

Válasz Páles Zsolt opponensi véleményére

Nagyon szépen köszönöm a disszertáció gondos és értő átolvasását és a meleg hangú részletes bírálatot. Az alábbiakban válaszolok a két feltett kérdésre.

1. Kérdés: Ha K egy önhasznló/önaffin halmaz, akkor mondható-e valami a $K \cap (K + t)$ halmaz Hausdorff-dimenziójáról, ha t közel van 0-hoz?

Válasz: A klasszikus C Cantor halmaz és a $2 \cdot 3^{-n}$ eltolások mutatják, hogy Hausdorff-dimenzióra nem igaz a Hausdorff-mértékre kapott instabilitási eredmény megfelelője: akármilyen kis eltolás esetén megegyezhet C és $C \cap (C + t)$ Hausdorff-dimenziója.

Másfelől ha a 3^{-n} eltolásokat tekintjük, akkor $C \cap (C + t)$ véges halmaz, tehát stabilitási eredmény sincs: az sem igaz, hogy 0-hoz közeli t -kre C és $C \cap (C + t)$ Hausdorff-dimenziója közel van.

2. Kérdés: Az $f(x) = x$ függvényre $\Delta_a \Delta_b f = 0$ teljesül bármely nemzéró $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. Az nyilvánvaló, hogy f nem áll elő egy a - és egy b -periodikus függvény összegeként, ha $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. De ha $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ akkor f -et fel lehet bontani egy a -és egy b -periodikus additív függvény összegére. Igaz lehet-e, hogy az összes valós függvények halmaza rendezik az (a, b) -dekompozíciós tulajdonsággal, ha $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$?

Válasz: Igen. Közismert (már Wierdl Máté 1984-ben megjelent cikkében szerepel lemmaként), hogy ha $a_1, \dots, a_n$ lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ fölött, akkor valahányszor egy f valós függvényre teljesül, hogy $\Delta_{a_1} \dots \Delta_{a_n} f = 0$, a függvény előáll $f = f_1 + \dots + f_n$ alakban, ahol f_i periodikus a_i szerint minden $i = 1, \dots, n$ -re. A kért $n = 2$ eset bizonyára már a 70-es években ismert volt, ekkor született Ruzsa Imre publikálatlan észrevételei, melyek ezt a témát elindították.

A teljesség kedvéért adok egy rövid bizonyítást is a kért esetre: Tegyük fel, hogy $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ és $\Delta_a \Delta_b f = 0$. A keresett felbontást elég $\mathbb{R} a\mathbb{Q} + b\mathbb{Q}$ szerinti mellékosztályain egyenként megadni. Az pedig automatikusan adódik, hiszen ha egy ilyen mellékosztály egy pontjában bárhogy felbontjuk f -et, utána egyértelműen terjed ki f_1 és f_2 periodikusan, és a $\Delta_a \Delta_b f = 0$ feltételből pedig épp az adódik, hogy a teljes mellékosztályon $f = f_1 + f_2$. (Vagy ugyanez konkrétabban: minden mellékosztályból kijelölünk egy v elemet, és $x = v + ka + nb$ esetén legyen $f_1(x) = f(nb)$, $f_2(x) = f(x) - f(nb)$. Ekkor $f = f_1 + f_2$ és f_1 a -periodikussága világos, f_2 b -periodikussága pedig a $\Delta_a \Delta_b f = 0$ feltételből adódik.)

Megjegyzem még, hogy egy Farkas Bálinttal, Harangi Viktorral és Révész Szilárdal közös 2008-as cikkünkben minden $a_1, \dots, a_n$ -re jellemezzük azon függvényeket, melyek előállnak ilyen periódusú periodikus függvények összegeként. Ha $a_1, \dots, a_n$ nem lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $\Delta_{a_1} \dots \Delta_{a_n} f = 0$ helyett több ilyen feltételnek kell teljesülnie.

Budapest, 2010. november 11.

Keleti Tamás