MTA Doktori Értekezés Tézisei

Eltolások, mérték és dimenzió

Keleti Tamás

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest

2009

1. Kitűzött kutatási feladat

A disszertáció célja megvizsgálni, hogy milyen kapcsolat van a számegyenes vagy általánosabban $\mathbb{R}^n$ additív és mértékelméleti struktúrája között. Mindezt különböző problémákon keresztül tesszük.

Az egyik fő kérdés az, hogy ha kicsi egy halmaz az egyik értelemben, akkor következik-e ebből, hogy kicsi a másik értelemben. Világos, hogy mérték szerint akkor kicsi egy halmaz, ha kicsi a mértéke vagy a dimenziója. Az additív struktúra, vagy konkrétabban az eltolások (és esetleg nagyítások) szerint sokféleképpen lehet kicsi egy halmaz. Az egyik lehetőség, hogy egy halmazt akkor tekintünk kicsinek, ha nem tartalmaz adott halmazhoz hasonló mintát. Ennek és a mértékelméleti kicsiségnek a kapcsolatát vizsgáljuk a disszertáció első fejezetében. A második fejezetben akkor tekintünk egy halmazt kicsinek, ha kevés eltoltjával nem fedhető a számegyenes.

A harmadik fejezetben a kicsiséggel és fedésekkel kapcsolatban az alábbi kérdést fogjuk vizsgálni: Igaz-e, hogy ha egy mérhető halmazt le lehet fedni bizonyos típusú halmazokkal úgy, hogy a halmaz sűrűsége minden fedő halmazban kicsi, akkor magának a halmaznak kicsi a mértéke? Látni fogjuk, hogy ha akármilyen téglalapot megengedünk fedőhalmaznak, akkor negatív a válasz, ha viszont csak tengelypárhuzamost, akkor már pozitív. Tehát a pozitív eredmény valamiképpen itt is az additív struktúrához kötődik, és nem marad igaz, ha megengedünk forgatásokat is.

A negyedik fejezetben azt vizsgáljuk, hogy egy fraktál halmaz (konkrétabban önhasonló vagy önaffin halmaz) mekkora mértékű halmazban metszi saját magának egy eltolt (vagy általánosabban egybevágó, hasonló vagy affin) példányát. Itt mérték alatt az önhasonló illetve önaffin halmazra természetesen illeszkedő mértéket értünk. Kétféle eredményt bizonyítunk. Az egyik típus instabilitásról szól és azt mondja, hogy a metszet mértéke csak úgy lehet közel az eredeti halmaz mértékéhez, ha azt az elmozgatott példány teljesen lefedi. A másik pedig azt mondja, hogy a metszet speciális eseteket kivéve mindig nullmértékű. Vegyük észre, hogy mindezek a tulajdonságok szöges ellentétben állnak a hagyományos geometriai alakzatok tulajdonságaival.

Az ötödik fejezetben a számegyenes additív és mértékelméleti kapcsolatát úgy tanulmányozzuk, hogy egész értékű függvények periodikus mérhető függvények összegeként történő előállíthatóságát vizsgáljuk. A fő kérdés, amit vizsgálunk az, hogy vajon, ha egy egészértékű függvény előáll periodikus mérhető valós értékű függvények összegeként, akkor előáll-e ugyanilyen periódusú *egész* értékű (vagy legalább majdnem mindenütt egész értékű) mérhető periodikus függvények összegeként. Miután kiderül, hogy ez nem mindig igaz, jellemezzük azokat a periódusokat (pontosabban periódus k-asokat), amelyek esetén ez igaz. Közben jellemezzük azokat a periódus k-asokat is, amelyekre igaz, hogy egy mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ függvény lényegében egyértelműen áll elő ilyen periódusú periodikus mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ függvények összegeként (ha előáll).

Célunk még a fenti eredmények alkalmazása valamint kapcsolódó állítások vizsgálata a matematika különböző területein. Látni fogjuk például, hogy az eltolás szerint kis halmazok használhatóak csoportelméleti eredményhez, a fedések sűrűségével kapcsolatos eredményeink olyan fedési tételekhez vezetnek, amelyek erősítései a harmonikus analízisben használt fedési tételeknek, a fraktál halmazok metszetéről kapott eredményeink pedig a halmazokon értelmezett természetes mértékek invariáns kiterjesztésére lesznek használhatóak.

2. Vizsgálati módszerek

A bizonyítások során sokféle módszert és eredményt alkalmazunk, melyek egy részét már mások is használták, de igen sok új technikára is szükség volt. A geometriai mértékelmélet mellett halmazelméleti, geometriai, valós függvénytani, harmonikus analízisbeli, algebrai és számelméleti módszerek játszanak még fontos szerpet, sőt (az 1. fejezetben) még az Ördög Játékában használt "ördögi" stratégiát is használjuk. Volt, ahol valamilyen hagyományos módszer ihletett valami újat: például a 3. fejezetben a kulcs-állítás bizonyításában a harmonikus analízisben alapvető maximáloperátor mintájára bevezetett minimáloperátor játszik nagyon fontos szerepet.

3. Új tudományos eredmények és alkalmazásaik

A disszertáció alapvetően a valós számok vagy általánosabban a véges dimenziós euklideszi terek additív és mértékelméleti struktúrájának kapcsolatáról szól. Az eredmények szorosan kapcsolódnak más témakörökhöz is. Egyrészt, mint ahogy azt az előző részben ismertettük, használunk eredményeket és módszereket a matematika számos ágából, másrészt bemutatunk alkalmazásokat, valamint kapcsolódó eredményeket is.

3.1. Adott mintákat elkerülő halmazok

A Lebesgue-féle sűrűségi tétel egy egyszerű és közismert következménye szerint a számegyenesen tetszőleges pozitív mértékű mérhető halmaz tartalmaz minden véges halmazhoz hasonló részhalmazt. Felmerül a kérdés, hogy elég-e, ha pozitív mértékűség helyett nagy Hausdorff-dimenziót teszünk fel. A disszertáció első fejezetének eredményei azt mutatják, hogy nem.

Azt fogjuk mondani, hogy a számegyenes egy 3 vagy 4 pontú részhalmaza *paralelogrammát* alkot, ha $\{a, a+u, a+v, a+u+v\}$ alakú, ahol $a \in \mathbb{R}$ és $0 < u \leq v$. Az első eredményben a paralelogrammákat kerüljük el, azaz mutatunk olyan 1 Hausdorff-dimenziójú kompakt halmazt, amely nem tartalmaz paralelogrammát, amiből persze az is következik, hogy nem tartalmaz legalább 3 tagú számtani sorozatot sem.

Vegyük észre, hogy a számegyenes egy részhalmaza pontosan akkor nem tartalmaz paralelogrammát, ha minden eltoltját legfeljebb 1 pontban metszi. (A helybenhagyást itt nem tekintjük eltolásnak.) Tehát a következő tétel valóban olyan 1 Hausdorff-dimenziójú kompakt halmazt ad, amely nem tartalmaz paralelogrammát

1. Tétel. *[Suppl-1, Theorem 1] Van olyan* 1 *Hausdorff-dimenziójú kompakt halmaz a számegyenesen, amely minden (önmagától különböző) eltoltját legfeljebb* 1 *pontban metszi.*

Az első ilyen típusú eredmény Pertti Mattilától [Ma84] származik, aki olyan 1 Hausdorff-dimenziójú kompakt A és B halmazokat mutatott a számegyenesen, amelyek egymás bármely eltoltját csak legfeljebb 1 pontban metszik. A fenti eredmény tehát azt mutatja, hogy amennyiben a helybenhagyástól mint eltolástól eltekintünk, választhatjuk A-t és B-t egyformának.

A disszertáció 4. részében ugyanennek az 1. tételnek alkalmazásaként az alábbi furcsaság is kiderül majd a kapott halmazról: ez egy olyan 1 Hausdorff-dimenziójú kompakt halmaz a számegyenesen, amelyen bárhogy definiálunk egy folytonos Borel-mértéket (a folytonos itt azt jelenti, hogy az 1 pontú halmazok nullmértékűek), az mindig kiterjeszthető az egész számegyenesre eltolásinvariáns mértékké.

Adott halmazhoz hasonló halmaz keresése illetve elkerülése szorosan kapcsolódik egy régi Erdős sejtéshez is, amely azt állítja, hogy megadható a számegyenes minden végtelen halmazához olyan pozitív mértékű mérhető halmaz, amely nem tartalmaz az adott halmazhoz hasonlót. Ismert, hogy lassan konvergáló sorozatok nem ellenpéldák [Fa84, Bo87, Ko97] (további eredményekért lásd a [HL98, Ko83, Sv00] cikkeket). Kiemelkedő matematikusok erőfeszítési ellenére sem lehet ennél sokkal többet tudni, például egyetlen exponenciális sebességgel konvergáló sorozatról sem tudni, hogy ellenpélda-e. Másfelől, mint ahogy azt már említettük, a Lebesgue féle sűrűségi tételből egyszerűen következik, hogy minden pozitív mértékű mérhető halmaz tartalmaz bármely véges halmazhoz hasonló részhalmazt.

Bisbas és Kolountzakis [BK06] kezdték vizsgálni, hogy mi a helyzet akkor, ha pozitív mértékű halmaz helyett megelégszünk 1 Hausdorff-dimenziójú halmazzal. Az alábbi állításra adtak egy nem teljes bizonyítást: Minden végtelen $A \subset \mathbb{R}$ halmazhoz megadható egy 1-dimenziójú kompakt E halmaz úgy, hogy E nem tartalmaz A-hoz hasonló halmazt. Ezután felvetették a kérdést, hogy vajon igaz-e ez véges A halmaz esetén is.

Közben Iosevich is feltette szinte ugyanezt a kérdést az alábbi formában: Ha $A \subset \mathbb{R}$ adott véges halmaz és $E \subset [0,1]$ adott (elég nagy) Hausdorff dimenziójú véges halmaz, akkor igaz-e hogy E biztosan tartalmaz A-hoz hasonló halmazt?

Ezeket a kérdéseket sikerült megválaszolni megmutatva, hogy tetszőleges legalább 3 elemű A halmazhoz megadható 1 Hausdorff-dimenziójú halmaz, amely nem tartalmaz A-hoz hasonló részhalmazt. Valójában az alábbi tétel és annak két közvetlen következménye ennél valamivel többet is állít.

2. Tétel. *[Suppl-2, Theorem 1] Tetszőleges $A \subset (1,\infty)$ halmazhoz megadható olyan 1 Hausdorff-dimenziójú kompakt $E \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre $x < y < z, x, y, z \in E$ esetén $\frac{z-x}{z-y} \notin A$.*

3. Következmény. *[Suppl-2, Corollary 2] Legalább 3 elemű halmazok tetszőleges $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ sorozatához megadható olyan 1 Hausdorff-dimenziójú kompakt $E \subset \mathbb{R}$ halmaz, amely a $B_1, B_2, \ldots$ egyikéhez sem tartalmaz hasonló részhalmazt.*

4. Következmény. *[Suppl-2, Corollary 3] Tetszőleges $B \subset \mathbb{R}$ megszámlálható halmazhoz megadható olyan 1 Hausdorff-dimenziójú kompakt $E \subset \mathbb{R}$ halmaz, amely B bármely hasonló példányát legfeljebb két pontban metszi.*

A fenti negatív eredmények után Laba és Pramanik [LP09] úgy értek el pozitív eredményeket, hogy csak olyan $E \subset \mathbb{R}$ halmazokat engedtek meg, amelyeken van olyan valószínűségi mérték, amelynek Fourier transzformáltja adott sebességgel cseng le a végtelenben.

A közelmúltban Maga Péternek [MaP] a módszerek továbbfejlesztésével sikerült a fenti eredmények egy részét általánosítani. Megmutatta, hogy az 1. Tétel megfelelője igaz n-dimenzióban is, vagyis mutatott olyan n Hausdorff-dimenziójú kompakt halmazt $\mathbb{R}^n$-ben, amely minden (önmagától különböző) eltoltját legfeljebb 1 pontban metszi. A 3. Következményhez hasonló állítást a síkon sikerült bizonyítania, megmutatva, hogy a sík bármely legalább 3 elemű A halmazához megadható olyan 2 Hausdorff-dimenziójú kompakt halmaz a síkon, amely nem tartalmaz A-hoz hasonló részhalmazt. A bizonyítása magasabb dimenzióban nem működik, az is lehet, hogy az analóg állítás magasabb dimenzióban már nem is igaz. Heurisztikák alapján úgy tűnik, hogy például a térben egy 2-nél nagyobb Hausdorff-dimenziójú halmaznak már tartalmaznia kell bármilyen nem egy egyenesre eső három adott ponthoz hasonló részhalmazt. Ebben az irányban jelenleg is folyik kutatás.

Mind az 1. mind a 2. Tétel, valamint Maga Péter általánosításai ugyanazt a trükköt használják mint az Ördög az alábbi játékban:

Az Ördög Játéka: *A Játékos minden lépésben ad egy százforintos érmét az Ördögnek, aki ad helyette két darab százforintos érmét. Két további megkötés van: az egyik, hogy végtelen sok lépésig kell játszani, a másik pedig, hogy az Ördög választja ki, hogy melyik lépésben melyik érmét kéri.*

Az Ördög gonosz stratégiája a következő: megszámozza az összes érmét, minden lépésben a legkisebb számhoz tartozó érmét kéri el, és azt már többet nem is adja oda. Így a Játékosnak ugyan egyre több pénze lesz, de végtelen sok lépés után minden érme az Ördögnél lesz.

3.2. A számegyenes lefedése kis halmazokkal

Mely kompakt halmazok kontinuumnál kevesebb eltoltjával lehet lefedni a számegyenest? Világos, hogy ha a kompakt halmaz tartalmaz intervallumot, akkor már megszámlálható sok eltolt is elég. Másrészt viszont a Baire féle kategória tétel szerint egy sehol sem sűrű kompakt halmaz megszámlálhatóan sok eltoltja nem fedheti le a számegyenest, tehát kontinuum hipotézis esetén ezzel meg is válaszoltuk a kérdést.

Gary Gruenhage vette észre, hogy a halmazelmélet szokásos ZFC axiómarendszerével az is konzisztens, hogy egy tetszőleges adott pozitív Lebesgue-mértékű kompakt halmaz kontinuumnál kevesebb eltoltjával is lefedhető a számegyenes. Tehát pozitív mértékű sehol sem sűrű kompakt halmazok esetén a ZFC axiómarendszertől független, hogy kontinuumnál kevesebb eltoltjuk lefedheti-e a számegyenest.

Gruenhage azt is bebizonyította, hogy a számegyenes nem fedhető le a klasszikus triadikus Cantor-halmaz kontinuumnál kevesebb eltoltjával. Ezen eredmények után tette föl az alábbi kérdést:

5. Kérdés. *Igaz-e, hogy a számegyenes nem fedhető le semmilyen nullmértékű kompakt halmaz kontinuumnál kevesebb eltoltjával?*

Később Daniel Mauldin kérdezte, hogy legalább a következő kérdésre pozitív-e válasz:

6. Kérdés. *Igaz-e, hogy a számegyenes nem fedhető le semmilyen* 1*-nél kisebb Hausdorff dimenziós kompakt halmaz kontinuumnál kevesebb eltoltjával?*

Az Udayan B. Darjival közös cikkünk fő eredménye szerint ha Hausdorff-dimenzió helyett pakolási dimenziót tekintünk, akkor a válasz pozitív:

7. Tétel. *[Suppl-3] A számegyenes nem fedhető le semmilyen* 1*-nél kisebb pakolási dimenziójú kompakt halmaz kontinuumnál kevesebb eltoltjával.*

Valójában a következő erősebb tételt igazoltuk, amely egyben Ronnie Levy kérdésére is választ ad, aki azt kérdezte, hogy lefedhető-e a számegyenes a klasszikus triadikus Cantor-halmaz kontinuumnál kevesebb *hasonló* példányával.

8. Tétel. *[Suppl-3, Theorem 2.5] A számegyenes nem fedhető le semmilyen* 1*-nél kisebb pakolási dimenziójú kompakt halmaz kontinuumnál kevesebb hasonló példányával.*

Úgy bizonyítottuk be a 8. tételt, hogy az adott 1-nél kisebb pakolási dimenziójú C kompakt halmazhoz gyártottunk egy nem-üres P perfekt halmazt, amelyet C bármely hasonló példánya véges halmazban metsz. Miután egy nem-üres perfekt halmaz biztosan kontinuum számosságú, ebből azonnal következik, hogy C kontinuumnál kevesebb eltoltja már P-t sem tudja lefedni, nemhogy $\mathbb{R}$-et.

Az eredeti 5. Probléma megoldásához egy lehetséges útként az alábbi kérdést vetettük fel.

9. Kérdés. *[Suppl-3, Problem 3.1] Igaz-e, hogy minden nullmértékű kompakt C halmazhoz megadható olyan nem-üres perfekt halmaz, amelyet C minden eloltja megszámlálhatóan sok pontban metsz?*

Pozitív válaszból világosan következik pozitív válasz az 5. Problémára is. Bár negatív válaszból közvetlenül semmi sem következik, legalább nem muszáj az axiómáktól függenie egy esetleges negatív válasznak.

Később ez a megközelítés annak ellenére is sikeresnek bizonyult, hogy mindkét kérdésre negatív válasz adódott: Elekes Márton és Juris Steprāns [ES04] előbb negatív választ adtak ZFC-ben a 9. kérdésünkre, majd ugyanazon ellenpélda segítségével megmutták, hogy a negatív válasz (is) konzisztens ZFC-vel az eredeti 5. kérdésre.

Nemrég Mauldin 6. kérdése is megoldódott: Máthé András [MaA] a fent említett Elekes-Steprans bizonyítást továbbfejlesztve olyan nulla Hausdorff-dimenziós kompakt halmazt mutatott, amelyre konzisztens ZFC-vel, hogy kontinuumnál kevesebb eltoltjával lefedhető a számegyenes. Ez azt mutatja, hogy a 7. Tétel éles abban az értelemben, hogy a pakolási dimenzió (nagyon) nem cserélhető le Hausdorff-dimenzióra.

A fentiekben egy rögzített kis halmaz kevés eltoltjával próbáltuk lefedni a számegyenest. Most viszont azt fogjuk megnézni, hogy kevés kis halmaz lefedheti-e a számegyenest. Ezúttal egy halmazt „kicsi”-nek tekintünk, ha van kontinuum sok páronként diszjunkt eltoltja. Habár elsőre talán azt várnánk, hogy kontinuumnál kevesebb ilyen értelemben kicsi halmaz nem tudja lefedni a számegyenest, de mint ahogy az Abért Miklóssal [Suppl-4] észrevettük, akár megszámlálhatóan sok ilyen halmaz is elég lehet, sőt még a következő is igaz:

10. Lemma. *[Suppl-4, Lemma 5] Megadható a számegyenesnek egy $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$ megszámlálható partíciója és minden A_n halmaznak kontinuum sok eltoltja úgy, hogy az összes halmaz összes eltoltja (vagyis az $A_n + t_{n,\alpha}$ $(n \in \mathbb{N}, \alpha \in [0,1))$ halmazok) páronként diszjunktak legyenek.*

Talán kissé meglepő, hogy a fenti lemma végül tisztán csoportelméleti eredményhez fog vezetni. Ehhez azt vizsgáltuk meg, hogy a sík mely permutációi állnak elő az alábbi nagyon egyszerű transzformációk kompozíciójaként.

11. Definíció. *Függőleges* (illetve *vízszintes*) *csúsztatáson* $(x, y) \to (x, y + f(x))$ (illetve $(x, y) \to (x + g(y), y)$) alakú $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezést értünk, ahol f (illetve g) tetszőleges $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény.

Csúsztatáson függőleges vagy vízszintes csúsztatást értünk.

Vegyük észre, hogy a függőleges (illetve vízszintes) csúsztatás olyan síktranszformációt jelent, amikor a függőleges (illetve vízszintes) egyeneseket toligáljuk függőlegesen (illetve vízszintesen).

Miután minden csúsztatás nyilván a sík pontjainak egy permutációja, a kérdés az, hogy mely permutációk állnak elő véges sok csúsztatás kompozíciójaként. A válasz meglepően egyszerű. Mind!

12. Tétel. *[Suppl-4, Theorem 2] A sík pontjainak* bármely *permutációja előállítható legfeljebb* 209 *csúsztatás egymás utáni alkalmazásával. Azaz a sík bármely p permutációjához megadhatóak $f_1, \ldots, f_{105}$ és $g_1, \ldots, g_{104}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, amelyekre $p = F_1 \circ G_1 \circ \cdots \circ F_{104} \circ G_{104} \circ F_{105}$, ahol $F_i(x, y) = (x, y + f_i(x))$ és $G_i(x, y) = (x + g_i(y), y)$.*

Mivel mind a függőleges, mind a vízszintes csúsztatások a sík permutációcsoportjának Abel-részcsoportját alkotják, melyek egymással izomorfak, az alábbi csoportelméleti eredmény közvetlenül adódik:

13. Következmény. *[Suppl-4, Corollary 3] A kontinuum számosságú halmazon ható permutációcsoport előáll két egymással izomorf Abel-részcsoport véges sok* (209) *példányának szorzataként.*

Korábban hasonló eredményt bizonyított Abért Miklós [Ab02] megszámlálható halmazon ható permutációcsoportra úgy, hogy a 12. Tétel megfelelőjét (persze 209 helyett más konstanssal) a sík helyett $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-n bizonyította.

Később Komjáth Péter [Ko02] általánosította a 12. Tételt, és azt is megmutatta, hogy jóval kevesebb csúsztatáas is elég.

Ezen a ponton talán nem egészen világos, mi köze a kis halmazokkal fedésnek (10. Lemma) a sík permutációinak csúsztatásokkal történő előállíthatóságához (12. Tétel). Az összekötő kapocs az alábbi állítás:

14. Állítás. *[Suppl-4, Claim 6] Az $S = \mathbb{R} \times [0, 1)$ vízszintes sáv beleképezhető az $e = \mathbb{R} \times \{0\}$ egyenesbe* 3 *csúsztatás segítségével.*

3.3. Sűrűség és fedések $\mathbb{R}^n$-ben

A 3. fejezet kiinduló problémája a következő:

15. Kérdés. *Igaz-e, hogy ha az egységnégyzet egy mérhető részhalmazát lefedjük tengelypárhuzamos téglalapokkal (melyek mindegyike benne van az egységnégyzetben) úgy, hogy a halmaz sűrűsége minden fedő téglalapban kicsi, akkor a halmaz mértéke is kicsi?*

(Az A halmaz *sűrűségén* a B halmazban a $\frac{|A\cap B|}{|B|}$ mennyiséget értjük, ahol $|.|$ a Lebesgue mértéket jelöli.)

Elsőre talán egyértelműnek tűnik, hogy ennek igaznak kell lennie. Ugyan tényleg igaz, de abból derül ki, hogy ez egyáltalán nem magától értetődő, hogy akármilyen állású téglalapokat is megengedve már nagyon negatív lenne a válasz: egy úgynevezett Nikodym-halmazból (lásd pl. [Gu75]) kiindulva nem nehéz akár $1-\varepsilon$ mértékű zárt halmazt megadni az egységnégyzetben, valamint annak egy fedését az egységnégyzetben fekvő kis téglalapokkal úgy, hogy minden fedő téglalapban ε-nál kisebb a halmaz sűrűsége.

A 3. fejezet kulcseredménye pozitív válasz a 15. kérdésre nemcsak a síkon, hanem $\mathbb{R}^n$-ben.

16. Tétel. *[Suppl-5, Theorem 2.1] Ha a $(0,1)^n$ egységkocka egy h-nál nagyobb (Lebesgue) mértékű mérhető H részét lefedjük az egységkocka tengelypárhuzamos résztégláinak egy $\mathcal{R}$ rendszerével, akkor valamelyik $R\in\mathcal{R}$ fedő téglában H sűrűsége nagyobb mint $(\frac{h}{2n})^n$, azaz*

$$\frac{|H\cap R|}{|R|} > \left(\frac{h}{2n}\right)^n .$$

Egyszerű példa (az egységkocka egy testátlója körüli vékony henger) mutatja, hogy az eredmény éles abban az értelemben, hogy $C_n h^n$-nél nagyobb sűrűség nem garantálható.

Mielőtt rátérnénk a tétel legfontosabb alkalmazásaira, először nézzük meg azt az alkalmazást, amely a fenti kérdést eredetileg motiválta.

A. Carbery tette föl a következő kérdéset (lásd [CCW]), amely máig megoldatlan: *Mely $g:[0,1]\to[0,1]$ függvényekre igaz, hogy*

$(*)$ az egységnégyzet tetszőleges H mérhető részéből kiválasztható 4 pont, melyek legalább $g(|H|)$ területű tengelypárhuzamos téglalapot alkotnak?

Ennek a kérdésnek a kapcsán kérdezte Gyöngy István a következőt: *Mely $f:[0,1]\to[0,1]$ függvényekre igaz, hogy*

$(**)$ az egységnégyzet tetszőleges H mérhető részéből kiválasztható 4 pont, melyek olyan R tengelypárhuzamos téglalapot alkotnak, amely a H halmaz legalább $f(|H|)$ mértékű részét lefedi?

Világos, hogy nehezebb $(**)$-nak eleget tenni mint $(*)$-nak. A 16. Tételt felhasználva viszont nem nehéz egy $(*)$-nak eleget tevő függvényből $(**)$-nak eleget tevő függvényt kapni:

17. Állítás. *[Suppl-5, Proposition 3.4] Ha a g függvény teljesíti $(*)$-t, akkor $f(h)=\rho_2(h/2)g(h/2)$ teljesíti $(**)$-t, ahol $\rho_2(h)=h^2/16$ az a függvény, amely megjelent a 16. Tételben $n=2$ esetben.*

Használva A. Carbery, M. Christ és J. Wright [CCW] eredményét, mely szerint $g(h)=ch^2/\log(1/h)$ (alkalmas $c>0$ és elég kis h esetén) eleget tesz $(*)$-nak, a következő részeredményt kapjuk Gyöngy István kérdésére:

18. Következmény. *[Suppl-5, Corollary 3.5] A $h \leq \delta$-ra $f(h) = c'h^4/\log(1/h)$, $h > \delta$-ra $f(h) = f(\delta)$-nak értelmezett függvény eleget tesz $(**)$-nak, ahol $\delta > 0$ tetszõleges, c' pedig csak δ-tól függ.*

Az alábbi egyszerű példa mutatja, hogy egy $(*)$-t kielégítő függvény nem lehet u^2-nél nagyobb. Legyen H_m az egységnégyzet $m \times m$-es felosztás főátlójában szereplő kis négyzetlapok uniója. Ekkor $|H_m| = 1/m$ és minden olyan tengelypárhuzamos téglalap, amelynek mind a négy csúcsa H_m-ben van legfeljebb $\frac{1}{m^2}$ területű. Nem ismert, hogy $a(u) = cu^2$ kielégíti-e $(*)$-t (elegendően kicsi $c > 0$ esetén).

Reiman István [Re58] egy véges geometriai konstrukciójának segítségével adható olyan példa [Suppl-5, Example 3.6], amely azt mutatja, hogy a $h^3 + h^4$ ($\sim h^3$) függvény nem teljesíti $(**)$-ot. Tehát a $(**)$-ot kielégítő $f(h)$ függvények optimális nagyságrendjében h kitevője valahol a $[3, 4]$ intervallumban van.

A 16. tételből könnyen kapható olyan eredmény, amely a teljes $\mathbb{R}^n$-ben használható:

19. Tétel. *[Suppl-5, Theorem 2.4] Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ véges mértékű mérhető halmaz, $\mathcal{R}$ pedig tengelypárhuzamos téglák olyan rendszere, amely úgy fedi le H-t, hogy H sűrűsége $\cup\mathcal{R}$-ben nagyobb mint $h > 0$. Ekkor van olyan $R \in \mathcal{R}$ tégla, amelyben H sűrűsége nagyobb mint $\rho_n(h) = \left(\frac{h}{2n}\right)^n$; azaz*

$$\frac{|H \cap R|}{|R|} > \rho_n(h) = \left(\frac{h}{2n}\right)^n.$$

Ebből a tételből mohó kimerítéssel kaphatjuk az alábbi fedési tételt, amely azt mondja, hogy tengelypárhuzamos téglák bármilyen rendszeréből kiválasztható véges sok, amelyek már az eredeti unió nagyon nagy részét fedik, mégis az átlagos átfedettség valamilyen korlát alatt marad.

20. Tétel. *[Suppl-5, Theorem 2.5] Minden $n \in \mathbb{N}$-re van olyan $C_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre a következő teljesül: ha $\varepsilon > 0$, $\mathcal{R}$ pedig $\mathbb{R}^n$-beli tengelypárhuzamos téglák olyan rendszere, amelynek uniója véges mértékű, akkor $\mathcal{R}$-ből kiválaszthatóak $R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R}$ téglák, amelyekre*

(i)
$$\frac{|\cup\mathcal{R} \setminus \cup_{k=1}^m R_k|}{|\cup\mathcal{R}|} < \varepsilon$$

és

(ii)
$$\frac{\sum_{k=1}^m |R_k|}{|\cup\mathcal{R}|} < C_n(\varepsilon).$$

Az alábbi állításokban és definíciókban feltesszük, hogy $\mathcal{B}$ nem-üres korlátos nyílt halmazok egy rendszere $\mathbb{R}^n$-ben, továbbá hogy $1 \leq q \leq \infty$.

Cordoba és Fefferman [CF75] vezette be az alábbi fedési tulajdonságot:

21. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{B}$ halmazrendszer rendelkezik a V_q *fedési tulajdonsággal*, ha léteznek olyan $C < \infty$ és $c > 0$ konstansok, amelyekre valahányszor $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ és $|\cup\mathcal{R}| < \infty$, mindig kiválasztható $R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R}$ úgy, hogy

$$\text{(i')} \quad |\cup_{k=1}^m R_k| \geq c\, |\cup\mathcal{R}| \quad \text{és} \quad \text{(ii)} \quad \|\sum_{k=1}^m \chi_{R_k}\|_q \leq C\, |\cup\mathcal{R}|^{1/q},$$

ahol $\|.\|_q$ az L_q-normát, χ_{R_k} pedig az R_k halmaz karakterisztikus függvényét jelöli.

A [CF75] cikkben bebizonyították, hogy a tengelypárhuzamos téglák $\mathcal{I}^n$ rendszere rendelkezik a V_q fedési tulajdonsággal minden $1 \leq q < \infty$-ra. Ki fog derülni, hogy az alábbi erősebb tulajdonsággal is rendelkezik:

22. Definíció. [Suppl-5, Definition 4.2] Azt mondjuk, hogy $\mathcal{B}$ rendelkezik a CV_q *fedési tulajdonsággal*, ha megadható olyan $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre $\varepsilon > 0$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ és $|\cup \mathcal{R}| < \infty$ esetén mindig kiválasztható $R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R}$ amelyre

$$\text{(i)} \quad |\cup_{k=1}^m R_k| \geq (1-\varepsilon)|\cup \mathcal{R}| \quad \text{és} \quad \text{(ii)} \quad \|\sum_{k=1}^m \chi_{R_k}\|_q \leq C(\varepsilon)|\cup \mathcal{R}|^{1/q}.$$

Vegyük észre, hogy a 20. Tétel épp azt mondta ki, hogy a tengelypárhuzamos téglák $\mathcal{I}^n$ rendszere rendelkezik a CV_1 fedési tulajdonsággal. A 19. tétel pedig az $\mathcal{I}^n$ rendszer alábbi tulajdonságával fejezhető ki:

23. Definíció. [Suppl-5, Definition 4.2] Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{B}$ halmazrendszer rendelkezik a *minimális sűrűségi tulajdonság*gal (MST) ha létezik olyan $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre valahányszor egy véges mértékű mérhető $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt úgy fed le egy $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ rendszer, hogy H sűrűsége $\cup\mathcal{R}$-ban $d > 0$, akkor van olyan $R \in \mathcal{R}$, amelyben H sűrűsége nagyobb mint $\rho(d)$; azaz

$$\frac{|R \cap H|}{|R|} > \rho\left(\frac{|H|}{|\cup \mathcal{R}|}\right).$$

Ugyanúgy, ahogy a 19. Tételből mohó kimerítéssel következett a 20. Tétel, nem nehéz bizonyítani, hogy MST-ből mindig következik a CV_1-tulajdonság. Talán kissé meglepő, hogy a megfordítás is igaz:

24. Tétel. *[Suppl-5, Theorem 4.6]*

$$MST \Leftrightarrow CV_1.$$

25. Megjegyzés. A fedési tételek különösen az integrálok differenciálásának elméletében játszanak fontos szerepet (lásd például [Gu75] és [Gu81]). Ismeretes, hogy ha $\mathcal{B}$ rendelkezik a V_1-tulajdonsággal, akkor rendelkezik a sűrűségi tulajdonsággal is (amely azt jelenti, hogy mint differenciálbázis differenciálja a mérhető halmazok karakterisztikus függvényeit, azaz majdnem minden x-re $\frac{1}{|R_n|}\int_{R_n} f \to f(x)$, ha f mérhető halmaz karakterisztikus függvénye, $x \in R_n \in \mathcal{B}$ és az R_n halmazok átmérője nullához tart). Tehát az itt bevezetett minimális sűrűségi tulajdonságból következik a klasszikus sűrűségi tulajdonság. Az alábbi példa mutatja, hogy a megfordítás nem igaz.

Álljon $\mathcal{R}$ azokból a halmazokból a síkon, amelyek előállnak egy körlap és egy ugyanolyan középpontú, de kétszer akkora sugarú körcikk uniójaként. Mivel ezek a halmazok regulárisak abban az értelemben, hogy kitöltik egy négyzet területének egy rögzített részét, ezért ez a rendszer rendelkezik az összes szokásos szép tulajdonsággal, így a sűrűségi tulajdonsággal is. Viszont nem rendelkezik a minimális sűrűségi tulajdonsággal (és így a CV_q tulajdonsággal sem semmilyen $q \geq 1$-re), mert alkalmas körgyűrűt úgy le tudunk fedni ilyen halmazokkal, hogy a körgyűrű sűrűsége mindegyikben nagyon kicsi.

Tehát

1. A minimális sűrűségi tulajdonság szigorúan erősebb mint a sűrűségi tulajdonság.
2. A CV_q-tulajdonság szigorúan erősebb mint a V_q-tulajdonság.
3. A minimális sűrűségi tulajdonságot és a CV_q tulajdonságot nem lehet a harmonikus analízis hagyományos módszereivel bizonyítani.

Világos, hogy bármilyen $1 \le q < \infty$ esetén a CV_q-tulajdonságból következik a V_q-tulajdonság és a CV_1-tulajdonság. Talán kissé meglepő, hogy a megfordítás is igaz:

26. Tétel. *[Suppl-5, Corollary 4.12] Ha $\mathcal{B}$ rendelkezik a minimális sűrűségi tulajdonsággal (vagy az ezzel ekvivalens CV_1-tulajdonsággal),akkor*

$$V_q \Leftrightarrow CV_q \quad (1 \le q < \infty).$$

Tehát a 19. és 26. tételek együtt azt adják, hogy a tengelypárhuzamos téglák rendszere (más néven az erős bázis) rendelkezik a CV_q-fedési tulajdonsággal, amely bizonyos értelemben a legerősebb ismert fedési tulajdonsága az erős bázisnak:

27. Következmény. *[Suppl-5, Corollary 4.13] A tengelypárhuzamos téglák $\mathcal{I}^n$ rendszere $\mathbb{R}^n$-ben rendelkezik a CV_q-tulajdonsággal minden $1 \le q < \infty$-ra.*

Azaz minden $n \in \mathbb{N}$, $1 \le q < \infty$ és $\varepsilon > 0$-hoz megadható egy $C(n, q, \varepsilon)$ konstans, amelyre ha $\mathcal{R}$ n-dimenziós tengelypárhuzamos téglák olyan rendszere, amelyre $|\cup \mathcal{R}| < \infty$ akkor kiválasztható $R_1, \dots, R_m \in \mathcal{R}$ amelyre

$$\text{(i)} \quad |\cup_{k=1}^m R_k| \ge (1-\varepsilon)|\cup \mathcal{R}| \quad \text{és} \quad \text{(ii)} \quad \|\sum_{k=1}^m \chi_{R_k}\|_q \le C(n, q, \varepsilon)|\cup \mathcal{R}|^{1/q}.$$

A fenti eredmények mutatták a minimális sűrűségi tulajdonsági hasznosságát. Másfelől eddig csak a tengelypárhuzamos téglák rendszeréről láttuk be, hogy rendelkezik vele. Ráadásul a legkevésbé sem könnyű ezt a tulajdonságot bizonyítani még a legalapvetőbb halmazrendszerek esetén sem. A 25. Megjegyzésben láttuk, hogy azon halmazok rendszere, amelyek előállnak egy körlap és egy ugyanolyan középpontú, de kétszer akkora sugarú körcikk uniójaként, nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy ha a $\mathcal{B}$ halmazrendszer halmazai nem túl „szúrósak", akkor a rendszer rendelkezik a minimális sűrűségi tulajdonsággal.

28. Definíció. *Csöpp*ön egy pont és egy a pontot nem tartalmazó gömb uniójának konvex burkát értjük, a *csöpp szögé*n pedig azt a szöget értjük, amelyet a ponton és a gömb középpontján átmenő egyenes zár be a pontból húzott érintőkkel.

Legyen $0 < d < 1$ és $0 < \alpha < \pi/2$. Azt mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz (d, α)*-nem-szúrós*, ha H előáll legalább α szögű és legalább $d \cdot \mathrm{diam} H$ átmérőjű csöppök uniójaként.

29. Tétel. *[Suppl-6, Theorem 3] Tegyük fel, hogy a $\mathcal{R}$ halmazrendszer $\mathbb{R}^n$-beli korlátos átmérőjű (d, α)-nem-szúrós halmazokból áll. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra kiválasztható $R_1, \dots, R_m \in \mathcal{R}$ amelyekre*

(i)
$$|\cup_{k=1}^m R_k| \geq (1-\varepsilon)|\cup \mathcal{R}| \qquad \textit{és}$$

(ii) az $R_1, \ldots, R_m$ halmazok beoszthatóak M darab, páronként diszjunkt halmazokat tartalmazó halmazrendszerbe, ahol M csak n-től, d-től, α-től, és ε-től függ.

A következő állítás közvetlenül adódik a 29. tételből:

30. Következmény. *[Suppl-6, Corollary 5] Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $0 < d < 1$ és $0 < \alpha < \pi/2$ esetén $\mathbb{R}^n$-beli (d, α)-nem-szúrós halmazok tetszőleges rendszere rendelkezik a CV_∞ tulajdonsággal és így a CV_q tulajdonság is minden $1 \leq q < \infty$-ra és a mimimális sűrűségi tulajdonsággal is.*

Tehát a nem-szúrósság elégséges feltétel a mimimális sűrűségi tulajdonsághoz, de annál valójában sokkal erősebb. Másfelől igen nagy és alapvető osztályok is kielégítik ezt a feltételt. Példaként csak az alábbi osztályt említjük:

31. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *r-reguláris* ha van olyan $Q \supset R$ kocka, amelyre $|H|/|Q| > r$.

32. Következmény. *[Suppl-6, Corollary 8] Ha az $\mathcal{R}$ halmazrendszer $\mathbb{R}^n$-beli r-reguláris konvex nyílt halmazokból áll, akkor bármely $\varepsilon > 0$-ra megadható $\mathcal{R}$-nek M darab olyan részrendszere, amelyek mindegyike páronként diszjunkt halmazokból áll, és amelyek együtt $\cup\mathcal{R}$ legalább $1-\varepsilon$ részét fedik, ahol M csak n-től, r-től és ε-től függ.*

33. Következmény. *[Suppl-6, Corollary 9] Bármely $\mathbb{R}^n$-beli r-reguláris konvex nyílt halmazokból álló $\mathcal{R}$ halmazrendszer rendelkezik a CV_∞ tulajdonsággal és így a CV_q tulajdonsággal is minden $1 \leq q < \infty$-ra és a mimimális sűrűségi tulajdonsággal is.*

A bizonyítás során melléktermékként adódott az alábbi fordított izoperimetrikus egyenlőtlenség:

34. Következmény. *[Suppl-6, Corollary 12] Ha az E halmaz előáll $\mathbb{R}^n$-beli D átmérőjű r-reguláris nyílt halmazok uniójaként, akkor*
$$\frac{\tilde{A}_+(E)}{|E|} \leq \frac{C(n,r)}{D},$$
ahol $\tilde{A}_+(E)$ a Minkowski féle külső felszínt jelenti, azaz
$$\tilde{A}_+(E) = \limsup_{\delta \to 0+} \frac{|S(E,\delta)| - |E|}{\delta},$$
ahol $S(E,\delta)$ az E halmaz nyílt δ-környezetét jelöli.

35. Megjegyzés. A 34. Következmény speciális eseteként azt kapjuk például, hogy véges sok (nem feltétlenül tengelypárhuzamos) egységnégyzet uniójának kerület/terület hányadosa abszolút konstans alatt van. Ez a speciális eset bekerült az 1998-as Schweitzer verseny feladatai közé is. A [Suppl-6] cikkben az a kérdés is szerepel, hogy vajon a 4-e a legjobb konstans. Az eddigi legjobb eredmény Gyenes Zoltán nevéhez fűződik, aki azt látta be, hogy a legjobb konstans kisebb mint 5,6.

3.4. Önhasonló vagy önaffin halmaz két példányának metszete

Cantor-típusú halmazok metszetének vizsgálata mind a geometriai mértékelméletnek, mind a dinamikus rendszerek elméletének fontos témájává vált néhány éve (lásd például az [Ig03, LX99, Mo96, MY01, NL02, PS98] cikkeket). A [Suppl-7] cikkben azt vizsgáltuk Elekes Mártonnal és Máthé Andrással, hogy egy önhasonló vagy önaffin halmaz két példánya milyen mértékű halmazban metszi egymást, ahol mértéken valamelyik példányra természetesen illeszkedő önhasonló illetve önaffin mértéket értünk (lásd a definíciókat lejjebb). Kétféle eredményt bizonyítunk. Az egyik típus instabilitásról szól és azt mondja, hogy a metszet mértéke csak úgy lehet közel az eredeti halmaz mértékéhez, ha azt az elmozgatott példány teljesen lefedi. A másik pedig azt mondja, hogy a metszet speciális eseteket kivéve mindig nullmértékű. Vegyük észre, hogy mindezek a tulajdonságok szöges ellentétben állnak a hagyományos geometriai alakzatok tulajdonságaival.

36. Definíció. A $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz *önhasonló* ha $K = \phi_1(K) \cup \ldots \cup \phi_r(K)$, ahol $r \geq 2$ és $\phi_1, \ldots, \phi_r$ kontraktív hasonlóságok.

A $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz *önaffin* ha $K = \phi_1(K) \cup \ldots \cup \phi_r(K)$, ahol $r \geq 2$ és $\phi_1, \ldots, \phi_r$ injektív affin leképezések, amelyek valamilyen norma szerint mind kontrakciók.

K *elemi részei* a $(\phi_{i_1} \circ \ldots \circ \phi_{i_n})(K)$ alakú halmazok.

Azt mondjuk, hogy K *diszjunkt részekből áll*, ha a $\phi_1(K), \ldots, \phi_r(K)$ halmazok páronként diszjunktak.

Legyen $K = \phi_1(K) \cup \ldots \cup \phi_r(K)$ önhasonló/önaffin halmaz, és legyen $p_1 + \ldots + p_r = 1$, $p_i > 0$ minden i-re. Tekintsük az $\Omega = \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{N}}$ szimbolikus teret a szorzattopológiával és rajta azt a ν Borel valószínűségi mértéket, amelyet a $p(\{i\}) = p_i$ $(i \in \{1, \ldots, r\})$ diszkrét valószínűségi mértékek megszámlálható szorzataként kapunk. Ekkor a

$$\pi : \Omega \to K, \quad \{\pi(i_1, i_2, \ldots)\} = \cap_{n=1}^{\infty} (\phi_{i_1} \circ \ldots \circ \phi_{i_n})(K)$$

leképezés természetesen módon hozzárendeli az Ω szimbolikus tér pontjait a K önhasonló/önaffin halmaz pontjaihoz.

Legyen a μ mérték a ν mérték π leképezés szerinti képe, azaz minden $H \subset K$ Borel halmazra legyen

$$\mu(H) = \nu\big(\pi^{-1}(H)\big).$$

Az így kapott μ mértékeket hívjuk *önhasonló/önaffin mérték*eknek K-n.

Először diszjunkt részekből álló önaffin és önhasonló halmazokat vizsgálunk.

Az önaffin esetben az alábbi instabilitási eredményeket tudtuk bizonyítani:

37. Tétel. *[Suppl-7, Theorem 3.2] Legyen $K = \phi_1(K) \cup^* \ldots \cup^* \phi_r(K)$ diszjunkt részekből álló önaffin halmaz, μ pedig önaffin mérték K-n. Ekkor megadható olyan $c < 1$ konstans és a helybenhagyás leképezés egy U nyílt környezete a K által feszített affin alteret önmagába vivő affin leképezések terében, amelyre $g \in U \setminus \{helybenhagyás\} \Longrightarrow \mu\big(K \cap g(K)\big) < c$.*

38. Tétel. *[Suppl-7, Theorem 3.5] Legyen $K = \phi_1(K) \cup^* \ldots \cup^* \phi_r(K)$ diszjunkt részekből álló önaffin halmaz, μ pedig önaffin mérték K-n. Ekkor van olyan $c < 1$ konstans, amelyre bármely g egybevágóság esetén $\mu\big(K \cap g(K)\big) < c$ vagy $g(K) = K$.*

Önhasonló esetben egybevágóságok mellett hasonlóságokat is megengedhetünk:

39. Tétel. *[Suppl-7, Theorem 4.1] Legyen $K = \phi_1(K) \cup^* \ldots \cup^* \phi_r(K)$ diszjunkt részekből álló önhasonló halmaz, μ pedig önhasonló mérték K-n. Ekkor van olyan $c < 1$ konstans, amelyre bármely g hasonlósági transzformáció esetén $\mu\big(K \cap g(K)\big) < c$ vagy $K \subset g(K)$.*

Ennek az eredménynek a segítségével sikerült bizonyítani, hogy önhasonló esetben a metszet csak azokban a triviális esetekben lehet pozitív mértékű, amikor a metszet egy teljes elemi rész tartalmaz, vagyis amikor a metszet relatív belseje nem üres:

40. Tétel. *[Suppl-7, Theorem 4.5] Legyen $K = \phi_1(K) \cup^* \ldots \cup^* \phi_r(K)$ diszjunkt részekből álló önhasonló halmaz, μ önhasonló mérték K-n, g pedig hasonlósági transzformáció. Ekkor $\mu\big(g(K) \cap K\big) > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $g(K) \cap K$ relatív belseje K-ban nem-üres.*

A következő egyszerű lemma önmagában is érdekes lehet. Azt mondja ki, hogy halmazon értelmezett Borel mérték csak akkor nem terjed ki invariáns mértékké a teljes térre, ha már a halmazon belül sem invariáns.

41. Lemma. *[Suppl-7, Lemma 2.18] Legyen μ Borel mérték az $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel halmazon, G pedig legyen $\mathbb{R}^n$ affin transzformációinak egy részcsoportja. Pontosan akkor terjeszthető ki μ az egész $\mathbb{R}^n$-re G-invariáns Borel mértékként, ha*

$$\mu\big(g(B)\big) = \mu(B) \text{ valahányszor } B \subset G \text{ Borel halmaz}, g \in G \text{ és } g(B) \subset A.$$

Érdekességképpen bemutatjuk a lemma egy furcsa közvetlen alkalmazását.

42. Lemma. *[Suppl-7, Lemma 2.21] Tegyük föl, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$ olyan Borel halmaz, amelyre $A \cap (A+t)$ megszámlálható minden $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-re. Ekkor bármely A-n értelmezett folytonos (azaz az egy pontú halmazokon eltűnő) μ Borel mérték kiterjeszthető a teljes $\mathbb{R}^n$-re eltolás-invariáns Borel mértékké.* □

Bár a tétel feltétele látszólag csak rendkívül kicsi halmazokra teljesülhet, de emlékezzünk vissza, hogy az 1. Tétel szerint van például olyan 1 Hausdorff-dimenziójú $C \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, amelyre $C \cap (C+t)$ legfeljebb 1 pontú minden $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$-re. Tehát az 1. Tétel és a 42. lemma együtt a következő furcsaságot adja:

43. Következmény. *[Suppl-7, Corollary 2.22] Van olyan 1 Hausdorff-dimenziójú $C \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, amelyen definiált bármely folytonos (azaz az egy pontú halmazokon eltűnő) μ Borel mérték kiterjeszthető a teljes számegyenesen eltolás-invariáns Borel mértékké.*

A fentieknél lényegesen nehezebben, a 41. lemma valamint korábbi tételek segítségével jellemezhetőek az egybevágóság invariáns mértékké kiterjeszthető önhasonló mértékek egy önhasonló halmazon:

44. Tétel. *[Suppl-7, Theorem 5.3] Legyen $K = \phi_1(K) \cup^* \ldots \cup^* \phi_r(K)$ diszjunkt részekből álló önhasonló halmaz, μ pedig önhasonló mérték K-n. A μ mérték pontosan akkor terjeszthető ki a teljes $\mathbb{R}^n$-re eltolásinvariáns mértékként, ha K egybevágó elemi részeinek megegyezik a mértéke.*

A tételben szereplő feltétel viszonylag könnyen ellenőrizhető, mert egyrészt két elemi rész pontosan akkor egybevágó, ha a megfelelő hasonlósági arányok szorzata megegyezik, másrészt az elemi részek mértékét tudjuk: $\mu((\phi_{i_1} \circ \ldots \circ \phi_{i_n})(K)) = p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}$.

A negyedik fejezet eddig ismertetett eredményeinél szükségünk volt arra, hogy az önhasonló illetve önaffin halmazunk diszjunkt részekből álljon, emellett az eredmények nagy részét csak önhasonló halmazokra láttuk be. Az alábbiakban önaffin halmazok egy olyan osztályára fogunk hasonló eredményeket bizonyítani, amelyek nem feltétlenül diszjunk részekből állnak.

Osszuk fel a $[0,1]^n$ egységkockát $m_1 \times \ldots \times m_n$ egyforma téglára és hagyjunk el közülük néhányat. Ezután csináljuk meg ugyanezt minden megmaradt téglával, ugyanazon minta szerint hagyva el kis téglákat mint az első lépésben. És így tovább. A végtelen sok lépés után maradt önaffin halmazt nevezzük Sierpiński-szivacsnak. A precízebb definíció a következő:

45. Definíció. *Önaffin Sierpiński-szivacs*nak az alábbi módon megkapható önaffin halmazokat hívjuk. Legyenek $n, r \in \mathbb{N}$, $m_1, m_2, \ldots, m_n \geq 2$ egészek, M pedig legyen az

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{pmatrix},$$

$n \times n$-es diagonális matrix által meghatározott lineáris transzformáció, továbbá legyen

$$D = \{d_1, \ldots, d_r\} \subset \{0, 1, \ldots, m_1 - 1\} \times \ldots \times \{0, 1, \ldots, m_n - 1\}$$

adott. Legyen $\phi_j(x) = M^{-1}(x + d_j)$ $(j = 1, \ldots, r)$. Az így kapott $K(M, D) = K = \phi_1(K) \cup \ldots \cup \phi_r(K)$ önaffin halmazt hívjuk Sierpiński-szivacsnak.

A $K = K(M, D)$ önaffin szivacson *természetes* valószínűségi mértéken azt az önaffin mértéket érjük, amelynél $p_j = \frac{1}{r}$ $(j = 1, \ldots, r)$.

Ezeket a halmazokat, melyeket a síkon Bedford-McMullen-szőnyegnek is neveznek, sokat vizsgálták. A Hausdorff és Minkowski dimenziójukat a [Be84], [Mu84] és [KP96] cikkekben határozták meg. A [GL92], [Pe94H] és [Pe94P] cikkekben pedig olyan eredményeket bizonyítottak, amelyek azt mondják, hogy bizonyos speciális eseteket leszámítva semelyik szokásos mérték (Hausdorff, pakolási) szerint sincs pozitív de véges mértéke egy ilyen halmaznak.

Elekes Mártonnal [EK06] azt mutattuk meg, hogy bizonyos szép halmazokat – többek között a Liouville számok halmazát - szintén nem méri jól egyik szokásos mérték sem, mégpedig azért nem, mert ezek a halmazok *mérhetetlenek* abban az értelemben, hogy tetszőleges eltolásinvariáns Borel-mérték esetén nulla vagy nem σ-véges a Borel-mértékűk. (Az már sokkal korábban ismert volt, hogy létezik ilyen tulajdonságú kompakt halmaz a számegyenesen [Da71].)

Ezek után természetesen vetődött fel a kérdés, hogy vajon a Sierpiński szivacsok is mérhetetlenek-e. Látni fogjuk, hogy a válasz negatív. Ennek bizonyítására az első utunk önaffin szivacsok metszetének vizsgálatán keresztül vezetett: azt vizsgáltuk hogy mikor metszheti egy eltolt az eredeti halmazt a természetes mérték szerint pozitív mértékű halmazban. Bár a fenn említett (nem-mérhetetlenségi) eremdényt később sokkal egyszerűbben közvetlenül is tudtuk igazolni, de az útközben elért eredmények valószínűleg mélyebbek és alapvetőbbek.

A későbbi állítások kulcsa az alábbi struktúra-tétel, amely azt mondja ki, hogy az eltolt az eredeti halmazt csak kivételes esetekben metszheti pozitív mértékű halmazban.

46. Tétel. *[Suppl-7, Theorem 7.4] Legyen μ természetes valószínűségi mérték a $K \subset \mathbb{R}^n$ önaffin Sierpiński-szivacson és legyen $t \in \mathbb{R}^n$.*

Ekkor $\mu\big(K \cap (K+t)\big) = 0$, kivéve esetleg az alábbi speciális esetekben:
(i) Megadhatóak S_1 és S_2 elemi részei K-nak, melyekre $S_2 = S_1 + t$.
(ii) A K önaffin szivacs szivacs $K = L \times K_0$ alakú, ahol L a $[0,1]^l$ egységkocka egyik testátlója ($l \in \{1, 2, \ldots, n\}$), K_0 pedig kisebb dimenziós önaffin Sierpiński-szivacs.

A 46. Tétel és a 41. Lemma felhasználásával ki tudjuk terjeszteni a természetes mértéket elotlásinvariáns mértékké, így az adódik, hogy a Sierpiński-szivacsok nem mérhetetlenek:

47. Tétel. *[Suppl-7, Theorem 8.1] Bármely $K \subset \mathbb{R}^n$ Sierpiński-szivacshoz megadható $\mathbb{R}^n$-en eltolás-invariáns Borel mérték, amelyre $\nu(K) = 1$.*

Bár a 46. Tétel eredeti motivációja a 47. Tétel volt, de fontosabbak és mélyebbek azok az állítások, amelyek hasonlóak az önhasonló halmazoknál korábban említett eredményekhez.

A 46. Tételből viszonylag egyszerűen következik a 40. Tétel alábbi megfelelője:

48. Következmény. *[Suppl-7, Corollary 7.7] Legyen μ természetes valószínűségi mérték a $K \subset \mathbb{R}^n$ önaffin Sierpiński-szivacson és legyen $t \in \mathbb{R}^n$.*

Ekkor a $K \cap (K+t)$ halmaz pontosan akkor pozitív μ-mértékű, ha nem-üres a relatív belseje K-ban (vagy más szóval, ha teljesen tartalmazza K valamely elemi részét).

A 38. tételhez hasonló instabilitási eredmény nem igaz minden Sierpiński-szivacsra. Könnyen látható, hogy a 46. Tétel kivételes szivacsai itt is ellenpéldák. A következő tétel azt mondja, hogy más ellenpélda nincs:

49. Tétel. *[Suppl-7, Theorem 7.9] Legyen μ természetes valószínűségi mérték a (45. Definíció szerint megadott) $K = K(M, D) \subset \mathbb{R}^n$ önaffin Sierpiński-szivacson és legyen $t \in \mathbb{R}^n$.*

Ekkor $\mu\big(K \cap (K+t)\big) \leq 1 - \frac{1}{r^2}$ (ahol r jelöli D elemszámát, vagyis az első lépésben meghagyott téglák számát) kivéve esetleg az alábbi két triviális esetben:
(i) $t = 0$,
(ii) a K önaffin szivacs szivacs $K = L \times K_0$ alakú, ahol L a $[0,1]^l$ egységkocka egyik átlója ($l \in \{1, 2, \ldots, n\}$), K_0 pedig kisebb dimenziós önaffin Sierpiński-szivacs.

3.5. Függvények felbontása mérhető egész értékű függvények összegére

50. Definíció. Legyenek $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ adott periódusok.

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek van $(a_1, \ldots, a_k)$-*felbontás*a, ha $f = f_1 + \ldots + f_k$ alakba írható, ahol minden j-re f_j periodikus a_j szerint.

*Egész értékű / mérhető / korlátos /... felbontás*ról beszélünk, ha minden f_j egész értékű / mérhető / korlátos /... .

Azon függvények vizsgálatát, melyek előállnak adott tulajdonságú adott periódusú periodikus függvények összegeként Ruzsa Z. Imre kezdte el még a hetvenes években. Ha f-nek van $(a_1, \ldots, a_n)$-periodikus felbontása, akkor

$$\Delta_{a_1} \Delta_{a_2} \cdots \Delta_{a_n} f = 0, \quad \text{ahol} \quad \Delta_{a_j} f(x) = f(x + a_j) - f(x), \tag{1}$$

mert a Δ_{a_j} differenciaoperátorok egymással felcserélhetőek.

51. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ függvényosztály rendelkezik a *felbontási tulajdonság*gal, ha valahányszor egy $f \in \mathcal{F}$ függvényre teljesül (1), akkor f-nek van $\mathcal{F}$-beli $(a_1, \ldots, a_k)$-periodikus felbontása.

Miután az $f(x) = x$ függvényre $\Delta_1 \Delta_1 f = 0$, de nyilván nem áll elő két 1-szerint periodikus függvény összegeként, sok természetes függvényosztály (pl. folytonos/mérhető/tetszőleges $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények) nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Sok viszont igen: Laczkovich Miklós és Révész Szilárd [LR89, LR90] 20 éve bizonyították, hogy a korlátos folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, a korlátos mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények és a tetszőleges korlátos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények osztálya igen.

Egész értékű függvényekre azt bizonyítottuk [KKKR]-ban, hogy a korlátos $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvények osztálya rendelkezik, viszont a korlátos $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvények osztálya nem rendelkezik a felbontási tulajdonsággal.

Most azt fogjuk megvizsgálni, hogy vajon ha egy egész értékű (vagy legalább majdnem mindenütt egész értékű) függvénynek van *valós* értékű $(a_1, \ldots, a_k)$-felbontása, akkor következik-e ebből, hogy van *egész* értékű (vagy legalább majdnem mindenütt egész értékű) mérhető $(a_1, \ldots, a_k)$-felbontása is. A következő eredmény azt mutatja, hogy ez teljes általánosságban már $k = 3$-ra sem igaz:

52. Tétel. *[Suppl-8, Theorem 1.2] Van olyan egész értékű korlátos Lebesgue mérhető függvény a számegyenesen, amely előáll három valós értékű korlátos mérhető periodikus függvény összegeként, de nem áll elő három majdnem mindenütt egész értékű mérhető ugyanilyen periódusú periodikus függvény összegeként.*

Mivel a valós értékű $(a_1, \ldots, a_k)$-felbontásból következik (1), ezért az alábbiak azonnal adódnak:

53. Következmény. *[Suppl-8, Corollary 1.3] A következő függvényosztályok nem rendelkeznek a felbontási tulajdonsággal:*

- $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \mid f$ *korlátos és mérhető*$\}$,
- $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \mid f \in L_\infty\}$,
- $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *korlátos, mérhető és majdnem mindenütt egész értékű*$\}$, *és*
- $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \in L_\infty$ *és* f *majdnem mindenütt egész értékű*$\}$.

Maga a példa az 52. Tételnél igen egyszerű:

$$f(x) = \{tx\} + \{(1-t)x\} + \{-x\},$$

ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tetszőleges.

Ezek után a továbbiakban az a célunk, hogy jellemezzük azokat az $(a_1, \ldots, a_k)$ periódus k-asokat, amelyekre egy $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvény valós értékű mérhető $(a_1, \ldots, a_k)$-felbontásának létezéséből következik egész értékű (vagy legalább majdnem mindenütt egész értékű) felbontás létezése.

Ha megelégszünk majdnem mindenütt egész értékű felbontással, akkor a következő karakterizációt kapjuk:

54. Tétel. *[Suppl-8, Theorem 2.5] Bármely $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ periódus k-asra az alábbi hét állítás ekvivalens:*

$(i)/(i')$ Ha egy mindenütt/majdnem mindenütt egész értékű mérhető f függvénynek van mérhető valós értékű $(a_1, \ldots, a_k)$-felbontása, akkor van mérhető majdnem mindenütt egész értékű $(a_1, \ldots, a_k)$-felbontása is.

$(ii)/(ii')$ Ha egy mindenütt/majdnem mindenütt egész értékű mérhető f függvénynek van korlátos mérhető valós értékű $(a_1, \ldots, a_k)$-felbontása, akkor van korlátos mérhető majdnem mindenütt egész értékű $(a_1, \ldots, a_k)$-felbontása is.

$(iii)/(iii')$ Egy mindenütt/majdnem mindenütt egész értékű korlátos mérhető f függvénynek pontosan akkor van van korlátos mérhető majdnem mindenütt egész értékű $(a_1, \ldots, a_k)$-felbontása, ha $\Delta_{a_1} \ldots \Delta_{a_k} f = 0$, ahol $\Delta_a f(x) = f(x+a) - f(x)$.

(iv) Ha $B_1, \ldots, B_n$ a $\{a_1, \ldots, a_k\}$ halmaz $a \sim b \Leftrightarrow a/b \in \mathbb{Q}$ reláció szerinti ekvivalenciaosztályai és b_j jelöli minden j-re a B_j-beli számok legkisebb közös többszörösét, akkor az $\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_n}$ számok lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.

A bizonyításhoz többek között az alábbi önmagában is érdekesnek tűnő állításra volt szükség:

55. Tétel. *[Suppl-8, Theorem 2.3] Tegyük fel, hogy $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_k}$ lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett, $f_1, \ldots, f_k$ olyan mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, amelyek összege majdnem mindenütt egész értékű függvény, valamint hogy minden j-re az f_j függvény a_j szerint periodikus.*

Ekkor minden f_j függvény törtrésze majdnem mindenütt konstans.

Ebből a tételből melléktermékként adódik az alábbi:

56. Következmény. *[Suppl-8, Corollary 2.4] Bármely $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ periódus k-asra az alábbi két állítás ekvivalens:*

(i) Ha $f_1 + \ldots + f_k = g_1 + \ldots + g_k$ és minden j-re, f_j és g_j a_j-periodikus mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ függvények, akkor $f_j - g_j$ majdnem mindenütt konstans minden j-re.

(ii) $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_k}$ lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.

Ahhoz, hogy mindenütt egész értékű felbontást kapjunk, a kivételes nullmértékű halmazon kell tetszőleges egész értékű felbontást találni. Ezért ehhez a megfelelő nem mérhető kérdést kell tisztázni.

Károlyi, Keleti, Kós és Ruzsa [KKKR] egy eredménye szerint egy egész értékű függvény korlátos valós értékű felbontásának létezéséből nem mindig következik korlátos egész értékű felbontás ugyanezekkel a periódusokkal. Ezt is felhasználva a következő bizonyítható:

57. Állítás. *[Suppl-8, Proposition 3.4] Vannak olyan $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ periódusok, amelyekre $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}$ és $\frac{1}{a_3}$ lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett, és amelyekhez van olyan $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ függvény, amelynek van korlátos mérhető valós értékű (a_1, a_2, a_3)-periodikus felbontása, de nincs korlátos mérhető egész értékű (a_1, a_2, a_3)-periodikus felbontása.*

Tehát az 54. Tétel (ii) és (iii) pontjában nem hagyható el, hogy „majdnem mindenütt".

Később Harangi Viktornak [Ha10] (lásd még [Ha07]) sikerült jellemeznie azokat az $(a_1, \dots, a_k)$ periódus k-asokat, amelyekre a korlátos valós értékű $(a_1, \dots, a_k)$-felbontás létezéséből következik az egész értékű $(a_1, \dots, a_k)$-felbontás létezése. Ezt és az 54. Tételt használva sikerült (elég bonyolult algebrai számelméleti) jellemzést adnia azokról az $(a_1, \dots, a_k)$ periódus k-asokról, amelyekre (*ii*) és (*iii*) mindenütt egész értékű variánsa teljesül.

Az 54. Tétel (*i*) részének mindenütt egész értékűvé tételéről az alábbi állítást sikerült először bizonyítani:

58. Állítás. *[Suppl-8, Proposition 3.3] A következő két kérdés ekvivalens:*

(∗) Elhagyható-e a „majdnem mindenütt" az 54. Tétel (i) pontjából?

(∗∗) Igaz-e minden *$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ periódus k-asra, hogy ha egy egész értékű függvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvénynek van valós értékű $(a_1, \dots, a_k)$-periodikus felbontása, akkor van egész értékű $(a_1, \dots, a_k)$-periodikus felbontása is?*

Nem sokkal később Farkas Bálinttal, Harangi Viktorral és Révész Szilárddal sikerült (∗∗)-ra pozitív választ adnunk, amelyből tehát következett pozitív válasz (∗)-ra is:

59. Tétel. *[FHKR, Corollary 4.3] Tetszőleges $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ periódus k-as esetén a következő állítás is ekvivalens az 54. Tétel hét állításával:*

(*i″*) *Ha egy egész értékű függvénynek van mérhető valós értékű $(a_1, \dots, a_k)$-felbontása, akkor van mérhető egész értékű $(a_1, \dots, a_k)$-felbontása is.*

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani Surányi Lászlónak és Laczkovich Miklósnak, akik a matematikát illetve a valós függvénytant és a geometriai mértékelméletet megismertették velem. Valójában messze nemcsak matemikát kaptam tőlük. Sokat tanultam David Preisstól és Cliff Weiltól is, valamint a fiatalabb generáció tagjaitól is, akik, miközben vagy miután tanítványaim voltak, munkatársaim is lettek: Csörnyei

Mariannától, Abért Miklóstól, Elekes Mártontól, Ruzsa Zoltántól, Mátrai Tamástól, Máthé Andrástól, Gyenes Zoltántól, Harangi Viktortól és Maga Pétertől. Hálás vagyok a többi szerzőtársamnak is: Udayan B. Darjinak, Prokaj Vilmosnak, Petr Holickýnak, Károlyi Gyulának, Mihalis N. Kolountzakisnak, Kós Gézának, Ruzsa Z. Imrének, Farkas Bálintnak, Révész Gy. Szilárdnak és Elliot Paquette-nek.

Köszönettel tartozom Maarit és Esa Järvenpäänak, valamint a Jyväskyläi Egyetemnek, ahol a disszertációt összeállítottam. Hálás vagyok az Eötvös Loránd Tudományegyetemnek, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetnek, a Univerity Collage Londonnak, a Michigan State Universitynek és a Krétai Egyetemnek, hogy kutatásaimnak teret adtak. Munkámot számos OTKA pályázat, Széchenyi Professzori Ösztöndíj és két Bolyai János Kutatási Ösztöndíj is támogatta. Szeretném megköszönni Gémes Margit, Tóth Árpád és Elekes Márton technikai segítségét is.

Leghálásabb Szüleimnek, feleségemnek Gabinak, valamit gyermekeimnek Hangának és Domának vagyok a támogatásért, inspirációért és a biztos, meleg családi háttérért.

4. A disszertációhoz kapcsolódó publikációk

A disszertáció a mellékletként csatolt [Suppl-1],…,[Suppl-8] cikkekben található kutatási eredményeken alapul.

Hivatkozások

[Suppl-1] T. Keleti, A 1-dimensional subset of the reals that intersects each of its translates in at most a single point, *Real Anal. Exchange* **24** (1998/99), 843–844.

[Suppl-2] T. Keleti, Construction of one-dimensional subsets of the reals not containing similar copies of given patterns, *Analysis & PDE* **1** (2008), 29–33.

[Suppl-3] U.B. Darji és T. Keleti, Covering $\mathbb{R}$ with translates of a compact set, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 8, 2598–2596.

[Suppl-4] M. Abért és T. Keleti, Shuffle the plane, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 549–553.

[Suppl-5] T. Keleti T, Density and covering properties of intervals of $\mathbb{R}^n$, *Mathematika* **47** (2000), 229-242.

[Suppl-6] T. Keleti, A covering property of some classes of sets in $\mathbb{R}^n$, *Acta Univ. Carol., Math. Phys.* **39** (1998), 111-118.

[Suppl-7] M. Elekes, T. Keleti, A. Máthé, Self-similar and self-affine sets; measure of the intersection of two copies, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, megjelenés alatt.

[Suppl-8] T. Keleti, Periodic decomposition of measurable integer valued functions, *J. Math. Anal. Appl.* **337** (2008), 1394-1403.

[Ab02] M. Abért, Symmetric groups as products of abelian subgroups, *Bull. London Math. Soc.* **34** (2002), no. 4, 451–456.

[Be84] T. Bedford, *Crinkly curves, Markov partitions and box dimension in self-similar sets*, Ph. D. Thesis, University of Warwick, 1984.

[BK06] A. Bisbas, M.N. Kolountzakis, Avoiding affine copies of infinite sequences, unpublished manuscript, 2006.

[Bo87] J. Bourgain, Construction of sets of positive measure not containing an affine image of a given infinite structure, *Israel J. Math.* **60** (1987), 3, 333–344.

[CCW] A. Carbery, M. Christ és J. Wright, Multidimensional van der Corput and sublevel set estimates, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 4, 981-1015.

[CF75] A. Córdoba, R. Fefferman, A geometric proof for the strong maximal theorem, *Ann. of Math.* **102** (1975), 95-100.

[CN95] D. Cruz-Uribe, SFO és C. J. Neugebauer, The structure of the reverse Hölder classes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 2941-2960.

[Da71] R. O. Davies, Sets which are null or non-sigma-finite for every translation-invariant measure, *Mathematika* **18** (1971), 161–162.

[EK06] M. Elekes és T. Keleti, Borel sets which are null or non-σ-finite for every translation invariant measure, *Adv. Math.* **201** (2006), 102-115.

[ES04] M. Elekes és J. Steprāns, Less than 2^ω many translates of a compact nullset may cover the real line, *Fund. Math.* **181** (2004), 89–96.

[Er64] P. Erdős, On extremal problems of graphs and generalized graphs, *Israel J. Math.* **2** (1964), 183-190.

[Er74] P. Erdős, Remarks on some problems in number theory, *Math. Balkanica* **4** (1974), 197-202.

[EK57] P. Erdős és S. Kakutani, On a perfect set, *Colloq. Math.* **4** (1957), 195–196.

[Fa84] K.J. Falconer, On a problem of Erdős on sequences and measurable sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* **90** (1984), 77–78.

[Fa85] K. J. Falconer, Classes of sets with large intersection, *Mathematika* **32** (1985), no. 2, 191–205.

[Fa90] K.J. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, 1990.

[FHKR] B. Farkas, V. Harangi T. Keleti, Sz. Gy. Révész, Invariant decomposition of functions with respect to commuting invertible transformations, *Proc. Amer. Math Soc.* **136** (2008), 1325-1336.

[FW09] D-J. Feng és Y. Wang, On the structures of generating iterated function systems of Cantor sets, *Adv. Math.* **222** (2009), 1964-1981.

[Fu70] H. Furstenberg, Intersections of Cantor sets and transversality of semigroups, *Problems in analysis (Sympos. Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969)*, pp. 41-59, Princeton Univ. Press, 1970.

[GL92] D. Gatzouras és S. Lalley (1992), Hausdorff and box dimensions of certain self-affine fractals, *Indiana University Math. J.* **41** (1992), 533–568.

[Ga92] Z. Gajda, Note on decomposition of bounded functions into the sum of periodic terms, *Acta Math. Hungar.* **59** (1992), no. 1-2, 103–106.

[Gu74] M. de Guzmán, An inequality for the Hardy-Littlewood maximal operator with respect to a product of differentiation bases, *Studia Math.* **49** (1974), 185-194.

[Gu75] M. de Guzmán, *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$, Springer, Lecture Notes in Mathematics Vol. 481, Berlin, 1975.

[Gu81] M. de Guzmán, *Real Variable Methods in Fourier Analysis*, North-Holland, Mathematics Studies Vol. 46, Amsterdam, 1981.

[Gy10] Z. Gyenes, The ratio of the perimeter and area of unions of copies of a fixed set, *Discrete Comput. Geom.*, megjelenés alatt.

[Ha10] V. Harangi, *On the uniqueness of periodic decomposition*, benyújtva.

[Ha07] V. Harangi, Periodic decomposition of functions, *Real Anal. Exchange* 2007, 31st Summer Symposium Conference, 185-188.

[HL98] P.D Humke és M. Laczkovich, A visit to the Erdős problem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 3, 819–822.

[Hu81] J. E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), no. 5, 713–747.

[Ig03] K. Igudesman, Lacunary self-similar fractal sets and its application to intersection of Cantor sets, *Lobachevskii J. Math.* **12** (2003), 41–50.

[Ja99] M. Järvenpää, Hausdorff and packing dimensions, intersection measures, and similarities, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **24** (1999), no. 1., 165–186.

[KKKR] Gy. Károlyi, G. Kós, T. Keleti, I. Z. Ruzsa, Periodic decomposition of integer valued functions, *Acta Math. Hung.* **119** (2008), no. 3, 227-242.

[Ke97] T. Keleti On the differences and sums of periodic measurable functions, *Acta Math. Hung.* **75** (4) (1997), 279–286.

[KP96] R. Kenyon és Y. Peres, Measures of full dimension on affine-invariant sets, *Ergodic Theory Dynamical Syst.* **16** (1996), 307–323.

[Ko97] M.N. Kolountzakis, Infinite patterns that can be avoided by measure, *Bull. London Math. Soc.* **29** (1997), 4, 415–424.

[Ko83] P. Komjáth, Large sets not containing images of a given sequence, *Canad. Math. Bull.* **26** (1983), 41–43.

[Ko02] P. Komjáth, Five degrees of separation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 2413–2417.

[Ku06] G. Kun, A surprising covering of the real line, *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), 3555–3559.

[LP09] I. Laba és M. Pramanik, Arithmetic progressions in sets of fractional dimension, *Geom. Funct. Anal.* **19** (2009), 429-456.

[LR89] M. Laczkovich, Sz.Gy. Révész, Periodic decompositions of continuous functions, *Acta Math. Hungar.* **54** (1989), no. 3-4, 329–341.

[LR90] M. Laczkovich, Sz. Gy. Révész, Decompositions into periodic functions belonging to a given Banach space, *Acta Math. Hung.* **55** (3-4) (1990), 353–363.

[LW96] J. C. Lagarias és Y. Wang, Self-affine tiles in R^n, *Adv. Math.* **121** (1996), no. 1, 21–49.

[LX99] W. Li és D. Xiao, Intersection of translations of Cantor triadic set, *Acta Math. Sci. (English Ed.)* **19** (1999), no. 2, 214–219.

[MaP] P. Maga, *Full dimensinal sets without given patterns*, előkészületben.

[Ma82] P. Mattila, On the structure of self-similar fractals, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **7** (1982), no. 2., 189–195.

[Ma84] P. Mattila, Hausdorff dimensions and capacities of intersections of sets in n-space, *Acta Math.* **152** (1984), no. 1-2, 77–105.

[M85] P. Mattila, On the Hausdorff dimension and capacities of intersections, *Mathematika* **32** (1985), no. 2, 213–217.

[Ma95] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 44), Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[MaA] A. Máthé, Covering the real line with translates of a zero-dimensional set, *Fund. Math.*, megjelenés alatt.

[Mu84] C. McMullen, The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets, *Nagoya Math. J.* **96** (1984), 1–9.

[Mo96] C. G. T. de A. Moreira, Stable intersections of Cantor sets and homoclinic bifurcations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **13** (1996), 741–781.

[MY01] C. G. T. de A. Moreira és J-C. Yoccoz, Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions, *Ann. of Math. (2)* **154** (2001), no. 1, 45–96.

[NL02] F. Nekka és J. Li, Intersection of triadic Cantor sets with their translates. I. Fundamental properties, *Chaos Solitons Fractals* **13** (2002), no. 9, 1807–1817.

[PS98] Y. Peres és B. Solomyak, Self-similar measures and intersections of Cantor sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, 4065–4087.

[Pe94P] Y. Peres, The packing measure of self-affine carpets, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **115** (1994), no. 3, 437–450.

[Pe94H] Y. Peres, The self-affine carpets of McMullen and Bedford have infinite Hausdorff measure, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **116** (1994), 513–526.

[Re58] I. Reiman, Über ein problem von K. Zarankiewicz, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 269-273.

[Sv00] R.E. Svetic, The Erdős similarity problem: a survey, *Real Anal. Exchange* **26** (2000/01), 525–539.