

Válasz Kós Géza bírálatára

Révész Szilárd György*

Köszönöm Kós Géza nagyon alapos, a dolgozat egészét és részleteit is nagy figyelemmel olvasó-vizsgáló értékelését, és természetesen pozitív végső következtetését is. Ugyancsak köszönöm, hogy kérdéseivel néhány további részlet jobb megvilágítását segítette elő. Mivel a kérdések, felvetések pontokba vannak szedve, alább ezekre a pontokra hivatkozom.

1.1. A Blaschke-féle guruló kör tételek általánosításának három szintje kerül szóba. Az eredeti Blaschke tételek a kor szokásos geometriai vizsgálatainak kontextusában, C^2 osztályú határgörbékre születtek, és így a görbület létezése (sőt ennek folytonossága) eleve adott volt.

A dolgozatban hivatkozom Strantzen egy sokkal modernebb, 1989-es tételére, amely a *köréírt* Blaschke tétel esetében odáig gyengíti a feltételeket, hogy a határgörbe majdnem minden pontjában kell a görbületnek $\kappa \geq \kappa_0 > 0$ értéket elérnie. Annyi teljes általánosságban világos, hogy konvex halmaz határgörbéjére a görbület majdnem minden pontban létezik, de persze nem kell elhatárolva legyen 0-tól, és ha pl. egy szakasz helyezkedik el a határon, vagy akár csak egyetlen pontban 0-vá válik a görbület, akkor nem is írható köré semmilyen kör. Így Strantzen tétele nagyon is éles. Felhívom a figyelmet arra is, hogy *beírt* Blaschke tétel nem fogalmazható meg így, hiszen akár csak egyetlen pontbeli csúcs *mindenféle kör beírást lehetetlenné tesz*: ott tehát nem gyengíthető a minden pontbeli feltevés.

A harmadik általánosítási szint az általam talált *diszkrét* Blaschke tételek. Itt a feltételeket odáig gyengítjük, hogy a lokálisan infinitezimális *görbület* fogalom helyett csak az érintő (vagy normális) irány egy adott szakaszon történő megváltozását, mondjuk τ (ívhossz vagy húrhossz) változás esetén fellépő minimális vagy maximális elfordulását tekintjük. Ez a két mennyiség minden konvex halmazra és minden $\tau > 0$ előírt értékre létezik, és a diszkrét Blaschke tételek ereje éppen abban áll, hogy ily módon *minden konvex Jordan görbére* kapunk köréírt alakzatokat, és szinte mindig beírt alakzatokat is. Azonban a fentiekből nyilvánvalóan *ezek az alakzatok nem lehetnek körök!* Ha a normálvektor szögelfordulása a határon történő τ elmozdulás esetén legalább ill. legfeljebb φ és mondjuk $\varphi = \pi/2n$, akkor a konvex halmazunk nyugodtan lehet egy τ oldalhosszú szabályos $4n$ -szög (amelybe ill. amely köré egyes pontokban semmilyen kör nem írható!): a diszkrét tételek viszont azt fogalmazzák meg, hogy a szabályos $4n$ -szög kis módosításával előálló "hizlalt" illetve "csonkolt" sokszögek már köré- illetve beírhatóak.

Ezek a tételek minden korábbinál erősebbek, az összes verziót egyszerű határátmenettel megkapjuk belőlük. A Kós Géza által felvetett alsó- ill. felső-görbületes verziókat, melyek az általánosság Blaschke és Strantzen közötti fokán mozognak, szintűgy. Az én számomra elegendő volt Strantzen tétele, így nem foglalkoztam annak geometriai kérdéseivel, hogy azon felül még milyen megfogalmazásokban kaphatóak különböző Blaschke-tétel verziók ebből a megközelítésből, de magukat a diszkrét Blaschke tételeket találtam annyira érdekesnek, hogy leírom az értekezésben. Valójában ezeket már tíz évvel ezelőtt kezdtem sejteni egy egészen más analitikus, approximációelméleti probléma kapcsán, de akkor az a kutatásom megszakadt, és csak öt évvel később, amikor az Erőd tételeken gondolkodtam, jutottam oda, hogy tisztázzam magamban a korábbi homályos gondolataimat.

Annak lehetőségét, hogy Blaschke eredeti bizonyításának átvitelével kapjunk ilyen általánosabb tételeket, nem vizsgáltam, de Strantzen bizonyítását (ami egy Brooks-sal közös könyv vége felé jön ki, meglehetősen előzmények után) alaposan átolvastam, és azt gondolom, hogy ez az a megközelítés,

*Extremal problems for polynomials and positive definite functions and polynomials című értekezés, benyújtva az MTA doktora tudományos címért, Budapest, 2009. április

ami a klasszikus Blaschke-féle gondolatmenet nyomán, persze sok helyen általánosítva azt, de valahogyan elvileg ugyanazon a nyomdokon haladva kihozható. Nyilván Strantzen tétele tartalmazza a Kós Géza féle (b) verziót, mivel a görbület majdnem minden pontban létezik, és így a Strantzen tétel alkalmazásához elegendő figyelmen kívül hagyni minden olyan pontot, amelyben a görbület nem létezik végesen. Az (a) tétel is közvetlenül megkapható a megfelelő diszkrét Blaschke tételből a disszertációban leírt módon, de azt nem tudom, valahol a geometriai irodalomban eddig kimondta-e valaki már ezt a verziót? Logikusan hangzik a feltevés, de én nem láttam.

1.2. Természetesen a K konvex síktartomány és annak $\Gamma = \partial K$ konvex Jordan-görbe határa sokféle módon közelíthető sima, szigorúan konvex stb. tartományokkal ill. görbékkel, amelyekre Blaschke eredeti tételei jól alkalmazhatóak, eltekinthetünk a többértékű normálvektor-függvény okozta technikai bonyodalmaktól, stb. A probléma az, hogy a határátmenet során az így nyert beírható ill. köréírható alakzatok, körök elfajulhatnak, eltűnhetnek vagy végtelenné válhatnak, és ez szükségszerű is, ha egyszer maga a K halmaz olyan, hogy nem igaz rá körbeírás illetve kör köréírás pozitív ill. véges sugárral. Akkor pedig magára az eredeti alakzatra nem kapunk, nem is kaphatunk semmit, sem az eredeti Blaschke tétellel, sem a Strantzen féle általánosítással, sem a sima közelítések útján.

A disszertációban bemutatott diszkrét verzióban azonban általában is kapunk, mégpedig egy olyan beírt ill. köréírt sokszöget, ami jól használható analitikus vizsgálatokban. Amint fentebb említettem, én ezen egy más analízis probléma kapcsán kezdtem gondolkodni, és ott pl. sikeresen alkalmazni lehet a beírt sokszögeket. Az is észrevehető, hogy a τ elmozdulás során létrejövő normálvektor-változás alsó- illetve felső becslése csak egy *átlagos* becslése a majdnem mindenütt létező görbületnek. Tulajdonképpen ilyen átlagos feltételt *minden* konvex test teljesít. Valamilyen köréírt sokszögeket mindig kapunk, és beírt sokszögeket is akkor, ha nincsen nagyon éles fordulatot jelentő (nagy kiegészítő-szögű) csúcs. Mindezt mondható, hogy a diszkrét Blaschke tétel tényleg többet ad, mint a közismert verziók.

2. Nekünk csak a $\leq$ irány kell, de igen, a Csebisev lemmában valóban igaz az $=$ is.

3. A kérdésre kicsit hosszabb lesz a válasz, de a végén látni fogjuk, hogy a javasolt definíció *diszkrét torziócsoportokon ekvivalens a disszertációban szereplőkkel* (egyéb esetekben pedig nem igazán fogja meg, amit szeretnénk, azaz nem különösebben jó).

Először is emlékeztetnék arra, hogy pl. véges, vagy $\mathbb{Z}^d$ csoportokban már Kolountzakissal megcsináltuk a Turán konstansra vonatkozó megfelelő eredményeket, így a további általánosítás igénye elsősorban olyan csoportok irányába mutatott, amelyek nem feltétlenül diszkrétek. A bevezetett sűrűség-fogalmak közül a $\overline{\Delta}$ fogalom véges halmazokkal operál, míg $\overline{D}$ kompaktakkal: ezekről már én is sejtettem (ld. a dolgozat 58. oldalán, a 2.3.4. szakaszt megelőző záró szakaszban) és Totik Vilmos szellemes példával meg is mutatta, hogy különböznek (hacsak nem eleve diszkrét csoportot tekintünk). Mármint a bírálatban javasolt, véges halmazokkal operáló definíció is nyilván *csak diszkrét csoportokban lesz értelmezhető*, mert különben a nevező mindig zéró. Diszkrét csoportokban a disszertációban bevezetett sűrűségfogalmak tehát ekvivalensek.

Tekintsünk tehát diszkrét Abel csoportokat. Jelöljük a "véges részcsoportja" relációt a $\triangleleft$ jellel, a véges részhalmazt pedig a $\sqsubset$ jellel. A Kós által definiált

$$\overline{K}(A) := \inf_{H \triangleleft G} \sup_{H \triangleleft R \triangleleft G} \frac{|A \cap (R + x)|}{|R|}$$

sűrűség ugyan minden diszkrét Abel csoportban értelmezhető, de a következő észrevétel az, hogy ennek csak akkor van igazán értelme, ha G *torziócsoport*, azaz *minden elem rendje véges*.

Ugyanis ellenkező esetben az összes véges rendű elemből álló $G_0 \leq G$ valódi részcsoport, mégpedig G elég kis részét jelenti, hiszen minden azon kívül álló elem összes "hatványa" is kívül kell legyen (mert ha bejutna G_0 -ba, akkor véges rendű lenne), ugyanakkor az összes véges részcsoport meg G_0 -on belül kell elhelyezkedjen. Ezért nem tűnik jó sűrűség-fogalomnak az, ha csak a G_0 -ban található véges részcsoportok eltoltjaival "mérjük" a sűrűséget.

Pl. $G = \mathbb{Z}$ esetén $G_0 = \{0\}$ a triviális részcsoporthoz, és $\overline{K}(A) = 1$ minden halmazra, kivéve, ha $A = \emptyset$. Általában pedig tetszőleges diszkrét csoportban $\overline{K}(G_0) = 1$, ugyanakkor könnyű azt is látni, hogy torziómentes elem létezése esetén $\overline{D}(G_0) = 0$. Ehhez elegendő tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ -re a G_0 szerint különböző mellékosztályokba tartozó $0, g, 2g, \dots, mg$ elemek F halmazát tekinteni egy $g \notin G_0$ torziómentes elemre.

Tehát ezzel a $\overline{K}$ sűrűséggel csak *diszkrét torziócsoportokat* érdemes nézzünk – ebből a szempontból a számelméletileg érdekes speciális esetek egy része is már kiesik, köztük az Erdős-Sárközy kérdés is, hiszen ott $\mathbb{Z}$ és hatványai a releváns csoportok – de mindenképp terítéken maradnak a σ -véges Abel-csoportok, amelyeken pl. Hegyvári dolgozott.

Az eddigieket összegezve tehát: az Erdős-Sárközy kérdés vizsgálatához a $\overline{K}(A)$ sűrűség nem használható, ugyanakkor értelmezhető ez a fajta sűrűség diszkrét torziócsoportokban. Mármost Kós Géza konkrétan azt kérdezi, hogy σ -véges csoportra ez eltér-e a disszertációban használt $\overline{D}$ sűrűségtől? A kérdést persze csak *diszkrét* σ -véges csoportokon, vagy, kicsit általánosabban, *diszkrét torziócsoportokon* vizsgálhatjuk. Legyen tehát továbbra G diszkrét torziócsoporthoz.

Általában nyilván több véges részhalmaz van, mint részcsoporthoz, tehát mindig igaz

$$\overline{\kappa}(A) := \inf_{F \sqsubset G} \sup_{F \sqsubset R \leq G} \frac{|A \cap (R + x)|}{|R|} \leq \overline{K}(A),$$

de ha G torziócsoporthoz, akkor a $H := \langle F \rangle$ választás mutatja, hogy mindegy, hogy a külső infimumban véges részcsoporthozok vagy véges részhalmazokon futtatjuk az infimum keresést, azaz ha G torziócsoporthoz, akkor $\overline{\kappa}(A) = \overline{K}(A)$. (Tulajdonképpen csak akkor fordulhat elő, hogy a két definíció eltér, ha vannak $F \sqsubset G$ halmazok, amelyekhez nincs egyáltalán R – és akkor az üres sup miatt $\overline{\kappa}(A) = 0$ minden A -ra – míg ez az üres sup az $R := H$ választás miatt a $\overline{K}$ sűrűségnél nem merülhet föl.)

Igazoljuk, hogy $\overline{D}(A) \geq \overline{\kappa}(A) (= \overline{K}(A))$. A külső infimum ugyanazon $F \sqsubset G$ halmazokra fut, a belső sup pedig $\overline{K}$ esetében sokkal szigorúbb megkötéseknek tesz eleget, ugyanakkor a nevezőben lévő $|R|$ helyett akár írható $|(R + x) \cap F|$ is, hiszen ha $F \sqsubset R \leq G$, akkor $R = R + F$, és általában is $|V| = |V + x|$. Ez adja, hogy

$$\overline{K}(A) = \overline{\kappa}(A) := \inf_{F \sqsubset G} \sup_{F \sqsubset R \leq G} \frac{|(R + x) \cap A|}{|R + F|} \leq \inf_{F \sqsubset G} \sup_{R \leq G} \frac{|(R + x) \cap A|}{|(R + x) + F|} \leq \overline{D}(A).$$

Az nem is lep meg, hogy $\overline{K}(A) \leq \overline{D}(A)$, mert ugye diszkrét csoportokon $\overline{D}(A) = \overline{\Delta}(A)$, és időközben Ruzsa Imre meg bebizonyította, hogy $\overline{\Delta}(A)$ általában is a lehetséges *legfelső sűrűség*, azaz minden természetes feltevéseknek eleget tévő aszimptotikus felső sűrűséget majorál.

Lássuk be, hogy megfordítva, $\overline{D}(A) \leq \overline{K}(A)$. Nyilván

$$\overline{D}(A) \leq \inf_{F \leq G} \sup_{V \sqsubset G} \frac{|V \cap A|}{|V + F|} \leq \inf_{F \leq G} \sup_{V \sqsubset G} \frac{|(V + F) \cap A|}{|V + F|},$$

s mivel $V + F$ a diszjunkt $v_1 + F, \dots, v_k + F$ mellékosztályokra bontható valamely $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ elemekkel,

$$\frac{|(V + F) \cap A|}{|V + F|} = \frac{|\cup_{j=1}^k (v_j + F) \cap A|}{|\cup_{j=1}^k (v_j + F)|} = \frac{\sum_{j=1}^k |(v_j + F) \cap A|}{k|F|} \leq \sup_{x \in G} \frac{|(x + F) \cap A|}{|F|},$$

amiből

$$\overline{D}(A) \leq \inf_{F \leq G} \sup_{x \in G} \frac{|(x + F) \cap A|}{|F|} \leq \inf_{F \leq G} \sup_{x \in G, F \leq R \leq G} \frac{|(x + R) \cap A|}{|R|} = \overline{K}(A).$$

Tehát általában $\overline{K}(A) = \overline{\kappa}(A) = \overline{D}(A)$. Szóval nincsen ellenpélda, diszkrét torziócsoporthozok ekvivalens a Kós féle definíció. Ráadásul itt mindenütt egyenlőség kell álljon, ezért az első egyenlőtlenségből következően az $R \leq G$ részcsoporthoztól el is tekinthetünk $\overline{K}(A)$ értelmezésében, és az azzal ekvivalens definícióhoz elegendő $\inf_{H \leq G} \sup_{x \in G} \frac{|(x + H) \cap A|}{|H|}$.

4. Igaza van a bírálónak, ezt a konstrukciót itt elnéztem, bár szerencsére a hibát nem olyan nehéz kijavítani, akár a $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ csoportban maradva, akár – ami technikailag talán még egyszerűbb – a $\mathbb{D} := \{p/2^q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, $G := \mathbb{D}/\mathbb{Z}$ ún. "diadikus csoportra" szorítkozva.

Legyen ez utóbbiban a korábbiakkal analóg módon $H_n := \{x \in G : 2^n x \equiv 0 \pmod{1}\} \leq G$, és legyen $A_k := \{x \in G : 2^{k^2+k} x \not\equiv 0, 2^{(k+1)^2} \equiv 0\}$, $A := \cup_k A_k$. Mármost ha $n = m^2$, akkor nyilván $\#(H_n \cap A) \geq 2^{m^2} - 2^{m^2-m} = (1 - o(1))\#H_n$ ($n \rightarrow \infty$), de ha $n = m^2 + m - 1$, akkor $\#(H_n \cap A) \leq 2^{m^2} = o(\#H_n)$ ($n \rightarrow \infty$), azaz a konstrukció adja, hogy egyes felszálló H_{n_j} sorozatokkal 1-hez, másokkal 0-hoz tart a sűrűség.

5. A bizonyítások több lépésből épülnek fe. Ennek elején valahol valóban szükségünk is van egy 0-ban maximalizálódó "alap" polinomra. Ezt később Riesz-szorzat alkalmazásával megfelelően hézagossá is tesszük, miközben elérjük, hogy maximuma kiemelkedjen, a polinom koncentrálódjon. De ehhez a kétváltozós idempotenseken keresztül jutunk, az $(1 + e_{2N} + e_{3N})^K$ alakú polinom ebben a formában nem alkalmas, mert bár $(1 + e_2 + e_3)^K$ még koncentrálódik 0-ban, és azt a direkt $x \rightarrow Nx$ helyettesítéssel hézagossá is tehetjük, de az így már az összes k/N helyen egyforma maximumot fog mutatni, azaz nem fog többé koncentrálódni. Amúgy pedig szükségünk van azért itt több dologra, pl. az 1/2-ben koncentrálódó polinomokra, amelyekre ilyen egyszerű, kézenfekvő példa végképp nincs. Ennek legfőbb oka, hogy egy idempotens, vagy akár csak pozitív definit polinom abszolút maximuma mindig 0-ban van, tehát egyetlen polinom hatványozásával csak a 0-ban fellépő maximumot tudjuk kiemelni, és sohasem jutunk 1/2-ben koncentrálódó p -normához. Ez teszi szükségessé, hogy kétváltozós idempotenseket keressünk, mégpedig úgy, hogy azok p -edik marginális integráljai igenis az 1/2-ben legyenek nagyobbak, s azután ennek hatványozását szimuláljuk megfelelő kétváltozós Riesz-szorzatokkal. Az alappolinomok – még ha kétváltozósak is – de viszonylag egyszerűek (ha sikerül ilyeneket találni, konstruálni), a konstrukció azonban bonyolultabb, mint egy egyszerű hatványozás, vagy egy sima egyváltozós Riesz-szorzat.

Mi a Mockenhaupt és Schlag által a Hardy-Littlewood majoráns problémában konstruált *négytagú* exponenciális polinomból indultunk ki ahhoz, hogy az 1/2-ben koncentrálódó idempotenst megkonstruáljuk. Ezt a bemutatott technika szerint előbb kétváltozósá faragtuk, aztán az egyik változó szerinti marginális integrál és Riesz-szorzatok segítségével konstruáltuk meg a magunk polinomját. Az, hogy egyáltalán az ehhez való kiinduláshoz van-e *háromtagú* ellenpélda a Hardy-Littlewood majoráns problémában, az a mai napig is csak sejtés. Mockenhaupt mindenesetre már adott rá egy hiányos bizonyítást, és Krenedits Sándor megcsinálta $0 < p < 12$ -re, persze ha $p \notin 2\mathbb{N}$. A sejtés, illetve részbeni eredmény konkrétan az, hogy $1 + e_1 \pm e_{k+2}$ a $2k < p < 2k + 2$ intervallumban ellenpélda a Hardy-Littlewood majoráns problémában. De ebben is látható, hogy a p -től függenie kell a polinomunknak, egyetlen egy polinom biztosan nem lehet jó *minden* p -re.

Összefoglalóan tehát a felvetésre az a válasz, hogy az $(1 + e_{2N} + e_{3N})^K$ polinom itt nem alkalmas.

6.1. Sajnálom a leírásban néhol előforduló zavaró hibákat. A kompakt részhalmazzal kapcsolatban már Totik Vilmos véleménye kapcsán is írtam, a "nemnegatív együttható" - "negatív együttható" szóhasználat eltérő tartalma pedig szintén sajnálatos.

6.2. Egyetértek azzal, hogy a geometriai jellegű okoskodások megértését nagyban segítik az ábrák. Nem vagyok híve a Bourbaki-féle absztrakt előadásmódnak, a Dieudonné féle "Le a háromszögekkel !" megközelítésnek. Az ábrák elsősorban azért hiányoznak a dolgozatból, mert sajnos a különböző tex verziókban íródott cikkek összefésülése során sok tex-nikai gondom támadt, és aztán az ábrákra nem maradt energiám.

Mindenesetre annál jobban értékelem és köszönöm az opponensek munkáját.

Budapest, 2011. január 23.