Opponensi Vélemény
Keleti Tamás
Translations, measure and dimension
doktori értekezéséről

Az értekezés olvasójában az az érzés támadhat, hogy Keleti Tamás patológikus halmazok csak keveseket érdeklő patológikus tulajdonságait kutatja. Ha azonban arra gondolunk, hogy a fraktálokról, mint a természeti sőt a társadalmi folyamatok leírására alkalmasnak tartott objektumokról napjainkban mennyi sokat idézett és matematikailag távolról sem korrekt dolgozat jelenik meg, akkor beláthatjuk, hogy az értekezés témaválasztása rendkívül aktuális. Az értekezés öt fejezete közül az első négy valamilyen kapcsolatban áll a fraktálokkal, a negyedik fejezet éppen a különösen népszerű a Sierpiński szivaccsal foglalkozik. Minden ezen a területen elért egzakt matematikai eredmény hozzájárul a fraktálokkal kapcsolatos esetleges félreértések eloszlatásához. Az értekezésben bizonyított topológiai és mértékelméleti tételeknek néha meglepő következményei vannak más matematikai diszciplinákban, ilyen pl. az egy tisztán algebrai állítást megfogalmazó 2.9 Korollárium.

Az értekezés mintegy harminc, a szerzőtől származó állítást (tételt, lemmát korolláriumot) ismertet, ezek közül a legmeglepőbb tizenkettőről írok részletesebben.

Az értekezés 1. Fejezete olyan "nagy" halmazok keresésével foglakozik, amelyek nem tartalmaznak egy adott mintát. A Lebesgue-féle sűrűségi tétel segítségével könnyen bizonyítható, hogy az $\mathbb{R}$ valós számegyenes minden pozitív Lebesgue-mértékű halmaza tartalmazza egy tetszőleges véges halmaz valamely hasonló kópiáját. (A továbbiakban a jelző nélküli mérték mindig a Lebesgue-mértek.) A pozitív mértékű $\mathbb{R}$-beli halmazok Hausdorff-dimenziója 1, ismeretes, hogy léteznek $\mathbb{R}$-beli 0 mértékű 1 Hausdorff-dimenziójú halmazok, ezek még mindig "nagy" halmazoknak tekinthetők. A Fejezet 1.1 Tétele – Mattila tételenek élesítése – szerint van az $\mathbb{R}$-nek olyan kompakt 1 Hausdorff-dimenziójú A részhalmaza, amely minden eltoltját (az identikus eltolás kivételével) legfeljebb egy pontban metszi. A bizonyítás az A halmaz rekurzív konstrukciójában szereplő részhalmazok ötletes indexelésével az ún. "ördög játéka" ideáját követi.

Erdős egy sejtése szerint tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ végtelen halmazhoz van olyan pozitív mértékű halmaz $E \subset \mathbb{R}$ halmaz, amely nem tartlamazza A

egyetlen hasonló kópiáját sem. A sejtés máig nyitott, a Fejezet 1.4 Korolláriuma a következő ennél részben erősebb, részben gyengébb affirmatív eredményt mondja ki: minden $B \subset \mathbb{R}$ legalább 3 elemű halmazhoz van olyan 1 Hausdorff-dimenziójú kompakt halmaz, amely B tetszőleges hasonló kópiáját legfeljebb két pontban metszi.

A 2. Fejezet az $\mathbb{R}$ valós számegyenes "kis" halmazaival történő lefedésének lehetőségét vizsgálja. A vizsgálatokat Gary Gruenhage egy észrevétele motiválta: az az állítás, hogy $\mathbb{R}$ egy adott pozitív mértékű részhalmazának kontinuumnál kisebb számosságú eltolása lefedi $\mathbb{R}$-t, konzisztens a ZFC axiómákkal. Gruenhage a következő kérdést fogalmazta meg: igaz-e, hogy $\mathbb{R}$ nem lehet egy 0 mértékű halmaz kontinuumnál kisebb számosságú eltoltjainak egyesítése. Mivel a kontinuum hipotézis implikálja kérdésre adott pozitív választ, a negatív válaszhoz extra halmazelméleti feltevésekre van szükség. Ezért a 0 mértékű halmaznál "kisebb" halmazokra érdemes a kérdést megfogalmazni: igaz-e, hogy $\mathbb{R}$ nem lehet egy 1-nél kisebb Hausdorff-dimenziójú halmaz kontinuumnál kisebb számosságú eltoltjainak egyesítése. Ez az allítás nem igaz. Viszont – mivel a pakolási dimenzió általában nagyobb, mint a Hausdorff-dimenzió – remélhető, hogy $\mathbb{R}$ nem lehet egy 1-nél kisebb pakolási dimenziójú halmaz kontinuumnál kisebb számosságú eltoltjainak egyesítése. Ez az állítás a Fejezet 2.3 Tétele. A 2.4 Tétel ennél többet állít: $\mathbb{R}$ nem lehet egy 1-nél kisebb Hausdorff-dimenziójú halmaz kontinuumnál kisebb számosságú hasonló kópiáinak egyesítése sem.

A Fejezet 2. paragrafusa az $\mathbb{R}^2$ sík "csúsztatásaira" (itt az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(x, y) \to (x, y + f(y))$ ill. $(x, y) \to (x + g(x), y)$ alakú leképezéseit függőleges ill vízszintes csúsztatásoknak nevezzük) fogalmaz meg egy olyan tételt, amelynek érdekes csoportelméleti következménye van:
2.8 Tétel. Az $\mathbb{R}^2$ sík minden permutációja előáll véges sok (104+105) függőleges és vízszintes csúsztatás szorzataként. Következésképp igaz a
2.9 Korrollárium. Egy kontinuum számosságú halmaz teljes szimmetrikus csoportja előáll 209 egymással izomorf Abel-féle részcsoport szorzataként.

A 3. Fejezet azt a kérdéskört vizsgálja, hogy milyen esetekben lehet ill. nem lehet az $\mathbb{R}^n$ nagy mértékű N részhalmazait olyan részhalmazokkal lefedni, amelyekben N sűrűsége kicsi. Az egységnégyzetben O. Nikodym konstruált egy olyan 1 mértékű N halmazt, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik: $\forall p \in N$ van olyan l_p egyenes amelyre $N \cap l_p = \{p\}$.

Az N halmaznak egy legalább $1 - \varepsilon$ mértékű H részhalmaza lefedhető olyan keskeny, l_p-vel párhuzamos téglalapokkal, amelyekben N sűrűsége kisebb,

mint ε. Ha téglalapoktól (magasabb dimenziós téglatestktől) megköveteljük, hogy élei párhuzamosak legyenek a a koordinátatengelyekkel (az ilyen téglatesteket n-dimenziós intervallumoknak nevezzük), akkor a fenti típusú lefedés nem létezik:
3.2 Tétel. Tegyük fel, hogy $H \subset (0,1)^n$ mérhető, $|H| > h$ ($|\cdot|$ a Lebesgue mértéket jelöli) halmaz és $\mathcal{R}$ a $(0,1)^n$ nyitott kocka intervallumainak egy a H-t lefedő osztálya. Ekkor van olyan $R \in \mathcal{R}$ intervallum, amelyben H sűrűsége nagyobb mint $(h/2n)^n$. A bizonyítás standard ötlete a Littlewood által bevezetett

$$M_n = \sup\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f \colon x \in R \in \mathcal{I}^n\right\}$$

maxiáloperátor ($\mathcal{I}^n$ a $[0,1]^n$ részintevallumainak rendszere) alkalmazása lenne, de ez itt nem működik, míg a jelölt által bevezetett

$$m_n = \inf\left\{\frac{1}{|R|}\int_R f \colon x \in R \in \mathcal{I}^n\right\}$$

minimáloperátor sikerrel alkalmazható.

Azt mondjuk, hogy halmazoknak egy $\mathcal{B}$ osztálya rendelkezik a V_q lefedő tulajdonsággal, ha létezik két olyan konstans ($C < \infty$ és $c > 0$), amelyekre $\forall \mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ ($|\cup \mathcal{R}| < \infty$) $\exists R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R}$, hogy

$$(1) \quad |\cup_{k=1}^m R_k| \geq c|\cup \mathcal{R}| \quad \text{és} \quad (2) \quad \|\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{R_k}\|_q \leq C|\cup \mathcal{R}|^{1/q}.$$

Cordóba és Fefferman bebizonyították, hogy az $\mathbb{R}^n$ összes intevallumainak $\mathbb{R}$ osztálya minden $1 \leq q < \infty$-ra rendelkezik a V_q lefedő tulajdonsággal. A fejezet 3.7 Tétele $q = 1$-re egy erősebb állítást fogalmaz meg.

Minden $n = \mathbb{N}$-re létezik egy olyan $C_n \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, amely rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra és az $\mathbb{R}^n$ intervallumainak tetszőleges véges összmértékű $\mathcal{R}$ osztályára (azaz $|\cup \mathcal{R}| < \infty$) léteznek olyan $R_1, \ldots, R_m \in \mathcal{R}$ intervallumok, amelyekre igaz

$$\frac{|\cup \mathcal{R} \setminus \cup_{k=1}^m R_k|}{|\cup \mathcal{R}|} < \varepsilon \tag{1}$$

és

$$\frac{\sum_{k=1}^m |R_k|}{|\cup \mathcal{R}|} < C_n(\varepsilon). \tag{2}$$

A Fejezet további részében a szerző az intervallumoknál általánosabb halmazokkal történő lefedéseket vizsgál, és tételeiben a V_q tulajdonság (2) feltételénél jobban kontrollálja lefedőrendszer átfedéseit.

Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt r-regulárisnak nevezünk, ha van olyan H-t tartalmazó Q kocka, amelyre $|H|/|Q| > r$.

Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt az x pontban csillagszerűnek nevezünk, ha $\forall y \in H$ $\overline{xy} \subset H$. A $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz r-csillagszerű, ha a $\{x\colon H$ csillagszerű H-ban$\}$ halmaz tartalmaz egy $r \cdot \mathrm{diam} H$ sugarú nyitott gömböt. Az itt bizonyított állítások közül legérdekesebb a

3.22 Korollárium. Legyen $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ konvex nyitott r-reguláris halmazoknak vagy r-csillagszerű halmazoknak egy osztálya. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra kiválasztható $\mathcal{R}$-ből M olyan diszjunkt részosztály, amely lefedi $\mathcal{R}$ $(1-\varepsilon)$-szorosát, ahol M csak n-től r-től és ε-tól függ.

A 4. Fejezet az $\mathbb{R}^d$-beli speciális fraktálok (a szeparációs feltételnek elegettevő önhasonló és önaffin halmazok) és transzformáltjaik metszetének a tulajdonságaival foglalkozik.

A g $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ leképezést hasonlóságnak nevezzük, ha van olyan $r > 0$ konstans, amelyre $\forall a, b \in \mathbb{R}^d$ $\mathrm{dist}(g(a), g(b)) = r\mathrm{dist}(a, b)$. Ha $r < 1$ a g hasonlóság kontraktív. Az $\mathbb{R}^d$ $x \mapsto Ax + b$ leképezést (A $d \times d$ típusú mátrix, $b \in \mathbb{R}^d$) affin leképezésnek nevezzük.

A $K \in \mathbb{R}^d$ kompakt halmazt önhasonlónak nevezzük, ha
$K = \Phi_1(K) \cup \cdots \cup \Phi_r(K)$, ahol $\Phi_1, \ldots \Phi_r$ $(r \geq 2)$ kontraktív hasonlóságok.

A $K \in \mathbb{R}^d$ kompakt halmazt önaffínnak nevezzük, ha
$K = \Phi_1(K) \cup \cdots \cup \Phi_r(K)$, ahol $\Phi_1, \ldots \Phi_r$ $(r \geq 2)$ olyan affín leképezések, amelyek definiáló mátrixai 1-nél kisebb normájúak.

Az $I = (i_1, \ldots i_n)$ multiindexhez rendeljuk hozzá a $\Phi_I = \Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_n$ leképezést. Definiáljuk az $\Omega = \{1, \ldots, r\}^{\mathbb{N}}$ halmazon $\{p_1, \ldots, p_r\}$ valószínűségi mérték direkt szorzatát, jelölje ezt ν.

Legyen

$$\pi\colon \Omega \to K,\ \{\pi(i_1, i_2 \ldots)\} = \cup_{n=1}^{\infty} (\Phi_{i_1} \circ \cdots \circ \Phi_{i_n})(K)$$

a K halmaz folytonos cimző leképezése. A ν mértéknek π leképezésnél vett μ képe a K halmazon az ún. önhasonló/önaffin mérték:

$$\mu(H) = \nu(\pi^{-1}(H)) \quad \text{minden} \quad H \subset K \quad \text{Borel-halmazra.}$$

At mondjuk, hogy a K önhasonló/önaffin halmaz taljesíti az erős szeparációs feltételt, ha $K = \Phi_1(K) \cup^* \cdots \cup^* \Phi_r(K)$.

A Fejezet fő célja

$$\mu(g(K) \cap K) > 0 \iff \mathrm{int}_K g(K) \cap K \neq \emptyset$$

(ahol g izometria vagy hasonlóság) típusú állítások igazolása. Az alább ismertetendő valamennyi állításban fel van téve, hogy a $K \subset \mathbb{R}^d$ halmaz teljesíti az erős szeparációs feltételt. Ha K önaffin, csak a következő állítást sikerült igazolni.

4.7 Tétel. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ önaffin halmaz, és legyen μ a K-n definiált önaffin mérték. Ekkor van olyan $c < 1$ konstans hogy minden g izometriára $\mu(g(K) \cap K) < c$, kivéve ha $K = g(K)$.

Önhasonló K halmazokra a következők igazak.

4.8 Tétel. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ önhasonló halmaz, és legyen μ a K-n definiált önhasonló mérték. Ekkor van olyan $c < 1$ konstans hogy minden g hasonlóságra vagy $\mu(g(K) \cap K) < c$ vagy $K \subset g(K)$.

Felmerül a kérdés, hogy a Tétel igaz-e az r hasonlósági aránytól függő c-vel akkor is, ha K önaffin?

A paragrafus fő eredménye a

4.9 Tétel. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ önhasonló halmaz, legyen μ a K-n definiált önhasonló mérték és legyen g egy hasonlóság. Ekkor $\mu(g(K) \cap K) > 0$ akkor és csak akkor, ha a $g(K) \cap K$ halmaz K-beli belseje nem üres. Továbbá $\mu(\mathrm{int}_K(g(K) \cap K)) = \mu(g(K) \cap K)$.

Mivel két különböző önhasonló mérték egymásra nézve szinguláris, a 4.9 Tétel alábbi Korolláriuma számomra meglepő.

4.10 Korrollárium. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ önhasonló halmaz, és legyen μ_1 és μ_2 a K-n definiált két különböző önhasonló mérték. Ekkor $\mathbb{R}^d$ minden g hasonlóságára

$$\mu_1(g(K) \cap K) > 0 \iff \mu_2(g(K) \cap K) > 0.$$

A Fejezet 2. paragrafusa tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel-halmazon értelmezett eltolásinvariáns mértékek kiterjesztésével foglalkozik. Az ilyen kiterjesztések általában nem egyértelműek. Pl. ha $A \subset \mathbb{R}^n$ pozitív mértékű első kategóriájú halmaz, akkor a Lebesgue-mértéknek a bizonyításban konstruált kiterjesztése minden második kategóriájú halmazon végtelen lesz, pedig a Lebesgue-mérték lenne a természetes kiterjesztés.

Ebből a paragrafusból két érdekes eredményt idézek.
4.14 Lemma. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ egy olyan Borel-halmaz amelyre $A \cap A + t$ legfeljebb megszámlálható (kivéve a $t = 0$ esetet). Ekkor minden folytonos, az A halmazon értelmezett μ Borel-mérték (egy mérték folytonos, ha az egy pontból álló halmazok mértéke 0) kiterjeszthető az $\mathbb{R}^n$-re eltolásinvariáns mértékké.

4.15 Korrollárium. Létezik egy olyan 1 Hausdorff-dimenziós kompakt $C \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyen értelmezett minden folytonos μ Borel-mérték kiterjeszthető az $\mathbb{R}$-re eltolásinvariáns mértékké.

A Fejezet 3. paragrafusa az önaffin Sierpiński-szivacs eltoltjainak metszeteit vizsgálja.

A Sierpiński-szivacsot szemléletesen a következőképpen definiálhatjuk. Osszuk fel az $\mathbb{R}^n$ beli egységkockát $m_1 \times \cdots \times m_n$ $(m_1 \geq 2 \dots m_n \geq 2)$ azonos méretű dobozokra, és néhányat hagyjunk el belőlük. Ezután tegyük meg ugyanezt a megmaradt dobozokkal; ugyanazt a mintát használva, mint az első lépésben. A beosztást definiáló $(m_1 \geq 2 \dots m_n \geq 2)$ szám n-est jelölje M, a megmaradt dobozokból álló mintát D. A végtelen sok lépés utan megmaradó $K(M, D)$ halmaz az önaffin Sierpiński-szivacs. A természetes önaffin μ mértéket definiáljuk úgy, hogy az Ω címhalmazon a $\{p_1 = 1/r, \dots, p_r = 1/r\}$ egyenletes eloszlás direkt szorzata legyen a ν mérték.

Két érdekes eredményt emelek ki.
4.21 Tétel. Legyen a $K = K(M, D) \subset \mathbb{R}^n$ halmaz egy önaffin Sierpiński-szivacs, és μ legyen a rajta értelmezett természetes önaffin mérték. Ekkor két természetes kivételes esettől eltekintve $\mu(K \cap (K + t)) = 0$. A kivételek:
(i) van a K halmaznak két olyan S_1 és S_2 elemi darabja, amelyre $S_1 = S_2 + t$,
(ii) a K halmaz $K = L \times K_0$ alakú, ahol L egy $[0, 1^l]$ alakú kocka átlója $(l \in \{1, 2, \dots, n\})$ és K_0 egy kisebb dimenziójú önaffin Sierpiński-szivacs.
4.22 Tétel. Tetszőleges $K \subset \mathbb{R}^n$ önaffin Sierpiński-szivacshoz létezik olyan, az $\mathbb{R}^n$-en definiált ν eltolásinvariáns Borel-mérték, amelyre $\nu(K) = 1$

Az értekezés 5. Fejezete mérhető egészértékű függvények véges sok egészértékű periodikus függvény összegeként történő előállításval foglalkozik.

Legyenek $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ rögzített periódusok. Azt mondjuk, hogy az f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek van $(a_1, \dots, a_k)$-periodikus felbontása, ha $f = f_1 + \cdots + f_k$, ahol minden $j = 1, \dots, k$-ra f_j a_j-periódusú függvény. Legyen $\Delta_{a_j} f(x) = f(x + a_j) - f(x)$. Mivel a Δ_{a_j} operátorok felcserélhetők, ha az f függvénynek van $(a_1, \dots, a_k)$-periodikus felbontása, akkor

$$\Delta_{a_1} \dots \Delta_{a_k} f = 0 \tag{3}$$

Egy $\mathcal{F}$ függvényosztály akkor rendelkezik a periodikus felbonthatósági tulajdonsággal, ha minden a (3) összefüggést kielégítő $f \in \mathcal{F}$ függvénynek van $\mathcal{F}$-ben. egy $(a_1, \dots, a_k)$-periodikus felbontása.

A jelölt egy társszerzőkkel írt dolgozatában megmutatta, hogy hogy a korlátos $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvények osztálya rendelkezik a periodikus felbonthatósági tulajdonsággal, míg a korlátos $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvények osztálya általában nem rendelkezik vele. Azt remélhetnénk, hogy az $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ mérhető leképezés mérhető valós $(a_1, \dots, a_k)$-felbontásának létezése implikálja egészértékű (vagy legalább majdnem mindenütt egészértékű) mérhető $(a_1, \dots, a_k)$-felbontás létezését.

Az 5.3 Tétel szerint ez már $k = 3$-ra sincs így. Az ellenpélda egy rendkívül egyszerű és szellemes konstrukción alapszik: megad egy konkrét valós változójú egész értékű függvényt, amit fel lehet írni 3 valósértékű függvény összegeként, de az alábbi (a jelölt által bizonyított) lemma miatt nem lehet felbontani egész értékű periodikus függvények összegeként.
5.5 Lemma. Legyenek $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan valós számok, amelyekre a_i/a_j egyetlen $i \neq j$ párra sem racionális, valamint minden j-re f_j és g_j a_j periódusú mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor minden $j = 1, \dots, k$-ra $f_j - g_j$ majdnem mindenütt konstans.

A Fejezet fő eredménye 5.3 tételben szereplő ellenpéldával szemben ad affirmatív választ.
5.12 Tétel. Az alábbi két állítás tetszőleges $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ periódusokra ekvivalens.
(i) Ha egy egészértékű függvénynek van mérhető valósértékű $(a_1, \dots, a_k)$-periodikus felbontása, akkor van neki mérhető egészértékű
$(a_1, \dots, a_k)$-periodikus felbontása is.
(ii) Ha $B_1, \dots, B_n$ az $\{a_1, \dots, a_k\}$ halmaznak az $a \sim b \Leftrightarrow a/b \in \mathbb{Q}$ relációval adott ekvivalenciaosztályai, és b_j jelöli a B_j halmaz elemeinek legkisebb közös többszörösét ($j = 1, \dots, n$), akkor az $\frac{1}{b_1}, \dots, \frac{1}{b_n}$ számok lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ fölött.

Az értekezés szerkezete a következő: egy 32 oldalas, rövid, jól olvasható "Tézis"-ben összefoglalja az eredményeket, azok motivációját és a bizonyításukban felhasznált eszközöket; ezt követi egy 8 itemből álló Függelék, amely a Tézisben megfogalmazott eredményeket részletesen ismertető, a szerzőtől (és esetleges társszerzőitől) származó rangos folyóiratokban megjelent dolgozatokat tartalmazza. A bizonyítások finom ötleteket, ugyanakkor gazdag matematikai eszköztárat használnak. Csak példaképp említem meg egyik, a Függelekben nem is szereplő, az 5. Fejezethez kapcsolódó dolgozatot, amelyben új algebrai eszközöket dolgoz ki.

A fentiek alapján javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását, és Keleti Tamásnak az MTA Doktora fokozat odaítélését.

Szeged, 2010. július 8.

Krámli András
A matematikai tudomány doktora