

Válasz Totik Vilmos bírálataira

Révész Szilárd György*

Köszönöm Totik Vilmosnak a disszertációt mélységében is nagyon alaposan feldolgozó bírálátát, azon belül is a második fejezetben értelmezett kétféle sűrűség-fogalom elválását megmutató szép ellenpéldáját, melyről még szó lesz a részletes válaszban.

Ami az első részt illeti, itt a Totik Vilmos által kiemelt fő eredmény a síkbeli konvex K tartományokra általánosan igazolt $c_K n$ nagyságrendű oszcilláció. Ebben az eredményben a fellépő konstansnak a K tartomány geometriai paramétereitől való függését sikerült ugyan tisztázni – amennyiben ez a minimális szélesség és az átmérő négyzetének hányadosával arányos – de egy abszolút konstans hézag még maradt a felső és alsó becslések között. Így több ismert tételt, pl. Erőd János ellipszisekre vonatkozó eredményét vagy magát az eredeti Turán féle tételt a körlapra, ez az általános tétel csak egy abszolút konstans szorzó veszteséggel ad vissza. Ez indokolta a további vizsgálatokat, amelyek a (lényegében) sima határú konvex tartományok esetén a határgörbe görbületével számolnak. Itt többlet geometriát bevetve végül megkapjuk a konstansok egy olyan leírását is, amely ebben az esetben már pontosan visszadja az összes korábban ismert sima határú speciális esetet. Természetesen az ízlés kérdése is, hogy ki melyik vizsgálatot tartja fontosabbnak, de a kérdéskör tisztázásához úgy éreztem hozzá tartozik olyan eredmények kidolgozása is, amelyek precízen is visszaadják az ismert eseteket, illetve pontos választ adnak olyan, egyesek által valóban felvetett kérdésekre is, mint pl. az ún. L^p -egységsgömbök és ellipszisek esetén fellépő oszcilláció.

A második rész témáját azért nevezem Turán típusú problémának, mert ez így terjedt el az irodalomban. A fejezet egyik mondanivalója éppen az, hogy alaposabb irodalmi kutakodás eredményeként megállapíthatóak a kérdéskör régebbre visszanyúló előzményei, de a téma kiterjedt irodalmában az utóbbi időben főleg oroszok által művelt terület kutatói – s így éveken át én magam sem – tudtak, tudtunk erről. Siegel dolgozata pl. német nyelven jelent meg és a Minkowski féle rácsponttételről szól, a minket érdeklő extrémális problémát csak mintegy "mellékesen" vizsgálja meg benne, így nem csoda, hogy ezt az előzményt eddig senki nem találta meg. De én találtam meg a "pontokénti Turán probléma" előzményét jelentő Boas-Kac cikket is és Kolountzakissal közös eredményeink világítottak rá arra is, hogy az évszázados Carathéodory-Fejér extrémális problémának is közvetlen köze van a manapság "pontokénti Turán probléma" néven vizsgált kérdéshez.

A végül igen kiterjedtnek mutató irodalom feldolgozása, saját Kolountzakissal közös eredményeim bemutatása, majd a lokálisan kompakt Abel csoportokra történő általánosítás és ezen belül az aszimptotikus egyenletes felső sűrűség fogalmának kiterjesztése és a fogalom használhatóságának illusztrálására felsorolt számelméleti jellegű alkalmazások valóban terjedelmessé és nehezen áttekinthetővé teszik a fejezetet, de ezt a téma kiterjedt mivolta, irodalma és elágazásai teszik szükségessé. Ugyanakkor ebben a fejezetben valóban nem beszélhetünk a téma kimerítéséről – a pontokénti Turán probléma esetét leszámítva, amelyben a Carathéodory-Fejér féle extrémális problémára való teljesen általános visszavezetés, ekvivalencia és egy korábbi dualitási eredményem ténylegesen tisztáz szinte mindent – de pl. a mai napig nem tudjuk, sőt azt hiszem nagyon messze vagyunk még tőle, hogy akár $\mathbb{R}^d$ -ben vannak-e nem Sztecskin-Turán típusú halmazok, avagy minden konvex $K \subseteq \mathbb{R}^d$ testre $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^d}(K) = |K|/2^d$?

*Extremal problems for polynomials and positive definite functions and polynomials című értekezés, benyújtva az MTA doktora tudományos címért, Budapest, 2009. április

A kompakt részhalmaz jelölésére használt $\Subset$ illetve $\subset\subset$ jelöléseket be kellett volna vezetnem és egységesítenem kellett volna, ennek elmulasztása valóban megnehezítette az olvasást, ezért mindhárom bírálótól és minden olvasótól elnézést kérek.

Totik Vilmosnak igaza van, (2.19) pozitivitása minden $-\mathbf{0}$ -t a belsejében tartalmazó $-K$ testre, azaz korlátos, kompakt, kövér (int K lezárta maga K) halmazra $-$ ekvivalens. Én itt megelégedtem a konvex halmazokra alapuló verzióval, más testekkel nem akartam foglalkozni, de ettől függetlenül a megjegyzés így pontos.

Totik Vilmos példája arra, hogy a kétféle $-$ kompakt, illetve véges halmazokkal felírt $-$ sűrűség-fogalom a 2.3.5. és 2.3.8. Definíciókban nem ekvivalens $\mathbb{R}^d$ -ben, valójában egy szép és teljes tisztázását adja annak a kérdésnek, hogy a két definíció mikor válik el? Amennyiben a lokálisan kompakt Abel csoportunk diszkrét, úgy a kompakt halmazok pontosan ugyanazok, mint a véges halmazok, és ekkor a két definíció nyilvánvalóan egybeesik. Ugyanakkor minden más esetben a két definíció szétválik, és ezt Totik példája meg is mutatja. Ezt tulajdonképpen fejben át lehet látni, de a dokumentálás kedvéért mégiscsak leírom részletesen,

Állítás [Totik] *Ha G egy nem-diszkrét lokálisan kompakt Abel csoport, akkor van olyan ν (valósűrűségi) mérték, amelyre $\overline{\Delta}(\nu, \mu) > \overline{D}(\nu, \mu)$. Más szóval, a kétféle sűrűség-fogalomra $\overline{\Delta}(\cdot, \mu) = \overline{D}(\cdot, \mu)$ pontosan akkor, ha G diszkrét.*

Bizonyítás. A bizonyítást azzal a közismert lépéssel kezdjük, hogy tetszőleges $\delta > 0$ -hoz keresünk egy olyan nyílt halmazt, aminek δ -nál kisebb a Haar mértéke (ami nyilván lehetetlen, ha G diszkrét).

Vegyük 0 egy U környezetét, amelynek kompakt a lezárása (és így persze véges a Haar mértéke is, $\mu(U) < \infty$). Legyen $U_0 := U$. Ebből kiindulva újabb U_k környezeteket konstruálunk, induktíve minden $k \in \mathbb{N}$ -re. Mivel G nem diszkrét, bármelyik megadott k -ra az U_k környezetben kell lennie a 0 -n kívül is még legalább egy $0 \neq x_k \in U_k$ pontnak. Mivel az összeadás folytonos $G \times G \rightarrow G$ művelet, $0 + x_k = x_k \in U_k$, és U_k nyílt, van olyan V_k nyílt környezete 0 -nak, amelyre $V_k \times (V_k + x_k)$ az összeadás során U_k -ba képeződik. Mivel G Hausdorff, 0 -nak és x_k -nak olyan nyílt környezetei is vannak, amelyekre W_k és W'_k diszjunktak. Válasszuk most $U_{k+1} := V_k \cap W_k \cap U_k \cap (W'_k - x_k) \cap (U_k - x_k)$, ami még mindig egy nyílt környezete 0 -nak.

Ekkor $U_{k+1} \cap (U_{k+1} + x_k) = \emptyset$ míg $U_{k+1}, U_{k+1} + x_k \subset U_k$. Tehát U_{k+1} egy nyílt környezete 0 -nak és $U_{k+1} + x_k$ x_k -nak az U_k halmazon belül, s mivel Haar mértékük egyenlő, $\mu(U_{k+1}) \leq \mu(U_k)/2$. Azaz tetszőlegesen kis Haar-mértékű nyílt környezet előírható: ha $\delta > 0$, van 0 -nak olyan U nyílt, kompakt lezárású környezete, hogy $0 < \mu(U) < \delta$. (A Haar mérték külső regularitásából így következik az is, hogy $\mu(\{0\}) = 0$ az egypontú kompakt $\{0\}$ halmazra, amiből persze minden véges F halmazra is $\mu(F) = 0$.)

Vegyük most ν -nek a δ_0 Dirac mértéket, amely a G lokálisan kompakt, nem diszkrét Abel csoport 0 elemére van koncentrálna. Először számoljuk ki a 2.3.5. Definíció adta sűrűséget! Legyen $C \Subset G$ pozitív Haar-mértékű; ekkor $\sup_{V \in \mathcal{B}_0} \nu(V)/\mu(V + C) \leq 1/\mu(C)$ és ez el is éretik ha pl. $V := \{0\} \in \mathcal{B}_0$. Nyilván minél nagyobb $\mu(C)$, annál kisebb ez a supremum, ezért infimumot véve C -re, az adódik, hogy $\overline{D}(\nu, \mu) = 1$ ha a G csoport kompakt, (de nem diszkrét persze), és így Haar-mértéke úgy van normalizálva, hogy $\mu(G) = 1$, míg $\overline{D}(\nu, \mu) = 0$ ha G nem kompakt (és így van $C \Subset G$ tetszőlegesen nagy Haar-mértékkel).

A 2.3.8. Definíció szerinti sűrűség kiszámolásához $C \Subset G$ helyében véges $F \subset G$ halmazokat kell tekintsünk. Ekkor $\overline{\Delta}(\nu, \mu) = \inf_{F \subset G, \#F < \infty} 1/\mu(F)$, ami $1/0 = \infty$ ha G nem diszkrét, és így tetszőleges véges F halmaz Haar mértéke zéró. Ha itt kizárjuk a 0 -val való osztást, akkor is ugyanez lesz a végeredmény, mert $\sup_{V \in \mathcal{B}_0} 0$ egy olyan V környezetét vehetjük, amelyre $0 < \mu(V) < \delta$, ezáltal pedig $\nu(V)/\mu(V + F) \geq 1/(\#F\delta)$, azaz $\sup_{V \in \mathcal{B}_0} \nu(V)/\mu(V + F) \geq \sup_{\delta > 0} 1/(\#F\delta) = \infty$ minden F véges halmazra, és ezen már az $\inf_F$ sem segít. Ezért a $\overline{\Delta}(\nu, \mu) > \overline{D}(\nu, \mu)$ egyenlőtlenség mindig fennáll, ha G nem diszkrét. $\square$

Megjegyzem, ez a Totik-féle észrevétel és gondolatmenet jól mutatja, hogy az amúgy elég jól bevált heurisztika, miszerint kis V választása esetén $\mu(C + V)$ relatíve túl nagy lesz, és így ez a "váratlan" összeggel való leosztás majd garantálja, hogy a definiáló sup-ban tényleg nagy V halmazokat vegyünk, hol bukik meg a véges halmazos (t.i. véges tartójú mértékes) esetben.

Rudin könyvében van egy lemma, miszerint tetszőleges kompakt $C \subseteq G$ esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett van olyan ("nagy") V Borel halmaz, amelyre $\mu(C + V) < (1 + \varepsilon)\mu(V)$. (Megjegyzem, Ruzsa Imre adott egy szellemes bizonyítást rá, hogy V nyílnak is vehető, mi több, a bizonyításnak Rudin hangsúlyozott véleményével szemben mégsem kell használnia a lokálisan kompakt Abel-csoportok struktúratételét.)

Mármost én úgy konstruáltam a 2.3.5. Definícióban szereplő sűrűség-fogalmat, hogy arra gondoltam: ha V nagy, ebben a Rudin-féle értelemben, akkor a nevezőben $\mu(V)$ helyett $\mu(C + V)$ -vel osztva kb. ugyanahhoz a hányadoshoz jutunk, de ha V kicsi, akkor emiatt a leosztás miatt a hányados is kicsi lesz (nagy C -re, amire, ugye, infimum van véve, tehát tipikusan lehetőleg jó nagy C -kre kell gondoljunk). Így tehát épp ez a furcsa nevező helyettesítené azt a határátmenetet, amiben klasszikusan pl. az egyre nagyobb $V = rK$ dilatációkat tekintettük. Végül a 2.3.8. Definícióban azt fogalmaztam meg, hogy hasonló heurisztika alapján ugyanezt a jelenséget várnám véges F halmazokkal is.

Totik példája arra mutat rá, hogy hacsak a csoport nem diszkrét, akkor itt a V -ben vett szuprénum tovább már nem a "nagy" V -kre fog fellépni, hanem épp ellenkezőleg, a nagyon kicsi V -k és a nullmértékű F -ek összeadása is még kicsi marad, míg szinguláris ν mérték mellett $\nu(V)$ ettől még lehet jó nagy. Azaz ekkor a hányados definíció "elszáll", végtelen lesz, *éppen a kis* (és nem a nagy) V -ken. (Ez a meglepő "anomália" okozta, hogy a saját heuristikámtól vezetve én magam vak maradtam erre a példára.)

Ezen valószínűleg lehetne segíteni további extra feltevésekkel, tehát a definícióban valamiképp garantálni, hogy $\mu(V)$ legyen nagy, tartson végtelenhez stb., vagy meg lehetne vizsgálni a sűrűségnek Haar-mérhető A halmazokra vett olyan megszorítását, amelyekre akkor $\nu := \mu|_A$ az A nyoma, de az egész kérdéskör – az egyenletes aszimptotikus felső sűrűség fogalma kiterjesztései, ezek kapcsolata mértékekkel, középértékekkel (v.ö. miért is elterjedt a "Banach sűrűség" elnevezés), függvényekkel, felső- és alsó integrálokkal stb. – tulajdonképpen egy nagyobb lélegzetű tanulmányt kíván.

A bíráló felveti, hogy a ν mérték $\mathcal{S}$ szigma-algebrájától meg lehetne szabadulni a definícióban. Igen, de mivel definíció szerint egy ν mérték csak a saját mérhető halmazaiából álló szigma-algebrán van értelmezve, ebben az esetben a ν -höz tartozó $\overline{\nu}$ külső mértéket kellene venni, és így persze $\mathcal{B}_0 V$ halmazain már kiértékelhetnénk $\overline{\nu}(V)$ értékét. Ez valóban jobb bizonyos szempontból, hiszen külső mérték minden ν -höz létezik és minden halmazra van értéke, így tehát legalább a halmazokkal nem kell nagyon vacakolni. De azt a tartalmi problémát, hogy extrém mértékekre (pl. ha $\nu \mathcal{S}$ szigma-algebrája csak kételemű) az adódó külső mérték is elég patológus lesz, és az adódó sűrűség-érték ugyanúgy, azt azért ez sem oldja meg. Ezért én ezt a felvetést inkább esztétikai vagy technikai módosításnak érzem, ami a lényegen nem változtat.

Az apróbb elírásokra, megjegyzésekre válaszul:

F_δ definíciójában így a max operátor törlendő, avagy persze írható volna $\max\{(1 - \|x\|/\delta), 0\}$ – itt ez a két megfogalmazás keveredett össze zavaróan.

Az $A(\widehat{G})$ tér a $\widehat{G}$ duális Abel-csoporton értelmezett abszolút konvergens Fourier-előállítású függvények tere, azaz azon függvényeké, melyeknek (inverz) Fourier-transzformáltja $L^1(G)$ -beli.

Az $\widehat{f}(\cdot - \gamma)$ jelölés a változók kiírása nélküli függvény-jelölés konvencióját követi. A változót kiírva ez $\widehat{f}(\lambda - \gamma)$ lenne, a $\lambda \in \widehat{G}$ változóban, azaz a formula azt fejezi ki, hogy a γf szorzat Fourier-transzformáltja az f függvény Fourier-transzformáltjának a γ karakterrel való eltolása lesz. Azért

választottam az absztrakt formát, mert a baloldalon sincsenek kiírva a változók, de persze írható $\widehat{\gamma f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda - \gamma)$.

A 2.3.6. Tételben csak az $\mathbb{R}^d$ teret tekintjük, a G szerepeltetése valóban elírás, azaz $G = \mathbb{R}^d$.

A 2.3.23. Lemma bizonyításában S_j helyesen ν_j , és persze ρ, ρ_j a megfelelő sűrűségek a ν_0 illetve ν_j mértékekre.

Igen, az irodalomban mind a Λ , mind az $E_\Lambda := \{\exp(2\pi i \langle \lambda x \rangle) \mid (x \in \mathbb{R}^d)\}$ halmazokat nevezik spektrumnak, ami logikailag valóban helytelen, de szerencsére azért nem nagyon zavaró.

Proposition 2.4.9. bizonyításában $U \cap (\Lambda + H) = \cup_{\lambda \in L} (\lambda + H)$ valóban nem igaz általában, csak $U \cap (\Lambda + H) = \cup_{\lambda \in L} ((\lambda + H) \cap U) \subset \cup_{\lambda \in L} (\lambda + H)$, ami szerencsére elegendő is a mértékekre vonatkozóan két sorral alább következő egyenlőtlenséghez.

Igen, a 2.7.2. Tétel bizonyításában $\Phi := \chi_C * \chi_{-C}$, amint az a továbbiakból is kiderül, a $+$ jel a $*$ helyett sajtóhiba.

A bírálónak igaza van, a 3.2. szakaszban található bizonyítás nem tér ki a tetszőleges $a \in \mathbb{T}$ pontbeli esetre, csak a 0 pontról beszél. Amennyiben ugyanezt az eredményt egy tetszőleges a pontra szeretnénk megkapni, a bizonyítást úgy kell indítani, hogy a 0 körüli E intervallumot eltoljuk, azaz az $a + E$ halmazt tekintjük, és erre illesztjük a háromszögfüggvényt – tehát a $\Delta(x - a)$ függvényt tekintjük $\Delta(x)$ helyett. Ekkor a 114. oldal utolsó formulájában és a 115. oldal harmadik sorában szereplő kiemelt formulában $\widehat{\Delta}(m)$ helyett $\widehat{\Delta}(m)e^{-2\pi i m a}$ fog ugyan szerepelni, de az azt követő Cauchy-Schwartz egyenlőtlenségtől kezdve már minden változatlanul érvényes marad.

Igen, (3.28)-ban $\sup_{\mathcal{P}_q}$ a helyes.

Igen, Remark 3.8.3. persze csak $F'(+0) = 0$ mellett állítható.

Lemma 3.9.2. bizonyításában $2q$ -val alkalmazzuk P -re a 3.9.1 Lemmát, majd a (3.69) és (3.70)-beli jobboldalon de $2q$ -val fellépő összegeket szétvágjuk a páros és páratlan k szerint haladó részekre. A páros k -ra haladó összegekből (3.74) alkalmazásával adódnak a (3.68) értelmében felírt $K\Sigma_q^*(|P|^p)$ típusú becslések, a páratlan k -kon haladó összegek pedig eleve pont ilyen Σ_q^* alakúak.

Az f^* jelölés a 159. alján van elmagyarázva, és a megadott $f \in H^s(\mathbb{T})$ Hardy-térbe tartozó f függvény (belső) pontonkénti határfüggvényét jelenti, ami majdnem minden pontra létezik.

Budapest, 2011. január 17.

Révész Szilárd György