

Opponensi vélemény Révész Szilárd György
Extremal problems for positive diophantine functions and polynomials
c. doktori értekezéséről

Az értekezés három teljesen elkülönülő részből áll, és mind tartalmában, mind kiállításában megfelel a követelményeknek. Mindhárom rész kapcsolódik a matematika egyéb területeihez, és a disszertáció ezeket a kapcsolódási pontokat igen kimerítően tárgyalja az idevágó, gyakran rendkívül szerteágazó irodalommal együtt.

Az első rész Turán Pál egy eredményét általánosítja. Az approximációelméletben alapvető kérdés, hogy egy polinom deriváltját hogyan lehet felülről megbecsülni a polinom normájával; ez az ún. Markov-Bernstein problémakör. Pl. az egységkörön a derivált abszolút értéke legfeljebb a polinom szuprénum normájának n -szerese, ahol n a foksám. Turán vette észre, hogy ha a polinom zérushelyei mind az egységkörben vannak, akkor fordított egyenlőtlenség is fennáll: a derivált normája legalább $n/2$ -szerese a polinom normájának. Ennek bizonyítása rendkívül egyszerű, csak annyit kell kihasználni, hogy ha a az egységkörön van, akkor $1/(a - z)$ valós része a körlapon legalább $1/2$. Hasonló alsó becslés a $[-1, 1]$ intervallumon már csak $\sqrt{n}/6$ konstanssal igaz. Mármint az I. rész alapkérdése az, hogy mi a helyzet általános K konvex halmazokra: a derivált normája hogyan becsülhető alulról a polinom normájával ha minden zérőhely a halmazba esik. Az I. rész fő tétele az, hogy az intervallum az egyedüli kivétel: minden más esetben az alsó becslésben fellépő faktor $c_K n$, és még a legjobb c_K nagyságát is pontosan megadja K geometriai tulajdonságainak segítségével. Ez az eredmény lezár egy témakört, és mindenképpen figyelemreméltó. A bizonyítás valamelyest parallel az eredeti Turán ötlettel, de annál sokkal nehezebb, és a disszertáció egyik fontos pillére még akkor is, ha a jelölt szerint egy lényeges lépés Halász Gábortól származik. A fejezet további része különféle variációkat tartalmaz. Ezek többnyire az eredeti Turán ötletet használják úgy, hogy különböző érintő körökbe foglalják bele a halmazt. Ehhez kell Blaschke "gördülő kör" tétele, illetve annak a jelölt által talált diszkrét változata a nem sima esetben. Ezek érdekesek geometriai szempontból, viszont az alaptételhez képest csak másodlagosnak érzem őket azért, mert (attól eltérően) nem nyúlnak túl a Turán ötleten.

A II. rész azt vizsgálja, hogy egy tartományon kívül azonosan 0 pozitív definit függvények esetén mekkora lehet a függvény integrálja (megfelelő normalizálással). Ezt Turán típusú problémakörnek nevezi a jelölt, de az első idevágó eredményeket Siegel már 1935-ben igazolta. Ennek a résznek a bevezetése rendkívül hosszú és nehézkes, nagyon sok variánsra és általánosításra tér ki. A tárgyalásban is kissé kifogásolható néhány dolog (pl. (2.17) hirtelen egy másfajta pozitív definitiségről beszél mint korábban, vannak nem definiált jelölések mint pl. " $\subset\subset$ " ill. a – sejtésem szerint – kompakt tartalmazás jele, stb). Nem tudom megítélni e rész eredményeinek fontosságát illetve hogy mennyire érdekesek a lokálisan kompakt Ábel csoportokra szóló általánosítások. Kétségtelenül érdekesek viszont a 2.3.5. rész számelméleti alkalmazásai és az egész fejezetnek azon mondanivalója, hogy hogyan lehet aszimptotikus felső sűrűséget definiálni az általános esetben ami visszadja a természetes számokon definiált hasonló fogalom legfontosabb tulajdonságait. A jelölt által adott definíciók nagyon természetesek, és, mint azt a tárgyalás mutatja, használhatók is.

Ezzel kapcsolatban megjegyzem, hogy (2.19) pozitivitása minden kövér K -ra nyilvánvalóan ugyanaz (nem csak bizonyos K -kra ahogy a disszertációban szerepel), és az 58. oldalon felvetett kérdésre, nevezetesen hogy a 2.3.5. és 2.3.8. definíciók ugyanazt a felső sűrűséget adják-e ellenpélda bármely véges tartójú mérték $\mathbf{R}^d$ -ben. Nem világos a 2.3.5. és 2.3.8. definíciókban az S σ -algebra szerepe: látszólag ez a ν definiáló σ -algebrája, de pl. a 2.3.6. tétel bizonyításában ν minden konvex testre értelmezett kell, hogy legyen, és ekkor persze minden Borel-halmazra is (véleményem szerint S egyszerűen kihagyható a definíciókból, és azokat Borel-mértékekre kell megadni). A fejezet további része különböző kapcsolatokat tárgyal pakolási és lefedési feltételekkel illetve pozitív trigonometrikus polinomokra vonatkozó extrémális problémákkal. Az egész fejezetben sok apró állítás van amelyek meglehetősen szerteágazóak és számomra az egész nem állt össze egységes elméletté. Az mindenesetre világos, hogy a probléma rendkívül érzékeny a feltételekre (ld. pl. a 2.9.22-23. következményeket). Kiemelkedően erősnek látszik ebben a fejezetben a 2.6.3. tétel aminek több alkalmazása is szerepel (illetve az is bemutatásra kerül, hogy a tétel pontos is), valamint a pontonkénti Turán-problémát kielégítően megoldó 2.9.4. tétel (trigonometrikus eset).

A disszertáció III. része kétségkívül a legkoherensebb és legfontosabb a három közül. Azt a problémát tárgyalja, hogyan lehet olyan $0 - 1$ együtthatós trigonometrikus polinomokat (idempotenseket) konstruálni, amelyek L^p -normája vagy annak egy fix része egy előírt pont tetszőlegesen kicsi környezetére koncentrálódik. Ez klasszikus valós függvény-tani ill. harmonikus analízisbeli kérdésnek tekinthető, amely, mint kiderült, más régebben felvetett harmonikus analízisbeli problémákhoz is kapcsolódik. Utóbbi 10 évben elért eredmények szerint ilyen koncentráció létezik $1 < p < \infty$ -ra, de az ezekben az eredményekben fellépő konstansok azt sugallták, hogy ez már nem igaz $p \leq 1$ -re. A disszertáció messzeemenően pontosítja az idevágó korábbi tételeket. Egyrészt megmutatja, hogy koncentráció minden p -re van, pontosan leírja, hogy milyen p -kre van teljes koncentráció (itt, mint sok más problémában, a $p = 2k$ számok a kivételek), ugyanezt kitárgyalja teljes környezet helyett halmazok sűrűségi pontjaira, és végül azt a problémát is megoldja, amikor is a fellépő idempotensekben az egymást követő kitevők közötti hézagok tetszőlegesen nagyok lehetnek. Ez utóbbi kérdés szorosan összefügg Ingham egy egyenlőtlenségével ami alapján tetszőlegesen nagy hézagokkal L^2 -koncentráció nem lehetséges. Ezzel kapcsolatban Zygmund kérdezte, hogy mi a helyzet L^p esetén, és ezt a Zygmund problémát is kielégítően megoldják a disszertáció eredményei megmutatván, hogy $p = 2$ az egyedüli kivétel – ez valószínűleg az egész munka legmeglepőbb állítása. Ugyancsak pontosítják az értekezés eredményei Wiener egy problémájának korábbi megoldásait pozitív Fourier-együtthatójú függvényekre vonatkozó beágyazási tételekről, és érdekesek a disszertáció legvégén szereplő Hardy terekre vonatkozó alkalmazások is. Néhány apró kérdés nyitott maradt a témakörben, de ezek marginálisak, és az elmélet teljesnek tekinthető. A bizonyítások szép konstrukciókra, valós függvény-tani, számelméleti és valószínűségi megfontolásokra épülnek.

A disszertáció eredményei részben közös munkákat tartalmaznak (a II. részben Kolountzakis, a III. részben Bonami az állandó társszerző) amit a szerző minden esetben hangsúlyoz; de számomra úgy tűnik, hogy Révész Szilárd volt mindig a fő mozgató erő. Többször szerepel az is, hogy a III. részben szereplő alapvető Riesz-szorzat-konstrukció T. Tao-tól származik, és hogy enélkül az eredményeket nem tudták volna Bonamival

elérni. Ezt én Tao személye iránt vett túlzott tiszteletnek vélem: mihelyst vannak egy ponton csúcsosodó idempotensek, az elképzelhetetlen hogy valaki ne akarjon ilyeneket összeszorozni egyre nagyobb frekvenciával (hogy idempotenseket kapjunk); aztán hogy az végül Riesz-szorzat alakot ölt-e vagy sem, az technikai kérdés.

Összefoglalás: A disszertáció igen tartalmas munka, amely három területen lényegesen továbblép a korábbi elméleteken, és ebből legalább két esetben lényegileg le is zárja a problémakört. Az értekezés eredményei nagyon jó lapokban jelentek meg (a legutolsó, az *American Journal of Mathematics* jelenleg az egyik legjobb, ha nem a legjobb, folyóirat). Mind az elért eredmények, mind a hozzájuk vezető módszerek megalkotása meghaladja a doktori szintet, és a magam részéről **az értekezés nyilvános vitára bocsátását illetve a doktori cím megadását melegen javaslom.**

Elírások, apróbb észrevételek

A 40. oldal közepén F_δ definíciójában mivel vesszük a maximumot?

A 49. oldalon mi az $A(\widehat{G})$ tér?

Mit jelent a 2.2.4. lemma bizonyításának első sorában $(\cdot - \gamma)$?

Mi a G a 2.3.6. tétel bizonyításának első sorában?

Mi az S_j a 2.3.23. lemma bizonyításában?

Example 2.4.5 előtti sor: a 2.4.4. definíció szerint E_Λ és nem Λ a spektrum (bár ez a szóhasználat nem zavaró).

A 2.4.9. állítás bizonyításában egyenlőség szerepel a "so clearly" után, de én csak $\subseteq$ -t látok.

A 2.7.2. tétel bizonyításában Φ -t konvolúciónak és nem összegnek kellene választani.

Nem látom, hogy a 3.1.9. állítás második felének hol a bizonyítása (tetszőleges pontra, nem csak 0-ra).

(3.28)-ban a szuprémum P_q -ra veendő.

A 3.8.3. megjegyzésben $F'(0) = 0$ -t is fel kell tenni.

Lemma 3.9.2. miért következik az előzőből (itt P magasabb fokszámú lehet)?

A 160. oldalon mi az f^* ?

Szeged, 2010. aug. 29.



Totik Vilmos