dc_1892_21

Sorozatok a diofantikus számelméletben

MTA doktori értekezés tézisei

Tengely Szabolcs

Debrecen, 2021

dc_1892_21

Tartalomjegyzék

FEJEZET

1 A kutatás témakörének bemutatása

Diofantikus egyenletek, egyenlet családok esetében fontos kérdés a megoldásszám és konkrét esetekben az összes megoldás meghatározása. Algebrai görbék egész (S-egész) pontjaira általános végességi tételt 1929-ben Siegel [86] bizonyított. Mordell [66] 1922-ben egy igen fontos sejtést fogalmazott meg, algebrai görbéken csak véges sok racionális pont van, ha a görbe génusza legalább 2. Chabauty [22] igazolta, hogy a sejtés igaz olyan görbék esetében, amelyeknek a Jacobianjának a rangja kisebb, mint a görbe génusza. Chabauty módszerét felhasználva konkrét görbék esetében korlátot tudunk adni a pontok számának maximumára és sok esetben ez a korlát éles. Mordell sejtését 1983-ban Faltings [33] bizonyította be.

A diofantikus egyenletek egyik legismertebb problémája a "nagy Fermat-tétel". Ez a sejtés több mint 350 éven keresztül megoldatlan maradt, nagyon sok kutató és amatőr matematikus próbálta igazolni, végül Andrew Wiles [106] bizonyította be. A bizonyításban kulcsszerepet játszott az elliptikus görbék elmélete és az úgynevezett Frey-görbék.

Ezen témakörökkel intenzíven foglalkozik több számelméleti kutatócsoport a világ különböző országaiban. Az elmúlt évtizedekben új módszereket dolgoztak ki, amelyek között viszonylag kevés kapcsolat volt. Ilyenek például az elemi módszerek, Runge-módszer [40], [52], [81], [105], aritmetikai geometriai eszközök (Chabauty-módszer [21], [22], [25], [34], elliptikus Chabauty-módszer [15], [16], [14], Demjanenko-módszer [27], [37], [51], [59]), Baker-módszer [5], [6], [7], [43], [88].

A következő részben áttekintünk néhány klasszikus diofantikus számelmélethez kapcsolódó problémát, amelyek a disszertáció témájával szorosan összefüggenek.

Euler 1770-ben egy Lagrangenak írott levelében megadott 4×4-es négyzetszámokból álló bűvös négyzetet. Lucas 1876-ban megfogalmazta a problémát, hogy 3×3-as esetben létezik-e csupa négyzetszámokból álló bűvös négyzet. A kérdést 1984-ben LaBar újra felvetette. Robertson [79] megmutatta, hogy a problémának pontosan akkor létezik megoldása, ha az

$$E_n : \quad y^2 = x^3 - n^2 x$$

elliptikus görbén létezik 3 egész pont $2E_n(\mathbb{Q})$-ban, amelyeknek x-koordinátái számtani sorozatot alkotnak. Érdekesség, hogy ez a görbe család lép fel a kongruens számok vizsgálatánál is, így ezzel kapcsolatban az irodalom sok szép eredményt tartalmaz, számtani sorozatokkal kapcsolatban például a [13] és [89]. A fenti probléma általánosítható algebrai görbék esetére is. Adott algebrai görbe pontjai között keresünk olyanokat, amelyeknek x-koordinátái számtani sorozatot határoznak meg. Az $y^2 = f(x)$ egyenletnél, ahol f fokszáma kettő, Allison [1] adott meg egy végtelen családot, amely 8 hosszú számtani sorozatot tartalmaz. Többen vizsgálták a Pell egyenleteken található számtani sorozatokat, például [29], [73]. Az $y^2 = f(x)$ egyenletnél, ahol f fokszáma három, elliptikus görbe pontjai között keresünk hosszú számtani sorozatot az x-koordinátákban, itt Bremner [12] és Campbell [20] határoztak meg végtelen családokat, amelyek esetében 8 hosszú számtani sorozat létezése garantált. Speciálisan a Mordell görbékkel

$$y^2 = x^3 + k$$

kapcsolatban Lee és Vélez ért el eredményeket [53]. Egy génuszú görbék alábbi családjait is sokan vizsgálták,

$$\begin{aligned} \text{Edwards görbék:} \quad & E_d : x^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2, \\ \text{Huff görbék:} \quad & H_{a,b} : ax(y^2 - 1) = by(x^2 - 1), \\ \text{negyedfokú modell:} \quad & Q : y^2 = f(x), \text{ ahol } \deg f = 4. \end{aligned}$$

Moody [64] megmutatta, hogy az Edwards görbék esetében létezik olyan d érték, amelyre a görbén található legalább 9 hosszú számtani sorozat. Huff görbékre Moody [65] igazolta, hogy 9 hosszú számtani sorozat létezik a $b = 1/2$ választás mellett. Negyedfokú modellnél létezik olyan görbe, amelyen 14 hosszú számtani sorozat található, illetve létezik olyan végtelen család, ahol ez a hossz 12, ezen eredmények a következő publikációkban tárgyaltak: [3], [58] és [102]. Génusz kettes esetben a két vizsgált hiperelliptikus modell az $y^2 = f(x)$ alakban adható meg, ahol f fokszáma 5, illetve 6. Amikor f fokszáma 5 a [2] és [104] eredmények alapján tudjuk, hogy létezik 12 hosszú számtani sorozat egy végtelen család esetében. Amikor pedig f foka 6 [104] alapján létezik 18 hosszú számtani sorozat és végtelen család esetében 16 hosszú sorozat. Érdekes kapcsolódó eredmény található szimultán számtani sorozatokról a [83] cikkben. A görbe valós pontjait tekintve olyan (x_k, y_k) sorozatot keresünk, ahol az x-koordináták és az y-koordináták is számtani sorozatba rendezhetőek. A szerzők megmutatták, hogy ebben az esetben 4319 felső korlát a pontok számára.

Lineáris rekurzív sorozatokban található négyzetek, köbök, teljes hatványok vizsgálata már hosszabb múltra tekint vissza. Pethő [71], [72], [70], Robbins [77], [78], Shorey és Stewart [84], [85] eredményeit emelném ki. Különösen népszerû téma a Fibonacci és Lucas sorozatokban található teljes hatványok vizsgálata. Itt Pethő eredményei mellett Bugeaud, Mignotte és Siksek megjelent cikkét [18] említeném meg, amelyben meghatározták a teljes hatványokat Fibonacci és Lucas sorozatokban Baker-módszer és moduláris-módszer segítségével. Teljes hatványok mellett az úgynevezett figuratív számok meghatározása is kutatott terület. A Fibonacci, Lucas és Pell sorozatokban előforduló trianguláris, pentagonális és heptagonális számok vizsgálatával foglalkozó matematikusok közül J. H. E. Cohn [24], Katayama [49], Ming Luo [62], [63], V. S. R. Prasad és Srinivasa Rao [74], [75] nevét említeném meg.

1.1. A kutatás célkitűzései

Az értekezésben sorozatokkal kapcsolatos diofantikus számelméleti problémákkal foglalkozunk. Az előző fejezetben példákat adtunk rá milyen kutatásokat, kutatási irányokat adtak a tradicionálisan a témakörben felbukkanó sorozatok, a rekurzív sorozatok és a számtani sorozatok. A konkrét célkitűzéseket a következő két pontban tudjuk összefoglalni:

- sorozatok diofantikus egyenletek megoldásai körében,
- sorozatok tulajdonságaival kapcsolatos diofantikus egyenletek.

Az első pont esetében a következő eredményeket tekintjük át. Pethő 2010-ben [69] kitűzött néhány számelméleti problémát, az egyik norma forma egyenletek megoldásaira vonatkozott. Ezt a kérdést sikeresen megválaszoltuk Ulas lengyel matematikussal közösen [99]. A bevezető részben említésre kerültek eredmények algebrai görbék pontjai és számtani sorozatok kapcsolatára vonatkozóan. Két általánosított Huff modell esetében vizsgáljuk az egész pontokat felhasználva a Runge-módszert és ennek segítségével adunk a kapcsolódó számtani sorozatokra vonatkozó eredményeket [96]. A Markoff egyenlet esetében felbukkan egy Fibonacci számokra épülő azonosság:

$$1 + F_{2n-1}^2 + F_{2n+1}^2 = 3F_{2n-1}F_{2n+1}.$$

Luca és Srinivasan [54] megvizsgálta léteznek-e más hasonló megoldások, megoldás családok, amelyekben csak Fibonacci számok szerepelnek. A módszerükben egyes lépések erősen kihasználták a Fibonacci sorozat tulajdonságait. Sikerült kiterjeszteni az eljárásukat [97] olyan módon, hogy Markoff-Rosenberger egyenletek esetében is meghatározhatóvá váltak a speciális rekurzív megoldások.
A második részben sorozatok közös elemeinek vizsgálatával kapcsolatos diofantikus egyenleteket tekintünk. A diofantikus számelméletben számos könnyen megfogalmazható nehéz probléma ismert. Sok esetben a megoldáshoz új módszerekre, illetve módszerek megfelelő kombinálására van szükség. Az értekezés második részében egy mai napig igen aktív szerteágazó témával foglalkozunk. Egymást követő egészek szorzata nem lehet teljes hatvány, ez Erdős és Selfridge [32] klasszikus diofantikus eredménye. Később Erdős és Graham [31] felvetett egy még általánosabb problémát, amely blokkok szorzataival kapcsolatos. Négy hosszú blokkok esetén Ulas [103] megmutatta, hogy létezik végtelen sok megoldás, a várakozásokkal ellentétben. Legalább öt darab 5 hosszú blokk esetében Bennett és Van Luijk [10] nyert hasonló eredményt. A nyitott esetek közül az értekezésben vizsgáljuk a két négyes blokk szorzatával összefüggő problémát, azaz az

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+m)(x+m+1)(x+m+2)(x+m+3) = y^2$$

diofantikus egyenletet. Hatékony algoritmust adunk az összes megoldás meghatározására rögzített m esetén. Továbbá vizsgálunk olyan eseteket is, ahol a blokkok hossza nem feltétlenül azonos:

$$x(x+1)y(y+1)(y+2)(y+3) = z^2,$$

illetve nem egymást követő egészek blokkjait tekintjük, hanem számtani sorozat egymást követő elemeiét:

$$(x-b)x(x+b)(y-b)y(y+b) = z^2.$$

Bevezetjük az Erdős-Graham probléma additív általánosítását és ezekkel kapcsolatban igazolunk effektív végességi eredményeket, illetve bizonyos speciális esetekben az összes megoldást meg tudjuk határozni. Az Erdős-Graham problémakörhöz kapcsolódó eredményeim a következő cikkekben szerepelnek: [46, 100, 98, 95].

Polinomok által reprezentálható lineáris rekurzív sorozatok elemeivel kapcsolatban Nemes és Pethő [67] nyert szép eredményt, amelyben megadják milyen esetekben létezhet végtelen sok egész (n, x) megoldása a

$$P(x) = R_n$$

egyenletnek. A leírásban szereplő polinomok esetében előfordulhat, hogy csak véges sok megoldás létezik, ahogyan a szerzők ezt példával is illusztrálták. Az eredményt olyan irányban terjesztettük ki, hogy megadtunk polinomokat, amelyek esetében garantáltan létezik végtelen sok egész megoldás. A kérdéskörrel kapcsolatosan több eredmény is található az irodalomban, amelyekben konkrét polinomok és konkrét sorozatok esetében határozzák meg az egész megoldásokat. Egy ilyen a binomiális együtthatókkal kapcsolatos $\binom{x}{k} = R_n$ egyenlet. Több sorozat esetén is vizsgálták a problémát kis k értékek mellett: Kovács [50], McDaniel [61], Ming [56, 57], Szalay [92, 91]. A vizsgált esetekben a probléma legfeljebb 1 génuszú algebrai görbe egész pontjainak meghatározására vezethető vissza. A 2 génuszú görbékre vezető problémák közül sikerült kezelni az

$$\binom{x}{5} = F_n \qquad \text{és } \binom{x}{5} = L_n$$

egyenleteket. A kapcsolódó eredmények a [94, 101] publikációkban találhatóak.

1.2. A vizsgálati módszerek

A disszertációban vizsgált problémák egy közös jellemzője az adott diofantikus egyenletek összes megoldásának meghatározása, illetve bizonyos esetekben jellemzése. Az eredmények esetében felhasznált legfontosabb módszereket tekintjük át ebben a fejezetben. A módszereket a két célkitűzés mentén tekintjük át.

Sorozatok diofantikus egyenletek megoldásai körében.

A Pethő-problémával kapcsolatos eredmények esetében a kérdést sikerült polinomiális egyenletrendszerre visszavezetni, amelyekre vonatkozóan több hatékony numerikus módszert is kidolgoztak már. Ezek a numerikus módszerek viszont a valós vagy a komplex számok felett tekintett rendszereknél alkalmazhatóak. Esetünkben a változók egészek vagy racionálisak. A **Gröbner-bázisok** segítségével sikerült egy bonyolult, de 6 változó helyett csak 3 változót tartalmazó egyenletre redukálni a problémát. Az eredményes numerikus vizsgálatot felhasználva a negyedfokú felületet függvénytest feletti görbeként kezelve a kérdés **0 génuszú függvénytest feletti görbe pontjainak parametrizációjára** vezet.

A Huff görbék esetében **elliptikus görbék** egy modelljéről beszélünk. Elliptikus görbék egész pontjainak meghatározására az elliptikus logaritmus módszer egy hatékony eszköz. Mivel elliptikus görbék Mordell-Weil csoportjának a rangjának meghatározására nem ismert algoritmus, így a gyakorlatban előfordulhatnak görbék, amelyekre nem alkalmazható, illetve nehezen alkalmazható ha a csoport generátorai között van nagy kanonikus magasságú. A Huff görbék esetében két különböző modellnél is kidolgoztunk egy **Runge-módszeren** alapuló eljárást, amely minden esetben korlátot szolgáltat az ismeretlen egész megoldásokra. Ezek a korlátok a Runge-módszer esetében is lehetnek nagyok, ami az összes megoldás meghatározását nehézzé teszi, így megadtunk egy redukciós eljárást, ami kiterjeszti a kezelhető problémák körét.

Az

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = dxyz.$$

egyenlettel megadott úgynevezett Markoff-Rosenberger egyenlet esetében olyan x, y, z egész megoldások meghatározásával foglalkoztunk, amelyek egyszerre Fibonacci számok. Az $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 3)$ egyenletre Luca és Srinivasan határozta meg a megoldásokat, ahol például felmerül az

$$1 + F_{2n-1}^2 + F_{2n+1}^2 = 3F_{2n-1}F_{2n+1}$$

család. A Fibonacci számokra vonatkozó alapvető azonosságokon felül a Luca és Srinivasan által kidolgozott módszert finomítottuk olyan módon, hogy az adódó korlátok meghatározása után egységesen **1 génuszú görbék egész pontjainak meghatározására** vezettük vissza a problémát.

Sorozatok tulajdonságaival kapcsolatos diofantikus egyenletek.

Az Erdős-Graham probléma vizsgálata során egymást követő egészek szorzataival foglalkozunk. Ilyen blokkok szorzata mikor lehet teljes négyzet? Ezt a kérdést tette fel Erdős és Graham. Az igen sok kutatást inspiráló Erdős-Selfridge eredményre alapozva Erdős és Graham azt várta, hogy blokkok esetén is negatív válasz születik, azaz nem létezik megoldás. Itt az első ellenpélda Ulastól származik. Két négyes blokk szorzata esetén a kérdés nem tisztázott, itt az egyenlet az alábbi:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+m)(x+m+1)(x+m+2)(x+m+3) = y^2,$$

amely egy 3 génuszú hiperelliptikus görbét definiál. Ezt visszavezettük 1 génuszú görbére és a Runge-módszer segítségével x-re lineáris felső korlátot adtunk a blokkok távolságának függvényében. A teljes megoldáshoz kifejlesztettünk egy p-adikus **redukciós eljárást**. Az Erdős-Graham probléma általánosításaként vizsgáltuk az alábbi diofantikus egyenleteket:

$$\begin{aligned} x(x+1)y(y+1)(y+2) &= z^2, \\ x(x+1)y(y+1)(y+2)(y+3) &= z^2. \end{aligned}$$

Paraméteres Pell-egyenletekre vonatkozó eredményeket felhasználva igazoltuk, hogy végtelen sok megoldás létezik $\mathbb{Z}[t]$-ben. Az Erdős-Graham probléma egy additív általánosítása az

$$f_k(x) = y^n$$

egyenlet, ahol

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \prod_{j=0}^{i} (x+j).$$

Itt a **Baker-módszeren** alapuló mély eredmények segítségével nyertünk effektív végességi eredményeket. A numerikus eredmények esetében **elliptikus görbék** különböző modelljei esetében határoztuk meg az egész pontokat. A 2 génuszú esetekben a **klasszikus Chabauty-módszert** felhasználva határoztuk meg a racionális megoldásokat.

Vizsgáltuk a $P(x) = R_n$ diofantikus egyenletet, amelyre vonatkozóan Nemes és Pethő egy elegáns karakterizációs eredménye adta a motivációt. Megadtunk olyan polinom sorozatokat, amelyek esetében végtelen sok megoldás garantált. Az irodalomban előforduló eredmények természetes folytatásaként kitértünk konkrét esetek vizsgálatára is, például az

$$F_n = \binom{x}{5}, \qquad L_n = \binom{x}{5}. \tag{1.1}$$

A kérdés ezekben az esetekben **2 génuszú görbék egész pontjainak** meghatározására vezet. Itt a megoldásokra a **Baker-módszer** segítségével lehet korlátot adni. Ezek a korlátok nem teszik lehetővé praktikus algoritmus megadását. Így itt a **Mordell-Weil szita** segítségével igazoltuk, hogy ha létezik nem ismert egész pont a görbén, akkor annak mérete még az előző Baker-korlátnál is nagyobbnak kell lennie. Ez a módszer a Lucas számok esetében sikeresen működött, a Fibonacci számoknál az alsó korlátot nem sikerült kiterjeszteni úgy, hogy a Baker-korlátnak ellentmondjon. A

Fibonacci számok esetében így a **hiperelliptikus logaritmus módszer** segítségével kezeltük a problémát, a korlátot az **LLL-algoritmuson alapuló redukciót** (de Weger által bevezetett ötlet) felhasználva sikerült redukálni, így a 2 és 4 Mordell-Weil rangú görbéken a leszámlálás már működött.

FEJEZET

2 Tudományos eredmények rövid összefoglalása

2.1. Pethő egy problémájáról

Buchmann és Pethő [17] a $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ számtestben, ahol $\alpha^7 - 3 = 0$, vizsgálták az

$$N_{K/\mathbb{Q}}(x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_6\alpha^6) = 1$$

norma forma egyenletet. Megjegyezték, hogy a megoldások között található a következő egység:

$$10 + 9\alpha + 8\alpha^2 + 7\alpha^3 + 6\alpha^4 + 5\alpha^5 + 4\alpha^6,$$

azaz létezik olyan megoldás, amelynél az $(x_0, \ldots, x_6) \in \mathbb{Z}^7$ koordináták számtani sorozatot alkotnak. A fenti példa alapján Bérczes és Pethő [11] vizsgálta a következő norma forma egyenletet:

$$N_{K/\mathbb{Q}}(x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_{n-1}\alpha^{n-1}) = m,$$

ahol $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ adott számtest, az $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ egészek pedig számtani sorozatot alkotnak. Sikerült megmutatniuk, hogy csak véges sok megoldás létezhet, ha bizonyos feltételek teljesülnek. Az egyik feltétel, amelyet nem fed le a végességi állítás az az, hogy a

$$\beta = \frac{n\alpha^n}{\alpha^n - 1} - \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

szám egy valós másodrendű algebrai szám legyen. Cikkükben egy ilyen példát adtak: ha az $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 2$ az α definiáló polinomja, akkor β gyöke az $x^2 - 4x + 2$ másodfokú polinomnak. Ezzel kapcsolatban tűzött ki 2010-ben Pethő [69] egy problémát (Problem 6).

1. Probléma (Pethő). *Létezik-e végtelen sok negyedfokú algebrai egész α, amelyre $\frac{4\alpha^4}{\alpha^4-1} - \frac{\alpha}{\alpha-1}$ másodfokú algebrai szám?*

Legyen $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ negyedfokú irreducibilis polinom, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ és $g(x) = x^2 + px + q$ polinom, amelyre $p, q \in \mathbb{Q}$. Kiindulva abból, hogy α gyöke az $f(x)$-nek és $\beta = \frac{4\alpha^4}{\alpha^4-1} - \frac{\alpha}{\alpha-1}$ gyöke $g(x)$-nek, adódik egy hatodfokú polinom, amelynek α gyöke. Azaz a hatodfokú polinom osztható az $f(x)$ polinommal. Legyen a maradék $e_1 + e_2x + e_3x^2 + e_4x^3$, ahol

$$\begin{aligned}
e_1: \quad & -3dpa^2 + 5dpa + 3dpb - 6dp - dqa^2 + 2dqa + dqb - 3dq - 9da^2 + 12da + \\
& +9db - 10d + q, \\
e_2: \quad & 3dpa - 5dp + dqa - 2dq + 9da - 12d - 3pa^2c + 5pac + 3pbc - 6pc + p - \\
& -qa^2c + 2qac + qbc - 3qc + 2q - 9a^2c + 12ac + 9bc - 10c, \\
e_3: \quad & -3dp - dq - 9d - 3pa^2b + 5pab + 3pac + 3pb^2 - 6pb - 5pc + 3p - qa^2b + \\
& 2qab + qac + qb^2 - 3qb - 2qc + 3q - 9a^2b + 12ab + 9ac + 9b^2 - 10b - \\
& -12c + 1, \\
e_4: \quad & -3pa^3 + 5pa^2 + 6pab - 6pa - 5pb - 3pc + 6p - qa^3 + 2qa^2 + 2qab - 3qa - \\
& 2qb - qc + 4q - 9a^3 + 12a^2 + 18ab - 10a - 12b - 9c + 4.
\end{aligned}$$

Gröbner-bázisok segítségével adódik, hogy a következő szorzatnak nullával kell egyenlőnek lennie:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{233}\right) \cdot (a - 2b + c) \cdot \\
& \cdot(233a^4 - 352a^3b + 108a^3c + 168a^3 + 368a^2b^2 - 264a^2bc - \\
& -624a^2b + 46a^2c^2 - 184a^2c - 544a^2 - 160ab^3 + 128ab^2c + \\
& 352ab^2 - 16abc^2 + 64abc + 128ab - 4ac^3 - 8ac^2 + 768ac + \\
& +640a + 48b^4 - 64b^3c - 256b^3 + 32b^2c^2 + 288b^2c + 384b^2 - \\
& -8bc^3 - 144bc^2 - 512bc + c^4 + 24c^3 + 96c^2 - 640c - 256).
\end{aligned}$$

A $c = 2b - a$ esetben reducibilis polinomot kapunk. Az

$$\begin{aligned}
F(a, b, c) \quad = \quad & 233a^4 - 352a^3b + 108a^3c + 168a^3 + 368a^2b^2 - 264a^2bc - \\
& -624a^2b + 46a^2c^2 - 184a^2c - 544a^2 - 160ab^3 + 128ab^2c + \\
& 352ab^2 - 16abc^2 + 64abc + 128ab - 4ac^3 - 8ac^2 + 768ac + \\
& +640a + 48b^4 - 64b^3c - 256b^3 + 32b^2c^2 + 288b^2c + 384b^2 - \\
& -8bc^3 - 144bc^2 - 512bc + c^4 + 24c^3 + 96c^2 - 640c - 256.
\end{aligned}$$

tényező vizsgálata marad. Ebben az esetben sikerül paraméteres megoldásokat nyerni és függvénytest feletti görbék segítségével megválaszolni Pethő kérdését.

1. Tétel (Tengely-Ulas [99]). *Végtelen sok $\alpha^4 + a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$ egyenlettel definiált negyedfokú algebrai egész létezik, amelyre*

$$\beta = \frac{4\alpha^4}{\alpha^4 - 1} - \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

egy másodfokú algebrai szám. Továbbá végtelen sok α negyedfokú algebrai szám létezik, amelyre a fent definiált β másodfokú algebrai szám valós.

2.2. Sorozatok és Huff görbék

1948-ban Huff [48] egy geometriai probléma vizsgálata során jutott el az

$$ax(y^2 - 1) = by(x^2 - 1)$$

egyenletcsaládhoz. Az így kapott egyenlet elliptikus görbére vezet. Az utóbbi időben a kriptográfiai alkalmazások miatt a különféle modellek nagy népszerűségre tettek szert (Edwards görbék, Montgomery görbék, Weierstrass görbék, hogy egy párat említsünk). Az

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

rövid Weierstrass alakban adott görbék egész pontjainak meghatározására az elliptikus logaritmus módszeren alapuló eljárást Gebel, Pethő és Zimmer [36] és tőlük függetlenül Stroeker and Tzanakis [90] dolgozták ki. Az eljárás sikere nagyban múlik azon, hogy a görbe Mordell-Weil rangját meg tudjuk-e határozni. Erre vannak módszerek, de nincs ismert algoritmus, ami legalább elméletben garantálná a rang meghatározását.

Wu és Feng [107] illetve Ciss és Sow [23] bevezették az alábbi általánosított Huff görbéket:

$$H_{a,b}: \quad x(ay^2 - 1) = y(bx^2 - 1)$$

ahol $a, b \in \mathbb{Z}$ és

$$H_{a,b}^{c,d}: \quad ax(y^2 - c) = by(x^2 - d)$$

ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ezen modellek esetében megmutatjuk, hogy az egész pontok meghatározására alkalmazható a Runge-módszer [81], amely egy hatékony algoritmust is szolgáltat.

A $H_{a,b}$ modell egész pontjaival kapcsolatban igazoljuk a következő eredményt.

2. Tétel (Tengely [96]). *A* $H_{a,b}: \quad x(ay^2-1)=y(bx^2-1), a,b,x,y\in\mathbb{Z}$ *diofantikus egyenlet megoldásai a következők lehetnek:*

$$\begin{aligned}
(a,b,x,y) &= (a,b,0,0) \text{ ahol } a,b\in\mathbb{Z},\\
(a,b,x,y) &= (a,a,x,x) \text{ ahol } a,x\in\mathbb{Z},\\
(a,b,x,y) &= (1,1,-1,1),\\
(a,b,x,y) &= (1,1,1,-1),\\
(a,b,x,y) &= (-1,-1,-1,1),\\
(a,b,x,y) &= (-1,-1,1,-1),\\
(a,b,x,y) &= (a,2-a,-1,1) \text{ ahol } a\in\mathbb{Z},\\
(a,b,x,y) &= (a,2-a,1,-1) \text{ ahol } a\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

A tétel jól karakterizálja az egész megoldásokat, így le tudjuk írni az első koordinátákban számtani sorozatot alkotó pontokat.

1. Következmény (Tengely [96]). *A* $H_{a,b}$ *egyenletnek tekintsük az*

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$$

megoldásait, amelyeknél (x_1,x_2,x_3) *számtani sorozatot alkot és legfeljebb egy* (x_i,y_i) *pont esetében teljesül, hogy* $x_i=y_i$*. Ekkor*

$$(x_1,x_2,x_3)=(-3,-1,1),(-1,0,1),(1,0,-1) \text{ vagy } (1,-1,-3).$$

Vezessük be a $\phi(a,b,c,d)=(a^2c-81)(a^2c-81-b^2d)$ jelölést. A $H_{a,b}^{c,d}$ modell egész pontjaival kapcsolatban a következő eredményt adjuk.

3. Tétel (Tengely [96]). *Legyen* $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ *úgy, hogy* $abcd(a^2c-b^2d)\neq 0$*. Az* L_1,L_2,U_1,U_2 *értékeket a következő módon definiáljuk:*

$$\begin{aligned}
L_1 &= -\tfrac{1}{9}\sqrt{\phi(a,b,c,d)}, & U_1 &= \tfrac{1}{9}\sqrt{\phi(a,b,c,d)},\\
L_2 &= -\tfrac{1}{9}\sqrt{-\phi(a,b,-c,-d)}, & U_2 &= \tfrac{1}{9}\sqrt{\phi(a,b,-c,-d)}.
\end{aligned}$$

Legyen $m_0=\min(\{0\}\cup\{L_i : i=1,2, L_i\in\mathbb{R}\})$ *és* $M_0=\max(\{0\}\cup\{U_i : i=1,2,U_i\in\mathbb{R}\})$*. Amennyiben* (x,y) *egész pont a* $H_{a,b}^{c,d}$ *modell esetében, akkor vagy*

$$x=\pm\frac{\sqrt{(2a^2c-t)(2a^2c-t-2b^2d)}}{b\sqrt{2t}} \qquad t\in\{-161,\dots,161\}$$

vagy

$$\begin{aligned}
\frac{m_0}{b} \le x \le \frac{M_0}{b} &\text{ ha } b>0,\\
\frac{M_0}{b} \le x \le \frac{m_0}{b} &\text{ ha } b<0.
\end{aligned}$$

Diofantikus egyenletek esetében általában érdekesnek számítanak azok, amelyeknél sok megoldás létezik vagy létezik nagy megoldás. A bevezető részben említettünk néhány eredményt, amelyekben adott algebrai görbe pontjai között keresnek az x-koordinátában számtani sorozatot alkotókat. A $H_{a,b}^{c,d}$ modell esetében ilyen irányban pozitív Mordell-Weil rangú elliptikus görbékre építve igazoljuk a következő eredményt.

4. Tétel (Tengely [96]). *Végtelen sok $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ létezik úgy, hogy a $H_{a,b}^{c,d}$ diofantikus egyenlet egész megoldásai között létezik 9, amelyeknél az x-koordináták számtani sorozatot alkotnak.*

2.3. Markoff-Rosenberger egyenletek és Fibonacci számok

Markoff [60] vizsgálta az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

diofantikus egyenlet egész megoldásait. Az egyenletnek végtelen sok megoldása létezik az egészek körében. Amennyiben (x, y, z) egész megoldás, úgy szintén megoldás az $(x, y, 3xy - z)$. Így pédául az $(1, 1, 1)$ megoldásból kiindulva adódik az $(1, 1, 2)$ megoldás. Rosenberger [80] bevezette a Markoff egyenlet következő általánosítását:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = dxyz. \tag{2.1}$$

Megmutatta, hogy ha a, b, c páronként relatív prím egész számok és $a, b, c|d$, akkor a (2.1) egyenletnek létezik triviálistól különböző megoldása, ha

$$(a, b, c, d) \in \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 2, 4), (1, 1, 5, 5), (1, 2, 3, 6)\}.$$

A (2.1) egyenlettel kapcsolatban sok szép eredmény született, ezek közül ragadunk ki párat a következőekben. Silverman [87] imaginárius kvadratikus számtestek esetében vizsgálta a (2.1) egyenletet az $a = b = c = 1$ esetben. Baer és Rosenberger [4] szintén imaginárius kvadratikus számtestek felett tanulmányozták a (2.1) egyenletet. González-Jiménez és Tornero [39] olyan megoldásokat kerestek, amelyek számtani sorozatot alkotnak. González-Jiménez [38] cikkében geometriai sorozatokat alkotó megoldások esetében nyert eredményt. Például megmutatta, hogy az $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 3)$ klasszikus esetben a $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ számtest feletti megoldások esetében az $(56-24\sqrt{5}, 16, 56+24\sqrt{5})$ megoldás megfelelő. A Fibonacci számok esetében egy jól ismert azonosság a következő:

$$1+F_{2n-1}^2+F_{2n+1}^2=3F_{2n-1}F_{2n+1},$$

azaz a klasszikus Markoff egyenletnek megoldása az

$$(x,y,z)=(1,F_{2n-1},F_{2n+1}).$$

Luca és Srinivasan [54] meghatározták a klasszikus Markoff egyenlet összes olyan megoldását, amelyben a koordináták egyszerre Fibonacci számok. Természetes folytatás a Markoff-Rosenberger egyenletek esetében megadni az összes Fibonacci számokból álló megoldást, azaz ahol $(x,y,z)=(F_i,F_j,F_k)$.. Luca és Srinivasan módszerét követve az első lépésben korlátot nyerünk az i-re. Luca és Srinivasan a folytatásban a Fibonacci sorozatra vonatkozó eredményekre építve haladt, ami a Markoff-Rosenberger egyenletek esetében nehezebben kivitelezhető. Ehelyett egy új utat követünk, az i-re vonatkozó korlátot felhasználva adunk meg korlátot a $k-j$ értékre. Ez a lépés lehetővé teszi, hogy a problémát visszavezessük $y^2=f(x)$ alakú egyenletekre, ahol f negyedfokú polinom. Így igazolni tudjuk a következő eredményt.

5. Tétel (Tengely [97])**.** *Tekintsük a* (2.1) *egyenletet az*

$$(a,b,c,d)\in\{(1,1,1,1),(1,1,2,2),(1,1,2,4),(1,1,5,5),(1,2,3,6)\}$$

paraméterekkel. Az összes, csak Fibonacci számokból álló

$$(x,y,z)=(F_i,F_j,F_k)$$

megoldás a következő táblázatban adott.

(a,b,c,d)	*megoldások*
$(1,1,1,1)$	$\{(3,3,3)\}$
$(1,1,2,2)$	$\{(2,2,2)\}$
$(1,1,2,4)$	$\{(1,1,1),(1,3,1),(1,3,5),(3,1,1),(3,1,5)\}$
$(1,1,5,5)$	$\{(1,2,1),(1,3,1),(1,3,2),(2,1,1),(3,1,1),(3,1,2)\}$
$(1,2,3,6)$	$\{(1,1,1),(1,2,1),(1,2,3),(5,1,1)\}$

.

2.4. Erdős-Graham típusú egyenletek

Erdős és Selfridge [32] egy nevezetes tétele szerint egymást követő egész számok szorzata nem lehet teljes hatvány. A probléma általánosítása $d\geq 1$

differenciájú számtani sorozatok egymás utáni elemeinek szorzatára a témakör nehéz sejtése. A kérdés az

$$n(n+d)\cdots(n+(k-1)d) = by^l \tag{2.2}$$

diofantikus egyenletre vezet. Tekintsük először az $l=2$ esetet. Már Euler igazolta ([28] 440 és 635 oldalak), hogy a (2.2) egyenletnek nincs megoldása, ha $k=4$ és $b=1$. Később Obláth [68] kiterjesztette az eredményt a $k=5$ esetre. Erdős [30] és Rigge [76] egymástól függetlenül belátták, hogy a (2.2) egyenletnek nincs megoldása, ha $b=d=1$. Hirata-Kohno, Laishram, Shorey és Tijdeman [47] teljesen megoldották a (2.2) egyenletet, amikor $3 \le k < 110$ és $b=1$. Tengely [93] eredményével kombinálva a fenti probléma összes megoldását megkapjuk, ha $3 \le k \le 100$, $P(b) < k$.

Tekintsük most az $l \ge 3$ esettel kapcsolatos eredményeket. Erdős és Selfridge [32] igazolta, hogy a (2.2) egyenletnek nincs megoldása, ha $b=d=1$. Általánosabb esetben, amikor $P(b) \le k$ és $d=1$ Saradha [82] bizonyította, hogy $k \ge 4$ feltétel mellett az egyenletnek nincs olyan megoldása, amelyre $P(y) > k$. Felhasználva Darmon és Merel [26] eredményét, Győry [41] hasonló tételt igazolt a $k=2,3$ esetekben. Abban az esetben, amikor elhagyjuk a d-re vonatkozó megszorítást is, Győry [42] belátta, hogy $k=3, P(b) \le 2$ mellett nem létezik megoldása az egyenletnek. További általános eredményeket találunk a [9], [44] és a [45] dolgozatokban. Többek között igazolást nyert, hogy a (2.2) egyenletnek nincs megoldása, ha $b=1$ és $k<35$.

Legyen $f(n,k) = n(n+1)\cdots(n+k-1)$. Ahogyan korábban megjegyeztük Erdős és Selfridge igazolta, hogy $f(n,k)$ nem lehet teljes hatvány, ha $n \ge 1, k \ge 2$. Tekintsük a következő általános egyenletet

$$\prod_{j=1}^{r} f(n_j,k_j) = x^2,$$

rögzített $r \ge 2$ és $\{k_1,\ldots,k_r\}$ mellett, ahol $k_i \ge 4, i \in \{1,\ldots,r\}$. Erdős és Graham [31] felvetették a problémát, hogy a fenti egyenlet esetében végességi állítás teljesül-e. Ulas [103] megmutatta, hogy $r=4$ vagy $r \ge 6$ esetében, ha $k_i = 4$, akkor végtelen sok megoldás létezik. Bauer és Bennett [8] hasonló eredményt nyert $r=3$ és $r=5$ esetében. 2012-ben Bennett és Van Luijk [10] igazolta, hogy $r \ge 5$ és $k_i = 5$ mellett is létezik végtelen sok megoldás. Az általános sejtés az, hogy végtelen sok megoldás létezik, ha r elég nagy az intervallumok hosszának maximumához képest. Az Erdős-Graham problémakörben először a két négyes blokk szorzatával kapcsolatos eredményeket tárgyaljuk, ez a speciális eset nem lett lefedve Bauer és Bennett [8] cikkében és csak részeredmények találhatóak Luca és Walsh [55] publikációjában, amelyben a Pell-egyenletek elméletét felhasználva bizonyos feltételek mellett a megoldásszámra adnak korlátot. Mi a blokkok távolságának függvényében nyerünk korlátot a lehetséges megoldásokra felhasználva a Runge-módszert. A korlátra építve egy hatékony algoritmust adunk az összes megoldás meghatározására. Az egyenletünk a két négyes blokk esetében az alábbi módon írható:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+m)(x+m+1)(x+m+2)(x+m+3) = y^2, \quad (2.3)$$

ahol $4 \leq m \in \mathbb{N}$.

6. Tétel (Tengely [95]). *Amennyiben $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ megoldása a (2.3) egyenletnek, akkor*

$$1 \leq x \leq 1.08m.$$

A korlátra épülő algoritmus segítségével a következő eredményt nyerjük.

7. Tétel (Tengely [95]). *A (2.3) egyenlet egyetlen $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ megoldása a $4 \leq m \leq 10^6$ feltétel mellett a következő:*

$$(x, y) = (33, 3361826160),$$

amely $m = 1647$-nél lép fel.

Különböző hosszúságú blokkok esetében Bauer és Bennett [8] nyert eredményeket, megmutatták, hogy bizonyos hosszúságú blokkok esetén létezik végtelen sok megoldás. A megoldásaik viszont exponenciálisan nőnek. Egy természetes lépés vizsgálni léteznek-e polinomokkal paraméterezhető megoldások. Ebben az irányban a következő eredményeket értük el.

8. Tétel (Tengely-Ulas [98]). *A következő diofantikus egyenleteknek végtelen sok megoldása létezik a $\mathbb{Z}[t]$ gyűrűben:*

$$\begin{aligned} x(x+1)y(y+1)(y+2) &= z^2, \\ x(x+1)y(y+1)(y+2)(y+3) &= z^2 \end{aligned}$$

Az alábbi diofantikus egyenletnek létezik legalább két megoldása a $\mathbb{Z}[t]$ gyűrűben.

$$x(x+1)y(y+1)(y+2)(y+3)(y+4) = z^2$$

Hasonló eredményt sikerült nyerni olyan esetekben is, amikor a blokkok szorzata nem teljes négyzet, hanem szintén egy blokk.

9. Tétel (Tengely-Ulas [98]). *A következő diofantikus egyenleteknek végtelen sok megoldása létezik a $\mathbb{Z}[t]$ gyűrűben:*

$$\begin{aligned} x(x+1)y(y+1)(y+2) &= z(z+1), \\ x(x+1)y(y+1)(y+2)(y+3) &= z(z+1) \end{aligned}$$

Tekintsük a következő additív változatát az Erdős-Graham problémának:

$$f_k(x) = y^n, \quad k \geq 0, n \geq 2 \tag{2.4}$$

ahol

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \prod_{j=0}^{i} (x+j).$$

Az $f_k(x)$ polinom 1 főegyütthatós és a foka $k+1$. Az egyenlettel kapcsolatban a Baker-módszer segítségével effektív végességi állítást bizonyítunk.

10. Tétel (Laishram-Hajdu-Tengely [46]). *A* (2.4) *egyenlet megoldásaira igazak a következők:*

i) ha $k \geq 1$ *és* $y \neq 0, -1$ *akkor* $n < c_1(k)$,

ii) ha $k \geq 1$ *és* $n \geq 3$ *akkor* $\max(n, |x|, |y|) < c_2(k)$,

iii) ha $k \geq 1$, $k \neq 2$, *és* $n = 2$ *akkor* $\max(|x|, |y|) < c_3(k)$.

A $c_1(k), c_2(k), c_3(k)$ *konstansok effektíve kiszámolhatóak és csak* k *értékétől függnek.*

Rögzített k esetén a probléma numerikusan is kezelhető, ha k nem túl nagy. Ebben az irányban az alábbi tételt igazoljuk.

11. Tétel (Laishram-Hajdu-Tengely [46]). *Legyen* $1 \leq k \leq 10$ *úgy, hogy* $k \neq 2$ *ha* $n = 2$. *Ekkor a* (2.4) *egyenlet megoldásai a következők:* $(x, y) = (-2, 0), (0, 0)$, k, n *tetszőleges;* $(x, y) = (-1, -1)$, $k, n \geq 3$ *tetszőleges;* $(x, y, k, n) = (-4, 2, 1, 3), (2, 2, 1, 3), (2, 2, 2, 5)$.

A (2.4) egyenlet esetében az eredeti Erdős-Graham problémában szereplő blokkok szorzata helyett blokkok összegét tekintettük. Az alábbiakban egy még általánosabb additív változatot tekintünk. Jelölje $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát és $\mathbb{N}_{\geq k}$ a k-nál nagyobb egyenlő nem negatív egészek halmazát. Legyen $a \in \mathbb{N}_0$ esetében

$$p_a(x) = \prod_{i=0}^{a} (x+j).$$

Továbbá legyen

$$A_n = \{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}_0^k : \ a_i < a_{i+1} \ \text{ahol} \\ i = 1, 2, \ldots k-1, \ a_k < n \text{ és } k \in \{1, \ldots, n-1\}\}.$$

Adott $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ és $T = (a_1, \ldots, a_k) \in A_n$ esetén tekintjük az alábbi diofantikus egyenletet

$$y^m = g_T(x), \quad \text{ahol} \quad g_T(x) := p_n(x) + \sum_{i=1}^{k} p_{a_i}(x). \tag{2.5}$$

Megjegyezzük, hogy a $T = (0, 1, \ldots, n-1) \in A_n$ választás mellett a fenti egyenlet megfelel a (2.4) egyenletnek. A (2.5) egyenlet esetében a következő eredményt igazoljuk.

12. Tétel (Tengely-Ulas [100])**.** *Legyen $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, T = (a_1, \ldots, a_k) \in A_n$. Amennyiben $a_1 \geq 2$ vagy $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 \geq 5$, akkor az $y^m = g_T(x)$ egyenlet egész megoldásaira igazak a következők:*

1. *ha $y \neq 0$, akkor $m < c_1(n)$,*
2. *ha $m \geq 3$, akkor $\max\{m, |x|, |y|\} < c_2(n)$,*
3. *ha $m = 2$, akkor $\max\{|x|, |y|\} < c_3(n)$.*

Ahol $c_1(n), c_2(n), c_3(n)$ effektíve kiszámolható csak n-től függő konstansok.

2.5. Rekurzív sorozatok és polinom reprezentációk

Legyenek A, B, R_0, R_1 egész számok. Az R_n bináris lineáris rekurzív sorozatot definiáljuk a két kezdőértékével (R_0, R_1) és a

$$R_{n+1} = AR_n - BR_{n-1}, n \geq 1.$$

rekurzív relációval. Egy ilyen sorozatot nem degeneráltnak nevezünk, ha $|R_0|+|R_1|> 0$ és az $x^2 - Ax + B$ karakterisztikus polinom $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ gyökeinek hányadosa nem egységgyök. Vezessük be továbbá a következő jelöléseket: $C = R_1^2 - AR_1R_0 + BR_0^2$ és $D = A^2 - 4B$. Jelölje $T_k(x)$ a k fokú Csebisev-polinomot, azaz a $T_0(x) = 2, T_1(x) = x$ és $T_{n+1}(x) = xT_n(x) - T_{n-1}(x), n \geq 1$ módon definiált polinomot. Nemes és Pethő [67] elegáns karakterizációt adtak meg milyen esetekben fordulhat elő, hogy egy a fenti módon definiált nem degenerált másodrendű rekurzív sorozat elemei közül végtelensok reprezentálható legyen egy adott polinom segítségével. Eredményük az alábbi.

13. Tétel (Nemes-Pethő [67]). *Legyen R_n a fenti módon definiált lineáris rekurzív sorozat olyan, hogy $|B|= 1$ és $P = \sum_{k=0}^{d} A_k X^k$ egész együtthatós polinom, amire $d \geq 2$. Legyen $q = -B^m C/D$ és $E = 2(d-1)A_{d-1}^2 - 4dA_dA_{d-2}$. Amennyiben az $R_n = P(x)$ egyenletnek végtelensok n, x egész megoldása létezik, akkor*

$$P(x) = \varepsilon\sqrt{q}T_d\left(\frac{2d|A_d|}{\eta\sqrt{E}} + \frac{2A_{d-1}}{\eta\sqrt{E}}\right),$$

ahol ε és η az 1 vagy -1 értékeket veszik fel. Továbbá az x vagy a $P'(x)$ egész gyöke vagy $d|A_d|x + A_{d-1}$ eleme véges sok másodrendű D_i diszkriminánsú rekurzív sorozat uniójának, ahol D/D_i négyzetszámok.

Speciálisan a Fibonacci sorozat esetében Nemes és Pethő megjegyezték, hogy a fenti eredmény alapján az $F_n = P(x)$ egyenletnek csak akkor lehet végtelen sok megoldása, ha P fokszáma páratlan. Példát adtak arra is, hogy ha a polinom a tételben szereplő alakú még előfordulhat, hogy az $R_n = P(x)$ egyenletnek csak véges sok megoldása létezik. Így természetesen adódó probléma olyan polinomok, polinom családok megadása, amelyek esetében valóban végtelen sok megoldás létezik.

Adott fokszám esetén Lagrange interpolációt felhasználva megadhatunk adott Fibonacci számokat reprezentáló polinomokat. Például $d = 3$ esetében a $(0,0), (1,1), (2,2), (3, F_n)$ pontokat felhasználva adódik az

$$\left(\frac{1}{6}F_n - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{2}F_n + \frac{3}{2}\right)x^2 + \frac{1}{3}F_n x.$$

polinom. A polinom egész együtthatós, ha $n \equiv 0 \pmod 4$ és $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Azaz, például $F_{16} = 987$ esetében a harmadfokú polinom:

$$164x^3 - 492x^2 + 329x.$$

A $d = 2$ esetben a $P_{2,k}(x) = 3x^2 + (6k+2)x + k(3k+2)$ formulával megadott család reprezentálja a $0, 1, 5, 8, 21, 4181$ Fibonacci számokat:

$$P_{2,k}(-k) = 0, P_{2,k}(-k-1) = 1, P_{2,k}(-k+1) = 5,$$
$$P_{2,k}(-k-2) = 8, P_{2,k}(-k-3) = 21, P_{2,k}(-k+37) = 4181.$$

Végtelen sok Fibonacci szám reprezentálhatóságával kapcsolatban az alábbi eredményt kaptuk.

14. Tétel (Tengely-Ulas [101]). *Adott $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ esetén tekintsük a $(P_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, ahol*

$$P_n = P_n(a) = \frac{a^n - a^{-n}}{a - a^{-1}}.$$

Ekkor bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik $2k-1$ fokú négyzetmentes $F_k(a,t) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][t]$ polinom úgy, hogy az $F_k(a,t) = P_n$ diofantikus egyenletnek végtelen sok egész n, t megoldása van.

Fontos megjegyezni, hogy a tételben szereplő polinom konstruktív módon meg is lett határozva, a rekurzív előállítás a következő:

$$F_1(a,t) = t,\ F_2(a,t) = \frac{1}{a^2}t((a^2-1)^2t^2+3a^2),$$
$$F_k(a,t) = \frac{(a^2-1)^2t^2+2a^2}{a^2}F_{k-1}(a,t) - F_{k-2}(a,t),\ k \geq 3.$$

Speciálisan a Fibonacci sorozatra a következő eredmény adódik.

2. Következmény (Tengely-Ulas [101]). *Legyen $a = i\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ahol $i^2 = -1$. Ekkor*

$$P_{4n-3}(a) = F_{4n-3}, P_{1-4n}(a) = F_{4n-1},$$

a megadott rekurzióval definiált $F_k(a,t)$ polinom egész együtthatós és az

$$F_k\left(i\frac{\sqrt{5}-1}{2}, t\right) = F_n$$

diofantikus egyenletnek végtelen sok n, t egész megoldása létezik.

Az eredményben szereplő polinomok kis fokszám esetén az alábbiak:

n	$F_k(a,(-1)^{k+1}t)$
2	$t\,(5t^2-3)$
3	$5t\,(5t^4-5t^2+1)$
4	$t\,(125t^6-175t^4+70t^2-7)$
5	$t\,(5t^2-3)\,(125t^6-150t^4+45t^2-3)$
6	$t\,(3125t^{10}-6875t^8+5500t^6-1925t^4+275t^2-11)$
7	$t\,(15625t^{12}-40625t^{10}+40625t^8-19500t^6+4550t^4-455t^2+13)$

és teljesül az alábbi azonosság:

$$F_k\left(i\frac{\sqrt{5}-1}{2}, (-1)^{k+1}F_{2n-1}\right) = F_{(2k-1)(2n-1)}.$$

Tekintsünk néhány konkrét esetet, amelyben binomiális együtthatókkal kapcsolatos polinomokkal szeretnénk Fibonacci számokat reprezentálni. Először vizsgáljuk meg az

$$\binom{x}{2} + d = F_n$$

diofantikus egyenletet, rögzített $d \in \mathbb{Z}$ esetén. Felhasználva a Fibonacci és Lucas számok közötti $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$ összefüggést a probléma redukálható hiperelliptikus görbék egész pontjainak meghatározására, ahol a család a következő:

$$C_{d,\pm}: \quad y^2 = 5x^4 - 10x^3 + (20d+5)x^2 - 20dx + 20d^2 \pm 16.$$

Az alábbi eredményt nyertük ebben az esetben.

15. Tétel (Tengely-Ulas [101])**.** *Az* $\binom{x}{2} + d = F_n$ *diofantikus egyenlet egész megoldásaira a* $-20 \le d \le 20$ *feltétel mellett az alábbiak teljesülnek:*

$$\begin{aligned}
&d=-20, n\in\{1,2,6,13,15\}, d=-19, n\in\{3\}, d=-18, n\in\{4\},\\
&d=-16, n\in\{5,11\}, d=-15, n\in\{0,7,8\}, d=-14, n\in\{1,2\},\\
&d=-13, n\in\{3,6\}, d=-12, n\in\{4\}, d=-11, n\in\{9,10\}, d=-10, n\in\{0,5\},\\
&d=-9, n\in\{1,2,12\}, d=-8, n\in\{3,7\}, d=-7, n\in\{4,6,8\}, d=-6, n\in\{0\},\\
&d=-5, n\in\{1,2,5,19\}, d=-4, n\in\{3\}, d=-3, n\in\{0,4,16\},\\
&d=-2, n\in\{1,2,6,7,9,11\}, d=-1, n\in\{0,3,5,14\}, d=0, n\in\{0,1,2,4,8,10\},\\
&d=1, n\in\{1,2,3,17\}, d=2, n\in\{3,4,5,6,13\}, d=3, n\in\{4,7\}, d=4, n\in\{5\},\\
&d=5, n\in\{5,6\}, d=6, n\in\{8,9\}, d=7, n\in\{6,7\}, d=8, n\in\{6,12,24\},\\
&d=10, n\in\{7,10\}, d=11, n\in\{8,11\}, d=12, n\in\{7\} d=13, n\in\{7,9\},\\
&d=15, n\in\{8,15\}, d=18, n\in\{8\}, d=19, n\in\{9,10\}, d=20, n\in\{8\}.
\end{aligned}$$

Ahogyan a disszertáció bevezetőjében említettük sok szép eredmény született az

$$\binom{x}{k} = R_n$$

diofantikus egyenletekkel kapcsolatban rögzített k esetén. A Fibonacci sorozat esetében is meghatározták a binomiális együtthatókat, amelyeknél k legfeljebb 4, azaz a probléma 1 génuszú görbére vezet. Itt az elliptikus logaritmus módszer eredményesen alkalmazható. A $k = 5$ eset már 2 génuszú hiperelliptikus görbékre vezethető vissza. Ezekre vonatkozóan vizsgáljunk meg két esetet. A Fibonacci és a Lucas számokra vonatkozóan tekintsük az alábbi diofantikus egyenleteket:

$$F_n = \binom{x}{5} \tag{2.6}$$

és

$$L_n = \binom{x}{5}. \tag{2.7}$$

A Fibonacci számokra vonatkozó eredményt a Gallegos-Ruiztól származó [35] úgynevezett hiperelliptikus logaritmus módszer felhasználásával sikerült kezelni, a Lucas számok esetében pedig a Baker-módszeren és a Mordell-Weil szitán alapuló Bugeaud, Mignotte, Siksek, Stoll és Tengely [19] által kidolgozott eljárást alkalmaztuk.

16. Tétel (Tengely-Ulas [101])**.** *A* (2.6) *egyenlet* $x \geq 5$ *egész megoldásai a következőek:* $(n, x) \in \{(1, 5), (2, 5), (8, 7)\}$.

17. Tétel (Tengely [94])**.** *A* (2.7) *egyenlet* $x \geq 5$ *egész megoldása a következő:* $(n, x) = (1, 5)$.

Irodalomjegyzék

[1] D. Allison. On certain simultaneous diophantine equations. *Math. Colloq. Univ. Cape Town*, 11:117–133, 1977.

[2] A. Alvarado. Arithmetic progression on quintic curves. *J. Integer Seq.*, 12:Article 09.7.3, 2009.

[3] A. Alvarado. Arithmetic progressions on quartic elliptic curves. *Ann. Math. Inform.*, 37:3–6, 2010.

[4] C. Baer and G. Rosenberger. The equation $ax^2 + by^2 + cz^2 = dxyz$ over quadratic imaginary fields. *Results Math.*, 33(1-2):30–39, 1998.

[5] A. Baker. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. I, II, III. *Mathematika 13 (1966), 204-216; ibid. 14 (1967), 102-107; ibid.*, 14:220–228, 1967.

[6] A. Baker. Contributions to the theory of Diophantine equations. I. On the representation of integers by binary forms. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 263:173–191, 1967/1968.

[7] A. Baker and H. Davenport. The equations $3x^2-2=y^2$ and $8x^2-7=z^2$. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 20:129–137, 1969.

[8] M. Bauer and M. A. Bennett. On a question of Erdős and Graham. *Enseign. Math. (2)*, 53(3-4):259–264, 2007.

[9] M. A. Bennett, N. Bruin, K. Győry, and L. Hajdu. Powers from products of consecutive terms in arithmetic progression. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 92(2):273–306, 2006.

dc_1892_21

[10] M. A. Bennett and R. Van Luijk. Squares from blocks of consecutive integers: a problem of Erdős and Graham. *Indag. Math., New Ser.*, 23(1-2):123–127, 2012.

[11] A. Bérczes and A. Pethő. On norm form equations with solutions forming arithmetic progressions. *Publ. Math.*, 65(3-4):281–290, 2004.

[12] A. Bremner. On arithmetic progressions on elliptic curves. *Experiment. Math.*, 8(4):409–413, 1999.

[13] A. Bremner, J. H. Silverman, and N. Tzanakis. Integral points in arithmetic progression on $y^2 = x(x^2 - n^2)$. *J. Number Theory*, 80(2):187–208, 2000.

[14] N. Bruin. Chabauty methods using elliptic curves. *J. Reine Angew. Math.*, 562:27–49, 2003.

[15] N. Bruin. Some ternary Diophantine equations of signature $(n, n, 2)$. In *Discovering mathematics with Magma*, volume 19 of *Algorithms Comput. Math.*, pages 63–91. Springer, Berlin, 2006.

[16] N. R. Bruin. *Chabauty methods and covering techniques applied to generalized Fermat equations*, volume 133 of *CWI Tract*. Stichting Mathematisch Centrum Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 2002. Dissertation, University of Leiden, Leiden, 1999.

[17] J. Buchmann and A. Pethő. Computation of independent units in number fields by Dirichlet's method. *Math. Comp.*, 52(185):149–159, S1–S14, 1989.

[18] Y. Bugeaud, M. Mignotte, and S. Siksek. Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations. I. Fibonacci and Lucas perfect powers. *Ann. of Math. (2)*, 163(3):969–1018, 2006.

[19] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, M. Stoll, and Sz. Tengely. Integral points on hyperelliptic curves. *Algebra Number Theory*, 2(8):859–885, 2008.

[20] G. Campbell. A note on arithmetic progressions on elliptic curves. *J. Integer Seq.*, 6(1):Article 03.1.3, 5 pp. (electronic), 2003.

[21] J. W. S. Cassels and E. V. Flynn. *Prolegomena to a middlebrow arithmetic of curves of genus* 2, volume 230 of *London Mathematical*

Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[22] C. Chabauty. Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 212:882–885, 1941.

[23] A. A. Ciss and D. Sow. On a new generalization of Huff curves. https://eprint.iacr.org/2011/580.pdf, 2011.

[24] J. H. E. Cohn. Lucas and Fibonacci numbers and some Diophantine equations. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 7:24–28 (1965), 1965.

[25] R. F. Coleman. Effective Chabauty. *Duke Math. J.*, 52(3):765–770, 1985.

[26] H. Darmon and L. Merel. Winding quotients and some variants of Fermat's last theorem. *J. Reine Angew. Math.*, 490:81–100, 1997.

[27] V. A. Dem′janenko. Rational points of a class of algebraic curves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 30:1373–1396, 1966.

[28] L.E. Dickson. *History of the theory of numbers. Vol II: Diophantine analysis.* Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[29] A. Dujella, A. Petho, and P. Tadić. On arithmetic progressions on Pellian equations. *Acta Math. Hungar.*, 120(1-2):29–38, 2008.

[30] P. Erdős. Note on the product of consecutive integers (II). *J. London Math. Soc.*, 14:245–249, 1939.

[31] P. Erdős and R. L. Graham. *Old and new problems and results in combinatorial number theory.* Monographie No.28 de L'Enseignement Mathématique. Genève: L'Enseignement Mathématique, Université de Genève. 128 p. , 1980.

[32] P. Erdős and J. L. Selfridge. The product of consecutive integers is never a power. *Illinois J. Math.*, 19:292–301, 1975.

[33] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. *Invent. Math.*, 73(3):349–366, 1983.

[34] E. V. Flynn. A flexible method for applying Chabauty's theorem. *Compositio Math.*, 105(1):79–94, 1997.

[35] H. R. Gallegos-Ruiz. Computing integral points on genus 2 curves estimating hyperelliptic logarithms. *Acta Arith.*, 187(4):329–344, 2019.

[36] J. Gebel, A. Pethő, and H. G. Zimmer. Computing integral points on elliptic curves. *Acta Arith.*, 68(2):171–192, 1994.

[37] M. Girard and L. Kulesz. Computation of sets of rational points of genus-3 curves via the Dem′janenko-Manin method. *LMS J. Comput. Math.*, 8:267–300 (electronic), 2005.

[38] E. González-Jiménez. Markoff-Rosenberger triples in geometric progression. *Acta Math. Hungar.*, 142(1):231–243, 2014.

[39] E. González-Jiménez and J. M. Tornero. Markoff-Rosenberger triples in arithmetic progression. *J. Symbolic Comput.*, 53:53–63, 2013.

[40] A. Grytczuk and A. Schinzel. On Runge's theorem about Diophantine equations. In *Sets, graphs and numbers (Budapest, 1991)*, volume 60 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 329–356. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[41] K. Győry. On the Diophantine equation $n(n+1)\cdots(n+k-1) = bx^l$. *Acta Arith.*, 83(1):87–92, 1998.

[42] K. Győry. Power values of products of consecutive integers and binomial coefficients. In *Number theory and its applications (Kyoto, 1997)*, volume 2 of *Dev. Math.*, pages 145–156. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[43] K. Győry. Solving Diophantine equations by Baker's theory. In *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)*, pages 38–72. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[44] K. Győry, L. Hajdu, and Á. Pintér. Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression. *Compos. Math.*, 145(4):845–864, 2009.

[45] K. Győry, L. Hajdu, and N. Saradha. On the Diophantine equation $n(n+d)\cdots(n+(k-1)d) = by^l$. *Canad. Math. Bull.*, 47(3):373–388, 2004.

[46] L. Hajdu, S. Laishram, and Sz. Tengely. Power values of sums of products of consecutive integers. *Acta Arith.*, 172(4):333–349, 2016.

[47] N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey, and R. Tijdeman. An extension of a theorem of Euler. *Acta Arith.*, 129(1):71–102, 2007.

[48] G. B. Huff. Diophantine problems in geometry and elliptic ternary forms. *Duke Math. J.*, 15:443–453, 1948.

[49] Shin-ichi Katayama and Shigeru Katayama. Fibonacci, Lucas and Pell numbers and class numbers of bicyclic biquadratic fields. *Math. Japon.*, 42(1):121–126, 1995.

[50] T. Kovács. Combinatorial numbers in binary recurrences. *Period. Math. Hungar.*, 58(1):83–98, 2009.

[51] L. Kulesz, G. Matera, and E. Schost. Uniform bounds on the number of rational points of a family of curves of genus 2. *J. Number Theory*, 108(2):241–267, 2004.

[52] M. Laurent and D. Poulakis. On the global distance between two algebraic points on a curve. *J. Number Theory*, 104(2):210–254, 2004.

[53] J.-B. Lee and W. Y. Vélez. Integral solutions in arithmetic progression for $y^2 = x^3 + k$. *Period. Math. Hungar.*, 25(1):31–49, 1992.

[54] F. Luca and A. Srinivasan. Markov equation with Fibonacci components. *Fibonacci Quart.*, 56(2):126–129, 2018.

[55] F. Luca and P.G. Walsh. On a diophantine equation related to a conjecture of Erdös and Graham. *Glas. Mat., III. Ser.*, 42(2):281–289, 2007.

[56] M. Luo. On triangular Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.*, 27(2):98–108, 1989.

[57] M. Luo. On triangular Lucas numbers. In *Applications of Fibonacci numbers, Vol. 4 (Winston-Salem, NC, 1990)*, pages 231–240. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.

[58] A. J. MacLeod. 14-term arithmetic progressions on quartic elliptic curves. *J. Integer Seq.*, 9(1):Article 06.1.2, 4 pp. (electronic), 2006.

[59] Ju. I. Manin. The p-torsion of elliptic curves is uniformly bounded. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 33:459–465, 1969.

[60] A. Markoff. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. *Math. Ann.*, 17(3):379–399, 1880.

[61] W. L. McDaniel. Triangular numbers in the Pell sequence. *Fibonacci Quart.*, 34(2):105–107, 1996.

[62] L. Ming. On Triangular Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 27:98–108, 1989.

[63] L. Ming. Pentagonal Numbers in the Lucas Sequence. *Portugaliae Mathematica*, 53:325–329, 1996.

[64] D. Moody. Arithmetic progressions on Edwards curves. *J. Integer Seq.*, 14(1):Article 11.1.7, 4, 2011.

[65] D. Moody. Arithmetic progressions on Huff curves. *Ann. Math. Inform.*, 38:111–116, 2011.

[66] L. J. Mordell. *Diophantine equations*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 30. Academic Press, London, 1969.

[67] I. Nemes and A. Pethő. Polynomial values in linear recurrences. II. *J. Number Theory*, 24(1):47–53, 1986.

[68] R. Obláth. Über das Produkt fünf aufeinander folgender Zahlen in einer arithmetischen Reihe. *Publ. Math. Debrecen*, 1:222–226, 1950.

[69] A. Pethő. Fifteen problems in number theory. *Acta Univ. Sapientiae, Math.*, 2(1):72–83, 2010.

[70] A. Pethő. Perfect powers in second order linear recurrences. *J. Number Theory*, 15(1):5–13, 1982.

[71] A. Pethő. Full cubes in the Fibonacci sequence. *Publ. Math. Debrecen*, 30(1-2):117–127, 1983.

[72] A. Pethő. Perfect powers in second order recurrences. In *Topics in classical number theory, Vol. I, II (Budapest, 1981)*, volume 34 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 1217–1227. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[73] A. Pethő and V. Ziegler. Arithmetic progressions on Pell equations. *J. Number Theory*, 128(6):1389–1409, 2008.

[74] V. S. R. Prasad and B. Srinivasa Rao. Pentagonal numbers in the associated Pell sequence and Diophantine equations $x^2(3x-1)^2 = 8y^2 \pm 4$. *The Fibonacci Quarterly*, 39:299–303, 2001.

[75] V. S. R. Prasad and B. Srinivasa Rao. Pentagonal numbers in the Pell sequence and Diophantine equations $2x^2 = y^2(3y-1)^2 \pm 2$. *The Fibonacci Quarterly*, 40:233–241, 2002.

[76] O. Rigge. über ein diophantisches problem. In *9th Congress Math. Scand.*, pages 155–160. Mercator 1939, Helsingfors 1938.

[77] N. Robbins. On Fibonacci numbers which are powers. *Fibonacci Quart.*, 16(6):515–517, 1978.

[78] N. Robbins. On Fibonacci numbers which are powers. II. *Fibonacci Quart.*, 21(3):215–218, 1983.

[79] J. P. Robertson. Magic squares of squares. *Math. Mag.*, 69(4):289–293, 1996.

[80] G. Rosenberger. Über die diophantische Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = dxyz$. *J. Reine Angew. Math.*, 305:122–125, 1979.

[81] C. Runge. Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen. *J. Reine Angew. Math.*, 100:425–435, 1887.

[82] N. Saradha. On perfect powers in products with terms from arithmetic progressions. *Acta Arith.*, 82(2):147–172, 1997.

[83] R. Schwartz, J. Solymosi, and F. de Zeeuw. Simultaneous arithmetic progressions on algebraic curves. *Int. J. Number Theory*, 7(4):921–931, 2011.

[84] T. N. Shorey and C. L. Stewart. On the Diophantine equation $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$ and pure powers in recurrence sequences. *Math. Scand.*, 52(1):24–36, 1983.

[85] T. N. Shorey and C. L. Stewart. Pure powers in recurrence sequences and some related Diophantine equations. *J. Number Theory*, 27(3):324–352, 1987.

[86] C. L. Siegel. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. *Abh. Pr. Akad. Wiss.*, 1:41–69, 1929.

[87] J. H. Silverman. The Markoff equation $X^2 + Y^2 + Z^2 = aXYZ$ over quadratic imaginary fields. *J. Number Theory*, 35(1):72–104, 1990.

[88] N. P. Smart. *The algorithmic resolution of Diophantine equations*, volume 41 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[89] B. K. Spearman. Arithmetic progressions on congruent number elliptic curves. *Rocky Mountain J. Math.*, 41(6):2033–2044, 2011.

[90] R. J. Stroeker and N. Tzanakis. Solving elliptic Diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms. *Acta Arith.*, 67(2):177–196, 1994.

[91] L. Szalay. Some polynomial values in binary recurrences. *Rev. Colombiana Mat.*, 35(2):99–106, 2001.

[92] L. Szalay. On the resolution of the equations $U_n = \binom{x}{3}$ and $V_n = \binom{x}{3}$. *Fibonacci Quart.*, 40(1):9–12, 2002.

[93] Sz. Tengely. Note on the paper: „An extension of a theorem of Euler" [Acta Arith. 129 (2007), no. 1, 71–102; mr2326488] by N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey and R. Tijdeman. *Acta Arith.*, 134(4):329–335, 2008.

[94] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $L_n = \binom{x}{5}$. *Publ. Math. Debrecen*, 79(3-4):749–758, 2011.

[95] Sz. Tengely. On a problem of Erdős and Graham. *Period. Math. Hungar.*, 72(1):23–28, 2016.

[96] Sz. Tengely. Integral points and arithmetic progressions on Huff curves. *Publ. Math. Debrecen*, 92(3-4):441–452, 2018.

[97] Sz. Tengely. Markoff-Rosenberger triples with Fibonacci components. *Glas. Mat. Ser. III*, 55(1):29–36, 2020.

[98] Sz. Tengely and M. Ulas. On products of disjoint blocks of arithmetic progressions and related equations. *J. Number Theory*, 165:67–83, 2016.

[99] Sz. Tengely and M. Ulas. On a problem of Pethő. *J. Symbolic Comput.*, 89:216–226, 2018.

[100] Sz. Tengely and M. Ulas. Power values of sums of certain products of consecutive integers and related results. *J. Number Theory*, 197:341–360, 2019.

[101] Sz. Tengely and M. Ulas. The Diophantine equation $F_n = P(x)$. *Int. J. Number Theory*, 16(9):2095–2111, 2020.

[102] M. Ulas. A note on arithmetic progressions on quartic elliptic curves. *J. Integer Seq.*, 8(3):Article 05.3.1, 5 pp. (electronic), 2005.

[103] M. Ulas. On products of disjoint blocks of consecutive integers. *Enseign. Math. (2)*, 51(3-4):331–334, 2005.

[104] M. Ulas. On arithmetic progressions on genus two curves. *Rocky Mountain J. Math.*, 39(3):971–980, 2009.

[105] P. G. Walsh. A quantitative version of Runge's theorem on Diophantine equations. *Acta Arith.*, 62(2):157–172, 1992.

[106] A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Ann. of Math. (2)*, 141(3):443–551, 1995.

[107] H. Wu and R. Feng. Elliptic curves in Huff's model. *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.*, 17(6):473–480, 2012.

dc_1892_21

Kapcsolódó szerzői publikációk

[1] Sz. Tengely, M. Ulas, and J. Zygadło. On a Diophantine equation of Erdős and Graham. *J. Number Theory*, 217:445–459, 2020.

[2] Sz. Tengely and M. Ulas. The Diophantine equation $F_n = P(x)$. *Int. J. Number Theory*, 16(9):2095–2111, 2020.

[3] H. R. Hashim and Sz. Tengely. Solutions of a generalized Markoff equation in Fibonacci numbers. *Math. Slovaca*, 70(5):1069–1078, 2020.

[4] Sz. Tengely. Markoff-Rosenberger triples with Fibonacci components. *Glas. Mat. Ser. III*, 55(1):29–36, 2020.

[5] H. R. Gallegos-Ruiz, N. Katsipis, Sz. Tengely, and M. Ulas. On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = \binom{m}{l} + d$. *J. Number Theory*, 208:418–440, 2020.

[6] Sz. Tengely and M. Ulas. Power values of sums of certain products of consecutive integers and related results. *J. Number Theory*, 197:341–360, 2019.

[7] Sz. Tengely and M. Ulas. On a problem of Pethő. *J. Symbolic Comput.*, 89:216–226, 2018.

[8] Sz. Tengely. Integral points and arithmetic progressions on Huff curves. *Publ. Math. Debrecen*, 92(3-4):441–452, 2018.

[9] Sz. Tengely and M. Ulas. On certain Diophantine equations of the form $z^2 = f(x)^2 \pm g(y)^2$. *J. Number Theory*, 174:239–257, 2017.

[10] A. Bérczes, A. Dujella, L. Hajdu, and Sz. Tengely. Finiteness results for F-Diophantine sets. *Monatsh. Math.*, 180(3):469–484, 2016.

[11] Sz. Tengely and M. Ulas. On products of disjoint blocks of arithmetic progressions and related equations. *J. Number Theory*, 165:67–83, 2016.

[12] L. Hajdu, S. Laishram, and Sz. Tengely. Power values of sums of products of consecutive integers. *Acta Arith.*, 172(4):333–349, 2016.

[13] Sz. Tengely. On a problem of Erdős and Graham. *Period. Math. Hungar.*, 72(1):23–28, 2016.

[14] Sz. Tengely and N. Varga. Rational function variant of a problem of Erdős and Graham. *Glas. Mat. Ser. III*, 50(70)(1):65–76, 2015.

[15] Sz. Tengely and N. Varga. On a generalization of a problem of Erdős and Graham. *Publ. Math. Debrecen*, 84(3-4):475–482, 2014.

[16] M. A. Alekseyev and Sz. Tengely. On integral points on biquadratic curves and near-multiples of squares in Lucas sequences. *J. Integer Seq.*, 17(6):Article 14.6.6, 15, 2014.

[17] L. Hajdu, Á. Pintér, Sz. Tengely, and N. Varga. Equal values of figurate numbers. *J. Number Theory*, 137:130–141, 2014.

[18] Sz. Tengely. Balancing numbers which are products of consecutive integers. *Publ. Math. Debrecen*, 83(1-2):197–205, 2013.

[19] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $L_n = \binom{x}{5}$. *Publ. Math. Debrecen*, 79(3-4):749–758, 2011.

[20] F. Luca, Sz. Tengely, and A. Togbé. On the Diophantine equation $x^2 + C = 4y^n$. *Ann. Sci. Math. Québec*, 33(2):171–184, 2009.

[21] L. Hajdu and Sz. Tengely. Arithmetic progressions of squares, cubes and n-th powers. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 41(part 2):129–138, 2009.

[22] F. S. Abu Muriefah, F. Luca, S. Siksek, and Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2+C = 2y^n$. *Int. J. Number Theory*, 5(6):1117–1128, 2009.

[23] L. Hajdu, Sz. Tengely, and R. Tijdeman. Cubes in products of terms in arithmetic progression. *Publ. Math. Debrecen*, 74(1-2):215–232, 2009.

[24] Sz. Tengely. Finding g-gonal numbers in recurrence sequences. *Fibonacci Quart.*, 46/47(3):235–240, 2008/09.

[25] Y. Bugeaud, M. Mignotte, S. Siksek, M. Stoll, and Sz. Tengely. Integral points on hyperelliptic curves. *Algebra Number Theory*, 2(8):859–885, 2008.

[26] S. Laishram, T. N. Shorey, and Sz. Tengely. Squares in products in arithmetic progression with at most one term omitted and common difference a prime power. *Acta Arith.*, 135(2):143–158, 2008.

[27] Sz. Tengely. Note on the paper: "An extension of a theorem of Euler" [Acta Arith. 129 (2007), no. 1, 71–102; mr2326488] by N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey and R. Tijdeman. *Acta Arith.*, 134(4):329–335, 2008.

[28] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + q^{2m} = 2y^p$. *Acta Arith.*, 127(1):71–86, 2007.

[29] N. Bruin, K. Győry, L. Hajdu, and Sz. Tengely. Arithmetic progressions consisting of unlike powers. *Indag. Math. (N.S.)*, 17(4):539–555, 2006.

[30] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $x^2 + a^2 = 2y^p$. *Indag. Math. (N.S.)*, 15(2):291–304, 2004.

[31] Sz. Tengely. On the Diophantine equation $F(x) = G(y)$. *Acta Arith.*, 110(2):185–200, 2003.

[32] I. Pink and Sz. Tengely. Full powers in arithmetic progressions. *Publ. Math. Debrecen*, 57(3-4):535–545, 2000.