

dc_1942_21

Problémák az Extremális Halmazrendszerek témaköréből

Patkós Balázs

Doktori értekezés tézisei

Budapest, 2021

1 Bevezetés

Erdős Pál és Daniel Kleitman egy 1970-es egy konferenciakötetben megjelenő cikkükben [17] a következőképpen foglalták össze, hogy mely műveletek természetesek az extrémális halmazrendszeres problémák esetében (a cikket négy évvel később folyóiratban is megjelentették [18] és Erdős kérésére¹ a 60. születésnapjára megjelent válogatott írásait tartalmazó kötetbe [20] is bekerült): (A) metszet, (B) unió, (C) diszjunktság, (D) komplementer, (E) tartalmazás, (F) rang (méret). A disszertáció három fejezete ezen természetes műveletekkel illetve vektorteres analógjaikkal leírható témakörökkel foglalkozik.

Az értekezés második fejezete kizárt részposzetes problémákkal foglalkozik, azaz olyan halmazrendszerek méretére vagy más paraméterére keres korlátokat, melyek nem tartalmaznak valamilyen *tartalmazással* leírható P részstruktúrát. A témakörnek van egy egyszerűen leírható általános sejtése arról, hogy tetszőleges P esetén hogyan néz ki az (aszimptotikusan) optimális halmazrendszer. Téziseim egy része ezt a sejtést igazolja bizonyos speciális esetekben. További tézisek az úgynevezett pillangó-poszet esetére vontakozó stabilitási és szuperszaturálási eredmények. A fejezet utolsó tézise egy olyan (többszerzős) eredmény, mely azt mutatja meg, hogy ha az *általánosított* Turán-problémát tekintjük, azaz nem a halmazrendszer méretét, hanem az abban található egy P -től különböző P' struktúra maximális előfordulási számát keressük, akkor a P, P' pártól függően már "nagyon különböző" optimális halmazrendszereket is kaphatunk.

Az $\mathcal{F}$ halmazrendszer egy S halmazra vett nyomán az S halmazra vett megszorítását értjük, azaz minden $\mathcal{F}$ -beli F halmazt *elmetszünk* S -sel és ezeket a metszeteket tesszük az $\mathcal{F}_S$ halmazrendszerbe. A terület alaptétele a Sauer-lemmának hívták [54], de tőle függetlenül Shelah [55], illetve Vapnik és Chervonenkis [58] által is bizonyított állítás. Ha $\mathcal{F}$ egy n elemű alaphalmazon $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}$ -nél nagyobb méretű halmazrendszer, akkor van az alaphalmaznak olyan k méretű K része, hogy $\mathcal{F}_K$ megegyezik K teljes hatványhalmazával. Az összes legfeljebb $k-1$ méretű részhalmaz rendszere (és ennek komplementere) mutatja, hogy a korlát éles, de nagyon sok extrémális rendszer létezik még (és nem is ismert jó karakterizáció). A fejezet tézisei olyan szintén nyomokra vonatkozó feltételeket mutatnak, amelyek szintén a Sauer-lemma korlátját implikálják, de már csak a triviális rendszerek lesznek extrémálisak, illetve néhány kapcsolódó eredményt bizonyítanak. Végezetül a fejezet utolsó tézise a Sauer-lemma szaturálásos verzióját bizonyítja.

Az utolsó fejezet halmazrendszeres tételek úgynevezett q -analógjait tárgyalja. A halmazrendszeres problémákat ugyanis lehet vizsgálni a q elemű $\mathbf{F}_q$ véges test feletti vektorterek között. Ekkor a fenti, Erdős és Kleitman által megnevezett műveletek némelyikét értelemszerűen módosítani kell: (B') közösen generált altér, (D') ortogonális altér, (F') dimenzió. A fejezet két fő tézise a Kruskal-Katona-féle árnyéktétel Lovász-féle verziójának q -analógja, illetve az uniform metsző halmazrendszerek stabilitási tételének, a Hilton-Milner tételnek a vektorteres verziója. Mindkét eredménynek egy-egy alkalmazását is adjuk: előbbi folyományaként meghatározzuk az r -szeresen metsző uniform altérrendszerek maximális méretét, utóbbi segítségével pedig meghatározzuk a q -Kneser gráfok kromatikus számát.

¹Simonovits Miklós közlése

Jelölések, elnevezések, definíciók

Halmazok: egy X halmaz hatványhalmazát 2^X , k -elemű részhalmazainak halmazát $\binom{X}{k}$, az első n pozitív egész halmazát $[n]$ jelöli. A $\subset$ jel szigorú tartalmazást jelent.

Részben rendezett halmazok: kicsit pongyolán csak a P alaphalmazzal hivatkozunk a részben rendezett halmazra, az részben rendezési relációt nem tüntetjük fel. Halmazrendszerek esetében a rendezés mindig a tartalmazás. Az angol poset (partially ordered set) rövidítés magyarítását a poszetet fogjuk használni nem is annyira rövideje, mint inkább amiatt, hogy a leggyakoribb előfordulás a *részposzet* lesz, és a rész-részben rendezett halmaznak a helyesírásban sem vagyunk biztosak.

Vektorterek: A q elemű véges testet $\mathbf{F}_q$ -val jelöljük. Egy V vektortér k -dimenziós altérinek halmazát $\begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}$ jelöli. Egy $\mathbf{F}_q$ feletti n -dimenziós vektortér k -dimenziós alterei számát, a Gauss-féle q -binomiális együtt hatót

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \prod_{0 \leq i < k} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{k-i} - 1}$$

jelöli. A q indexet néha elhagyjuk, ha értéke a szöveggörnyezetből egyértelmű. Mind a binomiális, mind a Gauss-féle együtthatók kiterjeszthetők a valós számokra: $\binom{x}{k} = \prod_{0 \leq i < k} \frac{x-i}{k-i}$ illetve $\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q := \prod_{0 \leq i < k} \frac{q^{x-i} - 1}{q^{k-i} - 1}$.

2 Kizárt részposzetes problémák

A témakör kiindulópontja Sperner nevezetes tétele, illetve annak Erdős-féle általánosítása, mely olyan halmazrendszerek méretére ad korlátot, melyek nem tartalmazzak $k+1$ egymásba skatulyázott $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{k+1}$ halmazt, azaz $k+1$ hosszú láncot. Ha egy halmazrendszer csak k -féle méretű halmazokat tartalmaz, akkor triviálisan teljesül az előbbi tulajdonság. Mivel a legnagyobb binomiális együtthatók középen találhatók, ezért ezek közül az egyszerűen konstruálható halmazrendszerek közül a középső k szint uniója a legnagyobb. Formálisan legyen $\Sigma^*(n, k)$ azon halmazrendszerek családja, melyek $\binom{[n]}{i} \cup \binom{[n]}{i+1} \cup \dots \cup \binom{[n]}{i+k-1}$ alakúak és $2i+k-1$ értéke $n-1$, n vagy $n+1$ (azaz, ha $n+k$ páros, akkor egy ilyen rendszer van, ha $n+k$ páratlan, akkor kettő). Jelölje $\Sigma(n, k)$ a $\Sigma^*(n, k)$ -beli rendszerek méretét, azaz $\Sigma(n, k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{\lceil \frac{n-k}{2} \rceil + i}$.

2.1 Tétel ($k=1$ esetben Sperner [56], általánosan Erdős [15]). *Ha egy $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer nem tartalmaz $k+1$ hosszú láncot, akkor $\mathcal{F}$ mérete legfeljebb $\Sigma(n, k)$ és egyenlőség csak $\Sigma^*(n, k)$ -beli halmazrendszerekre áll fenn.*

A 2.1 Tételnek nagyon sok alkalmazása és általánosítása van a kombinatorikán belül, de a matematika más ágaiban is. Katona Gyula és Tarján Tamás a 80-as évek elején az extrémális gráfelmélet Turán-problémakörének mintájára a következő kérdést vetették fel: mekkora lehet legfeljebb egy halmazrendszer, ha elkerül egy bizonyos *tartalmazási mintát*, mint a 2.1 Tétel esetében a $k+1$ hosszú láncot. A tartalmazási mintát a következőképpen definiálták.

2.2 Definíció (Katona, Tarján [39]). Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer *(gyengén) tartalmaz egy P poszetet*, ha létezik olyan $i : P \rightarrow \mathcal{F}$ injekció melyre teljesül, hogy tetszőleges $p \leq_P q$ esetén $i(p) \subseteq i(q)$. Ha $\mathcal{F}$ nem tartalmazza P -t, akkor *(gyengén) P -mentes*. Poszetek egy $\mathcal{P}$ halmazára $\mathcal{F}$ gyengén $\mathcal{P}$ -mentes, ha minden $P \in \mathcal{P}$ -re gyengén P -mentes. $La(n, P)$ jelöli a legnagyobb P -mentes $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer méretét.

Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer *erősen tartalmaz egy P poszetet*, ha létezik olyan $i : P \rightarrow \mathcal{F}$ injekció melyre teljesül, hogy tetszőleges $p, q \in P$ esetén $p \leq_P q$ akkor és csak akkor, ha $i(p) \subseteq i(q)$. Ha $\mathcal{F}$ nem tartalmazza erősen P -t, akkor *erősen P -mentes*. Poszetek egy $\mathcal{P}$ halmazára $\mathcal{F}$ erősen $\mathcal{P}$ -mentes, ha minden $P \in \mathcal{P}$ -re erősen P -mentes. $La^*(n, P)$ jelöli a legnagyobb erősen P -mentes $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer méretét.

Ezzel a definícióval, C_k -val jelölve a k elemű láncot, Erdős 2.1 Tétele a $La(n, C_{k+1}) = La^*(n, C_{k+1}) = \Sigma(n, k)$ képletet adja. Az $La(n, P)$ illetve $La^*(n, P)$ értékek meghatározása, becslése a kizárt részposzetes problémakör központi kérdése. Mivel egy k elemű lánc minden k elemű poszetet tartalmaz gyenge értelemben, ezért Erdős 2.1 Tételéből következik az $La(n, P) \leq (|P| - 1) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ egyenlőtlenség, azaz $La(n, P)$ nagyságrendje $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ugyanez az erős esetben Methuku és Pálvölgyi [44] tétele, így mindkét esetben az aszimptotikát meghatározó konstans az érdekes. A $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{La(n, P)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{La^*(n, P)}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$ határértékeket $\pi(P)$ -vel illetve $\pi^*(P)$ -vel jelöljük, de létezésük általános P esetén még nem bizonyított. A kezdeti eredmények mind abba az irányba mutattak, hogy bármely poszet esetén az Erdős tételében is látott egyszerű konstrukciónál nem lehet sokkal jobbat találni. Azaz formálisan tetszőleges P poszet esetén legyen $e(P)$ az a maximális m szám, amelyre minden $i \leq n$ egészekre a $\cup_{j=1}^m \binom{[n]}{i+j}$ halmazrendszer gyenge P -mentes, illetve $e^*(P)$ az a maximális m^* szám, amelyre minden $i \leq n$ egészekre a $\cup_{j=1}^{m^*} \binom{[n]}{i+j}$ halmazrendszer erősen P -mentes. Ezen paraméterek segítségével fogalmazható meg az a sejtés, mely először nyomtatásban Griggs és Lu illetve Bukh egy cikkében jelent meg.

2.3 Sejtés (Griggs, Lu [33], Bukh [10]).

- (i) Tetszőleges P véges poszet esetén $La(n, P) = (e(P) + o(1)) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
- (ii) Tetszőleges P véges poszet esetén $La^*(n, P) = (e^*(P) + o(1)) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

A 2.3 Sejtés számos poszetosztályra bizonyított, egy friss áttekintő cikk a témában [31] illetve a Gerbner Dániellel közös könyvünk [30] hetedik fejezete is összefoglalja az idevonatkozó irodalmat. A legismertebb eredmény Bukh (illetve erős esetben Boehnlein és Jiang) nevéhez fűződik. Egy P poszet *(irányított) Hasse-diagramja* az a gráf, melynek csúcshalmaza P elemeiből áll, és $p, q \in P$ esetén él megy p -ből q -ba, ha $p \leq_P q$ és nincs $r \neq p, q \in P$, amire $p <_P r <_P q$. A poszet irányítatlan Hasse-diagramja az irányítottból keletkezik az élek irányításának elhagyásával. Egy poszet *fa*, ha irányítatlan Hasse-diagramja fa. Egy poszet magassága $h(P)$ a P -ben található legnagyobb lánc mérete. Könnyen látható, hogy fa poszetek esetén $e(T) = e^*(T) = h(T) - 1$.

2.4 Tétel (Bukh [10], Boehnlein, Jiang [8]).

- (i) Minden fa T poszetre $La(n, T) = (h(T) - 1 + O(\frac{1}{n})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
- (ii) Minden fa T poszetre $La^*(n, T) = (h(T) - 1 + o(1)) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

A legkisebb poszet, melyre a 2.3 Sejtés nem ismert, a 4-elemű gyémánt poszet, melynek Hasse-diagramja $\diamond$, ahol az élek irányítása alulról felfelé halad. Az általánosított gyémánt poszet D_s , melynek relációi $a < b_1, b_2, \dots, b_s < c$. Griggs, Li és Lu [32] megmutatták, hogy végtelen sok s értékre a 2.3 Sejtés gyenge P -mentes része igaz. Eredményeiket messzemenően általánosítottuk és az erős esetben is sikerült a sejtést sok poszetre bizonyítani.

Jelölje $K_{r_1, r_2, \dots, r_s}$ a teljes többszintes poszetet $\sum_{i=1}^s r_i$ elemmel:

$$a_1^1, a_2^1, \dots, a_{r_1}^1, a_1^2, a_2^2, \dots, a_{r_2}^2, \dots, a_1^s, a_2^s, \dots, a_{r_s}^s$$

melyekre $a_\alpha^i < a_\beta^j$ akkor és csak akkor, ha $i < j$. Az a_l^i elem rangja $r(a_l^i) = i$. Vegyük észre, hogy a D_s poszetek megegyeznek $K_{1,s,1}$ -gyel. Szavakban megfogalmazva azt sikerült bizonyítani, hogy tetszőleges magasságú teljes többszintes poszetek közül a legkisebb és legnagyobb rangú elemek számát bárhogyan megválasztva, illetve a közbülső rangok esetében mindig olyan mennyiségű elemet véve, amire Griggs, Li és Lu bizonyítása működik, a 2.3 Sejtés gyenge állítása teljesül. Az erős esetben egy hasonló állítás igaz, de ekkor a közbülső rangú elemek számát egy másik, de szintén végtelen halmazból lehet választani. A pontos állítások közül az első kétszintes teljes poszetekre vonatkozik az erős esetben. Itt az aszimptotikát már a 2.4 Tétel (ii)-es pontja megadná, az állítás többléte a hibatag nagyságrendjének meghatározása. A tézisek disszertációbeli számozását zárójelben jelöljük.

2.5 Tétel (Patkós [52], Theorem 7). *Bármely $2 \leq r, t$ egészekre teljesül a következő: $\Sigma(n, 2) + (\frac{r+t-2}{n} - O_{r,t}(\frac{1}{n^2})) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq La^*(n, K_{r,t}) \leq (2 + \frac{2(r+t-2)}{n} + o(\frac{1}{n})) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.*

A többszintes poszetekre vonatkozó tételek megfogalmazásához szükségünk lesz a következő függvényre.

$$f(r, t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } r = t = 1, \\ 1 & \text{ha } r = 1, t > 1 \text{ vagy } r > 1, t = 1, \\ 2 & \text{ha } r, t > 2. \end{cases}$$

További definíciók: tetszőleges $s \geq 2$ esetén legyen $m = m_s = \lceil \log_2(s - f(r, t) + 2) \rceil$ és $m^* = m_s^* = \min\{m : s \leq \binom{m}{\lceil m/2 \rceil}\}$. A valós z szám pozitív részét, azaz $\max\{0, z\}$ -et jelölje z^+ . Ezekkel a jelekkel a teljes háromszintes poszetekről gyenge esetben a következő tétel igaz.

2.1 Tétel (Patkós [52] Theorem 8). *Tegyük fel, hogy $s - f(r, t) \geq 2$.*

(1) *Ha $s - f(r, t) \in [2^{m_s-1} - 1, 2^{m_s} - \binom{m_s}{\lceil \frac{m_s}{2} \rceil} - 1]$, akkor $\pi(K_{r,s,t}) = e(K_{r,s,t}) = m_s + f(r, t)$ telejsül. Pontosabban a következő egyenlőtlenségek igazak:*

$$\Sigma(n, m_s + f(r, t)) + \left(\frac{(r-2)^+ + (t-2)^+}{n} - O_{r,t}(\frac{1}{n^2}) \right) \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq La(n, K_{r,s,t}) \leq (m_s + f(r, t) + \frac{2(r+t-2)}{n} + o(\frac{1}{n})) \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

(2) *Ha $s - f(r, t) \in [2^{m_s} - \binom{m_s}{\lceil \frac{m_s}{2} \rceil}, 2^{m_s} - 2]$, akkor*

$$\Sigma(n, m_s + f(r, t)) + \left(\frac{(r-2)^+ + (t-2)^+}{n} - O_{r,t}(\frac{1}{n^2}) \right) \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leq La(n, K_{r,s,t}) \leq (m_s + f(r, t) + 1 - \frac{2^{m_s} - s + f(r, t) - 1}{\binom{m_s}{\lceil \frac{m_s}{2} \rceil}}) \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \text{ teljesül.}$$

Ahogy korábban említettük az $r = t = 1$ eset Griggs, Li és Lu eredménye [32]. A 2.1 Tétel nem fedi az $s = 2$ esetet, ha $f(r, t)$ pozitív. Ekkor a következő állítás bizonyítható.

2.2 Tétel (Patkós [52] Theorem 9). *Tetszőleges r, t esetén, melyekre $f(r, t) > 0$, igazak a következők: $\Sigma(n, 3) + (\frac{(r-2)^+ + (t-2)^+}{n} - O_{r,t}(\frac{1}{n^2})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq La(n, K_{r,2,t}) \leq (3 + \frac{2(r+t-2)}{n} + o(\frac{1}{n})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Speciálisan $\pi(K_{r,2,t}) = 3$ teljesül.*

A három vagy még magasabb teljes többrészes poszetekre pedig a következőt tudtuk bizonyítani az erős esetben. A (ii) és (iv)-hez tartozó feltételről könnyű látni, hogy végtelen sok s illetve s_i teljesíti.

2.3 Tétel (Patkós [52] Theorem 10). *(i) Tetszőleges $1 \leq r, t$ egészekre $\Sigma(n, 4 + f(r, t)) + (\frac{r+t-2}{n} - O_{r,t}(\frac{1}{n^2})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq La^*(n, K_{r,4,t}) \leq (4 + f(r, t) + \frac{2(r+t-2)}{n} + o(\frac{1}{n})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ teljesül, így $\pi^*(K_{r,4,t}) = 4 + f(r, t)$.*

(ii) Bármely $1/2 < c < 1$ konstanshoz létezik olyan s_c egész, hogy $s \geq s_c$ és $s \leq c \binom{m_s^}{\lfloor \frac{m_s^*}{2} \rfloor}$ esetén $\Sigma(n, m_s^* + f(r, t)) + (\frac{r+t-2}{n} - O_{r,t}(\frac{1}{n^2})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq La^*(n, K_{r,s,t}) \leq (m_s^* + f(r, t) + \frac{2(r+t-2)}{n} + o(\frac{1}{n})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ teljesül, így $\pi^*(K_{r,s,t}) = m_s^* + f(r, t)$.*

(iii) Létezik olyan s_0 pozitív egész, hogy bármely r, s, t esetén ha $s \geq s_0$, akkor $\Sigma(n, m_s^ + f(r, t)) + (\frac{r+t-2}{n} - O_{r,t}(\frac{1}{n^2})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq La^*(n, K_{r,s,t}) \leq (m_s^* + 1 + f(r, t) + \frac{2(r+t-2)}{n} + o(\frac{1}{n})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ teljesül.*

(iv) Bármely $1/2 < c < 1$ konstanshoz létezik olyan s_c egész, hogy ha minden s_i -re $s_i = 4$ vagy $s_i \geq s_c$ és $s_i \leq c \binom{m_{s_i}^}{\lfloor \frac{m_{s_i}^*}{2} \rfloor}$ teljesül, akkor igazak az $La^*(n, K_{r,s_1,s_2,\dots,s_j,t}) = (e^*(K_{r,s_1,s_2,\dots,s_j,t}) + O_{r,t}(\frac{1}{n})) \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ egyenlőtlenségek.*

Ha egy extrémális problémára egy vagy csak néhány struktúra adja az optimális választ, akkor adódik a stabilitás kérdése, azaz igaz-e, hogy minden majdnem extrémális struktúra hasonlít egy extrémálisra. Valamilyen kizárt részstruktúrával definiált problémák esetén (amilyen a kizárt részposzetes probléma is) pedig felvetődik a szuperszaturálási kérdés. Ha az eredeti problémára ex a válasz, azaz ekkora a legnagyobb kizárt részstruktúrát nem tartalmazó objektum, akkor mennyi részstruktúrát muszáj tartalmaznia legalább a kizárt részstruktúrából minden $ex + E$ méretű objektumnak. Triviálisan legalább E -t, de tipikusan sokkal többet.

Ezekkel a kérdésekkel a kizárt részposzetes témakörben csak láncokkal kapcsolatban voltak ismertek eredmények. Antiláncokra, illetve k darab antilánc uniójára vonatkozó stabilitási tételek tipikusan a Kruskal-Katona-féle árnyéktételből [41, 37] vezethetők le (ahogy a 2.5 Tétel bizonyítása során is). Kleitman [40] bizonyította, hogy a legkevesebb tartalmazásban álló pár mindig *centrál*t halmazrendszerekben (olyan $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer, melyben $F \in \mathcal{F}$ és $||G| - n/2| < ||F| - n/2|$ implikálja, hogy G is eleme $\mathcal{F}$ -nek) található és ugyanezt sejtette hosszabb láncok esetére is. Ezt több részleges eredmény [5, 12, 4] után Samotij bizonyította [53].

Mi a stabilitási és szuperszaturálási kérdéseket a gyengén B -mentes halmazrendszerek esetében vizsgáltuk, ahol $B = K_{2,2}$ a pillangó poszet (az angol butterfly szóból, a poszet

Hasse-diagramja $\bowtie$ az élek felfelé irányítva). Az extrémális problémát DeBonis, Katona és Swanepoel oldották meg.

2.4 Tétel (DeBonis, Katona, Swanepoel [13]). *Minden $n \geq 2$ esetén $La(n, B) = \Sigma(n, 2)$. Továbbá, ha $n \geq 3$ és $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy gyengén B -mentes halmazrendszer, melyre $|\mathcal{F}| = \Sigma(n, 2)$, akkor $\mathcal{F} \in \Sigma^*(n, 2)$.*

A következő stabilitási tétel nem éles, de elegendő volt ahhoz, hogy a kapcsolódó szuper-szaturálási problémát (aszimptotikusan) pontosan megoldjuk.

2.5 Tétel (Patkós [47] Theorem 12). *Legyen m egy nem-negatív egész szám, melyre $m \leq \binom{\frac{2n}{3}-1}{\lceil n/2 \rceil}$. Ha $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy gyengén B -mentes halmazrendszer, melyre teljesül $|\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^*| \geq m$ minden $\mathcal{F}^* \in \Sigma^*(n, 2)$ esetén, akkor minden elég nagy n esetén a $|\mathcal{F}| \leq \Sigma(n, 2) - \frac{m}{4}$ egyenlőtlenség fennáll.*

2.6 Tétel (Patkós [47] Theorem 13). *Az $f(n) = (\lceil n/2 \rceil + 1) \binom{\lceil n/2 \rceil}{2}$ jelöléssel minden $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszerre, melynek mérete $|\mathcal{F}| = \Sigma(n, 2) + E$ igazak a következők.*

(a) *Ha $E = E(n)$ -re teljesül $\log E = o(n)$, akkor $\mathcal{F}$ tartalmazza legalább $(1 - o(1))E \cdot f(n)$ gyenge példányát B -nek.*

(b) *Továbbá ha $E \leq \frac{n}{100}$, akkor $\mathcal{F}$ tartalmazza legalább $E \cdot f(n)$ gyenge példányát B -nek.*

Extremális gráfelméletben Alon és Shikelman [3] publikációja óta nagyon népszerű kutatási téma lett (a korábbi sporadikus eredmények után) az általánosított Turán problémakör, melyben nem az élek számát, hanem egy fix H részgráf előfordulásainak számát kell maximalizálni egy másik F részgráf kizárása mellett. Ennek kizárt részposzetes analógját vezettük be Gerbner Dániellel és Keszegh Balázssal [27]. Formálisan a definíció a következő: ha egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer tartalmazza a Q poszetet, akkor az $\mathcal{F}$ egy $\mathcal{G}$ részrendszere egy példánya Q -nak $\mathcal{F}$ -ben, ha van olyan a 2.2 Definícióban szereplő i injekció, melyre $\mathcal{G} = \{i(q) : q \in Q\}$. Jelölje $c(Q, \mathcal{F})$ a Q poszet $\mathcal{F}$ -ben előforduló példányainak számát.

2.6 Definíció. Poszetek $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ családjára legyen

$$La(n, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \max \left\{ \sum_{Q \in \mathcal{Q}} c(Q, \mathcal{F}) : \mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}, \mathcal{F} \text{ gyengén } \mathcal{P}\text{-mentes} \right\}.$$

Amennyiben $\mathcal{P} = \{P\}$ és $\mathcal{Q} = \{Q\}$, akkor $La(n, \{P\}, \{Q\})$ helyett $La(n, P, Q)$ -t írunk.

Néhány eredmény már más megfogalmazással, de ismert volt a kérdéskörben. Katona [38] bizonyította az $La(n, C_3, C_2) = \binom{n}{\lceil \frac{2n}{3} \rceil} \binom{\lceil \frac{2n}{3} \rceil}{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$ egyenlőséget, illetve Gerbner Dániellel [29] általánosan meghatároztuk $La(n, C_l, C_k)$ értékét minden $l > k$ párra. Az $l = k + 1$ esetben a pontos érték $La(n, C_{k+1}, C_k) = \prod_{i=1}^k \binom{n_{i+1}}{n_i}$, ahol $n = n_{k+1} > n_k > \dots > n_1$ és $|(n_{i+1} - n_i) - (n_{i'+1} - n_{i'})| \leq 1$ minden i, i' esetén, azaz n_i nagyjából $\frac{i}{k+1}n$. Ami ebből fontos, hogy $La(n, C_{k+1}, C_k)$ exponenciálisan kisebb, mint $La(n, C_{k+2}, C_{k+1})$.

A problémabevezető [27] cikkben inkább sporadikus eredmények szerepelnek, említésre méltó, hogy 2.3 Sejtés egyszerűségével szemben mutattunk olyan P, Q posztpárt, amire az

$La(n, P, Q)$ érték nemhogy nem egymást követő szinteken, hanem nem is szinteken vétetik fel. A szisztematikus kutatás a Gerbner Dániellel, Abhishek Methukuval, Nagy Dániellel és Vizer Mátéval közös [28] cikkel indult, ahol különböző poszetekre az $La(n, P, C_k)$ értékeket próbáltunk meghatározni. A talált tétel azért tűnik érdekesnek, mert egy az extremális gráfelmélet Turán-témakörében ismert jelenséggel analóg. Az Erdős-Stone-Simonovtis tétel [19] meghatározza az $ex(n, F)$ Turán-szám aszimptotikáját (egy n -csúcsú gráf maximális élszáma, ha nem tartalmazza F -et részgráfként) minden olyan F esetében, amelynek kombinatorikus száma legalább 3. Páros gráfok esetén még a nagyságrend is ismeretlen sok esetben. Ezzel valamennyire analóg módon azt találtuk, hogy a P poszet $h(P)$ magassága lesz a döntő abban, hogy az $La(n, P, C_k)$ érték nagyságrendje (a fenti Gerbner Dániellel közös tételünk segítségével) könnyen meghatározható-e vagy sem.

2.7 Tétel (Gerbner, Methuku, Nagy, Patkós, Vizer [28] Theorem 16). *Tetszőleges P poszet esetén igazak a következők*

(i) *Ha P magassága $h(P) > k$, akkor*

$$La(n, P, C_k) = \Theta(La(n, C_{k+1}, C_k)).$$

Továbbá

$$La(n, C_{k+1}, C_k) \leq La(n, P, C_k) \leq La(n, P_{|P|}, C_k) \leq \binom{|P| - 1}{k} La(n, C_{k+1}, C_k).$$

(ii) *Ha $h(P) = l \leq k$, akkor*

$$La(n, P, C_k) = O(n^{2k-1/2} La(n, C_l, C_{l-1})),$$

és létezik olyan P poszet, melyre $h(P) = l$ és $La(n, P, C_k) = \Omega(La(n, C_l, C_{l-1}))$ teljesül.

3 Halmazrendszerek nyomai

Halmazrendszerekre vonatkozó extremális problémákat lehet megadni az alaphalmaz egy részhalmazára való megszorításokra tett feltételekkel. Ezeknek a fogalmaknak a gépi tanulástól, a mesterséges intelligencián keresztül a diszkrét geometriáig (de nem bezárólag) vannak alkalmazásai, mi pusztán extremális halmazrendszeres megfontolásokat veszünk figyelembe. Formálisan az F halmaz *nyoma* az S halmazon $F_S := F \cap S$, míg egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer nyoma S -en $\mathcal{F}_S := \{F_S : F \in \mathcal{F}\}$, azaz a nyomokra vonatkozó problémák is beillenek az Erdős és Kleitman által megadott operációkkal leírható problémák közé. A terület alaptétel a Sauer-lemmának is hívott állítás.

3.1 Tétel (Sauer [54], Shelah [55], Vapnik és Chervonenkis [58]). *Ha egy $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszerhez nem létezik olyan $K \in \binom{[n]}{k}$, amelyre $\mathcal{F}_K = 2^K$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}$. Ez a korlát éles, ahogy azt $\binom{[n]}{\leq k-1}$ vagy $\binom{[n]}{\geq n-k+1}$ mutatja.*

Ha egy $\mathcal{F}$ rendszer és egy S halmaz esetén $\mathcal{F}_S = 2^S$, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ *szétzúzza* S -t. Az $\mathcal{F}$ által szétzúzott halmazok rendszerét $sh(\mathcal{F})$ -fel jelöljük, ami egy ideál, azaz $S' \subset S \in sh(\mathcal{F})$ esetén $S' \in sh(\mathcal{F})$. Az $sh(\mathcal{F})$ -beli halmazok közül a legnagyobb méretét nevezzük $\mathcal{F}$ *Vapnik-Chervonenkis dimenziójának*. Legfeljebb $k - 1$ VC-dimenziójú, $\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}$ méretű halmazrendszerből, azaz a 3.1 Tétel egyenlőtlenségét egyenlőséggel teljesítő rendszer nagyon sok van (lásd pl. [26]), és az ilyen rendszerek karakterizációja nem ismert és elég reménytelen problémának tűnik. Pajor vette észre [46], hogy a 3.1 Tétel legtöbb bizonyítása kiadja a $|\mathcal{F}| \leq |sh(\mathcal{F})|$ egyenlőtlenséget (ami erősebb az eredeti tételnél). Több eredmény van arról, hogy ezt az egyenlőtlenséget mely rendszerek teljesítik egyenlőséggel illetve a hasonló $|ssh(\mathcal{F})| \leq |\mathcal{F}|$ Bollobás és Radcliffe által bizonyított [9] egyenlőtlenség esetén. Itt $ssh(\mathcal{F})$ az $\mathcal{F}$ által erősen szétzúzott halmazokat jelöli, azaz olyan S halmazokat, amihez létezik T tartóhalmaz, hogy $T + 2^S = \{S' \cup T : S' \subseteq S\} \subseteq \mathcal{F}$. Ezen eredményeket is használtuk az alábbi tézisek bizonyításakor. Olyan nyomokkal megfogalmazható feltételeket kerestünk, amelyek a Sauer-lemma korlátját implikálják, de már csak a triviális $\binom{[n]}{\leq k-1}$ és $\binom{[n]}{\geq n-k+1}$ rendszerek érik el ezt a korlátot.

3.1 Definíció (Patkós [48]). Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer l -nyomon k -Sperner tulajdonságú, ha tetszőleges l méretű L halmaz esetén az $\mathcal{F}_L$ nyom nem tartalmaz $k + 1$ hosszú láncot. Mivel egy l méretű halmazon legfeljebb $l + 1$ hosszú lánc lehet, ezért a definíció $k \leq l$ esetén érdekes. A legnagyobb $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ l -nyomon k -Sperner halmazrendszer méretét $f(n, k, l)$ -lel jelöljük.

A következő tétel (a) része egyszerű következménye a Sauer-lemmának, az érdemi (b) rész azt mondja, hogy ha k méretű halmazokon a teljes hatványhalmaz helyett már egy maximális láncot is kizárunk nyomként, akkor csak a triviális halmazrendszerek érik el a Sauer-lemma korlátját.

3.2 Tétel (Patkós [48] Theorem 44). **(a)** $f(n, k, k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}$.

(b) Ha $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy k -nyomon k -Sperner tulajdonságú halmazrendszer, melynek mérete $|\mathcal{F}| = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}$, akkor vagy $\mathcal{F} = \binom{[n]}{\leq k-1}$ vagy $\mathcal{F} = \binom{[n]}{\geq n-k+1}$.

A következő tételek konklúziója ugyanaz, mint az előzőé, a különbség, hogy $k < l$ esetben a bizonyítás csak elég nagy alaphalmaz esetén működik.

3.3 Tétel (Patkós [48] Theorem 45). *Pozitív egészek minden $1 \leq k \leq l$ párjához létezik olyan $N(k, l)$ küszöb, hogy $n \geq N(k, l)$ esetén $f(n, k, l) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}$ teljesül. Továbbá ha $2 \leq k \leq l$, akkor a maximális méretű l -nyomon k -Sperner halmazrendszerek csak $\binom{[n]}{\leq k-1}$ és $\binom{[n]}{\geq n-k+1}$.*

A 3.2 és 3.3 Tételek fix k és l mellett szólnak elég nagy alaphalmazon élő halmazrendszerekről. Már az eredeti [48] cikkben is vizsgáltuk azt az esetet, amikor az alaphalmazból csak néhány fix számú elemet hagyunk el és így követeljük meg, hogy a nyomon ne legyen k -nál hosszabb lánc. Ekkor a helyzet radikálisan megváltozik az eddigiekhez képest. Egy olyan halmazrendszerben, melyben az egyes halmazok mérete egy m hosszú intervallumba esik, l' tetszőleges elem elhagyása után a nyomok mérete egy $m + l'$ hosszú intervallumból kerül ki. Azaz, ha $l' < k$, akkor a középső $k - l'$ szint $(n - l')$ -nyomon k -Sperner tulajdonságú

halmazrendszert alkot, így $f(n, k, n - l') \geq \Sigma(n, k - l')$. Nem-uniform halmazrendszerekre vonatkozó utolsó tételünk azt mondja ki, hogy ez aszimptotikusan optimális.

3.4 Tétel (Patkós [50] Theorem 46). *Legyenek k és l' pozitív egészek, melyekre $l' < k$ fennáll. Ekkor ha $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy $(n - l')$ -nyomon k -Sperner tulajdonságú halmazrendszer, akkor teljesül az $|\mathcal{F}| \leq (k - l' + o(1)) \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ egyenlőtlenség.*

Megemlítjük, hogy [51]-ben, hogy az $l' = 1$ speciális esetben az $(n - 1)$ -nyomon k -Sperner tulajdonságú halmazrendszerek maximális mérete pontosan $\Sigma(n, k - 1)$, ha n elég nagy. Annak, hogy a disszertációban a 3.3 Tétel szerepel két oka van: egyrészt ez általános l' értékre ad bizonyítást. Másrészt a bizonyításnak két lépése van: az egyik (a disszertáció ... Lemmája) egy Turán-típusú eredmény *szoros hipergráf-utakról* (a gráfelméleti út foglamának többfajta kiterjesztése létezik hipergráfokra, lásd pl. [34]). A másik pedig a kizárt részposzetes Bukh 2.4 Tételét kombinálja az előbb említett Turán-típusú eredménnyel, így ezzel a bizonyítás jól példázza az extrémális kombinatorikai területek összefonódását.

Korlátos VC-dimenziójú *uniform* halmazrendszerek méretét Frankl és Pach [22] vizsgálták először. Egy k -uniform halmazrendszer Vapnik-Chervonenkis dimenziója nem lehet több kn -nál. Frankl és Pach bizonyították, hogy egy $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ halmazrendszer mérete, melynek VC-dimenziója legfeljebb $k - 1$, nem lehet több, mint $\binom{n}{k-1}$. Azt is észrevették, hogy egy k -uniform *metsző* $\mathcal{G}$ halmazrendszer VC-dimenziója legfeljebb $k - 1$, mert ha egy k -elemű G halmaz $\mathcal{G}$ -beli, akkor $\emptyset \notin \mathcal{G}|_G$, ellenkező esetben pedig $G \notin \mathcal{G}|_G$. A nevezetes Erdős-Ko-Rado tétel [16] szerint a csillag (az alaphalmaz egy fix elemét tartalmazó összes k -méretű halmazából álló rendszer) a legnagyobb metsző halmazrendszer, Frankl és Pach azt sejtették, hogy a csillag a legnagyobb k -uniform, legfeljebb $k - 1$ VC-dimenziójú halmazrendszer. Ezt Ahlswede és Khatchatrian [2] cáfolták azzal, hogy $k \geq 3$ esetben konstruáltak $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-4}{k-3}$ méretű k -uniform, $k - 1$ VC-dimenziós rendszert. Ehy évtizeddel később Mubayi és Zhao megadott [45] exponenciálisan sok nem izomorf halmazrendszert, melyek mindegyikének mérete megegyezik az Ahlswede és Khatchatrian által kapottól. Ha ezek extrémálisak lennének, akkor a stabilitás hiánya megmagyarázná, miért nehéz ez a probléma. Mubayi és Zhao Frankl és Pach $\binom{n}{k-1}$ -es felső korlátján is javítottak.

A következő tétel azt mondja ki, hogy hasonlóan az uniform esethez, a teljes hatványhalmaz helyett a maximális lánc kizárása már elegendően erős feltétel ahhoz, hogy egy egyszerű konstrukció (a csillag) legyen stabilan az optimális.

3.5 Tétel (Patkós [49] Theorem 47). *Minden $2 \leq k$ egész és $1/2 < c < 1$ valós számhoz létezik egy $N_0(k, c)$ küszöb, hogy minden $n \geq N_0(k)$ esetén ha $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ egy k -nyomon k -Sperner tulajdonságú, $c \binom{n-1}{k-1}$ -nél nagyobb méretű halmazrendszer, akkor létezik az alaphalmaznak olyan $x \in [n]$ eleme, melyet minden $\mathcal{F}$ -beli F tartalmaz.*

A 3.5 Tételben szereplő konstrukció általánosítható nagyobb uniformitás esetére: tetszőleges $k \leq m$ esetén az az $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{m}$ halmazrendszer, mely az összes olyan m -méretű halmazból áll, mely tartalmaz egy fix $m - k + 1$ méretű M halmazt, rednelkezik a következő tulajdonsággal: minden k méretű X -re $\mathcal{C}_k \not\subseteq \mathcal{F}_K$, azaz k -nyomon k -Sperner. A [49] cikkünkben azt sejtettük, hogy elég nagy n esetén ez a halmazrendszer extrémális, azaz legnagyobb ilyen tulajdonságú. A sejtést később Tan bizonyította [57].

Utolsó halmazrendszerek nyomaival foglalkozó tézisünk a Sauer-lemma szaturálás változata. Minden monoton extrémális problémának megvan a szaturálás változata: ha adott halmazrendszerek egy tulajdonsága (metsző, nem tartalmaz k méretű láncot, VC-dimenziója legfeljebb d , stb), akkor milyen *kicsi* lehet egy olyan halmazrendszer, ami rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, de bármilyen új halmazt hozzávéve már nem fog. Jelöljük tehát $\text{sat}_{VC}(n, d)$ -vel a legkisebb $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ olyan d VC-dimenziójú halmazrendszer méretét, melyre minden $G \in 2^{[n]} \setminus \mathcal{F}$ halmazzal $\mathcal{F} \cup \{G\}$ Vapni-Chervonenkis dimenziója már $d + 1$. Nyilvánvaló, hogy $\text{sat}_{VC}(n, 0) = 1$. Dudley [14] bizonyította, hogy $\text{sat}_{VC}(n, 1) = n + 1$, ami megegyezik a 3.1 Tétel adta felső korláttal, azaz minden tovább nem bővíthető 1-dimenziós halmazrendszer $n + 1$ halmazból áll. Ennek fényében némileg meglepő eredményük, hogy minden további esetben egy az alaphalmaz méretétől nem, csak d -től függő felső korlát adható.

3.6 Tétel (Frankl, Kiselev, Kupavskii, Patkós [21] Theorem 48). *Minden $d \geq 3$ egészre teljesül $\text{sat}_{VC}(n, d - 1) \leq 4^d$, ha $n \geq 2d$. Továbbá, ha d páratlan vagy $d \geq 14$, akkor 4^d helyett írható $\frac{1}{2} \binom{2d}{d}$.*

4 Metszettételek q -analógjai

Kombinatorikai kutatások során gyakran előfordul, hogy egy adott alterület problémájának mintájára, más alterületeken is feltesznek hasonló kérdéseket. Tetszőleges halmazrendszeres probléma természetes analógiát meg lehet fogalmazni a q elemű véges test $\mathbf{F}_q$ feletti vektorterek rendszerére. Ehhez annyit kell tenni, hogy a részhalmazok mérete helyett alterek dimenziójáról, halmazok uniója helyett közösen generált altérrel, komplementer halmaz helyett merőleges altérrel beszéljünk. Sokszor az így kapott új probléma a halmazrendszeres esetben alkalmazott módszerrel megoldható - ez a kevésbé érdekes eset. Ritkán, de olyan is előfordul, hogy a probléma könnyebbé válik: egy halmaz/altérrendszer t -metsző, ha bármely két eleme metszetének mérete/dimenziója legalább t . Egy n -dimenziós $\mathbf{F}_q$ feletti V vektortér k -uniform, t -metsző altérrendszer maximális méretét Frankl és Wilson bő tíz évvel hamarabb határozta meg [25] n, k, q, t minden értékére, minthogy Ahlswede és Khatchatrian megoldotta volna [1] az eredeti halmazrendszeres kérdést. Vannak olyan esetek, amikor a halmazrendszeres bizonyítás nem működik vektorteres esetben, és néha a válasz is valamennyire más. Ez utóbbi kettőre lesz példa a fejezet két főbb tézise, és mindkettőnek egy-egy alkalmazását is adjuk.

Az első eredmény, aminek q -analógiával foglalkozunk Kruskal [41] és Katona [37] nevezetes árnyéktétele. Egy véges F halmaz *árnyéka* az F által tartalmazott, eggyel kisebb halmazok: $\partial(F) = \{G \subset F : |G| = |F| - 1\}$. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer árnyéka pedig a benne lévő halmazok árnyékainak uniója: $\partial(\mathcal{F}) = \{G : \exists F \ G \subset F, |G| = |F| - 1\}$. Az árnyéktétel arra a kérdésre adja meg a választ, hogy tetszőleges m és k esetén melyik k -uniform m halmazból álló $\mathcal{F}$ rendszer minimalizálja $\partial(\mathcal{F})$ méretét. A választ kétféleképpen is meg lehet adni: egyrészt képlettel, másrészt strukturálisan. A pozitív egész számok véges részhalmazain be lehet vezetni az úgynevezett ko-lexikografikus (kolex) rendezést: $A < B$ ha A és B szimmetrikus differenciájának $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ legnagyobb elem B -beli. Jelöljük $\mathcal{I}_{k,m}$ -mel a k elemű részhalmazok közül a kolex rendezés szerinti m legkisebből álló rendszert.

4.1 Tétel (Árnyéktétel. Kruskal [41], Katona [37]).

- (i) Tetszőleges $\mathcal{F}$ k -uniform halmazrendszer teljesíti a $|\partial(\mathcal{F})| \geq |\partial(\mathcal{I}_{k,|\mathcal{F}|})|$ egyenlőtlenséget.
(ii) Fix k esetén minden m pozitív szám egyértelműen írható fel $m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_j}{j}$ alakban. Ekkor Tetszőleges m halmazból álló k -uniform $\mathcal{F}$ rendszerre igaz a $|\partial(\mathcal{F})| \geq \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \dots + \binom{a_j}{j-1} = |\partial(\mathcal{I}_{k,m})|$ egyenlőtlenség.

Bár a 4.1 Tétel (i)-es pontja struktúrálisan jól leírja az extrémális rendszert, mind (i), mind (ii) kevésbé használható becsléses alkalmazások esetén (és nagyon sok ilyen van!), kivéve ha $m \binom{n}{k}$ alakú. Így gyakran inkább az alábbi Lovász által bizonyított némileg gyengébb, de becslésekhez sokkal kényelmesebb változatot használják.

4.2 Tétel (Lovász [42]). Legyen $\mathcal{F} \subset \binom{X}{k}$ és $y \geq k$ az a valós szám, mellyel $|\mathcal{F}| = \binom{y}{k}$. Ekkor $|\partial\mathcal{F}| \geq \binom{y}{k-1}$. Ha egyenlőség teljesül, akkor $y \in \mathbb{Z}^+$ és $\mathcal{F} = \binom{Y}{k}$, ahol Y egy y méretű részhalmaza X -nek.

Ameera Chowdhury-val közös cikkünk előtt csak néhány parciális eredmény [6, 24] volt ismert altérrendszerek árnyékaira vonatkozóan. Ennek legfőbb oka az volt, hogy bár mind a 4.1 Tételnek, mind 4.2 relaxációjának több bizonyítása is ismert volt, de mind használta a shiftelésnek (tömörítésnek) nevezett operációt. Ennek az operációnak pedig nem ismert olyan veltorteres változata, amely megőrizné a halmazrendszeres árnyéktétel bizonyításához szükséges tulajdonságait. Peter Keevash 2008-ban egy új, shiftelést nem használó érvelést talált a 4.2 Tételhez. Ezt tudtuk úgy módosítani, hogy a vektorterekre vonatkozó következő tételt kapjuk.

4.3 Tétel (Chowdhury, Patkós [11] Theorem 76). Legyen V egy q -modul F_q feletti vektortér, $\mathcal{F} \subset \binom{V}{k}$ és definiáljuk az $y \geq k$ valós számot az $|\mathcal{F}| = \binom{y}{k}_q$ egyenlőséggel. Ekkor

$$|\partial\mathcal{F}| \geq \left[\begin{matrix} y \\ k-1 \end{matrix} \right]_q.$$

Ha egyenlőség teljesül, akkor $y \in \mathbb{Z}^+$ és $\mathcal{F} = \binom{Y}{k}$, ahol Y egy y -dimenziós altere V -nek.

A 4.3 Tétel segítségével be tudtuk látni Frankl alábbi többszöresen metsző halmazrendszerekre vonatkozó tételét. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer r -szeresen metsző, ha tetszőleges $F_1, F_2, \dots, F_r \in \mathcal{F}$ esetén $|F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_r| \geq 1$.

4.4 Tétel (Frankl [23]). Legyen X egy n elemű halmaz, $\mathcal{F} \subset \binom{X}{k}$ pedig egy r -szeresen metsző halmazrendszer. Ha $(r-1)n \geq rk$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. Továbbá az $r=2$ és $n=2k$ eset kivételével egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $\mathcal{F} = \{F \in \binom{X}{k} : x \in F\}$ valamely $x \in X$ elemre.

A tétel korlátja $2k \leq n$ esetén már a nevezetes Erdős-Ko-Rado tétel [16] miatt teljesül, a lényeges elem, hogy r és k függvényében már kisebb n esetén is igaz a tétel állítása. Egy $\mathcal{F}$ altérrendszer r -szeresen metsző, ha ha tetszőleges $F_1, F_2, \dots, F_r \in \mathcal{F}$ esetén $\dim(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_r) \geq 1$. Sikertült belátnunk Frankl 4.4 Tételének vektorteres verzióját.

4.5 Tétel (Chowdhury, Patkós [11] Theorem 78). *Legyen V egy n -dimenziós $\mathbf{F}_q$ feletti vektortér, $\mathcal{F} \subset \begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix}$ egy r -szeresen metsző altérrendszer. Tegyük fel, hogy az $(r-1)n \geq rk$ egyenlőtlenség fennáll. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$

Továbbá egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn teljesül, ha $\mathcal{F} = \{F \in \begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix} : v \subset F\}$ valamely egydimenziós $v \subset V$ esetén, kivéve ha $r = 2$ és $n = 2k$.

A disszertáció másik fő q -analóg eredménye eredetijének kiindulópontja a már említett Erdős-Ko-Rado tétel, mely szerint egy k -uniform $\mathcal{F} \subseteq \begin{bmatrix} [n] \\ k \end{bmatrix}$ (2-szeresen) metsző halmazrendszer mérete legfeljebb $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$, ha $n \geq 2k$. Ha pedig $n > 2k$, akkor egyenlőség csak a triviális $\mathcal{F}_x = \{F \in \begin{bmatrix} [n] \\ k \end{bmatrix} : x \in F\}$ rendszerekre állhat fenn. Hilton és Milner adták meg ennek az eredménynek a stabil változatát. Mi a második legnagyobb maximális metsző halmazrendszer mérete, azaz egy olyané, amely nem része egyetlen $\mathcal{F}_x$ -nek sem? Azt, hogy egy halmazrendszer halmazainak nincs közös eleme, a következő paraméterrel lehet jellemezni. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszerre jelölje $\tau(\mathcal{F})$ a rendszer *lefogási számát*, azaz azt a minimális t számot, amire létezik t elemű T halmaz, amely minden $F \in \mathcal{F}$ halmazt metsz.

Hilton és Milner tétele a $\tau(\mathcal{F}) \geq 2$ egyenlőtlenséget teljesítő metsző rendszerek méretéről szól, de léteznek eredmények a $\tau(\mathcal{F}) \geq 3$, a $\tau(\mathcal{F}) \geq 4$ illetve a $\tau(\mathcal{F}) = k$ esetről is.

4.6 Tétel. (Hilton, Milner [35]) *Legyen $\mathcal{F} \subset \begin{bmatrix} X \\ k \end{bmatrix}$ egy metsző halmazrendszer, melyre teljesülnek a $k \geq 3$, $n \geq 2k+1$ és $\tau(\mathcal{F}) \geq 2$ egyenlőtlenségek. Ekkor $|\mathcal{F}| \leq \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + 1$. Az adott korlátot elérő halmazrendszerek:*

(i) *tetszőleges k méretű F halmaz és $x \in X \setminus F$ elem esetén*

$$\mathcal{F}_{HM} = \{F\} \cup \{G \in \begin{bmatrix} X \\ k \end{bmatrix} : x \in G, F \cap G \neq \emptyset\},$$

(ii) *ha $k = 3$, akkor tetszőleges 3-elemű S halmazra*

$$\mathcal{F}_3 = \{F \in \begin{bmatrix} X \\ 3 \end{bmatrix} : |F \cap S| \geq 2\}.$$

Az $\mathcal{F}_{HM}$ halmazrendszer konstrukcióját elismételhetjük alterekkel is: ha E egydimenziós, F pedig k -dimenziós altere egy V n -dimenziós vektortérnek, akkor tekinthetjük a $\{F\} \cup \{G \in \begin{bmatrix} V \\ k \end{bmatrix} : E \leq G, \dim(G \cap F) \geq 1\}$ metsző rendszert. De ez a rendszer nem maximális metsző, ugyanis $\langle E, F \rangle$ minden k -dimenziós alterét hozzá lehet adni úgy, hogy továbbra is metsző maradjon. Az így kapott altérrendszereket nevezzük *HM-típusúnak*. Ezzel definícióval sikerült belátni a 4.6 Tétel következő q -analógját.

4.7 Tétel (Blokhuis, Brouwer, Chowdhury, Frankl, Mussche, Patkós, Szőnyi [7] Theorem 80). *Legyen V egy $\mathbf{F}_q$ feletti n -dimenziós vektortér és $k \geq 3$. Továbbá legyen $q \geq 3$ és*

$n \geq 2k + 1$ vagy $q = 2$ és $n \geq 2k + 2$. Ekkor bármely $\mathcal{F} \subseteq \binom{[V]}{k}$ metsző altérrendszerre, melyre $\tau(\mathcal{F}) \geq 2$ fennáll, teljesül

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} - q^{k(k-1)} \binom{n-k-1}{k-1} + q^k.$$

Egyenlőség esetén $\mathcal{F}$ vagy egy HM-típusú rendszer, vagy $k = 3$ és $\mathcal{F} = \mathcal{F}_3 = \{F \in \binom{[V]}{k} : \dim(S \cap F) \geq 2\}$ valamely $S \in \binom{[V]}{3}$ altérre.

Továbbá ha $k \geq 4$, akkor létezik olyan n, q és k -től független $\varepsilon > 0$, hogy $|\mathcal{F}| \geq (1 - \varepsilon) \left(\binom{n-1}{k-1} - q^{k(k-1)} \binom{n-k-1}{k-1} + q^k \right)$ esetén $\mathcal{F}$ egy HM-típusú rendszer része.

A 4.7 Tétel alkalmazásaként meghatároztuk a q -Kneser gráfok kromatikus számát. Az eredeti Kneser-gráf $K_{n:k}$ csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$ és két k -elemű halmazt él köt össze, ha diszjunktak. A $K_{n:k}$ gráf független csúcshalmazai $\binom{[n]}{k}$ metsző halmazrendszereinek felelnek meg, és $\chi(K_{n:k})$ az a legkisebb c , amire $\binom{[n]}{k}$ felbontható c darab metsző halmazrendszerre. Egy egyszerű ilyen felbontás, ha minden $F \in \binom{[n]}{k}$ halmazt az $\mathcal{F}_i$ rendszerbe teszünk, ha $i = \min F \leq n - 2k + 1$ és minden más halmazt egy $(n - 2k + 2)$ -edik könnyen ellenőrizhetően szintén metsző rendszerbe. Lovász nevezetes tétele [43] azt mondja ki, hogy ez optimális, azaz $\chi(K_{n:k}) = n - 2k + 2$.

A q -Kneser gráf $qK_{n:k}$ csúcsai egy n -dimenziós $\mathbf{F}_q$ feletti V vektortér alterei, s kettő F, G közülük akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha $\dim(F \cap G) = 0$. A q -Kneser gráfoknál is adódik egy természetes színezés: egy V n -dimenziós vektortér minden k -dimenziós altere elemetsz egy tetszőleges U $(n - k + 1)$ -dimenziósat. Így U egydimenziós altereivel színezzük: minden F alteret színezzük $F \cap U$ egy tetszőleges egydimenziós alterével. Így minden színosztály *triviális* lesz, azaz $\dim(\cap_{F \in \mathcal{F}_i} F) \geq 1$ minden $\mathcal{F}_i$ színosztályra. A disszertáció utolsó tézise azt állítja, hogy ez a színezés optimális.

4.8 Tétel (Blokhuis, Brouwer, Chowdhury, Frankl, Mussche, Patkós, Szőnyi [7] Theorem 81). *Legyen $k \geq 3$. Ha $n \geq 2k + 1$ és $q \geq 3$ vagy $n \geq 2k + 2$ és $q = 2$, akkor a q -Kneser gráf kromatikus számára teljesül $\chi(qK_{n:k}) = \binom{n-k+1}{1}$. Továbbá egy minimális színt használó színezésben minden színosztály triviális, és a színosztályokat meghatározó pontok egy $(n - k + 1)$ -dimenziós altér egydimenziós alterei.*

Megjegyezzük, hogy Ihringer [36] meghatározta $qK_{n:k}$ kromatikus számát $n = 2k$ és $q \geq 5$ esetén.

Hivatkozások

- [1] Rudolf Ahlswede – Levon H Khachatrian: The complete intersection theorem for systems of finite sets. *European Journal of Combinatorics*, 18. évf. (1997) 2. sz., 125–136. p.
- [2] Rudolf Ahlswede – Levon H. Khachatrian: Counterexample to the Frankl-Pach conjecture for uniform, dense families. *Combinatorica*, 17. évf. (1997) 2. sz., 299–301. p.

- [3] Noga Alon – Clara Shikhelman: Many T copies in H -free graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 121. évf. (2016), 146–172. p.
- [4] József Balogh – Šárka Petříčková – Adam Zolt Wagner: Families in posets minimizing the number of comparable pairs. *Journal of Graph Theory*, 95. évf. (2020) 4. sz., 655–676. p.
- [5] József Balogh – Adam Zolt Wagner: Kleitman’s conjecture about families of given size minimizing the number of k -chains. *Advances in Mathematics*, 330. évf. (2018), 229–252. p.
- [6] Sergei Bezrukov – Aart Blokhuis: A Kruskal–Katona type theorem for the linear lattice. *European Journal of Combinatorics*, 20. évf. (1999) 2. sz., 123–130. p.
- [7] Aart Blokhuis – Andries E Brouwer – Ameera Chowdhury – Peter Frankl – T Musche – Balázs Patkós – Tamás Szönyi: A Hilton–Milner theorem for vector spaces. *The Electronic Journal of Combinatorics [electronic only]*, 17. évf. (2010) 1. sz., R71. p.
- [8] Edward Boehnlein – Tao Jiang: Set families with a forbidden induced subposet. *Combinatorics, Probability and Computing*, 21. évf. (2012) 04. sz., 496–511. p.
- [9] Béla Bollobás – Andrew J Radcliffe: Defect Sauer results. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 72. évf. (1995) 2. sz., 189–208. p.
- [10] Boris Bukh: Set families with a forbidden subposet. *Electronic Journal of Combinatorics*, 16. évf. (2009) 1. sz., R142. p.
- [11] Ameera Chowdhury – Balázs Patkós: Shadows and intersections in vector spaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 117. évf. (2010) 8. sz., 1095–1106. p.
- [12] Shagnik Das – Wenying Gan – Benny Sudakov: Sperner’s theorem and a problem of Erdős, Katona and Kleitman. *Combinatorics, Probability and Computing*, 24. évf. (2015) 04. sz., 585–608. p.
- [13] Annalisa De Bonis – Gyula O. H. Katona – Konrad J Swanepoel: Largest family without $A \cup B \subseteq C \cap D$. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 111. évf. (2005) 2. sz., 331–336. p.
- [14] Richard M Dudley: The structure of some Vapnik–Chervonenkis classes. In *Proceedings of the Berkeley Conference in Honor of Jerzy Neyman* (konferenciaanyag), 2. köt. 1985, 495–507. p.
- [15] Paul Erdős: On a lemma of Littlewood and Offord. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51. évf. (1945) 12. sz., 898–902. p.
- [16] Paul Erdős – Chao Ko – Richard Rado: Intersection theorems for systems of finite sets. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 12. évf. (1961) 1. sz., 313–320. p.

- [17] Paul Erdős–Daniel J Kleitman: Extremal problems among subsets of a set. In *Proc. Second Chapel Hill Conf. on Combinatorial Mathematics and its Applications* (konferenciaanyag). 1970, Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C., 146–170. p.
- [18] Paul Erdős–Daniel J Kleitman: Extremal problems among subsets of a set. *Discrete Mathematics*, 8. évf. (1974) 3. sz., 281–294. p.
- [19] Paul Erdős–Miklós Simonovits: A limit theorem in graph theory. *Studia Sci. Math. Hung.*, 1. évf. (1966), 51–57. p.
- [20] Paul Erdős–Joel Spencer: *Paul Erdős: the art of counting. Selected writings*. Mathematicians of our time 5 sorozat. 1973, MIT Press.
- [21] Nóra Frankl–Sergei Kiselev–Andrey Kupavskii–Balázs Patkós: VC-saturated set systems. *arXiv preprint arXiv:2005.12545*, 2020.
- [22] Peter Frankl–János Pach: On disjointly representable sets. *Combinatorica*, 4. évf. (1984) 1. sz., 39–45. p.
- [23] Péter Frankl: On Sperner families satisfying an additional condition. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 20. évf. (1976) 1. sz., 1–11. p.
- [24] Péter Frankl–Ronald L Graham: Intersection theorems for vector spaces. *European Journal of Combinatorics*, 6. évf. (1985) 2. sz., 183–187. p.
- [25] Péter Frankl–Richard M Wilson: The erdős-ko-rado theorem for vector spaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 43. évf. (1986) 2. sz., 228–236. p.
- [26] Zoltán Füredi–Forrest Quinn: Traces of finite sets. *Ars Combin*, 18. évf. (1984), 195–200. p.
- [27] Dániel Gerbner–Balázs Keszegh–Balázs Patkós: Generalized forbidden subposet problems. *Order*, 37. évf. (2020), 389–410. p.
- [28] Dániel Gerbner–Abhishek Methuku–Dániel T Nagy–Balázs Patkós–Máté Vizer: On the number of containments in P -free families. *Graphs and Combinatorics*, 35. évf. (2019) 6. sz., 1519–1540. p.
- [29] Dániel Gerbner–Balázs Patkós: l -chain profile vectors. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22. évf. (2008) 1. sz., 185–193. p.
- [30] Dániel Gerbner–Balázs Patkós: *Extremal finite set theory*. 2018, CRC Press.
- [31] Jerrold R Griggs–Wei-Tian Li: Progress on poset-free families of subsets. In *Recent trends in combinatorics*. 2016, Springer, 317–338. p.
- [32] Jerrold R Griggs–Wei-Tian Li–Linyuan Lu: Diamond-free families. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 119. évf. (2012) 2. sz., 310–322. p.

- [33] Jerrold R Griggs–Linyuan Lu: On families of subsets with a forbidden subposet. *Combinatorics, Probability and Computing*, 18. évf. (2009) 05. sz., 731–748. p.
- [34] Ervin Györi–Nathan Lemons: Hypergraphs with no odd cycle of given length. In *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2009)*. Electronic Notes in Discrete Mathematics sorozat, 34. köt. 2009, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 359–362. p. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.endm.2009.07.059>.
- [35] Anthony JW Hilton–Eric C Milner: Some intersection theorems for systems of finite sets. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 18. évf. (1967) 1. sz., 369–384. p.
- [36] Ferdinand Ihringer: The chromatic number of the q -kneser graph for large q . *the electronic journal of combinatorics*, 2019., P1–50. p.
- [37] Gyula O. H. Katona: A theorem of finite sets. In *Theory of Graphs, Proceedings of Colloquium held at Tihany, Hungary* (konferenciaanyag). Budapest, 1968, Akadémia Kiadó, 187–207. p.
- [38] Gyula O. H. Katona: Two applications of Sperner type theorems (for search theory and truth functions). *Period. Math. Hungar*, 3. évf. (1973), 19–26. p.
- [39] Gyula O. H. Katona–Tamás Gy Tarján: Extremal problems with excluded subgraphs in the n -cube. In *Graph Theory*. 1983, Springer, 84–93. p.
- [40] Daniel J Kleitman: A conjecture of Erdős-Katona on commensurable pairs among subsets of an n -set. In *Theory of Graphs, Proceedings of Colloquium held at Tihany, Hungary* (konferenciaanyag). 1966, 187–207. p.
- [41] Joseph B Kruskal: The number of simplices in a complex. *Mathematical Optimization Techniques*, 1963., 251–268. p.
- [42] László Lovász: *Combinatorial Problems and Exercises*. 1979, Akadémiai Kiadó - North Holland.
- [43] László Lovász: Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 25. évf. (1978) 3. sz., 319–324. p. ISSN 0097-3165.
- [44] Abhishek Methuku–Dömötör Pálvölgyi: Forbidden hypermatrices imply general bounds on induced forbidden subposet problems. *Combinatorics, Probability and Computing*, 26. évf. (2017) 4. sz., 593–602. p.
- [45] Dhruv Mubayi–Yi Zhao: On the VC-dimension of uniform hypergraphs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 25. évf. (2007) 1. sz., 101–110. p.
- [46] Alain Pajor: *Sous-espaces l_1^n des espaces de Banach*. 1985, Hermann.
- [47] Balazs Patkós: Supersaturation and stability for forbidden subposet problems. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 136. évf. (2015), 220–237. p.

- [48] Balázs Patkós: l -trace k -Sperner families of sets. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 116. évf. (2009) 5. sz., 1047–1055. p.
- [49] Balázs Patkós: Traces of uniform families of sets. *Electronic Journal of Combinatorics*, 16. évf. (2009), N8. p.
- [50] Balázs Patkós: Families that remain k -sperner even after omitting an element of their ground set. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 20. évf. (2013) 1. sz., P32. p.
- [51] Balázs Patkós: Families that remain k -sperner even after omitting an element of their ground set. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 20. évf. (2013) 1. sz., P32. p.
- [52] Balázs Patkós: Induced and non-induced forbidden subposet problems. *Electronic Journal of Combinatorics*, 22. évf. (2015) 1. sz., P1–30. p.
- [53] Wojciech Samotij: Subsets of posets minimising the number of chains. *Transactions of the American Mathematical Society*, 371. évf. (2019) 10. sz., 7259–7274. p.
- [54] Norbert Sauer: On the density of families of sets. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 13. évf. (1972) 1. sz., 145–147. p.
- [55] Saharon Shelah: A combinatorial problem; stability and order for models and theories in infinitary languages. *Pacific Journal of Mathematics*, 41. évf. (1972) 1. sz., 247–261. p.
- [56] Emanuel Sperner: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. *Math Z*, 27. évf. (1928) 1. sz., 585–592. p.
- [57] Ta Sheng Tan: Traces without maximal chains. *Electronic Journal of Combinatorics*, 17. évf. (2010) 1. sz., N16. p.
- [58] Vladimir N Vapnik – Aleksei Yakovlevich Chervonenkis: On uniform convergence of the frequencies of events to their probabilities. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 16. évf. (1971) 2. sz., 264–279. p.