Opponensi vélemény

Keleti Tamás

Translations, measure and dimension

című MTA doktori értekezéséről

Az értékelés tárgyát képező értekezés alapján számomra nyilvánvaló, hogy Keleti Tamást a vérbeli problémamegoldó matematikusok közé kell sorolni, mert értekezése a valós függvénytan és a geometriai mértékelmélet számos aktuális, többnyire mások által felvetett és sokakat érdeklő nyitott problémájának a megoldását tartalmazza. Emellett bepillantást enged a megoldások történetébe és bemutatja azt is, hogy eredményeinek milyen fontos és látványos következményei vannak.

Keleti Tamás disszertációjának gerincét a valós számegyenes, illetve a véges dimenziós euklideszi terek additív és mértékelméleti struktúrájának a kapcsolatát vizsgáló eredmények alkotják, amelyeket a jelölt az irodalomjegyzékben felsorolt 8 tudományos dolgozat eredményeinek felhasználásával tézisszerűen foglalt össze.

A disszertáció első fejezete azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy milyenek lehetnek az olyan valós számhalmazok, amelyekben bizonyos megadott mintázatok nem fordulhatnak elő. Egy $\{a, a+u, a+v, a+u+v\}$ alakú (3-, vagy 4-elemű) halmazt paralellogrammának nevezünk. Kérdés, hogy milyen „nagy„ lehet egy olyan halmaz, amely nem tartalmaz parallelogrammát. A meglepő válasz az (Thm. 1.1, [5]), hogy létezik olyan kompakt halmaz, amely 1 Hausdorff-dimenziójú de parallelogrammamentes. Ez többek között azt is mutatja, hogy milyen jelentős különbség van az 1 Hausdorff-dimenziójú és a pozitív Lebesgue-mértékű halmazok között, mert Lebesgue sűrűségi tételéből következik, hogy a pozitív Lebesgue-mértékű halmazok tetszőleges véges halmazhoz hasonló (azaz eltolás és nagyítás egymásutáni alkalmazásával megkapható) részhalmazokat tartalmaznak (tehát paralellogrammákat is biztosan).

Keleti [7] dolgozatát Erdős Pál egy 1974-ben megfogalmazott sejtése motíválta. Ebben Erdős azt sejtette, hogy bármely végtelen valós A számhalmazhoz létezik egy olyan pozitív Lebesgue-mértékű halmaz, amely nem tartalmaz A-hoz hasonló részhalmazt. Ez a probléma a mi napig megoldatlan. Másfelől Erdős és Kakutani még 1957-ben egy olyan Lebesgue nullmértékű halmazt konstruált, amelynek minden véges valós számhalmazhoz van hasonló részhalmaza. Máthé Andrásnak sikerült ugyanilyen tulajdonságú, de 0 Hausdorff-dimenziójú halmazt szerkesztenie. Az Erdős sejtéshez kapcsolódva Bisbas és Kolountzakis 2006-ban (hiányosan) bizonyították a következő állítást: Bármely A végtelen halmazhoz létezik olyan kompakt és 1 Hausdorff-dimenziós halmaz, amelynek egyetlen részhalmaza sem hasonló A-hoz. Keleti Tamás [7] dolgozatának az eredménye ennek a kérdésnek egy jóval erősebb formájú megválaszolását adja: Megmutatta, hogy legalább három elemű halmazok tetszőleges (A_n) sorozatához van olyan kompakt 1 Hausdorff-dimenziójú halmaz, amelynek semelyik A_n halmazzal sincs hasonló részhalmaza. Ez az állítás azonnal következik Keleti következő tételéből: Bármely $A \subseteq (1, \infty)$ megszámlálható halmazhoz van olyan kompakt 1 Hausdorff-dimenziójú halmaz, amelynek bármely három egymást követő $x < y < z$ eleme esetén $\frac{z-x}{z-y} \notin A$. Ennek az utóbbi tételnek a bizonyítása ötletes, szellemes, (az "Ördög Játékának" alapgondolatát használja fel) és relatíve rövid, de korántsem triviális. Ezek az eredmények több hazai és külföldi kutatót inspiráltak az Erdős-féle problémakör vizsgálatára, és Erdős 1974-es sejtésén túl számos nyitott probléma van még a témakörben.

Triviális, hogy a számegyenest egy nemüres belsejű kompakt halmaz megszámlálható sok eltolt példányával le lehet fedni. Természetes kérdés, hogy mi állítható a seholsem sűrű kompakt halmazokkal kapcsolatban. Gruenhage megmutatta, hogy a standard Cantor-féle triadikus halmaz eltoltjaiból legalább kontinuum sok kell $\mathbb{R}$ lefedéshez. Az U. B. Darjival közös 2003-ban megjelent [2] dolgozat fő eredménye szerint 1-nél kisebb pakolási dimenziójú kompakt halmazok eltoltjaiból/hasonló példányaiból legalább kontinuum sok kell $\mathbb{R}$ lefedéséhez. Meglepő, hogy ha a pakolási dimenzió helyett Hausdorff-dimenziót mondunk, akkor a kérdés sokkal nehezebb: 2009-ben Máthé András konstruált egy olyan 0 Hausdorff-dimenziós kompakt halmazt, hogy az az állítás miszerint $\mathbb{R}$-et ennek a halmaznak kontinuum-nál kisebb számosságú eltolt példánya lefedi, konzisztens ZFC-vel. A számegyenes halmazainak kicsiségét másképp is lehet értelmezni: ha egy halmaznak van kontinuum sok diszjunkt eltoltja, akkor azt kicsinek lehet tekinteni. Kérdés, hogy kontinuum soknál kevesebb kicsi halmaz lefedheti-e $\mathbb{R}$-et. Az Abért Miklóssal közös 2002-beli [1] dolgozat szerint $\mathbb{R}$-nek létezik már megszámlálható sok kicsi halmazra való partíciója is. Ennek az eredménynek az alkalmazásával adódik, hogy a sík bármely bijekciója (permutációja) előállítható legfeljebb 209 olyan leképezés kompozíciójaként, amelyek a sík pontjait csak vertikálisan vagy csak horizontálisan mozgatják úgy, hogy az azonos abszcisszájú (ordinátájú) pontok azonos mértékben tolódnak el vertikálisan (horizontálisan). A fentiek egy érdekes csoportelméleti következménye az, hogy egy kontinuum számosságú halmaz összes permutációinak csoportja azonos két izomorf Abel részcsoportjának véges sok (209) példányának a szorzatával.

A [6] dolgozat kulcseredménye a lefedések és sűrűség kapcsolatát vizsgálja. Ha H a nyílt n-dimenziós egységkockának egy $h > 0$-nál nagyobb mértékű részhalmaza, akkor a nyílt kocka bármely (párhuzamos oldalú) nyílt téglákkal való befedésében van olyan tégla, amelyben H legalább $(h/(2n))^n$ sűrűségű. Ebből, jóval általánosabban, az is következik, hogyha H egy nyílt téglarendszer egyesítésében h-nál nagyobb sűrűségű, akkor a téglarendszerben van olyan tégla, amelyben H legalább $(h/(2n))^n$ sűrűségű. Ezek az eredmények jól és hatékonyan alkalmazhatók az integrálok differenciálásának a vizsgálatára, azaz az olyan $\mathcal{B}$ halmazrendszerek és $\mathcal{F}$ függvényosztályok leírására, hogy bármely $\mathcal{F}$ osztálybeli f függvény és m.m. x esetén érvényes az, hogy $\int_{R_n} f/|R_n|$ konvergál $f(x)$-hez, ha R_n egy olyan $\mathcal{B}$-beli halmazsorozat, amely tartalmazza x-et és az R_n átmérője tart nullához. Az idevágó alapvető fogalmak a $q \geq 1$ paraméter segítségével értelmezett V_q és CV_q lefedési tulajdonságok, valamint a minimális sűrűségi tulajdonság MDP. Keleti Tamás [6]-beli eredményei azt mutatják, hogy MDP és CV_1 bármely nemüres korlátos nyílt halmazokból álló halmazcsaládra nézve ekvivalensek, továbbá, ha MDP teljesül, akkor V_q és CV_q is ekvivalensek.

Steinhaus jól ismert tétele szerint bármely Lebesgue mérhető H halmaz esetén a $H \cap (H+t)$ halmaz mértéke t-nek folytonos függvénye. Az Elekes Mártonnal és Máthé Andrással írt [3] közös dolgozat önaffin, illetve önhasonló halmazok (azaz fraktálok) két példánya metszetének hasonló tulajdonságát vizsgálja. Az egyik főeredmény szerint, ha K egy (az ú.n. erős elválasztási feltételt teljesítő $\phi_1, \ldots, \phi_n$ affin leképezésekkel meghatározott) önaffin halmaz, akkor minden K-n értelmezett önaffin μ mérték esetén van olyan $c < 1$ konstans, hogy $\mu(K \cap g(K)) < c$, ha g egy olyan affin leképezés, amely közel van az identikus leképezéshez, de nem azonos vele. Ebből azonnal következik, az is hogy a $t \mapsto \mu(K \cap (K+t))$ függvény nem lehet folytonos $t = 0$-ban. Az önhasonló halmazok, illetve mérték esetére nyert állítás nem teljesen analóg az önaffin esetével. A fenti eredmény egy érdekes és fontos következménye, hogy ha K egy önhasonló halmaz (a fenti értelemben) és ha μ egy olyan önhasonló mérték, amelynél a K kongruens elemi darabjainak a mértéke egyenlő, akkor μ izometria-invariáns K-n. A Sierpiński-szivacsok speciális (az egységkockából a Cantor-féle halmaz, vagy a Sierpiński-szőnyeg mintájára származtatott) önhasonló halmazok. A [3] dolgozatban azt is sikerült megmutatni, hogy minden Sierpiński-szivacshoz létezik $\mathbb{R}^n$-en olyan eltolás-invariáns Borel mérték, amelynél a szivacs mértéke 1. Sok esetben (ti., ha az ú.n. konvex nyílt halmaz feltétel teljesül és ha a K definíciójában szereplő affinitások egymás eltoltjai) ez az eltolás invariáns mérték megkapható a K halmaz természetes valószínűségi mértékének kiterjesztéseként.

Kérdés: Ha K egy önhasonló/önaffin halmaz, akkor mondható-e valami a $K \cap (K+t)$ halmaz Hausdorff-dimenziójáról, ha t közel van 0-hoz?

Jól ismert, hogy ha egy mérhető valós függvény mikroperiodikus, akkor a függvény m.m. egyenlő egy konstanssal. Az utolsó fejezet témája olyan függvények vizsgálata, amelyek előállnak adott számú és adott periódusú függvények összegeként. Az ilyen függvények nyilvánvalóan benne vannak a periódusoknak megfelelő differenciaoperátorok szorzatának a nullterében. Az alapkérdés az, hogy milyen függvény osztályokban érvényes a fordított implikáció is. Az ilyen függvényosztályokra azt mondjuk, hogy érvényes bennük a dekompozíciós tulajdonság. A szerző egyik [7]-beli eredménye szerint van olyan egészértékű korlátos mérhető függvény, amely előáll három periodikus mérhető függvény összegeként, de nem áll elő három periodikus m.m. egészértékű mérhető függvény összegeként. Ennek következtében a korlátos, mérhető, egészértékű függvények osztályában nem lehet érvényes a dekompozíciós tulajdonság. Ugyanakkor Laczkovich és Révész tétele szerint a korlátos, mérhető függvények osztályában érvényes a dekompozíciós tulajdonság. Egy másik érdekes eredmény szerint, ha periódusok reciprokai lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett és f olyan m.m. egészértékű függvény, amely előáll a megadott periódusokkal periodikus mérhető függvények összegeként, akkor az összeadandók törtrészei m.m. konstans értékűek. Ennek az ereménynek a segítségével a m.m. egészértékű mérhető függvények periodikus dekompozíciójának egyértelműsége is jellemezhető.

Kérdés: Az $f(x) = x$ függvényre $\Delta_a \Delta_b f = 0$ teljesül bármely nemzéró $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. Az nyilvánvaló, hogy f nem áll elő egy a- és egy b-periodikus függvény összegeként ha $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. De ha $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, akkor f-et fel lehet bontani egy a- és egy b-periodikus additív függvény összegére. Igaz lehet-e, hogy az összes valós függvények halmaza rendelkezik az (a, b)-dekompozíciós tulajdonsággal, ha $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$?

Összefoglalva, úgy vélem, hogy Keleti Tamás a valós függvénytant és a geometriai mértékelméletet alapvető és értékes eredményekkel gazdagította, megoldotta ezeknek a területeknek számos ismert és érdekes problémáját. A disszertációban feldolgozott–bemutatott anyag meggyőzően mutatja be elmélyült problémamegoldó gondolkodását. Ezen belül is kiemelendő a szerző konstrukciós (példa és ellenpélda készítő) képessége. A disszertáció formailag és tartalmilag is igen gazdag sokrétű anyagot tárgyal, egységes történeti és tartalmi szerkezetbe foglalja a szerző legfontosabb eredményeit. A disszertációban bemutatott eredmények messzemenően megfelelnek az MTA doktori pályázatokkal szemben támasztott követelményeknek. Ezért a disszertáció nyilvános vitára való kitűzését és az MTA doktora cím Keleti Tamás számára történő odaítélését határozottan javaslom.

Páles Zsolt, az MTA doktora

Hivatkozások

[1] M. Abért and T. Keleti. Shuffle the plane. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(2):549–553 (electronic), 2002.

[2] U. B. Darji and T. Keleti. Covering $\mathbb{R}$ with translates of a compact set. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(8):2598–2596 (electronic), 2003.

[3] M. Elekes, T. Keleti, and A. Máthé. Self-similar and self-affine sets: measure of the intersection of two copies. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30(2):399–440, 2010.

[4] T. Keleti. A covering property of some classes of sets in $\mathbb{R}^2$. *Acta Univ. Carolin. Math. Phys.*, 39(1-2):111–118, 1998.

[5] T. Keleti. A 1-dimensional subset of the reals that intersects each of its translates in at most a single point. *Real Anal. Exchange*, 24(2):843–844, 1998/99.

[6] T. Keleti. Density and covering properties of intervals of $\mathbb{R}^n$. *Mathematika*, 47(1-2):229–242 (2002), 2000.

[7] T. Keleti. Construction of one-dimensional subsets of the reals not containing similar copies of given patterns. *Anal. PDE*, 1(1):29–33, 2008.

[8] T. Keleti. Periodic decomposition of measurable integer valued functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 337(2):1394–1403, 2008.