

DEBRECENI EGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET



4032 Debrecen, Egyetem tér 1., ☒ 4010 Debrecen Pf. 12., ✉ office@math.klte.hu
Tel.: (52) 512-900 * Fax: (52) 536-914

**Opponensi vélemény Csörgő Piroska: *Loops and Groups*
c. MTA-doktori értekezéséről**

Tartalmi ismertetés, a fő eredmények kiemelése:

A disszertáció a jelölt 1997 óta publikált 24 dolgozatában közölt eredményeiről ad számot angol nyelven, világos megfogalmazásban. A dolgozatok többsége magas tudományos tekintélyű nemzetközi folyóiratban jelent meg (J. Algebra, Glasgow Math. J., European J. Combin., Comm. Algebra, Monatsh. Math., Acta Math. Hung., Forum Math. stb.). A disszertációban feldolgozott publikációi közül 9 egyszerzős, 12 kétszerzős, 3 pedig többszerzős. Megítélésem szerint dolgozatai magas tudományos értékkel rendelkeznek.

Az értekezés bevezetésből és azt követő két részből áll. Az első rész loop-elméleti vizsgálatokkal kapcsolatos eredményeket tartalmaz, a második rész klasszikus véges csoportelméleti eredményekről ad számot. A két részben tárgyalt eredmények módszertanilag szoros kapcsolatban állnak, hiszen a szerző a vizsgált nem-asszociatív algebrai kérdéseket velük ekvivalens csoportelméleti problémákra fogalmazza át és a csoportelmélet vizsgálati módszereit alkalmazza megoldásukra.

Az **első részben** vizsgált loop-elméleti kérdések egy loop struktúrája és a loop multiplikáció csoportjának struktúrája közötti kapcsolatok vizsgálatára vonatkoznak. Ehhez a problémához kapcsolódó feladat a loop struktúrája és annak belső permutációcsoportjának struktúrája közötti kapcsolat leírása.

A szerző az első pontban ismerteti a loop-elmélet alapfogalmait.

Jól ismert a loop-elmélet egyik klasszikusának, R. H. Brucknak az a megállapítása, hogy ha egy loop nilpotencia osztálya legfeljebb 2, akkor a belső permutációcsoportja kommutatív. Ennek a kérdésnek a megfordítása az elmúlt két évtizedben igen sok vizsgálatot motivált. A szerző ezt a Brucktól eredő problémát fogalmazza meg kutatásának egy alapfeladatának: *Igaz-e az, hogy ha egy loop belső permutációcsoportja kommutatív, akkor a loop nilpotencia osztálya legfeljebb kettő?* A problémát a szerző 2007-ben publikált minimális méretű ellenpéldája oldotta meg. Az ellenpéllda konstrukciója új ötleteket, alapos és mély struktúravizsgálatot igényel. Ennek a vizsgálatnak a célja a minimális méretű ellenpéllda szerkezetének leírása. A konstrukció elméleti megalapozását és a 2 nilpotencia osztályt implikáló további elegendő feltételek részletes tárgyalását tartalmazza a második pont. Ez a konstrukció és következményei tekinthetők a szerző fő eredményének.

A harmadik pont a szerzőnek arra vonatkozó eredményét tartalmazza, hogy mely véges Abel-csoportok léphetnek fel loopok belső permutációcsoportjaként. Eredményei

részben igazolják Niemenmaa 2004-ben megfogalmazott sejtését, amely szerint csak a csoportok belső automorfizmuscsoportjaira vonatkozó Baer-tételben leírt jellemzéssel analóg esetek léphetnek fel. A vizsgálatban a szerző módszeresen alkalmazza csoportelméleti kutatási technikáját.

A negyedik pontban a szerző a baloldali konjugációra zárt loopok osztályára vonatkozó, A. Drapallal közös eredményeit tárgyalja. Ezt az érdekes, gyenge asszociativitási azonossággal definiálható loop osztályt az utóbbi 15 évben sokan vizsgálták. Ezeket a loopokat az jellemzi, hogy a loop baloldali multiplikáció csoport baltranszverzálisa a konjugálásra vonatkozóan invariáns részhalmazt képez. Ebben az esetben bizonyítja, hogy a loop belső permutációcsoportja akkor és csak akkor kommutatív, ha a loop nilpotencia osztálya legfeljebb kettő.

Az ötödik pontban a Buchsteiner loopok osztályát vizsgálja. Ez az osztály is gyenge asszociativitási azonossággal definiálható, tulajdonságaiban vannak a baloldali konjugációra zárt loopok szerkezetére emlékeztető elemek. Ezen loopok érdekes tulajdonsága az, hogy a nukleuszuk (a minden elemmel asszociáló elemek részcsoportja) szerinti faktorloopjuk kommutatív. Elemezve és felhasználva ezt a tulajdonságot, igazolja, hogy a Buchsteiner loopok centrum szerinti faktorloopja konjugációra nézve zárt loop. A paragrafus több, részben társszerzőkkel elért érdekes eredményt tartalmaz. Ezek közül kiemelem a szerző saját eredményét, ami szerint ha egy Buchsteiner loop belső permutáció csoportja Abel-féle, akkor a nukleusz szerinti faktora elemi Abel 2-csoport. Ennek felhasználásával kapja a szintén egyszerűs publikációban megfogalmazott tételt: Egy véges Buchsteiner loop belső permutáció csoportja Abel-féle akkor és csak akkor, ha előáll egy Buchsteiner loopnak és egy páratlan rendű csoportnak a direkt szorzataként, melyek belső permutáció csoportja Abel-csoport, mégpedig az első faktoré 2-hatványeelemű.

A hatodik pontban a szerző a multiplikáció csoport feloldhatóságát vizsgálja. Eredményeit módszeres és széleskörű csoportelméleti elemzéssel alapozza meg. Eközben itt is használja a minimális ellenpélda vizsgálatának módszerét. A tárgyalt eredmények finn matematikusokkal közös kutatásban születtek. A vizsgálatban a belső permutációcsoport méretéről fogalmaz meg feltevéseket. Bebizonyítja, hogy ha a belső permutációcsoport rendje egy páratlan prímszám kétszerese vagy két páratlan prímszám szorzata (további mellékfeltétellel), akkor a multiplikáció csoport feloldható. Ha emellett a loop végességét is feltételezzük, akkor kapja, hogy a loop maga is feloldható. Ebben a paragrafusban feldolgozott eredmények érdekességét az is emeli, hogy a vizsgált loop osztályra nem ró ki további gyenge asszociativitási feltételeket.

A második részben a szerző a csoportok feloldhatóságával és ennek általánosításaival kapcsolatos kérdéseket vizsgálja.

Az első pontban véges csoportok feloldhatósága vagy szuperfeloldhatósága és a bizonyos minimális részcsoportok tulajdonságai közötti kapcsolatokat vizsgálja a szerző. Ez a paragrafus tartalmazza a szerző M. Asaad-dal közös, nagy visszhangot kiváltó eredménye, amely szerint, ha a G csoportnak az N normálosztó szerinti faktorcsoportja valamely megadott csoportosztályba tartozik, továbbá ha N bizonyos részcsoportjai rendelkeznek valamilyen gyenge normalitási tulajdonsággal G -ben, akkor maga G is a megadott csoportosztályhoz tartozik. Ennek következményeként adódnak a következő állítás: ha H a G csoport feloldható normális részcsoportja és a G/H faktorcsoport szuperfeloldható, továbbá a H normálosztó Fitting részcsoportjának prímelemű, valamint négyelemű részcsoportjai a G csoport minden Sylow részcsoportjával felcserélhetőek, akkor G is szuperfeloldható. Figyelemreméltó M. Herzog-gal közös következő eredménye is: ha a G/H faktorcsoport szuperfeloldható és G -nek

prímelemű, valamint négyelemű részcsoporthat kielégítenek bizonyos konjugáltsági feltételt, akkor G maga is szuperfeloldható.

A második pontban szuperfeloldható csoportok további jellemzéseit és bizonyos strukturális kérdéseire vonatkozó eredményeket tárgyal. Érdemes kiemelni az M. Herzog-gal közös eredményét, amelyben jellemzi az Abel-féle Sylow részcsoporthat rendelkező szuperfeloldható csoportokat a Sylow részcsoporthat struktúrájával. Ennek következményeként adódik: ha a G csoport Sylow részcsoporthat Abel-félék, továbbá G Fitting részcsoporthat ciklikus és tartalmazza a G' kommutátor csoportot, akkor G szuperfeloldható.

A harmadik pontban olyan feloldható csoportok jellemzéseit tárgyalja amelyek minden szubnormális részcsoporthat normálosztó, továbbá melyekben az S -kvázinormalitási tulajdonság tranzitív (T^* -tulajdonság). Kiemelendő M. Assad-dal közös eredménye, amely szerint T^* -tulajdonságú G csoport akkor és csak akkor feloldható, ha minden valódi részcsoporthat T^* -tulajdonságú.

Értékelés:

A tartalmi összegzés alapján megállapítható, hogy a disszertáció mély és értékes eredményeket tartalmaz a feloldhatóság és nilpotencia fogalmakkal összefüggő csoportelméleti és annak nem-asszociatív algebrai alkalmazásai témakörökben.

A csoportelméleti módszerek alkalmazásait a loopelméleti vizsgálatokban az elmélet megalapítói: R. Baer, A. A. Albert és R. H. Bruck kezdeményezték az 1930-1950 közötti időszakban. Az elmélet kiépítésének első évtizedeiben természetesnek tűnt a teljes multiplikáció csoport és annak stabilizátor részcsoporthatjának (belső permutáció csoport) vizsgálatán keresztül törekedni a loopok struktúrájának leírására. Ezt a szándékot nagyban alátámasztotta A. A. Albertnek az az észrevétele, hogy a loopok és multiplikációcsoportjuk normálosztói között természetes kapcsolat állapítható meg. Azonban ennek a célkitűzésnek a sikerét megingatta az a tapasztalat, hogy sokáig nem sikerült kezelhető feltételeket találni a megadott multiplikáció csoporttal rendelkező loopok konstruálhatóságának jellemzésére.

Ezek a tapasztalatok vezettek el ahhoz, hogy a 90-es évek óta a loopok konstrukciójára elsősorban az egyoldali multiplikációcsoportot, annak stabilizátor részcsoporthatját és az ahhoz tartozó transzverzális használták fel. Ez a megközelítés elegendő nagy szabadsági fokot biztosított loopok természetes osztályainak konstrukcióihoz és azok osztályozásához, mind az absztrakt, mind pedig a topologikus és analitikus loopok körében. Közben olyan eredmények is ismertté váltak, amelyek arra utalnak, hogy a teljes multiplikációcsoportra megfogalmazható természetes feltételek nagyon leszűkítik a hozzájuk tartozó lehetséges loopok osztályát. Ennek illusztrálására megemlítem azt az eredményünket, amely szerint összefüggő kompakt topologikus loop esetén a teljes multiplikációcsoport kompakt Lie csoportot generál akkor és csak akkor, ha az egy klasszikus Moufang loop (Nagy- Strambach: Loops in Group Theory and Lie Theory, Theorem 16.3).

A fenti észrevételek arra a felismerésre vezettek, hogy megadott tulajdonságú teljes multiplikáció csoporttal illetve belső permutáció csoporttal rendelkező loopok kutatása a loopok elméletének időszerű, nehéz és fontos problémája. A felmerülő kérdésekre való válaszadás lehetőségét Niemenmaa és Kepka 1990-es eredménye alapozta meg, amely meghatározta azt a teljes multiplikáció csoportra és belső permutáció csoportra vonatkozó csoportelméleti konstrukciót, aminek felhasználásával tetszőleges loop vizsgálható (Theorem

1.1.1). Az általános kérdésfelvetésen belül a loopok teljes multiplikáció csoportjára és belső permutáció csoportjára vonatkozó nilpotencia és feloldhatósági feltételekhez kapcsolódó tulajdonságok elemzése igen érdekes és nehéz kérdésekhez vezet. Csörgő Piroska a 90-es évek végén kapcsolódott be Niemenmaa és Kepka tétele által motivált, a loopok csoportelméleti módszerrel való nilpotencia és feloldhatósági kérdéseinek vizsgálatába. Munkássága alapján a nemzetközi tudományos közvélemény ezen a loop-elméleti kérdéskör vezető szakemberének ismeri el. Legfontosabb eredményét a European Journal of Combinatorics folyóiratban 2007-ben megjelent dolgozata tartalmazza, amelyben egy Bruck által 60 éve megfogalmazott problémára ad meglepő választ.

A szerzőnek a csoportok általánosított feloldhatóságával kapcsolatos eredményei is nagy visszhangot váltottak ki, amit az eredményekre való hivatkozások igazolnak.

Csörgő Piroska tudományos tevékenysége, a disszertációjában feldolgozott jelentős újdonsági értékkel rendelkező és a nemzetközi tudományos környezetben elismert kutatási eredményei igazolják, hogy a jelölt minden szempontból megfelel az MTA doktora cím követelményeinek. Mindezek alapján javaslom a nyilvános védés lefolytatását és a jelölt számára az MTA doktora cím megítélését.

Debrecen, 2010. július 19.

Dr. Nagy Péter Tibor
egyetemi tanár, MTA doktora