Bírálat Sali Attila MTA doktori értekezéséről

A dolgozatban a szerző összegyűjtötte azon eredményeit, amelyek mátrix alakban megfogalmazható extremális kombinatorikai problémák. Ezzel sajnos a szerző sok más szép eredménye kimaradt. A dolgozat négy fejezetből áll. Az első egy rövid bevezetés. A második és harmadik fejezetekben egyszerű 0,1 mátrixokkal (az oszlopai különbözők) foglalkozik, amelyek ténylegesen halmazrendszereknek felelnek meg. A negyedik fejezetben relációs adatbázisok által motivált kombinatorikai problémákat tárgyal.

A bevezető után következő második fejezetben, egyszerű 0,1 mátrixok tiltott részkonfigurációival foglalkozik. Az itt tárgyalt probléma a következő. Legyen F egy ,,kis", $k \times \ell$-es 0,1 mátrix. Jelölje $\mathsf{forb}(m, F)$ a legnagyobb olyan n értéket (m és F függvényében), amelyre igaz, hogy létezik egy egyszerű $m \times n$-es $0,1$-mátrix amelyik nem tartalmazza F semmilyen sor és/vagy oszlop permutációját részmátrixként. Az oszlopkat tekinthetjük az m-elemű halmaz reprezentációiként, és akkor a feltétel szerinti legnagyobb halmazrendszert keressük. Ha F a 2×2-es egységmátrix, akkor a feltétel azt jelenti, hogy bármely két halmaz egyike tartalmazza a másikat. Megfelelő F-ekre több, az extremális halmazrendszerek elméletéből ismert problémát megkapunk, de ez a megfogalmazás kiterjeszti a lehetőségeket, sok új érdekes probléma merül fel. Az extremális halmazrendszerek témakörének érdekes új irányát jelenti.

Az általános esetre Anstee és a szerző csak egy sejtést állítanak fel, ami $\mathsf{forb}(m, F)$ nagyságrendjét adja meg és bizonyos értelemben az Erdős-Stone-Simonovits Tételre hasonlít. A 2.2.3. Sejtést itt nem tudjuk pontosan kimondani, csak körülírjuk. Lényegében tehát azt mondja ki, hogy $\mathsf{forb}(m, F)$ nagyságrendi meghatározásához elegendő három alap mátrix típusból képzett direkt szorzatokat vizsgálni. Ez a három típus az egységmátrix, annak $0,1$-komplementere, valamint az a felső háromszög mátrix, amelynek főátlójában és felette 1-esek vannak. A sejtés érdekessége, hogy $\mathsf{forb}(m, F)$ nagyságrendje mindig m *egész kitevős* hatványa.

A sejtés érdekes és fontos, de egyelőre csak speciális eseteit sikerült bizonyítani. A 2.3 alfejezetben a $k = 2$ és a $k = 3$ eseteket bizonyítja a 2.3.2 és a 2.3.5. tételekben. Persze ez csak a sejtés kis részét intézi el, de vegyük észre, hogy — mivel ℓ egy szabad változó — ez a két eset nagyon sok új eredmény fed.

Sikerült azonban valamit megoldani az általános k-ra is. A 2.2.11 Tétel azt vizsgálja, hogy hol ugrik a nagyságrend m^{k-1}-ről m^k-ra. A 2.2.3. Sejtés alapján várható egyik extremális konfiguráció esetére megmutatja, hogy ott valóban ugrik.

A téma érdekességét és fontosságát mutatja, hogy a tehetséges fiatal Keevash is bekapcsolódott az aszimptotikus vizsgálatokba.

A 2.4 alfejezetben pontos eredményeket sorol fel a szerző. A probléma természetéből adódóan ezek teljes általánosságban nem várhatóak. Itt a 4×2 méretű részkonfigurációk teljes karakterizációja található meg. A bizonyítások közül kettőt ír le. Ezek indukción és ügyes amortizációs számításon alapulnak. Az egyik esetben a komstrukciók kombinatorikus design-okból kaphatók, ebben az esetben teljesen pontos eredmény nem is várható.

A 2.5 alfejezet tárgyalja a 2.3.11 Tétel bizonyításában felmerült partíció-kritikus hipergráfokat, amelyek a 3-kritkus hipergráfok általánosításai. A 2.5.5 Tétel Lovász egy, a 3-kritikus k-uniform hipegráfok legnagyobb méretére vonatkozó tételének élesítése.

Kérdés. Lehetséges-e a partíció-kritikus hipergráfokra ugyanazt a felső becslést bizonyítani, mint a rendezetten 3-kritikusakra, a lineáris algebrai módszer élesítésével, vagy esetleg adható olyan konstrukció, ami bizonyítja, hogy a rendezetten 3-kritikus erősebb megkötés, mint a partíció kritikus, azaz $\binom{n}{k-1}$-nél nagyobb méretű partíció-kritikus hipergráf létezik-e?

A 3. fejezet a Sperner rendszerek Vapnik-Chervonenkis dimenzióját tárgyalja. Az előző fejezet mátrixos terminológiáját használva egy A mátrixszal adott halmazrendszer Vapnik-Chervonenkis dimenziója a legnagyobb olyan k, hogy létezik A-nak $k \times 2^k$ egyszerű részkonfigurációja. Másképpen fogalmazva, az $\mathcal{F}$ halmazrendszer VC-dmenziója a legnagyobb olyan k egész szám, amelyre létezik az alaphalmaznak egy $|S| = k$ részhalmaza, melyre $|\{F \cap S \mid F \in \mathcal{F}\}| = 2^k$. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ *szétzúzza* S-et. A bíráló egy régi sejtése szerint ha $\mathcal{F}$ egy *antilánc*, amelyik nem zúz szét k vagy annál nagyobb elemszámú halmazt, akkor $\mathcal{F}| \leq \binom{m}{k-1}$. A 3.2. alfejezetben, a 3.2.4., 3.2.5. és 3.2.6. Tételek ezt a sejtést bizonyítják be $k \leq 4$-re. A bizonyítás alapja indukció, és az, hogy $k \leq 3$-ra karakterizálni tudja az egyenlőség esetét.

A 3.3 alfejezetben vezeti be a *rendezett szétzúzás* fogalmát. Pajor tétele szerint egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer legalább $|\mathcal{F}|$ halmazt zúz szét. Bollobás és Radcliff „fordított Sauer" egyenlőtlenséget bizonyított *strongly traced* fogalomra. A rendezett szétzúzás a kettő között helyezkedik el, abban az értelemben, hogy ha $\mathsf{st}(\mathcal{F})$ jelöli az $\mathcal{F}$ által „strongly traced" halmazok rendszerét, $\mathsf{osh}(\mathcal{F})$ a rendezetten szétzúzottakét, és $\mathsf{sh}(\mathcal{F})$ a szétzúzottak rendszerét, akkor $\mathsf{st}(\mathcal{F}) \subseteq \mathsf{osh}(\mathcal{F}) \subseteq \mathsf{sh}(\mathcal{F})$, valamint $|\mathcal{F}| = |\mathsf{osh}(\mathcal{F})|$. Ez utóbbi egyenlőség ad reményt arra, hogy a bíráló sejtését a rendezett szétzúzás fogalmán keresztül lehessen megtámadni.

Uniform halmazrendszerekre be is bizonyítja a sejtés rendezett szétzúzásos változatát, ezzel a bíráló és Pach tételének egy elésítését adja.

Általános antiláncokra a karakterizáció másképp működik. Egy szép és meglepően egyszerű numerikus jellemzést ad a 3.3.5 Tétel arra, mikor lesz egy halmaz antilánc által rendezetten szétzúzható. Azonban ebből a jellemzésből a bíráló sejtése sajnos nem következik.

A 4. fejezet az adatbázisok elméletéhez tartozó algebrai és extremális kombinatorikai problémákat vizsgál. A modell fontos és alapvető. A dolgozat az ebben a modellben természetes módon felvetődő kombinatorikai kérdéseket vet fel, és old meg. Kötve hiszem, hogy a nagy áruházláncok adatbázisaik készítésében a jövőben használni fogják ezen eredményeket. Másrészt viszont meglepő, hogy ez az alkalmazásokhoz közeli problémakör mennyi szép és nehéz kombinatorikai problémát vet fel.

A 4.1 alfejezet a relációs adatbázisok általánosan használt matematikai modelljét írja le, a 4.2 alfejezet pedig ismerteti azon eredményeket, amelyek közelítőleg, vagy pontosan megadják egy adott funkcionális függőségi rendszerhez tartozó mátrixok minimális sorszámát.

A 4.3 alfejezet elágazó függőségekről szól. Az elágazó függőségekeket Demetrovics, Katona és a szerző vezették be 1992-ben. Ha A az oszlopok egy halmaza, b egy oszlop, akkor az $A \xrightarrow{(p,q)} b$ (p,q)-(elágazó)függőség teljesül a mátrixban, ha nincs $q+1$ sor, amelyekre teljesül, hogy azok A-ban legfeljebb p különböző értéket vesznek fel, viszont b-ben $q+1$ különböző érték van. A hagyományos funkcionális függőségek a $p=q=1$ speciális esetnek felelnek meg. A funkcionális függőségek esetében már régen pontosan meg voltak adva azok a feltételek, amelyeket ezen függőségek rendszerének ki kell kielégíteni, hogy legyen olyan mátrix, melyben pontosan ezek a függöségek teljesülnek. Ez a jellemzés nehezebb az elágazó függőségeknél. A 4.3.1 részben sok más eredmény mellett a 4.3.4 Tétel megadja a kivánt jellemzést a p, q párok nagyrészére.

A 4.3.2 rész azon mátrixok minimális sorszámát vizsgálja, amelyekben pontosan az adott elágazó függőségi rendszer feltételei teljesülnek. Mivel ez általában túl nehéz lenne, csak azt az esetet vizsgálják, amikor a függőségek olyan formájúak, hogy minden k-elemű részhalmazból minden más elem következik, de a $k-1$-eleműekből semmi más sem. Tehát jelölje $s_{p,q}(\mathcal{C}_n^k)$ annak a mátrixnak a minimális sorszáma, amiben a (p,q)-elágazó függőségek éppen a fentiek. Demetrovics és Katona egy régi észrevétele egy alsó becslést ad, ami nagyon sokszor közel éles, tehát itt elsősorban konstrukciókat kell adni, amik megmutatják, hogy az alsó becslés (közel) elérhető. A szerző konstrukciói meglepően változatos technikákat és ötleteket használnak.

A 4.3.22. tétel például ügyesen használja a véges projektív síkokat. A 4.3.24. (ppn) részénél, $s_{p,p}(\mathcal{C}_n^n)$ meghatározásánál viszont a konstrukció igényel csak egy egyszerűbb ötletet, ott a triviális alsó becslés megjavítása az érdekesebb, Lovász egy 1979-es hipergráfbeli erdőkre vonatkozó tételét használja.

A legérdekesebb azonban a 4.3.24 tétel (122) része, ami $s_{1,2}(\mathcal{C}_n^2)$-t adja meg pontosan. Itt az alsó becslést is meg kellett kissé javítani, a konstrukció viszont valóban eredeti. A mátrixot diszjunkt halmazpárok segítségével adja meg, amelyek bizonyos értelemeben nincsenek nagyon közel. Azt az állítást (4.3.25. tétel), hogy az összes 3-elemű részhalmaz beosztható ilyen párokká, egy Hamilton-tipusú tétel segítségével bizonyítja. Ez Dirac tételének egy erősítése, ahol a keresett Hamilton-kör kielégít egy, ugyanazon ponthalmazon adott másik gráf által definiált feltételt is. Ez a módszer kódelméleti vizsgálatokat indított el, mert a diszjunkt halmazpárok terén ennek alapján Enomoto és Katona később egy távolságot definiált.

Kérdés. Nem lehet-e a módszert kiterjeszteni, nem lehet-e hasonló állítást bizonyítani diszjunk halmazhármasokra is, azaz, hogy az összes k-elemű részhalmaz beosztható diszjunkt halmazhármasokra úgy, hogy két ilyen halmazhármas között valamilyen metszési-távolsági viszony legyen.

A 4.4 alfejezet egy másik, az adatbázisok által motivált kódelméleti kérdéssel foglalkozik. A. 4.4.5. tétel bizonyítása kemény eszközöket használ. Az alsó korlátot véletlen konstrukció adja a Lovász Lokális Lemma használatával, míg a felső korlát szférikus kódok használatával következik.

A 4.5 alfejezetben egy diszkrepancia típusú problémát tárgyal. A motiváció több külső adathordozón elhelyezkedő adatok közel optimális párhuzamos beolvasása. Meglepő, hogy a valóban gyakorlatinak tűnő kérdést elég pontosan, szép matematika használatával sikerült megoldani.

Értékelés.

A dolgozat érdekes és fontos eredményeket tartalmaz az extremális kombinatorika és a konstruktív kombinatorika területeiről. A feladatkitűzések az extremális kombinatorikához sorolhatók, de ha a válasz igényli, komoly eszközök, vagy eredeti ötletek segítségével ad konstrukciót az extremális probléma megoldására.

Bár azt lehet mondani, hogy a dolgozat nem az extremális kombinatorika fő irányába tartozik, az első témakör (2. fejezet) egy olyan új irányt tűz ki, amely esélyes arra, hogy bekerüljön a fő irányok közé. E fejezet talán legfőbb értéke a 2.2.3 sejtés, és a megoldás irányába tett 2.3.5 tétel.

A harmadik fejezet a Vapnik-Chervonenkis dimenzió vizsgálatában, és a bíráló által felállított sejtés eldöntése irányában tesz fontos lépéseket. Itt a 3.3.5 tétel a legérdekesebb.

A negyedik fejezet az adatbázisok elmélete által felvetett kombinatorikai problémákat vizsgál, legfontosabb eredményei a 4.3.4, a 4.3.24, a 4.3.25 és a 4.4.5. tételek.

A dolgozat jól olvasható. Az énáltalam megtalált pontatlanságok, elírások száma elhanyagolható. Ilyen például a 2.4.2 tétel képlete, amiben egy egész szám egészértéke szerepel, mert a felette lévő képlet hibás átalakításával keletkezett.

Az értekezés nyilvános vitára való bocsátását és a doktori cím megadását javaslom.

Tokyo, 2010. november 22. Frankl Péter