

Csörgő Piroska „Loops and Groups” című értekezésének bírálata

A loopok, azaz az egységelemes kvázicsoportok vizsgálata a latin négyzetek kérdéskörén keresztül egészen Eulerig nyúlik vissza. Komolyabb kutatása a XX. század első felében kezdődött főként Bruck munkásságával. E kutatásokat nagyban motiválta az a hit, hogy a főleg geometriai és kombinatorikai fogantatású problémák megoldásában új – a feladat természetéből adódó – algebrai struktúrák megalkotásával és azok vizsgálatával áttörés érhető el. A problémák egy része a klasszikus algebrai struktúráknál gyengébb struktúrákhoz vezetett (kvázicsoportok, ternér gyűrűk,...). A kezdeti lelkesedés alábbhagyott, miután a nehezebb problémák megoldásában e kutatási irány sem hozott átütő sikert. A téma iránti érdeklődés mindennek ellenére nem szűnt meg, sőt, újra és újra felerősítik a kapcsolódó témák (Steiner-hármasok, véges geometriák, latin négyzetek,...) felől érkező várakozások valamint a téma kutatásának belső fejlődése, de valamelyes leértékelődését mégis jelzi a *Mathematics Subject Classification* szerinti besorolása: a téma a „20 Group theory and generalizations” osztály „20N Other generalizations of groups” alosztályának „20N05 Loops, quasigroups” pontjába került egy hivatkozással a „05B Designs and configurations” alfejezetre.

A matematika más területein is a szerényebb korlátozó feltételeket kielégítő és ezért igen nagy egyedszámmal rendelkező struktúrákat vizsgáló kutató könnyen elkanyarodik az öncélú, partikuláris, maga által kreált kutatási irányokba, mivel az ilyenekből igen sok van, és célba érni is jó eséllyel könnyebben lehet. Csörgő Piroska nem ezt az utat járja. Két szempontból sem. Egyrészt az általa vizsgált kérdések, mások által felvetett, a struktúra jellemzésében központinak nevezhető problémákat vizsgálják, járnak körbe. Másrészt a csoportelmélet eszközeinek használata, a csoportelmélet kérdésfelvetéseivel analóg kérdések tanulmányozása, a hozzájuk való viszony elemzése egy hatásaiban erőteljesebb, gazdagabb matematikai világba helyezi kutatásait, nagyobb és mélyebb kutatói eszköztárat is biztosítva magának.

A dolgozat másik részének megítélésében egyszerűbb a helyzet: Csörgő Piroska egy klasszikus, nagy területen, a csoportelméletben kutatja világosan megfogalmazott kérdésekre a válaszokat a téma klasszikus eredményeit és eszközeit használva.

Ezután áttérek a dolgozat eredményeinek részletes értékelésére.

A disszertáció első, és egyik igen érdekes kérdése az Abel-féle belső permutációcsoport és a nilpotencia-osztály kapcsolatáról szól. Ez egy Bruck 1946-os dolgozatáig visszanyúló klasszikus probléma. Bruck bizonyította, hogy ha a loop nilpotencia-osztálya 2, akkor a belső permutációcsoport kommutatív. E problémakör kiindulópontja az, hogy Bruck tételének megfordítása igaz-e, azaz bővebben, hogy Abel-féle belső permutációcsoport esetén lehet-e a nilpotencia-osztály 2-nél nagyobb (csoportok esetén tudjuk, hogy nem), és ha igen, mennyi

lehet, és milyen loopok esetén. Hosszú ideig tartotta magát a feltételezés, hogy ilyen loopok nincsenek, míg Csörgő Piroska 2007-ben megjelent dolgozatában meg nem cáfolta a sejtést egy 128-elemű és 3 nilpotencia-osztályú loop megkonstruálásával (Theorem 1.2.14). Az azóta többek által Csörgő-típusú loopnak nevezett 3 vagy annál nagyobb nilpotencia-osztályú és Abel-féle belső permutációcsoporttal rendelkező loopok vizsgálatában Csörgő eredménye új vizsgálatokat indukált, hatására az utóbbi években több cikk született e témában. Ehhez a problémához kapcsolódik a dolgozat következő két fejezetének legtöbb eredménye is, amennyiben egyrészt azt vizsgálja, hogy milyen Abel-csoportok jelenhetnek meg valamely loop belső permutációcsoportjaként, illetve hogy milyen feltételek szükségesek és elégségesek ahhoz, hogy egy adott loop-osztály minden egyede 2 nilpotenciaosztályú legyen. Az egyik ilyen szép eredmény LCC-loopokra vonatkozik (Theorem 1.4.5)), és a nilpotenciaosztályra 2 felső korlátot ad, míg a dolgozat több eredménye szól olyan loopokról, amelyek a nucleus fellett Abel-csoportok, ezekre Csörgő több eredménye bizonyít 3-as felső korlátot (pl. Theorem 1.5.17). Végül a disszertáció első része egy valamelyest különálló témával zárul: ugyancsak Bruck egy klasszikus eredményéhez kapcsolódva a szerzőnek azokat az eredményeit foglalja össze, melyeket a loop szorzástáblájának feloldhatósága és a belső permutációcsoport rendjének prímtényezői alakja közti kapcsolat vizsgálatában ért el.

A disszertáció első – loopokról szóló – részében az eredmények nagy többsége a csoportelmélet klasszikus módszereit – elsősorban a transzverzálisok technikáját – használja, de a csoportelmélet fogalmai, nyelvezete magukban a tételek megfogalmazásában is megjelenik. A disszertáció második része három – a klasszikus véges csoportelmélet körébe eső – kérdéskört vizsgál, melyek több ponton is kapcsolódnak egymáshoz.

Mindezeket figyelembe véve valójában a disszertáció két – látszólag teljesen különálló – része közt sokkal több a kapcsolat, mint azt a mű szerkezete és kísérő szövege sugallja. Mind stílusukban, mind az alkalmazott módszerek jellegében, mind szemléletükben közelebb állnak egymáshoz, mint amennyire az a témák alapján várható.

A második rész elsőként véges csoportok minimális részcsoporthainak hatását vizsgálja a csoport struktúrájára. Az első fejezet azokat az eredményeket foglalja össze, melyek egy Buckley-től származó tétel kiterjesztéseinek, általánosításainak, élesítéseinek tekinthetők. E tétel szerint ha egy páratlan rendű csoport minden minimális részcsoporthja normálosztó, akkor a csoport szuperfeloldható. A szerző eredményei közt olyan változatok szerepelnek, melyekben a szuperfeloldható csoportok osztályát is tartalmazó telített formációk, a részcsoporthok normalitása helyett S -kvázinormalitása, a minimális részcsoporthok helyett a Fitting-részcsoporth minimális valamint 4-edrendű részcsoporthjai szerepelnek. E fejezet eredményei mintegy felvezetésül szolgálnak a következő fejezethez, melyben a szuperfeloldhatóságra találunk szép struktúratételeket. Ezek közül kiemelem a szuperfeloldható csoportok egy természetes faktorizációját megadó tételt és a szuperfeloldhatóságra adott ekvivalens feltételeket kimondó tételt (Theorem

2.2.1 és Theorem 2.2.4), de szép a csak Abel-féle részcsoporthal rendelkező szuperfeloldható csoportok jellemzésére adott eredmény is (Theorem 2.2.16). Végül az utolsó fejezet a feloldható T -csoportokra és T^* -csoportokra ad megint csak szép karakterizációs és struktúratételeket (ezek közül két tételt emelek ki: Theorem 2.3.4, Theorem 2.3.22).

A dolgozat felépítése logikus, az eredmények motivációinak, a téma fejlődésének bemutatása világos, a saját eredmények abban való elhelyezése korrekt, a mű megjelenése az elvárásokat teljesen kielégíti, engem egyedül a magyar nyelvű téziszfüzet tételeiben az „akkor és csak akkor” szisztematikusan rossz szórendben való megjelenése zavart.

Összefoglalva: A dolgozatot alkalmasnak tartom a nyilvános védésre, a benne összefoglalt eredményeket pedig elegendőnek tartom az MTA doktori cím megszerzéséhez.

Két általános, a loopok vizsgálatát tágabb környezetbe helyező kérdést szeretnék föltenni, az egyik az elmélet külső kapcsolatára, alkalmazásaira, a másik belső fejlődésére vonatkozik.

1. kérdés: Bár a loopelmélet messzire jutott a kiindulópontot jelentő problémáktól, ma vajon a kvázicsoporthalgebrai vizsgálatában milyen irányú kutatásokról, vagy milyen típusú eredményekről lehet várni az elmélet még eredményesebb használhatóságát pl. a kombinatorikai természetű kérdések megoldásában – ha ez egyáltalán reménytelinek látszik –, és saját kutatásai hogyan viszonyulnak ezekhez?

2. kérdés: A dolgozatban használt technikák és eredmények szorosan kapcsolódnak a csoportelmülethez, aminek alapja a loopok szerkezetében megjelenő csoportok fontossága. Melyek a loopelmélet azon fontosnak tekinthető alapkérdései, melyekről úgy tűnik, a támadások ellenére is ellenállnak a csoportelmélet felőli megközelítésnek? Más szóval: kérdésem arra vonatkozik, mik a csoportelméleti eszköztár korlátai?

Budapest, 2010-10-04

Wetl Ferenc