

Válasz Szendrei Máriának a
”Loops and Groups”
című doktori értekezésem bírálatára

Mindenek előtt nagyon megköszönöm Szendrei Mária alapos és körültekintő munkáját, amit a nagyon jó kérdései is bizonyítanak.

1. Kérdés:

A Kepka-kérdésre adott ellenpéldának ismert-e a nilpotenciaosztálya?

Válasz: Igen, a konstruált szorzáscsoportnak megfelelő loop nilpotenciaosztálya 3.

A ”connected” transzverzálisokban szereplő transzlációkkal való konjugálások mutatják, hogy a másodrendű centrummal lefaktorizálva az eredeti loop nucleusának a képe e faktorloop centrumába kerül. A nucleus szerinti faktorloop viszont már elemi Abel- 2^3 -rendű csoport.

2. Kérdés:

Az ellenpélda megszületése után természetesen adódik a kérdés: lehet-e egy kommutatív belső permutációcsoportú loop nilpotenciaosztálya akármilyen nagy? Lehet-e már tudni ezzel kapcsolatban valamit?

A válasz: 4 nilpotenciaosztályú loopot sem találtak még kommutatív belső permutációcsoporttal.

3. Kérdés:

Emlékeztetek rá, hogy minden T -csoport T^* -csoport is, és minden feloldható T^* -csoport szuperfeloldható is. Kapcsolódva az előző felsorolás utolsó pontjához, szeretném, ha a jelölt elemezné a 2.2.4., 2.3.20. Tételek, valamint a 2.3.7. Következmény kapcsolatát:

- (i) Következik-e közvetlenül a 2.2.4. Tétel (a), (b) részéből a 2.3.7. Következmény? Ha nem, akkor lehetne-e úgy módosítani – megtartva az állítások „szerkezetét” és a használt fogalmak körét – ezt a két állítást, hogy a feltételekből „látszódjon” a leírt két osztály közötti tartalmazás?
- (ii) Ugyanezek a kérdések a 2.2.4. Tétel (a) és (c) részének és a 2.3.20. Tételnek a vonatkozásában.
- (iii) Ugyanezek a kérdések a 2.3.20. Tételnek és a 2.3.7. Következménynek a vonatkozásában.

Először emlékeztetnék, hogy a bíráló mely állítások közötti összefüggések elemzését kéri, illetve az állítások módosítását várja.

2.3.7. Következmény: *Legyen G páratlan rendű feloldható csoport. G T -csoport akkor és csak akkor, ha G' Hall-részecssoport és G' minden prímszámúrendű részecssoportja $\mathcal{H}$ -részecssoport.*

2.3.20. Tétel: *G feloldható T^* -csoport akkor és csak akkor, ha $G = M \cdot N$, ahol N nilpotens Hall-részecssoport, M pedig olyan nilpotens Hall-féle normálosztó G -ben, hogy M minden prímszámúrendű részecssoportja pronormális G -ben, $(M \cap N = 1)$.*

Ez utóbbi a tétel megfogalmazásánál kimaradt, a bizonyításban viszont használjuk, de könnyen látható, hogy e feltétel nélkül is igaz marad az állítás.

2.2.4. Tétel: *Egy G csoportra a következő állítások ekvivalensek:*

- a) G szuperfeloldható.
- b) $G' \leq \text{Fit } G$ és $\text{Fit } G$ gyengén S -quasinormális ciklikus prímszámúrendű részecssoportok szorzata.
- c) G -ben létezik egy olyan N nilpotens normálosztó, hogy $G' \leq N$ és N gyengén S -quasinormális ciklikus prímszámúrendű részecssoportok szorzata.

Sajnos közvetlenül nem látszik a kapcsolat.

Először a 2.3.7. Következményben módosítjuk a szerkezeti leírást, úgy, hogy a 2.2.4. Tétel, illetve a 2.3.20. Tétel azonnal alkalmazható legyen egy páratlan rendű feloldható T -csoport szuperfeloldhatóságának, illetve T^* -csoportságának igazolására. A módosításhoz belátjuk a következő szerkezeti leírások ekvivalenciáját.

1. Tétel: *Legyen G páratlan rendű feloldható csoport. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- a) G T -csoport.
- b) G' Hall-részecssoport és G' minden prímszámúrendű részecssoportja $\mathcal{H}$ -részecssoport G -ben.
- c) G' nilpotens Hall-részecssoport és G' minden prímszámúrendű részecssoportja normálosztó G -ben.
- d) $G = G'N$, ahol N Abel-féle Hall-részecssoport, G' nilpotens Hall-féle olyan normálosztó, hogy G' minden prímszámúrendű részecssoportja pronormális G -ben, és $G' \cap N = 1$.
- e) $G' \leq \text{Fit } G$, G' Hall-részecssoport, és $\text{Fit } G$ minden prímszámúrendű részecssoportja normálosztó G -ben.

Bizonyítás: a) $\Leftrightarrow$ b) a 2.3.7. Következmény miatt.

c) $\Rightarrow$ b) nyilván igaz.

b) $\Rightarrow$ c) Gaschütz tétele [Theorem 2.3.3 a disszertációban] és a 2.3.4. Következmény miatt G' nilpotens Hall-részcsoporth. Innen, nyilván G' minden prímszámrendű részcsoporthja a szubnormalitás miatt normálosztó G -ben.

c) $\Rightarrow$ d). Alkalmazzuk a Schur–Zassenhaus-tételt, így létezik egy N Abel-féle Hall-részcsoporth a kívánt tulajdonságokkal.

d) $\Rightarrow$ c). G' prímszámrendű részcsoporthja szubnormális is, így a pronormalitásuk adja a normalitását.

e) $\Rightarrow$ c). $\text{Fit } G$ definíciója miatt igaz.

c) $\Rightarrow$ e). Mivel G' minden prímszámrendű részcsoporthja normálosztó G -ben, $G' \leq \text{Fit } G$ és G' Hall-részcsoporth, elegendő belátnunk, hogy ha Q q -csoporth, ahol $Q \leq \text{Fit } G$ és q olyan prím, amelyre q osztója $\text{Fit } G$ rendjének, de q nem osztója G' rendjének, akkor Q normálosztó G -ben. A feltételek miatt nyilván $Q \cap G' = 1$, így Q Abel-féle, és $\text{Fit } G$ nilpotenciájából $\text{Fit } G \leq N_G(Q)$ következik. Mivel G' Hall-féle normálosztó, a Schur–Zassenhaus-tétel miatt létezik Q -t tartalmazó L komplementum a G' kommutátor-részcsoporthhoz, vagyis $G = G'L$ és $G' \cap L = 1$. L kommutativitása adja $L \leq N_G(Q)$, így Q normálosztó G -ben. $\square$

Most módosítjuk a 2.3.7. Következményt, úgy, hogy közvetlenül látszódjon a kapcsolata a 2.2.4. Tétellel, és így a páratlan rendű feloldható T -csoporthokra azonnal igaz lesz a szuperfeloldhatóság. Ezzel választ adunk az (i) pontban megfogalmazott kérdésre.

2.3.7*. Következmény. *Legyen G páratlan rendű feloldható csoporth. G T -csoporth akkor és csak akkor, ha G' Hall-részcsoporth, $G' \leq \text{Fit } G$ és $\text{Fit } G$ minden prímszámrendű részcsoporthja normálosztó G -ben (ami esetünkben a szubnormalitás miatt ekvivalens az $\mathcal{H}$ -részcsoporthsággal).*

Bizonyítás: Lásd az 1. Tételben az a) és e) állítások ekvivalenciáját. $\square$

2. Tétel: *Legyen G páratlan rendű feloldható T -csoporth, ekkor G szuperfeloldható.*

Bizonyítás: G -re alkalmazható a 2.3.7* Következmény. Nyilván $\text{Fit } G$ minden prímszámrendű részcsoporthja a normálosztóság miatt gyengén S -quasinormális is. G rendelkezik a 2.2.4. Tétel b) részében leírt tulajdonságokkal. Innen e tétel szerint G szuperfeloldhatósága következik. $\square$

Most megadjuk a 2.3.7. Következmény egy másik módosítását, amiből látszódnia fog a 2.3.20. Tétellel való kapcsolata, vagyis hogy egy páratlan rendű T -csoporth T^* -csoporth is. Így választ adunk az (iii) pontban megfogalmazott kérdésre.

2.3.7. Következmény:** *Legyen G páratlan rendű feloldható csoporth. G T -csoporth akkor és csak akkor, ha $G = G' \cdot N$, ahol N Abel-féle Hall-részcsoporth, $G' \cap N = 1$, G' nilpotens Hall-féle normálosztó és G' minden prímszámrendű részcsoporthja pronormális G -ben (a pronormalitás a szubnormalitás miatt ekvivalens azzal, hogy normálosztó, illetve $\mathcal{H}$ -részcsoporth).*

Bizonyítás: Lásd az 1. Tételben az a) és d) állítások ekvivalenciáját. $\square$

3. Tétel: *Legyen G páratlan rendű feloldható T -csoporth, ekkor G T^* -csoporth is.*

Bizonyítás: A 2.3.7** Következmény szerint G szerkezete megfelel a 2.3.20. Tételben leírt szerkezetnek $M = G'$ -vel, így G e tétel szerint T^* -csoporth is. $\square$

Most módosítjuk a 2.3.20. Tételt, vagyis a feloldható T^* -csoportok egy másik jellemzését adjuk, bizonyítva a két szerkezeti leírás ekvivalenciáját. Ebből az új szerkezetből majdnem közvetlenül látszódik a kapcsolat a 2.2.4. Tétellel, így szinte azonnal igaz lesz, hogy egy feloldható T^* -csoport szuperfeloldható. Ezzel választ adunk az (ii) pontban megfogalmazott kérdésre.

2.3.20* Tétel: *Egy G csoportra a következő állítások ekvivalensek:*

- a) G feloldható T^* -csoport.
- b) $G = M \cdot N$, ahol N nilpotens Hall-részecsoprt, M olyan nilpotens Hall-féle normálosztó G -ben, hogy M minden prímszámrendű részecsoprtja pronormális G -ben ($M \cap N = 1$).
- c) $G' \leq \text{Fit } G$, és ha $P \in \text{Syl}_p(\text{Fit } G)$ tetszőleges P -Sylow-részecsoprt $\text{Fit } G$ -ben, akkor P rendelkezik a következő tulajdonságok valamelyikével:
 - i) G tetszőleges q -Sylow-részecsoprtja, ahol $q \neq p$, centralizálja P -t.
 - ii) P minden részecsoprtja pronormális G -ben, és ekkor $P \in \text{Syl}_p(G)$ is.

Bizonyítás: Nyilván a) $\Leftrightarrow$ b) a 2.3.20. Tétel szerint. Igazán lényeges számunkra a b) és c)-ben a megadott szerkezeti leírások ekvivalenciája.

b) $\Rightarrow$ c). Legyen $M = \prod_{i=1}^k P_i$, ahol $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(M)$ Mivel M Hall-féle normálosztója G -nek, $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$ is következik minden $1 \leq i \leq k$ esetén. Tudjuk, hogy P_i minden részecsoprtja szubnormális is G -ben, a pronormalitásuk adja, hogy mindegyik részecsoprt normálosztó is G -ben. Legyen $a \in N$, nyilván $(o(a), p_i) = 1$ minden $1 \leq i \leq k$ esetén. Alkalmazva a disszertációban szereplő Lemma 2.3.24-et, adódik, hogy $a \in C_G(P_i)$ vagy az a elem fixpontmentesen hat a konjugálással P_i -n. Legyen $A_i = N \cap C_G(P_i)$. Az $N \leq N_G(P_i)$ összefüggés adja, hogy $A_i \leq N$. A fentiek miatt N/A_i fixpontmentesen hat a konjugálással P_i -n. Mivel P_i minden részecsoprtja normálosztó G -ben, N/A_i ciklikus lesz, vagyis N kommutátor részecsoprtja $N' \leq A_i$ minden $1 \leq i \leq k$ -ra, amiből $N' \leq \bigcap_{i=1}^k A_i$ igaz. Az A_i megválasztásából következik, hogy $A = \bigcap_{i=1}^k A_i \leq C_G(M)$ és A nilpotens normálosztó G -ben. Felhasználva, hogy M nilpotens Hall-féle normálosztó G -ben, kapjuk, hogy $W = MA$ is nilpotens normálosztó G -ben, vagyis $W \leq \text{Fit } G$.

A $G = M \cdot N$ összefüggésből $N' \leq A$ azt adja, hogy G/W Abel-féle, így $G' \leq W \leq \text{Fit } G$ igaz.

Legyen $P \in \text{Syl}_p(\text{Fit } G)$. Nyilván $P \leq G$.

Tudjuk, $G = M \cdot N$.

1) Tegyük fel $P \not\leq M$.

Ekkor P normalitása miatt $P \leq N$.

Legyen $Q \in \text{Syl}_q(G)$ tetszőleges q -Sylow-részecsoprt, ahol $q \neq p$.

Ha $Q \leq M$, az $M \leq \text{Fit } G$ összefüggésből adódik, hogy $Q \leq C_G(P)$.

Ha $Q \leq N$, akkor N nilpotenciájából következik, hogy $Q \leq C_G(P)$.

Marad az az eset, amikor $Q^c \leq N$ valamely $c \in G$ esetén. Ekkor az előzőek szerint $Q^c \leq C_G(P)$, de a $P \trianglelefteq G$ miatt $Q \leq C_G(P)$ adódik most is.

Tehát P teljesíti i)-t.

2) Tegyük fel, hogy $P \leq M$.

Ekkor állításunk feltételei biztosítják, hogy P minden részcsoportja pronormális G -ben és $P \in \text{Syl}_p(G)$. Tehát P teljesíti ii)-t.

c) $\Rightarrow$ b). Jelölje $M = \prod_{i=1}^t R_i$, ahol $R_i \in \text{Syl}_{r_i}(\text{Fit } G)$ olyan, hogy teljesíti ii)-t, vagyis minden részcsoportja pronormális G -ben és $R_i \in \text{Syl}_{r_i}(G)$ is. Így M nilpotens Hall-féle normálosztója G -nek és minden prímszámrendű részcsoportja pronormális G -ben.

A Schur–Zassenhaus-tétel miatt létezik olyan Hall-féle N részcsoport G -ben, hogy $G = M \cdot N$ és $M \cap N = 1$.

Állításunk teljes bizonyításához elegendő belátni N nilpotenciáját.

Legyen $T^* \in \text{Syl}_t(N)$, megmutatjuk, hogy T^* normálosztó N -ben. Jelölje $H = \text{Fit } G \cap N$. M és N megválasztása miatt $\text{Fit } G = M \times H$. Legyen $T = T^* \cap H$, nyilván $H = T \times H_0$, ahol H_0 nilpotens Hall-féle részcsoport H -ban. Mivel $H_0 \leq \text{Fit } G$, de $H_0 \not\leq M$, H_0 Sylow-részcsoportjai teljesítik i)-t, így $T^* \leq C_G(H_0)$. Innen $HT^* = H_0 \times T^*$ nilpotenciája következik. Láttuk, hogy $G/\text{Fit } G$ Abel-csoport, amiből adódik, hogy $N/\text{Fit } G \cap N = N/H$, szintén Abel-féle, így $HT^* = H_0 \times T^*$ normálosztó N -ben. HT^* nilpotenciája implikálja, hogy T^* normálosztó N -ben. (A bizonyítás nyilván akkor is igaz, ha $T = T^* \cap H = 1$). $\square$

Megmutatjuk, hogy ha egy G csoport rendelkezik a 2.3.20* Tétel c) részében leírt tulajdonságokkal, akkor eleget tesz a 2.2.4. Tétel b) részében levő szerkezeti leírásnak.

4. Tétel: *Legyen G csoport. Tegyük fel, hogy $G' \leq \text{Fit } G$, és ha P tetszőleges p -Sylow-részcsoport $\text{Fit } G$ -ben, akkor P rendelkezik a következő tulajdonságok valamelyikével:*

i) G tetszőleges q -Sylow-részcsoportja, ahol $q \neq p$, centralizálja P -t.

ii) P minden részcsoportja pronormális G -ben, és $P \in \text{Syl}_p(G)$ is.

Ekkor $G' \leq \text{Fit } G$ és $\text{Fit } G$ gyengén S -quasinormális, ciklikus prímszámrendű részcsoportok szorzata.

Bizonyítás: 1) Tegyük fel, hogy P -re igaz i), akkor P minden részcsoportja nyilván S -quasinormális G -ben, így P S -quasinormális ciklikus részcsoportok szorzata.

2) Tegyük fel, hogy P teljesíti ii)-t, ekkor P tetszőleges részcsoportja szubnormális is, a pronormalitásukból következik, hogy P minden részcsoportja normálosztó is G -ben, amiből minden részcsoport gyengén S -quasinormalitása most is következik.

Tehát $\text{Fit } G$ -re igaz tételünk állítása. $\square$

Kombinálva a 4. Tételt a 2.3.20* és a 2.2.4 Tételekkel, végül kapjuk:

5. Tétel: *Legyen G feloldható T^* -csoport. Ekkor G szuperfeloldható.*

Csörgő Piroska