

BÍRÁLAT

CSÖRGŐ PIROSKA

Loops and groups

című doktori értekezéséről

Csörgő Piroska érdeklődési körébe kétfajta algebrai struktúra tartozik, ezekre utal a disszertáció címe. Az ezek struktúrájára vonatkozóan elért fő eredményeit tartalmazza az értekezés két fejezetre osztva. Konkrétabban, az első fejezetben olyan loopokkal foglalkozik, amelyekhez tartozó bizonyos csoport — az ún. belső permutációcsoport — Abel-féle, a második fejezet témája pedig a véges szuperfeloldható csoportok szerkezete. A véges csoportok elméletében régóta dolgozik a jelölt, a loopok kutatásába kb. egy évtizede kapcsolódott be. Olyan problémát vizsgált, ahol sikerrel kamatoztathatta csoportelméleti tapasztalatát.

A loop tulajdonképpen „nemasszociatív csoport”, azaz olyan algebrai struktúra, amelyen értelmezve van egy invertálható, de nem feltétlenül asszociatív kétváltozós művelet, amelyre vonatkozóan van egységelem. Bruck (1946) kezdeményezte a loopok vizsgálatát csoportok segítségével. Minden Q loophoz hozzárendelt egy permutációcsoportot, $M(Q)$ -t, ami definíció szerint a Q loop bal- és jobbeltolásai által generált részcsoporthoz az S_Q szimmetrikus csoportban. Ezt nevezik a Q loop *szorzáscsoportjának*. Az $M(Q)$ csoportban az egységelem stabilizátorát $I(Q)$ -val jelölik, és a Q loop *belső permutációcsoportjának* hívják. Az 1990-es évek első felében Kepka és Niemenmaa igazolta, hogy ha a Q véges loop belső permutációcsoportja kommutatív, akkor $M(Q)$ feloldható és Q centrálisan nilpotens. Továbbá az összes ismert példa — többek között a véges csoportok esete — azt sugallta, hogy a nilpotenciaosztály legfeljebb 2. Ekkor fogalmazta meg Kepka azt a problémát, hogy igaz-e, hogy minden olyan véges loop nilpotenciaosztálya legfeljebb 2, amelyben a belső permutációcsoport kommutatív. Megjegyezzük, hogy azt, hogy a fordított implikáció mindig fennáll, már Bruck (1946) igazolta.

Csörgő Piroska — a várakozásokkal ellentétben — negatív választ adott 2007-ben (Theorem 1.2.14) Kepka kérdésére:

Létezik olyan 128 elemű, 2-nél nagyobb nilpotenciaosztályú centrálisan nilpotens loop, amelynek belső permutációcsoportja Abel-féle.

A bizonyítás egy ellenpélda megadása, ahol a megfelelő tulajdonságok ellenőrzése „kézzel”, azaz számítógép segítségével nélkül történik. A konstrukció és a bizonyítás szinte teljes egészében véges csoportokról szól, ugyanis a centrális nilpotenciára, illetve a nilpotencia osztályára vonatkozó loopelméleti kérdés a szorzatcsoport és a belső permutációcsoport segítségével „lefordítható” csoportelméleti kérdéssé, a kapott eredmény pedig „visszafordítható” loopelméletivé. Az ellenpélda alapjául szolgáló csoport 2^{13} rendű.

Bár még csak 3 éve jelent meg, ez az eredmény komoly figyelmet keltett. Az ellenpélda egyrészt új lendületet adott további olyan elegendő feltételek kereséséhez, amelyek biztosítják, hogy a loop nilpotenciaosztálya 2 legyen. Másrészt az ellenpélda új kérdéseket vetett fel a kommutatív belső permutációcsoporttal

rendelkező és legalább 3 nilpotenciaosztályú loopokra vonatkozóan. A fejezet további részében a jelölt maga is talál olyan — részben korábbi eredményt általánosító — új elegendő feltételeket Abel-féle belső permutációcsoportú loopokra, amelyek biztosítják, hogy a loop nilpotenciaosztálya 2 legyen. Például ilyen feltétel, hogy a loop ún. LCC^1 -, illetve Buchsteiner-loop legyen.

A második fejezet a véges csoportok körében központi szerepet játszó feloldható csoportok bizonyos részosztályával foglalkozik, a szuperfeloldható csoportokkal. Ismert, hogy minden feloldható csoportoknak van olyan normállánca, amelynek tagjai normálosztók és faktorai kommutatívak. Másrészt véges feloldható csoport esetében mindig van olyan normállánc is, amelynek faktorai ciklikusak. Az azonban nem igaz általában egy véges feloldható csoportra, hogy lenne olyan normállánca, amelynek tagjai normálosztók és faktorai ciklikusak. A csoportot *szuperfeloldhatónak* nevezik, ha van ilyen normállánca is.

1970 óta az irodalomban számos olyan cikk jelent meg, amely elegendő, illetve szükséges feltételt adott véges csoport szuperfeloldhatóságára, illetve ezzel rokon más tulajdonságok fennállására. A disszertáció ezen fejezetének egyik fontos eredménye (Theorem 2.1.1; társszerző: M. Assad) — ez a jelölt legtöbbet idézett cikkének fő eredménye — olyan szükséges és elegendő feltétel, amelyből sok korábbi eredmény következik. A tétel ún. telített formációkra vonatkozik, ezért az egyszerűség kedvéért itt azt a speciális esetét fogalmazzuk meg (v.ö. Corollary 2.1.2; társszerző: M. Assad), amikor ez a formáció az összes véges szuperfeloldható csoportból áll:

Tetszőleges G véges csoport esetén ekvivalensek a következők:

- (1) G szuperfeloldható,
- (2) G -nek van olyan H feloldható normálosztója, amelyre a G/H faktorcsoport szuperfeloldható, és $F(H)$ -nak, azaz H Fitting-részcsoportjának², prírendű és negyedrendű részcsoportjai S -kvázinormálisak³ G -ben.

Továbbá Csörgő Piroska meghatározza azoknak a G véges csoportoknak a szerkezetét, amelyek rendelkeznek a (2)-beli tulajdonsággal a $H = G$ speciális választás mellett (Theorem 2.1.9).

A fejezet tartalmaz egy a fentihez hasonló olyan tételt is (v.ö. Theorem 2.1.22; társszerző: M. Herzog és megjegyzés a következő bekezdésben), ahol az S -kvázinormalitás szerepét az ún. $\mathcal{H}$ -tulajdonság veszi át. Megjegyezzük, hogy a $\mathcal{H}$ -részcsoportok alapvető tulajdonsága például, hogy ha szubnormálisak, akkor szükségképpen normálosztók is.

Ezen tételek nem „igazi” szükséges és elegendő feltételek a szuperfeloldhatóságra, „inkább csak” elegendőek, mert az $(1) \Rightarrow (2)$ implikáció triviális — a disszertáció is sok esetben (pl. Corollary 2.1.2 és Theorem 2.1.22) csak a nem-triviális implikációt fogalmazza meg. Továbbá a $H = G$ választással belőlük következő elegendő feltételek meglehetősen szűk osztályt adnak. A szerző a fejezet további részében „igazi” szükséges és elegendő feltételeket ad a szuperfeloldhatóságra. A legkönnyebben megfogalmazható ilyen tétel a következő:

¹Rövidítés: left conjugacy closed

²Fitting-részcsoport: a legbővebb nilpotens normálosztó

³Az S -kvázinormalitás a normálosztó-tulajdonság egy gyengítése

Tetszőleges G véges csoport esetén ekvivalensek a következők:

- (1) G szuperfeloldható,
- (2) $G' \leq F(G)$, és $F(G)$ előáll ciklikus, prímszámrendű, gyengén S -kvázinormális részcsoporthoz szorzataként.

Végül hasonló jellegű eredmények — szükséges és elegendő feltételek, bizonyos részosztályok strukturális leírásai — következnek a véges szuperfeloldható csoportok két részosztályára, a véges feloldható T -csoportokra és T^* -csoportokra. Egy csoportot T -csoportnak hívnak, ha minden szubnormális részcsoporthoz normálosztó, és T^* -csoportnak, ha minden szubnormális részcsoporthoz S -kvázinormális. Megjegyezzük, hogy a véges nilpotens csoportok T^* -csoportok, de általában nem T -csoportok.

A jelölt intenzíven kutatott területeken érte el tudományos eredményeit, melyeket számon tartanak a témájában dolgozó külföldi kutatók is. Loopelméleti ellenpéldája nagy nemzetközi visszhangot kapott, és új lökést adott a témakör kutatásának.

Mindezek alapján úgy vélem, hogy Csörgő Piroska itt ismertetett tudományos eredményei alapján érdemes az MTA doktora címre. Javaslom a disszertáció nyilvános védésének kitűzését, és Csörgő Piroska számára az MTA doktora cím odaítélését.

Ugyanakkor nem hallgathatom el azon véleményemet, hogy a disszertáció stílusa nem segítette az olvasást, pontosabban a mélyebb megértést. A disszertációnak van egy bevezetése, amely jól összefoglalja a fő célokat, de a fejezetek egy rövid bevezető után szinte kizárólag állítások és bizonyítások egymásutánjai. Sok helyen hiányoltam olyan mondatokat, bekezdéseket, amelyek

- megmondják, merre haladunk, „útközben” megállapítják, hol is tartunk, mikor és miért teszünk kitérőket, stb.;

amelyek, főleg a második fejezetben, ahol sok „kisebb” tétel van,

- motiválják az éppen tárgyalandó csoportosztály fontosságát, érdekességét, a megválaszolandó kérdéseket, stb.;
- elemzik a kapott tételek — főleg a hasonló struktúrájú, de más-más fajta feltételeket használó tételek, valamint az összehasonlítható osztályokra vonatkozó, hasonló struktúrájú tételek — egymáshoz való viszonyát.

Kis számban, de vannak a disszertációban zavaró következtetések és pontatlanságok, bár ha kitartóan továbbolvas az ember, akkor előbb-utóbb rájön, hogyan kell rendbe tenni.

KÉRDÉSEK

1. A Kepka-kérdésre adott ellenpéldának ismert-e a nilpotenciaosztálya?
2. Az ellenpélda megszületése után természetesen adódik a kérdés: lehet-e egy kommutatív belső permutációcsoportú loop nilpotenciaosztálya akármilyen nagy. Lehet-e már tudni ezzel kapcsolatban valamit?
3. Emlékeztetek rá, hogy minden T -csoport T^* -csoport is, és minden feloldható T^* -csoport szuperfeloldható is. Kapcsolódva az előző felsorolás

utolsó pontjához, szeretném, ha a jelölt elemezné a 2.2.4., 2.3.20. Tétel, valamint a 2.3.7. Következmény kapcsolatát:

- (i) Következik-e közvetlenül a 2.2.4. Tétel (a),(b) részéből a 2.3.7. Következmény? Ha nem, akkor lehetne-e úgy módosítani — megtartva az állítások „szerkezetét” és a használt fogalmak körét — ezt a két állítást, hogy a feltételekből „látszódjon” a leírt két osztály közötti tartalmazás?
- (ii) Ugyanezek a kérdések a 2.2.4. Tétel (a),(c) részének és a 2.3.20. Tételnek a vonatkozásában.
- (iii) Ugyanezek a kérdések a 2.3.20. Tételnek és a 2.3.7. Következménynek a vonatkozásában.

Szeged, 2010. szeptember 7.

B. Szendrei Mária