two problems on wavelets, *The Journal of Geometric Analysis* **5** (1995), No. 2, 181—236.

[5] Bisi C., Stoppato C., Regular vs. Classical Möbius Transformations of the Quaternionic Unit Ball, *Advances in Hypercomplex Analysis*, Vol. 1, Springer INdAM Series (2013), 1–13.

[6] Carnicer J. M., Godes C., Interpolation on the disk, *Numer Algor.* **66** (2014), 1—16. https://doi.org/10.1007/s11075-013-9720-0

[7] Cerejeiras P., Ferreira M. and Kähler U., Monogenic Wavelets over the Unit Ball, *Journal Anal. Appl.* **24 (4)** (2005), 841–852.

[8] Cerejeiras P., Chen Q., Gomes N., Hartmann S., Compressed Sensing with Nonlinear Fourier Atoms, *Modern Trends in Hypercomplex Analysis*, Trends in Mathematics, 47–77, 2016 Springer International Publishing.

[9] Cerejeiras P., Kähler U., Legatiuk D., Interpolation of monogenic functions by using reproducing kernel Hilbert spaces, *Publ. Math. Debrecen* **75(12)** (2009), 263–283.

[10] Christensen J. G., Gröchening K., Olafsson G., New atomic decompositions for Bregman spaces of the unit ball, *Indiana University Mathematics Journal* **66(1)** (2015). DOI: 10.1512/iumj.2017.66.5964

[11] Chui C. K., *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco, 1992.

[12] Coifman R.R., Peyriére J., Phase Unwinding or Invariant Subspace Decompositions of Hardy Spaces, *J. Fourier Anal. Appl.* **25** (2019), 684–695. https://doi.org/10.1007/s00041-018-9623-5

[13] Colombo F., Gentili G., Sabadini I., A Cauchy kernel for slice regular functions, *Ann. Global Anal. Geom.* **37** (2010), 361–378.

[14] Daubechies I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909–996.

[15] Eisner T., Pap M., Discrete orthogonality of the Malmquist-Takenaka system of the upper half plane and rational interpolation, *J. Fourier Anal. Appl.* **20** (2014), 1–16.

[16] Eisner T., Pap M., Discrete orthogonality of the analytic wavelets in the Hardy space of the upper half plane, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process* **15** (2017), no. 3, Paper 1750024, 15 pp.

[17] Feichtinger H. G., Gröchenig K., A unified approach to atomic decompositions trough integrable group representations, *Functions Spaces and Applications*, M. Cwinkel et all. eds., Lecture Notes in Math. 1302, Springer-Verlag, (1998), 307–340.

[18] Feichtinger H. G., Gröchenig K., Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decomposition I., *J. Funct. Anal.* **86**, No. 2, (1989), 307–340.

[19] Feichtinger H. G., Gröchenig K., Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions II., *Monatsh. Math.* **108** (1989), 129–148.

[20] Feichtinger H. G., Pap M., Hyperbolic wavelets and multiresolution in the Hardy space of the upper half plane, *Blaschke Products and Their Applications: Fields Institute Communications* 65, New York: Springer Science+Business Media BV, (2013), 193–208.

[21] Feichtinger H. G, Pap M, Coorbit Theory and Bergman Spaces, In: Alexander Vasiliev (ed.) Harmonic and Complex Analysis and its Application: Trends in Mathematics. 358 p. Cham, Springer (New York), 2014, 231–259.

[22] Feichtinger H. G., Weisz F., Inversion formulas for the short-time Fourier transform, *J. Geom. Anal.* **16 (3)** (2006), 507–521.

[23] Feichtinger H. G., Weisz F., Gabor analysis on Wiener amalgams, *Sampl. Theory Signal Image Process.* **6** (2007), no. 2, 129–150.

230–253.

[24] Fridli S., Schipp F., Biorthogonal systems to rational functions, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **35** (2011), 95–105.

[25] Fridli S., Lócsi L., Schipp F., Rational Function Systems in ECG Processing, In: Roberto, Moreno-Díaz; Franz, Pichler; Alexis, Quesada-Arencibia (ed.) *Computer Aided Systems Theory* – EUROCAST 2011 13th International Conference : Revised Selected Papers, Part I, Berlin-Heidelberg, Springer Verlag, 2011, pp. 88–95.

[26] Fridli S, Gilián Z., Schipp F., Rational orthogonal systems on the plane, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.* **39** (2013) 63–77.

[27] Gaál M., Nagy B., Nagy-Csiha Zs., Révész Sz., Minimal energy point systems on the unit circle and the real line, accepted for publication, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2020, Vol. 52, No. 6 : pp. 6281-6296.

[28] Gentili G., Struppa D., A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342* (2006), 741–744.

[29] Gentili G., Struppa D., A new theory of regular functions of a quaternionic variable, *Adv. Math.* **216** (2007), 279–301.

[30] Gentili G., Stoppato C., Struppa D., *Regular functions of a quaternionic variable*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin-Heidelberg, 2013.

[31] Gray R. W., Investigation of the field dependence of the aberration functions of rotationally nonsymmetric optical imaging systems, University of Rochester, N.Y., Identifiers: Local Call No. AS38.6635, http://hdl.handle.net/1802/30415.

[32] Grossman A., Morlet J., Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 723–736.

[33] Grossman A., Morlet J., Paul T., Transforms associated to square integrable group representations I, General results, *J. Math Physics* **26 (10)** (1985), 2473–2479.

[34] Grossman A., Morlet J., Paul T., Transforms associated to square integrable group representations II: examples, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **45** (1986), 293–309.

[35] Gröchenig K., Describing functions: atomic decompositions versus frames, *Monatsh. Math.* **112(3)** (1991), 1–41.

[36] Gröchenig, K., *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, 2001.

[37] Hedenmalm H., A factorization for square area-integrable analytic functions, *J. Reine Angew. Math.* **422** (1991), 45–68.

[38] Heil C. E., Walnut D. F., Continuous and discrete wavelet transforms, *SIAM Review* **31 (4)** (1989), 628–666.

[39] Kaye E. A., Personen M., *Novel MRI Tools for Focused Ultrasound Surgery*, Stanford University, Department of Electrical Engineering, 2011, https://purl.stanford.edu/sv207hm8865.

[40] Király B., Pap M., Pilgermájer Á., Sampling and Rational Interpolation for Non-band-limited Signals, In: Pardalos, PM; Rassias, TM (editors) *Mathematics Without Boundaries : Surveys in Interdisciplinary Research*, New York, USA, Springer, 2014, 383–408.

[41] Kovács P., Transformation methods in signal processing, Thesis, May 2016, DOI: 10.15476/ELTE.2015.187.

[42] Kovács P., Lócsi. L., "RAIT: the rational approximation and interpolation toolbox for Matlab". In: Proceedings of the 35th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP). Piscataway, USA: IEEE press, 2012, pp. 671–677.

[43] Kovács P., Lócsi L., "RAIT: The Rational Approximation and Interpolation Toolbox for Matlab with Experiments on ECG Signals". In: International Journal of Advances in Telecommunications, Electrotechnics, Signals and Systems (IJATES) 1.2–3 (2012), pp. 60–68. DOI: 10.11601/ijates.v1i2-3.18 LicenseCC BY-SA 4.0

Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2016.

[44] Lócsi L., Calculating Non-Equidistant Discretizations Generated by Blaschke Products, *Acta Cybernetica* **20** (2011) 111–123.

[45] Lócsi L., Schipp F., Rational Zernike Functions, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.* **46** (2017), 177–190.

[46] Mallat S., Theory of multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, *IEEE Trans. Pattern. Anal. Math. Intell.* **11 (7)** (1989), 674–693.

[47] Malmquist F., Sur la détermination d'une classe functions analytiques par leurs dans un esemble donné de doints, *Compute Rendus Six. Cong. Math. Scand.*, Kopenhagen, Denmark, (1925), 253–259.

[48] Meyer Y., *Ondolettes et Operateurs*, New York: Hermann, 1990.

[49] Morlet, J.; Arens G., Fourgeau E., Giard D., Wave propagation and sampling theory, Part1: Complex signal land scattering in multilayer media, *J. Geophysics* **47** (1982), 203–221.

[50] Navarro R., Arines J., Complete Modal Representation with Discrete Zernike Polynomials - Critical Sampling in Non Redundant Grids, ICMA,BT - Numerical Simulations of Physical and Engineering Processes SP - Ch. 10 UR - https://doi.org/10.5772/24631 DO - 10.5772/24631 SN - PB - IntechOpen CY - Rijeka Y2 - 2020-06-05 ER .

[51] Nowak K., Pap M., Construction of Multiresolution Analysis Based on Localized Reproducing Kernels, In: Pesenson Isaac, Le Gia Quoc Thong, Mayeli Azita, Mhaskar Hrushikesh, Zhou Ding-Xuan (ed.) *Frames and Other Bases in Abstract and Function Spaces*, Cham: Springer International Publishing, (2017), 355–375.

[52] Pap M., Schipp F., Malmquist-Takenaka systems and equilibrium conditions, *Math. Pannon.* **12 (2)** (2001), 185–194.

[53] Pap M., Properties of discrete rational orthonormal systems, *Constructive Theory of Functions*, Varna 2002, Bojanov Ed., Dabra, Sofia, (2003), 374–379.

[54] Pap M., Schipp F., Malmquist-Takenaka systems over the set of quaternions, *PU.M.A* **15** (2004), No. 2-3, 261–274.

[55] Pap, M., Schipp, F., Discrete orthogonality of Zernike functions, *Math. Pann.* **16 (1)** (2005), 137–144.

[56] Pap M., Schipp F., The voice transform on the Blaschke group I., *PU.M.A.* **17**, 3-4, (2006), 387–395.

[57] Pap M., Schipp F., The voice transform on the Blaschke group II., *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comput.* **29**, (2008), 157–173.

[58] Pap M., Schipp F., The voice transform on the Blaschke group III., *Publ. Math. Debrecen* **75 (1-2)** (2009), 263–283.

[59] Pap M., The voice transform generated by a representation of the Blaschke group on the weighted Bergman spaces, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comput.* **33** (2010), 321–342.

[60] Pap M., Hyperbolic wavelets and multiresolution in $H^2(\mathbb{T})$, *J. Fourier Anal. Appl.* **17** (2011), 755–776.

[61] Pap M., Properties of the voice transform of the Blaschke group and connections with atomic decomposition results in the weighted Bergman spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **389:(1)** (2012), 340–350.

[62] Pap M., Multiresolution in the Bergman space, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comput.* **39** (2013), 333–353.

[63] Pap M., A Special Voice Transform, Analytic Wavelets, and Zernike Functions, In: Peter W Hawkes (Ed.) *Advances in Imaging and Electron Physics*, New York: Elsevier, Volume 188 (2015), 79–134.

[64] Pap M., Schipp F., Equilibrium conditions for the Malmquist-Takenaka systems, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **81** (2015), no. 3–4, 469–482.

[65] Pap M., Schipp F., Quaternionic Blaschke Group, *Mathematics* **7 (1)** (2018), Paper: 33.

[66] Pap M., Slice regular Malmquist-Takenaka system in the quaternionic Hardy spaces, *Anal. Math.* bf 44 (1) (2018), 99–114.

[67] Pap M., Hyperbolic wavelet frames and multiresolution in the weighted Bergman spaces In: Paolo, Boggiatto; Elena, Cordero; Maurice, de Gosson; Hans, G Feichtinger; Fabio, Nicola; Alessandro, Oliaro; Anita, Tabacco - *Landscapes of Time-Frequency Analysis*, Basel : Birkhäuser Basel, (2019) 225–247.

[68] Qian T., Sprossig W., Wang J., Adaptive Fourier decomposition of functions in quaternionic Hardy spaces, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **35: (1)** (2012), 43–64.

[69] Schipp F., Wade W. R., *Transforms on Normed Fields*, Leaflets in Mathematics, Janus Pannonius University Pécs, 1995.

[70] Shi Z., Sui Y., Liu Z., Peng J., Yang H., Mathematical construction and perturbation analysis of Zernike discrete orthogonal points, State Key Laboratory of Applied Optics, Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, *Applied Optics* **51** No. 18.

[71] Shuang L., *Adaptive Signal Decomposition of Hardy Space*, Ph.D. Thesis, Macau University, 2013

[72] Soumelidis A., Fazekas Z., Pap M., Schipp F., Discrete orthogonality of Zernike functions and its relevance to corneal topography, Editor: Szirmay-Kalos, L; Renner, Gábor, Published by: *5th Hungarian Conference on Computer Graphics and Geometry*, Budapest, Hungary, (2010), 125–132.

[73] Soumelidis A., Fazekas Z., Schipp F., Pap, M., Discrete orthogonality of Zernike functions and its application to corneal measurements, Electronic Engineering and Computing Technology Lecture Notes in Electrical Engineering, Vol. 60, (2010), 455–469.

[74] Soumelidis A., Fazekas Z., Schipp F., Pap M., Generic Zernike-based surface representation of measured corneal surface data, IEEE International Symposium on Medical Measurements and Applications, (2011) 148-153.

499–530.

[75] Stoppato C., Regular Moebius transformations of the space of quaternions, *Ann. Global Anal. Geom.* **39** (2010), 387–401.

[76] Szabó Z., Interpolation and quadrature formula for rational systems on the unit circle, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comput.* **21** (2002), 41–56.

[77] Takenaka, S., On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, *Japanese Journal of Mathematics II.*, (1925), 129–145.

[78] Totik V., Recovery of H^p-functions., *Proc. Amer. Math. Soc.* **90** (1984), 531–537.

[79] Totik V., A transzfinit átmérő, *Polygon* **23**, No. 1-2 (2016), 25–40.

[80] Wyant,J. C., Creath, K., Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology, *Applied Optics and Optical Engineering*, **XI**, Academic Press, 1992.

[81] Weisz F., Inversion of the short-time Fourier transform using Riemannian sums, *J. Fourier Anal. Appl.* **13 (3)** (2007), 357–368.

[82] Weisz F., Gabor analysis and Hardy spaces, *East J. Approx.* **15 (1)** (2009), 1–24.

[83] Weisz F., Inversion formulas for the continuous wavelet transform, *Acta Math. Hungar.* **138 (3)** (2013), 237–258.

[84] Zernike F., Beugungstheorie des Schneidenverfharens und seiner verbesserten Form der Phasenkontrastmethode, *Physica* **1** (1934), 689–704.

[85] Zhu K., Interpolating and recapturating in reproducing Hilbert spaces, *BHKMS* **1** (1997), 21–33.

[86] Zhu K., *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Vol. 226 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, NY, 2005.