dc_1737_20

Struktúrák limeszei

Szegedy Balázs

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

1 Bevezetés

A struktúrális limesz elméletek mély kapcsolatot teremtenek a véges matematika, illetve az analízis között. A végtelen (mérhető vagy folytonos) struktúrák alkalmazása a nagy diszkrét struktúrák vizsgálatában nem újdonság. Például a fizikában a folyadékok véges sok részecskéből állnak, azonban gyakran kényelmes őket folytonos közegként kezelni. Sok esetben hasznos úgy tekinteni a bonyolult nagy struktúrákat, mint egyszerűbb, homogénabb végtelen struktúrák véges közelítéseit. Ez a közelmúltban fejlődésnek indult struktúrális limesz elméletek egyik fő célja. A dolgozat célja pedig az ilyen limesz elméletek különféle aspektusainak bemutatása. Nagy hangsúlyt fektetünk a gráfok limeszelméletének bemutatására, amely dinamikus fejlődésen ment keresztül az elmúlt években és az egyik legjobban kidolgozott struktúrális limesz elméletté vált. A gráflimesz elmélet az algebra, a valószínűségi elmélet, a dinamikus rendszerek, a kombinatorika, az analízis és a statisztikus fizika érdekes találkozási pontja. Ezen irányok közül fogunk néhányat közelebbről bemutatni.

A struktúrális limeszek az ókori görögökig vezethetők vissza, akik felfedezték, hogy hasznos a kört véges sokszögekkel közelíteni. Az ilyen közelítések nélkülözhetetlenek a differenciál és integrál számításban, tehát alapvetően mindenütt megtalálhatók a matematikában és a fizikában. Ezekben az esetekben egy adott végtelen objektumból indulunk ki, és véges struktúrákkal közelítjük valamilyen alkalmas diszkretizáció segítségével. Azonban minket jobban érdekel az ellenkező irány. Tegyük fel, hogy véges struktúrák egy növekvő sorozatát vizsgáljuk (mondjuk gráfok sorozatát), amelyek értelmesen kapcsolódnak egymáshoz. Például egy egyszerű (esetleg randomizált) szabály hozza létre a sorozatot. Arra számítunk, hogy a sorozat nagy tagjai bizonyos értelemben hasonlóak lesznek egymáshoz. Fontos kérdés, hogy hogyan lehet mérni ezt a hasonlóságot. Ezenkívül gyakran hasznos megtalálni egy olyan végtelen struktúrát, amely a sorozat határértékeként viselkedik. A hasonlóság kérdésére különféle megközelítések léteznek. Az egyik megközelítés a struktúrákhoz kapcsolódó algebrai invariánsok hasonlóságán alapul. Ezen a ponton jelenik meg az algebra és a statisztikus fizika is. Ezeket az invariánsokat gyakran súlyozott homomorfizmusszámként vagy a partíciós függvények értékeként lehet kezelni.

A dolgozat elsősorban 4 cikk eredményeire épül. Az első kettő [65], [51] a gráfok limeszeiről szól. A harmadik cikk [80] a Freedman, Lovász és Schrijver sejtésének megoldása, és a gráf-elmélet azon részéhez tartozik, amely leginkább a statisztikus fizikához kapcsolódik. A negyedik cikk [82] összekapcsolja a gráfelméletet az additív kombinatorikával és a csoportelmélettel. A hivatkozások számai ezen tézisfüzetben a fő dolgozat irodalomjegyzékére utalnak.

2 Alapok

A struktúrális limeszek története egészen az ókori görögökig vezethető vissza. Archimedes (Kr. E. 287–212) a kör sokszögekkel való közelítését használta a terület kiszámításához. A strukturális limeszeket rutinszerűen alkalmazzák a fizikában. A foytonos limesz objektumok nélkülözhetetlenek a termodinamikában és a folyadékdinamikában, amikor nagy, de véges részecskerendszereket vizsgálnak. Másrészről az eredendően folytonos objektumok diszkretizálása is fontos szerepet játszik a fizikában.

A fenti limeszelméletek nagy részben a véges objektumok és a folytonos limeszobjektumok nagyon egyszerű összefüggésein alapulnak. A véges közelítés általában az előírt geometriai kapcsolaton keresztül egy folytonos térhez kapcsolódik. Ezeket a limeszeket *skála limesznek* nevezzük. Kevésbé nyilvánvaló limeszelméletek indultak fejlődésnek a közelmúltban, ahol olyan egyszerű és nagyon általános struktúrákat tekintik, mint például a 0-1 sorozatok vagy gráfok. Ezekben az elméletekben nincs "előírt" geometria, amelyet közelíteni kellene. A geometria a szerkezet belső "logikájából" adódik, így meglepetésszerűen a geometriai, topológiai és algebrai struktúrák nagy választéka jelenhet meg a limeszben. Ezen limeszelméletek közül sok azon alapul, hogy véletlenszerű mintákat veszünk nagy struktúrákból és ezen mintavételek hasonlósága alapján metrizáljuk a struktúrák terét. Ilyen limeszelméleteket *lokális* limeszelméleteknek hívunk. Gyakran előfordul azonban, hogy a lokális metrika nem elég finom ahhoz, hogy kellően részletes képet adjon a struktúrák szerkezetéről. Egy másik megközelítés az, hogy a struktúrák nagyléptékű vislkedése alapján definiáljuk a hasonlósági metrikát. Ezeket *globális* limeszelméleteknek nevezzük. A Szemerédi féle regularítási lemma példáúl sűrű gráfok esetén ad hasznos információt a nagyléptékű viselkedésről. Bizonyos szerencsés esetekben (mint példáúl sűrű gráfok esetén) dualitás köti össze a két nézőpontot. Ilyenkor a két metrika ekvivalens és a kettő közötti kapcsolat jól használható eszköz. Ezen túlmenően vannak hibrid elméletek, mint például a korlátos fokú gráfok lokális-globális konvergenciája [51]. Ez az elmélet azt demonstrálja, hogy annak ellenére, hogy a korlátos fokú gráfok esetén nincs dualitás lokális és globális nézőpont között, a kettő mégis összekapcsolható egy hatékony elméletté. Most rátérünk a legfontosabb gráflimesz elméletek rövid bemutatására.

Legyen $G = (V, E)$ véges gráf. Az első mintavételi módszerben a gráf k csúcspontját, $v_1, v_2, \ldots, v_k$-t választjuk függetlenül, egyenletes eloszlással a V elemeiből, majd tekintjük az ezen csúcsok által feszített G_k gráfot. Ha H egy gráf a $[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$ csúcshalmazon, akkor jelölje $t^0(H, G)$ annak a valószínűségét hogy $G_k = H$. Egy $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ gráfsorozatot akkor mondunk konvergensnek, ha minden fix H-ra létezik a $\lim_{i\to\infty} t^0(H, G_i)$ határérték. Egy másik eklvivalens megközelítés szerint jelölje $t(H, G)$ annak a valószínűségét, hogy egy véletlen $V(H)$-bol $V(G)$-be menő függvény gráfhomomorfizmus. A konvergenciát hasonlóan definiáljunk úgy, hogy $t^0(H, G_i)$ helyett $t(H, G_i)$-t tekintünk. A homomorfizmus sűrűségek előnye, hogy olyan fontos algebrai tulajdonságokkal rendelkezik, mint a multiplikatívitás és a tükrözés pozitívitás (reflection positivity).

A második mintavételi módszer bevezetéséhez legyen $\mathcal{G}_d$ azon véges gráfok halmaza, melyben a maximum fok legfejebb d. Legyen továbbá $\mathcal{G}_d^r$ azon gráfok halmaza melyekben a maximum fok legfejebb d és van egy kitüntetett gyökér o, melynek távolsága minden ponttól legfejebb r. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf $\mathcal{G}_d$-ben, és legyen v egy egyenletes eloszlással választott csúcs V-ben. Legyen $N_r(v)$ a v-gyökerű izomorfia osztálya a v csúcs r-sugarú környezetének. Ekkor $N_r(v)$ az $\mathcal{G}_d^r$-nek egy random eleme $\mu(r, G)$ eloszlással. Egy $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ gráfsorozat Banjamini-Schramm konvegens ha minden r-re igaz hogy $\mu(r, G_n)$ az eloszlások egy konvergens sorozata.

A Benjamini-Schramm konvergencia eredendően lokális, ezért sok alkalmazás számára nem elég erős. Például a véletlenszerű d -reguláris gráfok lokálisan fához hasonlóak, de nagyon nem triviális globális struktúrával rendelkeznek, amelyet még nem sikerült leírni. A probléma formalizálásához szükség van a Benjamini-Schramm konvergencia finomítására, amelyet lokális-globális konvergenciának neveznek. A lokális-globális konvergencia fogalmát sikeresen alkalmaztuk a véletlen reguláris gráfok sajátvektorainak tanulmányozásában. A bonyolult analitikus, információelméleti és gráflimesz módszerekkel bizonyítottuk a [10] -ben, hogy a véletlen reguláris gráfok majdnem-sajátvektorai közel Gauss elem-eloszlással rendelkeznek. Ez az eredmény jól illusztrálja, hogy a gráfelméletben mély eredmények nyerhetők a limesz megközelítéssel. Ebben a tézisben részletesen leírjuk a lokális-globális gráfkonvergencia mögött húzódó elméletet. A megfelelő fejezet a [51] cikken alapul. Az egyik fő eredmény a lokális-globális limeszek jellemzése graphingok segítségével.

A homomorfizmus sűrűségek (és homomorfizmus számok) döntő szerepet játszanak a gráflimesz elméletben. Ha a G egy rögzített gráf, akkor a $t(H,G)$ értékek számos hasznos algebrai tulajdonsággal rendelkeznek. Freedman, Lovász és Schrijver [36] megfigyelték, hogy létezik a homomorfizmus számának egy másik változata, amely hasonló algebrai tulajdonságokkal bír. A homomorfizmus számot olyan szorzatok összegének is tekinthetjük, amelyek a csúcsok cimkézéseitől függnek. Egy duális verzióban az éleket cimkézzük minden lehetséges módon, és az így kapott szorzatokat összegzünk. Ezeket élmodellnek, avagy "edge coloring model"-nek hívjuk. Ezek fontos szerepet játszanak a statisztikus fizikában, és a tenzorhálózatok elméletében. Tézisünk egyik fő eredménye Freedman, Lovász és Schrijver egy sejtésének megoldása, mely algebrailag karakterizálja az élmodellek értékeit. Ezt az erdményt később többen alapul vették más hasonló eredmény igazolásához.

Tézisünk utolsó fejezete a gráflimeszek elméletét általánosítja az additív kombinatorika területén. Kiderül, hogy véges vagy kompakt Abel-csoportokon értelmezett függvényekből is van természetes mintavételezés, amely egy természetes limesz fogalomhoz vezet. Ezt a limesz fogalmat összekapcsoljuk a Fourier-analízis elméletével és a gráflimeszekkel is. Megjegyezzük, hogy innen kiindulva tanulmányozható az úgynevezett magasabb rendű Fourier-elmélet is, de ez túlmutat a jelen munkán.

3 Sűrű gráfok limeszei

A *graphon* egy mérhető függvény $W:[0,1]^2 \to [0,1]$, mely teljesíti, hogy $W(x,y)=W(y,x)$ minden $x,y \in [0,1]$ esetén. Jelölje $\mathcal{W}_0$ a graphon-ok halmazát. Ha G egy véges gráf az $[n]$ csúcshalmazon, akkor a graphon reprezentációja a W_G függvény, melyet a

$$W(x,y) = 1_{E(G)}(\lceil nx \rceil, \lceil ny \rceil)$$

formula definiál. Legyen H egy véges gráf a $[k]$ csúcshalmazon és legyen

$$t(H,W) := \int_{x_1,x_2,\dots,x_k \in [0,1]} \prod_{(i,j)\in E(H)} W(x_i,x_j)\ dx_1 dx_2 \dots dx_k.$$

Ekkor a $t(H,W)$ mennyiség általánosítja a gráfokra vonatkozó homomorfizmus sűrűségeket. Könnyű látni hogy $t(H,G)=t(H,W_G)$. Legyen $\mathcal{W}$ az összes korlátos mérhető függvény halmaza a $[0,1]^2$ négyzeten. A cut norma $\|.\|_\square$ a $\mathcal{W}$ függvénytéren van értelmezve. Legyen $F \in \mathcal{W}$. Ekkor

$$\|F\|_\square := \sup_{A,B\subseteq[0,1]} \left| \int_{A\times B} F(x,y)\ dxdy \right|,$$

ahol A és B végigfut $[0,1]$ mérhető részhalmazain. Legyen $\psi:[0,1]\to[0,1]$ egy mértéktartó transzformáció. Ekkor $W^\psi(x,y) := W(\psi(x),\psi(y))$. Ez a transzformáció megtartja a homomorfizmus sűrűségeket: $t(H,W)=t(H,W^\psi)$ teljesül minden véges H gráfra. Bevezetjük a következő távolságot:

$$\delta_\square(U,W) := \inf_{\phi,\psi:[0,1]\to[0,1]} \|U^\phi - W^\psi\|_\square,$$

ahol ϕ és ψ végigfut az összes mérhető transzformáción. $\delta_\square$ egy pszeudometrika. Vezessük be a $\sim_{\delta_\square}$ ekvivalneciareláció úgy hogy $x \sim_{\delta_\square} y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$. Legyen $\mathcal{X}_0 := \mathcal{W}_0/\sim_{\delta_\square}$. Mivel $\delta_\square(U,W) = 0$ esetén $t(H,U) = t(H,W)$ minden H gráfra, ezért $t(H,-)$ jól definiált a $\mathcal{X}_0$ halmazon. A következő eredmény ([64],[65]) a gráflimesz elmélet egyik kiindulási pontja:

Tézis 1 *A $(\mathcal{X}_0,\delta_\square)$ metrikus tér teljesíti a következő két tulajdonságot.*

1. *A $\delta_\square$ metrika egy kompakt, Hausdorff, szeparábilis topológiát indukál a $\mathcal{X}_0$ téren.*
2. *Minden H gráfra a $X \to t(H,X)$ függvény folytonos a $\mathcal{X}_0$ téren.*

Ennek a tételnek kulcsfontosságú következménye a gráflimeszek analitikus karakterizációja:

Tézis 2 *Legyen $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ egy olyan gráfsorozat, hogy $f(H) := \lim_{i\to\infty} t(H,G_i)$ létezik minden véges H gráfra. Ekkor létezik egy $W \in \mathcal{W}$ graphon, melyre $f(H) = t(H,W)$ teljesül minden H esetén.*

4 Lokális-globális gráfkonvergencia

Legyen d egy fix természetes szám. Ebben a fejezetben minden további gráfban a maximális fokszám legfejebb d. Egy gyökeres gráf az egy pár (G,o), ahol o egy kitüntetett csúcs (gyökér). Egy gyökeres gráf sugara a gyökértől vett maximális távolság. Ha v egy G gráf csúcsa, akkor $N(G,r)(v)$-vel jelöljük a v csúcs r-sugarú környezetét, melyben v a gyökér. Legyen G véges gráf és legyen $K(k,G)$ a G csúcsinak összes k-színezése. Ha r,k fix számok akkor $U^{r,k}$-val jelöljük az összes hármas (H,o,c) halmazát, ahol (H,o) egy maximum r sugarú gyökeres gráf és c egy tetszőleges k-színezése a csúcsoknak. Legyen G egy véges gráf és $c \in K(k,G)$ egy k-színezés. Legyen v egy egyenletes eloszlással választott csúcs G-ben. Ekkor a c színezés megszorítása $N_{G,r}(v)$-re egy $U^{r,k}$-beli elem és így v véletlen választása folytán egy valószínűségi eloszlást kapunk az $U^{r,k}$ halmazon, melyet $P_{G,r}[c]$-vel jelölünk. Legyen

$$Q_{G,r,k} := \{P_{G,r}[c] : \ c \in K(k,G)\} \subseteq M(U^{r,k}),$$

ahol $M(U^{r,k})$ az $U^{r,k}$ halmazon vett valószínűségi eloszlások halmaza.

Definíció 1 Véges gráfok egy $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ sorozata (ahol minden fok maximum d) *lokális-globális* konvergens, ha minden $r,k \geq 1$-re a $(Q_{G_n,r,k})_{n=1}^\infty$ sorozat konvergens a Hausdorff metrikában melyet a $(M(U^{r,k}), d_{\mathrm{var}})$ kompakt metrikus téren definiálunk.

Definíció 2 Legyen X egy Polish topológikus tér és legyen ν egy valószínűségi mérték az X Borel halmazain. Egy *graphing* az egy gráf $\mathcal{G}$ a $V(\mathcal{G}) = X$ csúcsokon melynek az élhalmaza Borel az $X \times X$ téren, a maximum fok legfejebb d és

$$\int_A e(x,B)d\nu(x) = \int_B e(x,A)d\nu(x) \tag{1}$$

minden $A, B \subseteq X$ mérhető halmazra, ahol $e(x,S)$ az élek száma $x \in X$ és $S \subseteq X$ között.

Graphingokban is definiálhatóak a fenti jelölések azzal a plussz feltétellel, hogy a k-színezésekben minden színosztály mérhető. Ezért graphingok körére is kiterjeszthető a lokális-globális konvergencia. Jegyezzük meg, hogy minden véges gráf egy graphing.

Tézis 3 *Legyen $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ egy lokális-globális konvergens sorozata véges gráfoknak, melyekben minden fok maximum d. Ekkor létezik egy graphing $\mathcal{G}$ úgy hogy $Q_{G_n,r,k} \to Q_{\mathcal{G},r,k}$ $(n \to \infty)$ Hausdorff távolság szerint minden fix r és k értékre.*

5 Élmodellek

Legyen $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_d\}$ egy véges d elemű halmaz, melynek elemit színeknek hívjuk. Egy *élmodellt* egy $t : \mathbb{N}^d \to R$ függvény határoz meg. Minden élmodellhez tartozik egy gráfparaméter, melyet $t : \mathcal{G} \to R$ jelöl. Legyen $v \in V(G)$ és legyen $\psi : E(G) \to \mathcal{C}$ egy színezése a G éleinek. $v_\psi \in \mathbb{N}^d$-vel jelöljük azt a vektort, melynek i-edik koordinátája azon élek száma, melyek v-hez csatlakoznak és c_i a színük. A hurokéleket kétszer számoljuk. Ekkor legyen

$$t_\psi(G) := \prod_{v \in V(G)} t(v_\psi)$$

és

$$t(G) := \sum_{\psi : E(G) \to \mathcal{C}} t_\psi(G).$$

Legyen $\mathcal{G}_k$ azon gráfok halmaza, melyek tartalmaznak k "nyitott" élt. A nyitott élek valamely csúcsból indulnak ki és az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmazzal vannak megszámozva. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{G}_k$, akkor a $H_1 H_2$ ragasztáson azt a (nyitott élek nélküli) gráfot értjük, amelyben összeragasztjuk H_1 és H_2 azonosan számozott nyitott éleit. Legyen $\mathcal{Q}_k$ a $\mathcal{G}_k$ elemeinek formális lineáris kombinációiból álló vektortér $\mathbb{R}$ felett. Hasonlóképpen legyen $\mathcal{Q}$ a sima (nyitott élek nélküli) gráfok formális vektortere. A $\mathcal{Q}$ tér elemeit *kvantumgráfoknak hívjuk.* Ekkor a ragasztási operáció lineárisan kiterjed mint

$$g : \mathcal{Q}_k \times \mathcal{Q}_k \to \mathcal{Q}$$

Egy $Q \in \mathcal{Q}$ kantumgráfot *éltükrözés szimmetrikus*-nak hívunk, ha $Q = g(H, H)$ valamely $H \in \mathcal{Q}_k$ és $k \geq 0$ esetén. Egy $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ gráfparaméter *éltükrözés pozitív,* ha az $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ lineáris kiterjesztése nem negatív értéket vesz fel minden éltükrözés szimmetrikus kvantumgráfon. Az f gráfparamétert multiplikatívnak hívjuk, ha gráfok diszjunkt uniójára összeszorzódik.

A következő tétel megválaszolja Freedman, Lovász és Schrijver egy sejtését.

Tézis 4 *Legyen $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ egy éltükrözés pozitív, multiplikatív gráfparaméter. Ekkor létezik $t : \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ élmodell valamely d-re, úgy, hogy az élmodellhez tartozó gráfparaméter egyenlő f-fel.*

6 Függvények limeszei csoportokon

Ennek a fejezetnek a fő célja, hogy a sűrű gráfok limeszelméletét általánosítsa az additív kombinatorika területére. Az additív kombinatorikai állítások jelentős része Abel-csoportok részhalmazairól, vagy általánosabban Abel-csoportokon értelmezett függvényekről szól. Ebben a fejezetben tehát egy olyan limesz elméletet tekintünk melyben az alap objektumok Abel-csoportokon, avagy még általánosabban, csoportokon értelmezett függvények. Célunk, hogy (G, f) csoport–függvény párokat tudjunk összehasonlítani, ahol mind a csoport és a függvény is külömböző lehet. Ezt kétféle kontextusban valósítjuk meg: 1) Tetszőleges csoportokon vizsgálunk L_2 függvényeket 2) Kompakt Abel-csoportokon vizsgálunk korlátos mérhető függvényeket. Az első esetben bevezetjük a $\bar{d}$, míg a második esetben a d metrikát. A Pontrjagin dualitás szellemében igazolunk egy dualitási tételt $\bar{d}$ és d között. Ezen metrikák definíciója meglehetősen technikás, így ebben a rövid verzióban mellőzzük azt.

Legyen $\mathcal{H}$ azon (A, f) párok halmaza (d ekvivalencia erejéig), ahol A egy kompakt Abel-csoport és f egy L^2 mérhető függvény A-n. Legyen $K \subseteq \mathbb{C}$ egy halmaz és legyen $\mathcal{H}(K)$ azon $\mathcal{H}$-beli elemek halmaza, melyhez tartozó függvény K-ban veszi fel értékeit. A következő tétel kulcsfontosságú a d metrikáról.

Tézis 5 *Ha $K \subseteq \mathbb{C}$ egy kompakt konvex halmaz akkor $(\mathcal{H}(K), d)$ kompakt metrikus tér.*

Az additív kombinatorikai vizsgálatok másik kulcsfogalma a lineáris konfiguráció. Ilyen például egy számtani sorozat. Itt jön a precízebb definíció. Legye $L = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ egy lineáris forma egész együtthatókkal. Ekkor L kiértékelhető egy tetszőleges A Abel-csoportban úgy, hogy az x_i változók az A halmazból kapják értékeiket. Ezen a módon egy $L : A^n \to A$ függvényt kapunk. Lineáris formák $L_1, L_2, \ldots, L_k$ halmazát lineáris konfigurációnak hívjuk. Tegyük fel, hogy A kompakt Abel-csoport és $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^k$ korlátos mérhető függvények $L^\infty(A)$-ben. Tegyük fel, hogy $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ egy lineáris konfiguráció. Ekkor $\mathcal{L}$ sűrűség'et $\mathcal{F}$-ben a következő formula definiálja:

$$t(\mathcal{L}, \mathcal{F}) := \mathbb{E}_{x_1, x_2, \ldots, x_n \in A} \prod_{i=1}^{k} f_i(L_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)). \tag{2}$$

Fontos aleset, mikor $\mathcal{F}$ minden eleme ugyanaz a függvény. Ekkor a fenti képlet az (A, f) párban definiálja $\mathcal{L}$ sűrűségét. A lineáris konfigurációk sűrűségei a gráfelméleti homomorfizmus sűrűségek közeli rokonai és mély kapcsolatban állnak azokkal. Segítségükkel hasonló limesz fogalom definiálható mint a sűrű gráfok esetén. Ennek a limeszfogalomnak a teljes megértése igen bonyolult és az úgynevezett magasabb Fourier-analízis elméletét igényli, melynek bemutatása messze túlmutat ennek a fejezetnek a keretein. Ez a fejezet arra a speciális esetre fókuszál, mikor a konfigurációk úgynevezett komplexitása 1. Ezt a komplexitás fogalmat Gowers és Wolf vezette be. A gráfok limeszelméletéhez hasonlóan a következő tételt bizonyítjuk a metrika és a sűrűségek kapcsolatáról.

Tézis 6 *Ha $\mathcal{L}$ komplexitása 1, akkor $\mathcal{L}$ sűrűsége folytonos d metrikában.*