MTA
DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

KONTINUUMMECHANIKAI FELADATOK DUÁL FELÉPÍTÉSBEN

Értelmező egyenletek származtatása
Vegyes peremértékfeladatok megoldásának egyértékűsége
Peremelem módszer síkfeladatokra

Írta
Szeidl György
aki az MTA doktora cím elnyerésére pályázik

Miskolc
2006

1. Bevezetés

Az értekezés *a szilárd testek alakváltozása linearizált elméletének keretei között old meg duál felépítésű kontinuummechanika feladatokat* a teljes Lagrange leírási módot alkalmazva, valamint tetszőleges görbevonalú koordináta-rendszert és a tenzoranalízis indexes jelölésrendszerét feltételezve (latin kisbetűk az 1, 2, 3, görög kisbetűk az 1, 2 értékeket veszik fel).

Az értekezés megkülönbözteti *a klasszikus és a mikropoláris feladatokat.*

Duál felépítésben a feszültségfüggvény tenzor (klasszikus eset), vagy a feszültségfüggvény tenzorok (mikropoláris eset) nem zérus koordinátái, az ún. feszültségfüggvények az *alapváltozók*, a feszültségi tenzor (klasszikus eset), vagy a feszültségi tenzor és a nyomatéki feszültségi tenzor, együtt a feszültségi tenzorok (mikropoláris eset) az ún. *elsődleges közbenső változó(k)*, továbbá a szimmetrikus alakváltozási tenzor (klasszikus eset), vagy a nem szimmetrikus alakváltozási tenzor és a forgási alakváltozási tenzor, együtt alakváltozási tenzorok (mikropoláris eset) az ún. *másodlagos közbenső változó(k).*

A kontinuum *térfogati tartományán* duál felépítés esetén fennálló *mezőegyenletek* a következők:

- az értelmező (vagy kinematikai) egyenlet(ek) a feszültségi tenzorok(at) származtatják a feszültségfüggvény tenzor(ok)ból és az egyensúlyi egyenletek(et) teljesülését biztosítják
- az alakváltozási tenzor(ok) az anyagegyenletekkel adódnak a feszültségi tenzor(ok)ból
- az alakváltozási tenzorok mint mérlegegyenlet(ek)nek, a kompatibilitási mezőegyegyenlet(ek)nek tesznek eleget.

A térfogati tartomány lehet egyszeresen vagy többszörösen összefüggő és lehet (végtelenbe nyúló) külső tartomány is. Az egyszeresen összefüggő tartományt egyetlen, vagy több zárt felület is határolhatja.

Valamely *peremrészen* duál felépítés esetén az alábbiak a *peremfeltételek*:

- feszültségi peremfeltétel(ek) (ha a felületi terhelés van előírva)
- alakváltozási peremfeltétel(ek) (ha klasszikus esetben az elmozdulásmező, mikropoláris esetben az elmozdulásmező és a független forgásmező van előírva)
- vegyes peremfeltételek (részben feszültségi, részben alakváltozási peremfeltételek)
- kompatibilitási peremfeltétel(ek) (függetlenül az előírás módjától).

A feszültségi és az alakváltozási peremfeltételek (vagy a vegyes előírású peremrészek) közös határgörbéjén teljesülnie kell az illesztési peremfeltételeknek is.

Többszörösen összefüggő térfogati tartomány esetén teljesülnie kell még az ún. *makro vagy nagybani kompatibilitási feltételeknek* is.

A kompatibilitási mezőegyenlet(ek), a kompatibilitási peremfeltétel(ek), az alakváltozási peremfeltétel(ek) és a makro kompatibilitási feltételek együtt biztosítják, hogy az alakváltozási tenzor(ok)ból a – kontinuum adott merevtestszerű mozgása esetén – a térfogati tartományon és a teljes peremfelületen is klasszikus esetben egyértékű elmozdulásmező, mikropoláris esetben pedig egyértékű elmozdulásmező és egyértékű forgásmező legyen előállítható.

A duál felépítés sajátos problémái – együtt véve a klasszikus és a mikropoláris kontinuumokat – a következők:

- a feszültségfüggvények száma és megválasztási lehetőségeik, ahhoz hogy az egyensúly egyenlet(ek)et kielégítő tetszőleges feszültségi tenzor(ok) legyenek képezhetők
- az egyensúlyi egyenlet(ek) kielégítése többszörösen összefüggő, vagy külső térfogati tartomány esetén
- a másodrendű – és az elsőrendű feszültségfüggvények problémaköre
- a kompatibilitási mezőegyenletek száma és megválasztási lehetőségeik, peremfeltétel(ek), valamint a makro kompatibilitási feltételek
- a vegyes peremfeltételek problémaköre
- általában a többszörösen összefüggő, vagy külső térfogati tartományok esete
- a több zárt felülettel határolt, egyszeresen összefüggő térfogati tartományok problémaköre
- a megoldások meghatározottsága és teljessége
- a virtuális munka elv alkalmazása
- variációs elvek alkalmazása
- a teljes kiegészítő energia elv alkalmazása
- a peremelem módszer alkalmazása
- 3D-s, 2D-s feladatok (2D-s feladatoknál értelemszerűen felületi tartományról és peremgörbékről beszélünk).

Fenti problémák általában egymással átfedésben jelentkeznek.

A továbbiak először részletesen taglalják a választott problémákat, ezek megoldásának szakirodalmi állapotát, majd megfogalmazzák az értekezés célkitűzéseit és az elért eredményeket.

Egy esetben az értekezés a primál rendszerre is kitér.

A tézisfüzet utolsó *6. A tézisfüzetben felhasznált jelölések* című szakasza tartalmazza a tézisfüzetben előforduló összes jelölést.

2. Az értekezésben megoldott tudományos feladatok előzményei, célkitűzések

2.1. Elöljáróban a szóhasználat egyértelművé tétele érdekében röviden áttekintünk néhány – részben már eddig is említett – fogalmat.

Az értekezés gondolatmenete – külön említés nélkül – a duál rendszerre vonatkozik. Ahol primál rendszerről van szó ott arra az értekezés külön felhívja a figyelmet.

A síkbeli és térbeli tartomány lehet egyszeresen, vagy többszörösen összefüggő.

Azt fogjuk mondani, hogy *kompatibilis az alakváltozási tenzor (az alakváltozási tenzor és a forgási alakváltozási tenzor)*, ha létezik olyan elmozdulásmező (elmozdulásmező és független forgásmező), amely(ek)ből, felhasználva a primál rendszer kinematikai egyenleteit – ezek az alakváltozási tenzort (az alakváltozási tenzort és a forgási alakváltozási tenzort) adják meg az elmozdulásmezővel (az elmozdulásmezővel és a független forgásmezővel) kifejezve – visszakapjuk az alakváltozási tenzort (az alakváltozási tenzort és a forgási alakváltozási tenzort).

A *virtuális munka elv*, bármely alakját tekintjük is (klasszikus esetben [23], mikropoláris esetben [48] ad áttekintést a virtuális munka elv duál alakjairól), mindig anyagegyenlettől független elv.

Ezzel szemben a *rugalmasságtan variációs elvei* esetén, mind a primál mind pedig a duál rendszerben vagy a mellékfeltételeken keresztül vagypedig közvetlenül a vonatkozó funkcionálban megjelenik az anyagegyenlet.

Szabad variációs feladatról beszélünk, ha nincs mellékfelétel a vonatkozó funkcionál értelmezési tartományát alkotó mezőkre nézve. Ekkor az értelmezési tartományt alkotó valamennyi mező szabadon variálható.

A *klasszikus rugalmasságtan Somigliana képletei* [39] a potenciálelmélet úgynevezett Green képleteinek rugalmasságtani általánosításai. Ha ismerjük a teljes peremen az elmozdulás- és feszültségmezőt, továbbá az úgynevezett elsőrendű és másodrendű alapmegoldásokat, akkor az első Somigliana képlet felhasználásával integrálásokat végrehajtva számítható a test belsejében az elmozdulásmező. Mivel a peremfeltételek nem adják meg a teljes peremen az elmozdulás- és feszültségmezőt további egyenlet szükséges ezek számítására. A második Somigliana képlet ugyanolyan szerkezetű mint az első Somigliana képlet, de a peremen adja meg az elmozdulásmezőt. Következésképp olyan integrálegyenletnek tekinthető – ez az úgynevezett *direkt módszer integrálegyenlete* – amelyben a feszültségvektor az ismeretlen abban a perempontban, ahol az elmozdulásmező adott, illetve megfordítva az elmozdulásvektor az ismeretlen abban a perempontban, ahol a feszültségvektor adott. Ennek az egyenletnek a megoldása nyitja meg az utat az első Somigliana képlet felhasználása előtt.

2.2. A *klasszikus elmélet* keretei között Maxwell [26] és Morera [28] az egyensúlyi egyenlet két egymástól különböző megoldását adta meg. Ezek mindegyike három–három feszültségfüggvényt tartalmaz. Beltrami [4] észrevette, hogy az említett megoldások is megkaphatók az általa javasolt megoldásból, feltéve hogy a megoldásában álló szimmetrikus tenzor alkalmasan választott három–három elemének helyére zérust írunk. A Beltrami féle megoldás teljességét többek között Ornstein [32], Günther [12] valamint Dorn & Schield [11] igazolta, a bizonyítások azonban csak egyetlen zárt felülettel határolt tartományra érvényesek. Ezt a körülményt Rieder [34] vette észre, amikor megfigyelte, hogy több zárt felülettel határolt tartományok esetén a Beltrami féle megoldás önegyensúlyi minden zárt felületen, következésképp nem lehet teljes. A Beltrami féle megoldás alkalmas, intuitív úton választott kiegészítésével egymástól függetlenül Schaefer [36] és Gurtin [13] talált egymástól formálisan különböző, de teljes megoldásokat.

Az idézett cikkekben a feszültségfüggvények bevezetése intuitive történt. Ebben a tekintetben az előrelépés Tonti [52] és Stippes [44] érdeme, akik a nem teljes Beltrami féle megoldást variációs elvből (Tonti), illetve a virtuális munka elvből (Stippes) származtatták. További problémát jelentett, hogy mellékfeltételként a hat

SAINT VENANT féle kompatibilitási feltételt alkalmazták, holott ezek nem függetlenek egymástól [23]. Ebből adódik, hogy az így nyert megoldás, amely megegyezik formailag a BELTRAMI féle megoldással *hat feszültségfüggvényt foglal magába, holott három feszültségfüggvény elegendő tetszőleges feszültségi állapot megadásához, ha a tartományt egyetlen zárt felület határolja.*

Ez az ellentmondás az un. SOUTHWELL féle paradoxon [40], [41] duális párja. Érdemes azt is megemlíteni, hogy a matematikai átalakítások során mindkét szerző, azaz TONTI is és STIPPES is figyelmen kívül hagyta a test határfelületén megjelenő integrálokat és azt is feltételezték, hogy nincs térfogaton megoszló teher.

Mikropoláris testre GÜNTHER [12] adta meg elsőként az egyensúlyi egyenletek feszültségfüggvényekkel történő megoldását. Nem vette azonban észre, hogy az általa talált megoldás önegyensúlyi minden zárt felületen, következésképp – hasonlóan a klasszikus esetre vonatkozó BELTRAMI féle megoldáshoz – nem teljes, ha a vizsgált tartományt több zárt felület határolja. A GÜNTHER féle megoldás kiegészítésével, egymástól függetlenül, SCHAEFER [37] és CARLSON [6] talált formailag különböző, valójában azonban egymással egyenértékű megoldásokat.

Nyitott kérdés maradt azonban a megoldás határozottságának kérdése – ezen a szükséges feszültségfüggvények számának kérdését értjük – és ezzel összefüggésben a SOUTHWELL paradoxon mikropoláris analogonjának megoldása. Lineáris esetben KOZÁK–SZEIDL [24] megmutatta, hogy a *kilenc–kilenc feszültségfüggvény helyett hat–hat feszültségfüggvény* elegendő tetszőleges feszültségi állapot leírásához.

Mivel a kompatibilitási feltételek száma kilenc–kilenc mikropoláris testre – ezeket NOWACKI [31] adta meg, de nem függetlenek – a SOUTHWELL paradoxon duális párja úgy fogalmazható meg, hogy STIPPES gondolatmenetét [44] követve levezethetők ugyan az egyensúlyi egyenletek megoldásai feszültségfüggvényekkel a virtuális munka elvből, de ez a megoldás kilenc–kilenc feszültségfüggvényt tartalmaz hat–hat helyett. A klasszikus esethez hasonlóan arra is ügyelni kell, hogy a megoldás több zárt felülettel határolt testre is érvényes legyen.

Az egyensúlyi egyenletek megoldását tetszőleges terhelésre egy zárt felülettel határolt egyszeresen összefüggő test esetén *általános megoldásnak* nevezzük.

Teljes az egyensúlyi egyenletek megoldása, ha több zárt felülettel határolt egyszeresen összefüggő tartomány tetszőleges, azaz az egyes zárt felületek nem szükségképpen önegyensúlyi terhelései esetén is teljesül az egyensúlyi egyenletet.

1. **CÉLKITŰZÉS:** *Az* egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldásának származtatása több zárt felülettel határolt, egyszeresen összefüggő testre virtuális munka elv segítségével.

   A mellékfeltételek helyes megválasztása feltehetően biztosítja, hogy
   (a) klasszikus esetben *három független feszültségfüggvényt* tartalmaz a megoldás és ezzel a SOUTHWELL paradoxon duális párját is megoldom,
   (b) mikropoláris esetben *hat–hat feszültségfüggvényt* tartalmaz a megoldás és ezzel megoldódik a SOUTHWELL paradoxon duális párjának analogonja mikropoláris testre.

(c) A megoldáshoz kötődő cél a térfogati terhelés helyes figyelembevétele, a vonatkozó integrálátalakítások tekintetében pedig a mechanikai jelentés tisztázása (különösen a felületi integrálok vonatkozásában).

2.3. *A klasszikus esetben* számos mű, többek között ABOVSZKI, ANDREJEV és DERUGA könyve [1] foglalkozik részletesen a rugalmasságtan variációs elveivel. Ha azonban azokra a variációs elvekkel szorítkozunk, ahol az egyensúlyi egyenletek feszültségfüggvényekkel való megoldása jelenik meg, mint a probléma egyik EULER egyenlete akkor ebben tekintetben egyedinek tekinthető az említett könyv. TONTI és STIPPES már idézett cikkeihez képest van előrelépés a peremen megjelenő integrálok tekintetében, de az átalakítások részben hibásak és hiányoznak azok a tagok is a megoldásból amelyek biztosítanák, hogy a megoldás több zárt felülettel határolt tartományon is érvényes legyen.

Közismert, hogy a kompatibilitási egyenletek matematikai szerkezete és a 2.2. pontban említett BELTRAMI féle megoldás matematikai szerkezete ugyanaz. Ezt a hasonlóságot statikai–kinematikai analógiának szokás nevezni. Nyilvánvaló, hogy az alakváltozási peremfeltételek teljesülése biztosítja a kompatibilitást S_u–n. Felidézve, hogy a kompatibilitás és az egyensúly duál fogalmak felmerül a kérdés: hogyan kell megválasztani a feszültségfüggvényeket az S_t–én [S_u duális párján] ha azt akarjuk, hogy ne származzon belőlük feszültség. Más szavakkal: van-e mód a statikai-kinematikai analógia peremfeltételekre vonatkozó kiterjesztésére?

Mikropoláris esetben is több szerző foglalkozott. A primál rendszer legfontosabb variációs elvei NOWACKI [31] könyvében lelhetők fel. A virtuális munka elv duál alakjait és a duál rendszer legfontosabb variációs elveit KOZÁK–SZEIDL [25] és SZEIDL [47], [46] adta meg. Azok a variációs elvek azonban, ahol az egyensúlyi egyenletek általános és teljes, *hat–hat feszültségfüggvényt* tartalmazó megoldása jelenik meg mint EULER egyenlet, még hiányoznak.

A mikropoláris rugalmasságtanban azonos szerkezetűek a kompatibilitási egyenletek és az egyensúlyi egyenletek SCHAEFER féle megoldásának homogén részei: az {előbbi}[utóbbi] megkapható az (utóbbiból)[előbbiből], ha abban (κ, γ) [$\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$] helyett ($\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$–t)[κ, γ–t] írunk. Felmerül a kérdés, ugyanúgy mint a klasszikus esetben, hogy van-e mód ennek a statikai–kinematikai analógiának a peremfelületre történő kiterjesztésére.

2. CÉLKITŰZÉS: A fentiekben részletezett gondolatok (az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldását adó variációs elvek, integrálátalakítások a peremen, statikai-kinematikai analógia) jegyében

(a) klasszikus esetben a vonatkozó variációs elvek módosítása és kiegészítése

(b) mikropoláris esetben a vonatkozó variációs elvek megalkotása továbbá

(c) a statikai–kinematikai analógia kiterjesztése mindkét esetben a peremfeltételekre.

2.4. *A klasszikus esetben* SOUTHWELL [40], [41] volt az első, aki a kompatibilitási feltételeket a teljes kiegészítő energia maximum elvből [1], mint variációs elvből

[1] Gyakran nevezik a teljes kiegészítő energia minimum elvnek

származtatta. Ugyanakkor arra is rámutatott, hogyha három feszültségfüggvényt alkalmaz – a MAXWELL [26] és MORERA [28] féle megoldásokat használta fel – akkor csak három kompatibilitási differenciálegyenlet következik a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási egyenletek közül a stacionaritási feltételből. Mivel egy zárt felülettel határolt tartományon tetszőleges feszültségi állapot megadható alkalmasan választott három feszültségfüggvénnyel – több zárt felülettel határolt tartomány és/vagy zérustól különböző térfogati terhelés esetén a feszültségfüggvénnyel nyerhető megoldást ki kell egészíteni az egyensúlyi egyenletek egy partikuláris megoldásával – SOUTHWELL ellentmondásra jutott, hiszen az alakváltozásmezők kompatibilitásának elégséges feltétele a hat SAINT VENANT féle kompatibilitási egyenlet fennállása. A paradoxont, amelyre jutott, utána nevezték el SOUTHWELL paradoxonnak. SOUTHWELL idézett cikkei után a következő kérdések maradtak megoldatlanok: Elegendő-e a kompatibilitás fennállásához három kompatibilitási egyenlet fennállása. Ha igen, melyik három. Ha igen, vannak–e további feltételek a kompatibilitás fennállásához.

A paradoxon részletes leírása, ez a feszültségfüggvények megválasztásának összes lehetséges esetét felöleli, RIEDER tanítványának STICKFORTHnak a nevéhez fűződik [43], aki WASHIZU egy részeredményének [53] általánosításával kimutatta, hogy a kompatibilis alakváltozásmezők eleget tesznek bizonyos peremfeltételeknek. Ezeknek a feltételeknek később KOZÁK a kompatibilitási peremfeltétel nevet adta, és kimutatta, háromféleképpen is, tiszta matematikai úton [21], a kiegészítő energia minimum elv felhasználásával [20] és a virtuális munka elv duál alakjának felhasználásával [22], hogy az alakváltozásmezők kompatibilitásának szükséges és elégséges feltétele három alkalmasan választott kompatibilitási differenciálegyenlet és a kompatibilitási peremfeltételek fennállása. Az utóbbi két tanulmány egyedüli abban a tekintetben, hogy a vizsgálatok vegyes peremértékfeladatra vonatkoznak.

Az eddig idézett tanulmányok mindegyike *egyszeresen összefüggő* tartományt tételez fel.

Többszörösen összefüggő tartomány, síkfeladatok és feszültségi peremfeltételek feltételezése mellett PRAGER [33] kimutatta, hogy a MITCHELL féle feltételek [27], [14], vagy ami ugyanaz a kompatibilitás makró feltételei, természetes peremfeltételek, amelyek a CASTIGLIANO elvből következnek[2]. PRAGER eredményét egymástól függetlenül HU HAICHANG [15] és SZEIDL–VAN GEMERT [51] általánosította vegyes peremértékfeladatokra (az elsőbbség HU HAICHANG–é). Ami a háromméretű feladatokat illeti, feszültségi peremfeltételeket és többszörösen összefüggő tartományt tételezve fel MORIGUTI [29] és STICKFORTH [42] dolgozatait kell említeni, megjegyezve, hogy STICKFORTH nem ismerte MORIGUTI idézett cikkét. Az utóbbi két dolgozat sem adott azonban megoldást a SOUTHWELL paradoxonra és a vegyes peremértékfeladatok esetét szintén figyelmen kívül hagyták.

A szóhasználat egyértelműsége kedvéért az alábbiakban állapodunk meg. A *kompatibilitás makró feltételein* a többszörösen összefüggő tartományon szükséges azon feltételek összességét értjük, amelyeknek a kompatibilitási (differenciál)egyenleteken

[2] A szóhasználat Prager szóhasználata, valójában a teljes kiegészítő energia minimum elvről van szó.

túlmenően – ezeknek mind egyszeresen mind pedig többszörösen összefüggő tartományon fenn kell állniuk – teljesülniök kell. A kompatibilitás makró feltételeit két csoportba soroljuk attól függően, hogy milyenek a peremfeltételek annak az egyszeresen összefüggő zárt felületi görbének a pontjaiban, amely mentén ezeket a feltételeket tekintjük. Ha a görbe minden pontjában feszültség előírt, akkor a vonatkozó makró feltétel *nagybani kompatibilitási feltétel.* Ha a görbének van legalább egy olyan íve, amelynek mentén elmozdulások az adottak, akkor a vonatkozó feltételt (feltételeket ha több ilyen ív létezik) *kiegészítő kompatibilitási feltétel*eknek nevezzük.

Kitűnik a fenti irodalmi áttekintésből, hogy sem MORIGUTI [29], sem pedig STICKFORTH [42] nem adta meg a kompatibilitás kiegészítő feltételeit.

Mikropoláris testre KOZÁK-SZEIDL [24] majd SZEIDL [45] vizsgálta a tetszőleges feszültségi állapot előállításához szükséges feszültségfüggvények számának kérdését, valamint a független, szükséges és elégséges kompatibilitási feltételek kérdését a klasszikus esettel azonos feltételezések mellett, vagyis egyszeresen összefüggő térbeli testre. Az [50] előadás és az [49] tanulmány többszörösen összefüggő tartomány és feszültségi peremfeltételek mellett a duál virtuális munka elv, valamint a teljes kiegészítő energia maximum elv segítségével vizsgálta a kompatibilitási feltételek kérdését és kimutatták, hogy az idézett elvek mindegyike biztosítja a *nagybani kompatibilitási feltételek* teljesülését.

A szerző ismeretei szerint a *kiegészítő kompatibilitási feltételek* kérdésével a vonatkozó szakirodalom mikropoláris esetben sem foglalkozott.

3. CÉLKITŰZÉS: Háromméretű problémák és vegyes peremértékfeladatok feltételezése mellett klasszikus és mikropoláris esetben is

(a) geometriai megfontolásokból levezetni a kompatibilitás kiegészítő feltételeit, továbbá

(b) igazolni formális számításokkal, hogy a kompatibilitás vegyes peremértékfeladatok és háromméretű test esetére vonatkozó kiegészítő feltételei a teljes kiegészítő energia maximuma elvből következő természetes peremfeltételek.

2.5. SZEIDL–KOZÁK [25], majd SZEIDL [47] foglalkozott először a mikropoláris rugalmasságtan un. első síkfeladatának duál rendszerével illetve az egyenértékű variációs elvekkel. Kimutatták, hogy az alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltának szükséges és elégséges feltételei, közöttük a többszörösen összefüggő tartományon érvényes makró kompatibilitási feltételek (jelen esetben a *nagybani kompatibilitási feltételek*) mind következnek a teljes kiegészítő energia maximuma elvből, ha a peremfeltételek ugyanolyan természetűek minden egyes zárt kontúron, azaz vagy az elmozdulások, vagy pedig a feszültségek vannak előírva.

Ha az egyes kontúrok páros számú ívre vannak felosztva, és az ívek mentén vagy az elmozdulás vagy pedig a feszültség az előírt, akkor tisztázatlan a *kiegészítő egyértékűségi feltételek* kérdése, bár valószínűsíthető, hogy ezek a feltételek is következnek a kiegészítő energia maximuma elvből. A klasszikus síkfeladatok esetére ezt a kérdést, egymástól függetlenül, HU–HAICHANG [15] és SZEIDL–VAN GEMERT [51] vizsgálta (az elsőbbség Hu–Haichangé), akik megmutatták, hogy valamennyi kiegészítő feltétel következik a teljes kiegészítő energia maximuma elvből.

További probléma, hogy nem ismeretesek az alakváltozási peremfeltételek, ha a kontúr egy–egy ívén érintőirányú elmozdulás, normálirányú feszültség, vagy érintőirányú feszültség, normálirányú elmozdulás, illetve forgás vagy nyomatéki feszültség az előírt az összes lehetséges eset alapul vételével.

4. **Célkitűzés:** A kompatibilitás kiegészítő feltételeinek levezetése, ha egy kontúr páros számú ívre osztott és az íveken felváltva vagy a feszültség vagy az elmozdulás az előírt, valamint az ismeretlen alakváltozási peremfeltételek levezetése.

2.6. Bár számos tanulmány jelent meg síkrugalmasságtani feladatok primál rendszerbeni megoldásáról peremintegrálegyenletekkel (peremelem módszerrel) – lásd pl. [35], [5], [54] vagy [17] – a pályázó ismeretei szerint alig található olyan cikk a síkrugalmasságtan szakirodalmában, amely a duál rendszer egyenleteit veszi alapul, azaz valós feszültségfüggvényeket tekint alapváltozónak. Kivételt jelent Jaswon, Mati és Symm cikke [18]– érdemes ehelyütt Jaswon és Symm könnyebben hozzáférhető könyvére is hivatkozni [19] – amelyben az ismeretlen biharmonikus függvényt (valójában másodrendű feszültségfüggvényt) két ismeretlennek tekintett harmonikus függvény segítségével, egyszerű réteg potenciáljaként adták meg a szerzők; az ismeretlen kontúrmenti forrássűrűség meghatározására pedig alkalmas peremintegrálegyenleteket vezettek le.

Elsőrendű feszültségfüggvények alkalmazását síkbeli és térbeli feladatokra Fraeijs de Veubeke kezdeményezte [9], [10] egy új, a teljes kiegészítő energia minimumának elvén alapuló végeselemes eljárás kapcsán mivel a szakaszonként sima (C^0 folytonosságú) elsőrendű feszültségfüggvények biztosítják a folytonos felületi terhelés meglétét és ily módon lehetővé vált izoparametrikus elemeket alkalmazni elsőrendű feszültségfüggvényekre.

Ha elsőrendű feszültségfüggvényeket alkalmazunk, akkor a feszültségek meghatározása a feszültségfüggvények első deriváltjainak számítását igényli, ellentétben az Airy féle másodrendű feszültségfüggvénnyel [2], ennek ismeretében ui. második deriváltak adják a feszültségeket. Az elsőrendű feszültségfüggvény idézett tulajdonsága vonzóvá teszi ezeket a függvényeket a peremelemes alkalmazások számára, annak ellenére, hogy a nyomatéki egyensúly fenntartása egy további egyenletet igényel. Megjegyezzük, hogy az Airy féle feszültségfüggvény alkalmazásának rendkívül bő irodalma van. A teljesség igénye nélkül emeljük ki ehelyütt Muszkhelisvili és iskolája eredményeit [30]. Muszkhelisvili felismerte, hogy az Airy féle feszültségfüggvényre vonatkozó megoldás két reguláris komplex függvény segítségével adható meg. Mivel ez a megoldás teljesíti a vonatkozó mezőegyenletet – a kompatibilitási egyenletet Airy féle feszültségfüggvénnyel – egy adott peremértékfeladat megoldásához csak a peremfeltételek kielégítését kell biztosítani.

Az elsőrendű feszültségfüggvények duál rendszerbeni alkalmazása kapcsán számos kérdés merül fel. Tisztázni kell az egyértékűség szükséges és elégséges feltételeit, különös tekintettel a vegyes peremértékfeladatokra és a többszörösen összefüggő tartomány esetére. Meg kell keresni az elsőrendű feszültségfüggvényekre vonatkozó alapmegoldást (az duál alapegyenletek megoldását, ha a Dirac függvény az inhomogenitást okozó tag ezekben egyenletekben). Az alapmegoldás ismeretében mód nyílik a SOMIGLIANA féle identitás [39] duál rendszerbeni analogonjának felállítására és ily módon az úgynevezett direkt[3] módszer integrálegyenletei is adódnak. Végezetül számítógépi programot is érdemes kidolgozni a vonatkozó peremintegrálegyenlet numerikus megoldására.

A fentebb megfogalmazott kérdésekkel kapcsolatos az

5. CÉLKITŰZÉS:

(a) az elmozdulásmező egyértékűségéhez szükséges feltételek meghatározása a vegyes peremértékfeladatok egy osztálya és többszörösen összefüggő tartomány esetén az elsőrendű feszültségfüggvényeket és a merevtestszerű forgást tekintve alapváltozóknak (olyan ismeretleneknek, melyekkel az összes többi ismeretlen kifejezhető)

(b) az elsőrendű feszültségfüggvényekkel kapcsolatos első és másodrendű alapmegoldások előállítása,

(c) a SOMIGLIANA identitás duál rendszerbeni analogonjának levezetése és ezzel a direkt módszer integrálegyenletének felállítása mind belső, mind pedig külső tartományra, továbbá

(d) számítási algoritmus kidolgozása, a megoldandó lineáris egyenletrendszer tulajdonságainak vizsgálata, majd számító program kifejlesztése és számítások végzése másodrendű izoparametrikus peremelemek felhasználásával.

2.7. Bár igen nagy azon cikkek száma, melyek a peremelem módszer síkrugalmasságtani alkalmazásaival foglalkoznak – a teljesség igénye nélkül emeljük ki ehelyütt a [55, 17, 38, 8, 7] cikkeket, valamint a [3, 16] könyveket (az utóbbiakban további hivatkozások is találhatók) – a feladat külső tartományokra történő megfogalmazásának mindenütt az a hátránya, hogy nem írhatók elő feszültségek a végtelen távoli pontban.

Ami az okokat illeti ismét hivatkozunk a [8] tanulmányra, amelyben feltevést fogalmaznak meg az elmozdulásmező végtelenbeli viselkedésére vonatkozóan. A megfogalmazott feltevés mellett lehetővé válik a Betti formula felállítása valamint a Dirichlet és Neumann típusú peremértékfeladatok unicitásának és egzisztenciájának igazolása. A feltevés ugyanakkor kizárja az elméletből azokat a feladatokat amelyre nézve az elmozdulásmezőhöz konstans végtelenbeli alakváltozásmező, következésképp konstans végtelenbeli feszültségállapot tartozik.

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy ezek a feladatok is megoldhatók a szuperpozíció elv ügyes alkalmazásával.

Ennek ellenére, felmerül az a kérdés az értekezés 8. Fejezetében foglalt eredmények fényében – eszerint a végtelenbeli feszültségi állapot duál rendszerben a formalizmus

---

[3]Direkt módszerről beszélünk, ha a vonatkozó integrálegyenletekben a test peremén vett egyes fizikai mennyiségek az ismeretlenek.

része –, hogy a végtelenbeli konstans feszültségállapot leírásához szükséges tagok primál rendszerben is beépíthetők-e a formalizmusba. Ezzel a kérdéssel függ össze a

6. Célkitűzés: amely annak megmutatása, hogy az elmozdulásmező végtelenbeli viselkedésére kirótt alkalmas feltevés mellett primál rendszerben is beépíthető a végtelenbeli feszültségi állapot a külső tartományra vonatkozó formalizmusba.

3. Eredmények

1. Tézis: Megmutattam, hogy [klasszikus] (mikropoláris) esetben levezethető az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldása – azaz a több zárt felülettel határolt testre érvényes [Schaefer féle megoldás és a Gurtin féle megoldás is] (Schaefer féle megoldás) – a virtuális munka elv általános primál alakjából, ha ismeretesek az alakváltozásmezők kompatibilitásával illetve kinematikailag lehetséges voltával kapcsolatos feltételek, közöttük a V térfogati tartományra vonatkozó [három] (hat-hat) *független* kompatibilitási egyenlet és az alakváltozási peremfeltételek.

A tézishez kapcsolódó részeredmények:

(a) A mellékfeltételek [három](hat-hat) független mezőegyenletet tartalmaznak következőleg tetszőleges feszültségi állapot megadható [három](hat-hat) feszültségfüggvény segítségével. Ezzel megoldást nyert [a Southwell paradoxon duális párja](a Southwell paradoxon duális párja mikropoláris esetre). A gondolatmenet egyik eredménye [Finzi intuitív módon elért eredményének, miszerint a H_{kl} feszültségfüggvény tenzor szabály szerint kiválasztott három eleme – ezek indexeit $_{AB}$ jelöli – zérusnak választható](Kozák–Szeidl intuitív módon elért eredményének, miszerint a H_{kl} és $F_{y\cdot}{}^{b}$ feszültségfüggvény tenzorok szabály szerint kiválasztott három-három eleme – ezek indexeit $_{AB}$ és $_{K}^{L}$ jelöli – zérusnak választható), független igazolása. Ugyancsak a gondolatmenet eredménye [Kozák egyik eredményének, miszerint a nem zérus elemek indexei pedig ugyanazok kell, hogy legyenek mint a független kompatibilitási egyenletek $_{RS}$ indexei] (Kozák–Szeidl egyik eredményének, miszerint a nem zérus elemek indexei pedig ugyanazok kell, hogy legyenek mint a független kompatibilitási egyenletek $_{XY}$ és $_{S}{}^{T}$ indexei), független igazolása.

(b) Az S felületen vett integrálok hosszadalmas és nehéz átalakításainak megadása formálisan is igazolta azt a természetes követelményt, hogy a feszültségeket ugyanúgy kell számítani mind a V–n, mind pedig az S–n.

(c) A gondolatmenetet módszertani jelentőségű mivel mind klasszikus, mind pedig mikropoláris esetben eredményesen alkalmazhatónak bizonyult.

2. Tézis: [Klasszikus esetben módosítottam és kiegészítettem] (Mikropoláris esetben megkonstruáltam) az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldását adó szabad variációs elv funkcionálját, és ennek speciális eseteként megadtam a módosított potenciális energia funkcionált is. A gondolatmenet eredményeként megtaláltam a statikai kinematikai analógia hiányzó, a vizsgálat tárgyát képző test határfelületére vonatkozó egyenleteit is.

A tézishez kapcsolódó részeredmények:

(a) A szabad variációs feladat funkcionáljai nem tartalmaznak semmiféle ellentmondást a kompatibilitási egyenletek és a feszültségfüggvények száma tekintetében, mindkettő [*három*] (*hat*), nem pedig [*hat*, mint Abovszkij, Andrejev és Deruga [1]] (*kilenc*, mint Nowaczky [31]) könyvében.

(b) A szabad variációs feladat funkcionáljai megengedik a vegyes peremfeltételek figyelembevételét, hiszen a peremfelület – a teljes S felület – az S_u és S_t jelű részekre bontott, és ezeken különböző típusú peremfeltételek írhatók elő. Ezt az teszi lehetővé, hogy a fumkcionálok értelmezési tartománya az S_t–n értelmezett feszültségfüggvényeket is tartalmaz.

(c) Nem előfeltétel az elmozdulásmező folytonossága az S_u és S_t felületrészek közös g határgörbéjén.

(d) A módosított teljes potenciális energia funkcionálok stacionaritási feltételéből is kiadódnak, mint EULER egyenletek az egyensúlyi egyenletek általános és teljes SCHAEFER által talált megoldásai [37, 36]. A megoldás [csak három] (csak hat) feszültségfüggvényt tartalmaz ha a mellékfeltételeket alkalmasan választjuk meg.

(c) A statikai-kinematikai analógia hiányzó, és a test határfelületére vonatkozó egyenletei megőrzik a mezőegyenletek kapcsán megfigyelt dualitást:
[Klasszikus esetben az S_t–n érvényes peremfeltételek az S_u–ra vonatkozó két alakváltozási peremfeltétel, valamint egy kiegészítő feltétel *duális párjai* mivel [az előbbi] (az utóbbi) feltételek azonnal megkaphatók [az utóbbi] (az előbbi) feltételekből, ha rendre [e–t és u–t írunk H és w helyett] (H–t és w–t írunk e és u helyett). Mivel az említett kiegészítő feltétel nem független az alakváltozási peremfeltételektől duális párja az S_t szintén nem független az első két peremfeltételtől. **]**
(Mikropoláris esetben az S_t–n érvényes két peremfeltétel az S_u–ra vonatkozó két alakváltozási peremfeltétel *duális párja* mivel [az előbbi] (az utóbbi) feltételek azonnal megkaphatók [az utóbbi] (az előbbi) feltételekből, ha rendre [γ,κ-t és u,φ-t írunk a H,F különbségek és w,r helyett] (H,F különbségeket és w,r–t írunk γ,κ és u,φ helyett). **)**

3. Tézis: [Klasszikus] (Mikropoláris) esetben megmutattam, hogy a teljes kiegészítő energia maximum elv többszörösen összefüggő térbeli tartomány és a vegyes peremértékfeladatok egy tág osztálya esetén biztosítja az un. *kiegészítő egyértékűségi feltételek* fennállását. Bár a vizsgálatokat csak egy háromszorosan összefüggő térbeli tartományra végeztem el, ezt a tartományt az értekezés 5.1. ábrája szemlélteti, a gondolatmenet lépéseiben ez a körülmény nem játszott olyan mértékű szerepet, hogy ne lehetne azt megismételni négy, vagy többszörösen összefüggő térbeli tartomány és azonos jellegű vegyes peremértékfeladatok esetén.

A kiegészítő egyértékűségi feltételeket geometriai megfontolásokból is leszármaztattam. Mivel ezekben a megfontolásokban nem jelenik meg az anyagegyenlet, a kiegészítő egyértékűségi feltételek fizikailag nemlineáris de geometriailag lineáris feladatokra is érvényesek.

4. Tézis. Megmutattam a mikropoláris rugalmasságtan első síkfeladata esetén is, hogy a kompatibilitás úgynevezett kiegészítő feltételei a kiegészítő energia maximum elvből következő Euler egyenletek között szerepelnek, ha többszörösen összefüggő a tartomány. Ezeket a feltételeket kell felhasználni a feszültségi peremfeltételek integrálása során kapott integrációs állandók számítására. A tekintett öt vegyes típusú peremértékfeladat mindegyikére meghatároztam az alakváltozási peremfeltételeket, illetve a kompatibilitás kiegészítő feltételeit.

5. Tézis: A klasszikus rugalmasságtan síkfeladatai esetén duál rendszerben meghatároztam az elmozdulásmező egyértékűségének feltételeit többszörösen összefüggő tartomány estén a vegyes peremértékfeladatok azon osztályára amikor az egyes peremgörbék (kontúrgörbék) páros számú ívre vannak felosztva és az íveken váltakozva feszültség illetve elmozdulás az előírt. Meghatároztam továbbá az elsőrendű feszültségfüggvényekkel és a merevtestszerű forgással kapcsolatos alapmegoldást és ennek birtokában a feszültségi tenzorra, valamint az alakváltozási tenzorra vonatkozó alapmegoldásokat, továbbá az úgynevezett másodrendű alapmegoldást.

Az alapmegoldások ismerete tette lehetővé az alábbi feladatok megoldását:

(a) Az [A_i belső] (A_e külső) tartománnyal kapcsolatos duál Somigliana képletek, valamint a tartományok belső pontjaiban a feszültségeket megadó formulák levezetésére. Ezek közül a második duál Somigliana képletek, a direkt módszer integrálegyenletei.

(b) Algoritmust és számító programot kidolgozása a belső és a külső tartományra vonatkozó peremértékfeladatok megoldására kvadratikus peremelemek felhasználásával, továbbá annak igazolása, hogy a megoldandó lineáris egyenletrendszerben szereplő rendszermátrix formuláival elkerülhető az erősen szinguláris integrálok valamilyen integrálformula alapján történő számítása.

6. Tézis: Levezettem a klasszikus rugalmasságtan síkfeladataira primál rendszerben a külső tartományra vonatkozó és a végtelen távoli pont feszültségállapotát tükröző plusz taggal módosított Somigliana formulákat és meghatároztam hogyan módosítja a tartomány belső pontjaiban a feszültségeket adó képletet a végtelen távoli pont feszültségállapota. A kapott összefüggések révén a végtelenbeli konstans feszültségállapot is részévé válik a külső tartományra vonatkozó formalizmusnak.

4. Az eredmények hasznosításának lehetőségei

A 3. Eredmények című szakaszban ismertetett eredmények egy része

– a kontinuum mechanika és rugalmasságtan terén elért új elvi eredmény (ehelyütt az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldásának származtatásával kapcsolatos eredményekre – 1. Tézis –, a duál rendszerben megkonstruált variációs elvekre és a statikai-kinematikai analógia a test határfelületére történő kiterjesztésére – 2. Tézis –, illetve a kiegészítő egyértékűségi feltételek variációs elvből illetve geometriai megfontolásokból történő levezetésére, valamint egyes hiányzó alakváltozási peremfeltételek előállítására – 3. és 4. Tézisek – gondol a szerző),

másik része pedig

– a peremelem módszerhez kötődő eredmény (ehelyütt a peremelem módszer duál rendszerbeni síkfeladatokra történő feláll0tására – 5. Tézis – és a primál rendszerben már meglévő egyenletek külső tartomány esetére vonatkozó módosítására – 6. Tézis – utal a szerző).

Az eredmények hasznosítása, figyelembe véve, hogy azok jelentős része elvi jellegű, elsősorban a kontinuum mechanika és a peremelem módszer területén végzett kutató munkában, valamint az oktatásban illetve a továbbképzésben várható.

Hasznosítási lehetőség kínálkozik többek között

– az egyensúlyi egyenletek általános és teljes megoldása leszármaztatását illetően speciális feladatok (pl. héjakkal kapcsolatos feladatok) esetén, hiszen az értekezés vonatkozó eredményei módszertani jellegűek is,
– végeselemes programok kifejlesztésében, ha az algoritmus a teljes kiegészítő energia stacionaritási voltán alapul, hiszen választ kaptunk arra a kérdésre, hogy nem kell előre figyelembe venni az egyértékűség többszörösen összefüggő tartományra vonatkozó pótlólagos feltételeit,

és végül

– a kereskedelmi célú peremelemes programok fejlesztésében, illetve az un. peremkontúr módszer duál rendszerbeni kidolgozásában. Az utóbbi feladat megoldását illetően utalunk a következő szakaszban idézett legelső publikációra.

5. Az értekezés témakörében készült legfontosabb publikációk felsorolása

Könyvrészlet idegen nyelven:

1. Szeidl, Gy.–Szirbik, S.: *Boundary contour method for plane problems in a dual formulation with quadratic shape functions*, Chapter 14 in New Developments in the Boundary Element Method edited by V. Kompis, Springer-Verlag, 2002.

Szakcikk idegen nyelven:

2. Kozák, I.–Szeidl, Gy.: *On the field equations and boundary conditions of dual systems in micropolar theory of elasticity*, Bulletins for Applied Mathematics, XLIII (1986) 212-226.
3. Szeidl, Gy.: *On Derivation of Stress Functions in Micropolar Theory of Elasticity*, Acta Techn. Hung., 104(1–3) (1991-92), 277–296.
4. Szeidl, Gy.–I. van Gemert: *On Mitchell's Conditions for Plane Problems in Elastostatics*, Acta Mechanica, 93(1–3), (1992), 99–118.
5. Szeidl, Gy.–Kozák, I.: *Complete Solution for Stresses in Terms of Stress Functions, Part I, Derivation from the Principle of Virtual Work*, Technische Mechanik, 16(2), (1996), 147–168.

6. Szeidl, Gy.–Kozák, I.: *Complete Solution for Stresses in Terms of Stress Functions, Part II, Modification of Variational Principles*, Technische Mechanik, 16(3), (1996), 197–208.
7. Szeidl, Gy.–Iván, I.: *Macro Conditions of Compatibility and Strain Boundary Conditions for Some Mixed Plane Boundary Value Problems of Micropolar Elastostatics*, Publications of the University of Miskolc, Series D, Natural Sciences, Mathematics, 36(2), (1966), 35–45.
8. Szeidl, Gy.: *Compatibility Conditions for Mixed Boundary Value Problems in Micropolar Theory of Elasticity*, Publications of the University of Miskolc, Series D, Natural Sciences, Mathematics, 37(3) (1997), 105–116.
9. Szeidl, Gy.: *On Compatibility Conditions for Mixed Boundary Value Problems*, Technische Mechanik, 17(3), (1997), 245–262.
10. Szeidl, Gy.: *Boundary Integral Equations for Plane Problems – Remark to the Formulation for Exterior Regions*, Publications of the University of Miskolc, Series D, Natural Sciences, Mathematics, 40(1) (1999), 79–88.
11. Szeidl, Gy.: *Kinematic Admissibility of Strains for Same Mixed Boundary Value Problems in the Dual System of Micropolar Theory of Elasticity*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 1(2), (2000), 191–203.
12. Szeidl, Gy.: *Boundary Integral Equations for Plane Problems in Terms of Stress Functions of Order One*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 2(2), (2001), 237-261.

Szakcikk magyar nyelven:

13. Szeidl, Gy.: *Dual Forms of the Principle of Virtual Work for Multiply Connected Micropolar Body*, GÉP, XXXVIII, (1986), 243–244.

Konferenciaelőadás idegen nyelven:

14. Szeidl, Gy.: *Integral Equations of Plane Elasticity in Terms of Stress Functions of Order One*, MICROCAD-SYSTEM '94 International Computer Science Conference, Kharkov, Printed Matters of the Conference, page 44-46, 3.–5. May, 1994.
15. Szeidl, Gy.: *Boundary Integral Equations of Plane Elasticity in Terms of Stress Functions of Order One*, 6$^{\text{th}}$ International Conference on Numerical Methods, Abstracts, page 35, 22.–26. August, 1994.
16. Szeidl, Gy.: *On Derivation of Stress Functions in Elasticity*, In The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics in Hamburg; ICIAM95, Book of Abstracts, page 455. Springer Verlag, 3.–7. July, 1995.
17. Szeidl, Gy.–Iván, I.: *Fundamental Solutions and Boundary Integral Equations for the First Plane Problem of Micropolar Elastostatics in Dual System*, Conference on Numerical Methods and Computational Mechanics, Abstracts, page 74, July 15–19, 1996.

Konferenciaelőadás magyar nyelven:

18. Szeidl, Gy.: *Dual Variational Principles and Compatibility Conditions in the Large in Micropolar Theory of Elasticity*, In The 4–th Hungarian Conference on Mechanics, page 38, 24–26 August 1983.
19. Szeidl, Gy.: *Nagybani kompatibilitási feltételek többszörösen összefüggő mikropoláris anyagú testre vegyes peremfeltételek mellett*, A VIII. Magyar Mechanikai Konferencia Programja, pp. 100. Miskolci Egyetem, 1995 augusztus 29-31.
20. Szeidl Gy. – Kozák I.: *A virtuális munka elv, az egyensúlyi egyenletek teljes megoldása feszültségfüggvényekkel, peremfeltételek*, A VIII. Magyar Mechanikai Konferencia Programja, pp 101. Miskolci Egyetem, 1995 augusztus 29-31.

Hivatkozások

1. N. Abovski, N. Andreev, and A. Deruga. *Variational Principles of the Theory of Elasticity and Theory of Shells.* Nauka Publishers, Moscow, 1978.
2. G. Airy. On the Strains in the Interior of Beams. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 153:49–80, 1863.
3. P. K. Banarjee and R. Butterfield. *Boundary Element Methods in Engineering Science.* Mir, Moscow, 1984.
4. E. Beltrami. Osservazioni sulla Nota precedente. *Atti Reale Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, 5(1/1):141–142, 1892.
5. B. H. G. Brady. A Direct Formulation of the Boundary Element Method of Stress Analysis for Complete Plane Strain. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, 16:235–244, 1979.
6. D. E. Carlson. On Günthers Stress Functions for Couple Stresses. *Quart. Appl. Math.*, 25:139–146, 1967.
7. C. Constanda. Iintegral Equations of the First Kind in Plane Elasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, LIII(4):783–793, 1995.
8. C. Constanda. The Boundary Iintegral Equation Method in Plane Elasticity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(11):3385–3396, 1995.
9. B. M. F. de Veubeke. Stress Function Approach. In *Proc. World. Cong. on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, pages J1–J51, 1975.
10. B. M. F. de Veubeke and A. Millard. Discretization of Stress Fields in Finite Element Method. *J. Franklin Inst.*, 302:389–412, 1976.
11. W. Dorn and A. Schield. A Converse of Virtual Work Theorem for Deformable Solids. *Quart. Appl. Math.*, 14(2):209–213, 1956.
12. W. Günther. Spannungsfunktionen und Verträgelichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 6:207–219, 1954.
13. M. Gurtin. A Generalization of the Beltrami Stress Functions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 4:1–29, 1963.
14. M. Gurtin. The Linear Theory of Elasticity. In *Handbuch der Physik, Festkörpermechanik*, volume 2, pages 54–59; 17. Springer-Verlag, 1972.
15. H. Haichang. *Variational Principles of Theory of Elasticity with Applications.* Gordon and Breach, NewYork, 1986.
16. W. S. Hall. *Boundary Element Method.* Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1994.
17. W.-J. He, H.-J. Ding, and H.-C. Hu. A Necessary and Sufficient Boundary Integral Formulation for Plane Elasticity Problems. *Communications in Numerical Methods and Engineering*, 12:413–424, 1996.
18. M. A. Jaswon, M. Maiti, and G. T. Symm. Numerical Biharmonic Analysis and Some Applications. *Int. J. Solids Structures*, 3:309–332, 1967.
19. M. A. Jaswon and G. T. Symm. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics.* Academic Press, London – NewYork – San Francisco, 1977.
20. I. Kozák. Determination of Compatibility Boundary Conditions in Linear Elastostatics with the Aid of the Principle of Minimum Complementary Energy. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Miskolc, Ser.D. Natural Sciences*, 34(2):83–98, 1980.

21. I. Kozák. Notes on the Field Equations with Stresses and on the Boundary Conditions in the Linearized Theory of Elasticity. *Acta Techn. Hung.*, 90(3–4):221–225, 1980.
22. I. Kozák. Principle of Virtual Work in Terms of Stress Functions. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Miskolc, Ser.D. Natural Sciences*, 34(2):147–163, 1980.
23. I. Kozák. *Vékony héjak feszültségmezővel felépített elmélete.* Dr. Sc. Thesis, Hungarian Academy of Sciences, 1988. (in Hungarian).
24. I. Kozák and G. Szeidl. The Field Equations and the Boundary Conditions with Force–Stresses and Couple–Stresses in the Linearized Theory of Micropolar Elastostatics. *Acta Techn. Hung.*, 90(3–4):57–80, 1980.
25. I. Kozák and G. Szeidl. Contribution to the Field Equations and Boundary Conditions in Terms of Stresses of the First Plane Problem of Micropolar Elasticity. *Publ TUHI., Series D, Natural Sciences*, 34(2):135–146, 1981.
26. J. Maxwell. On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces. *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, 26:1–40, 1870.
27. J. Mitchell. On Direct Determination of Stress in an Elastic Solid with Application to the Theory of Plates. *Proceedings of London Mathematical Society*, 31:100–124, 1900.
28. G. Morera. Soluzione generale delle equazioni indefinite dell equilibrio di un corpo continuo. *Atti Reale Accad. naz. Lincei Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, 5(1/1):137–141, 1892.
29. S. Moriguti. On Castigliano's Theorem in Three Dimensional Elastostatics. *Journal of the Society of Applied Mechanics of Japan*, 1(6):175–180, 1948.
30. I. I. Muskhelisvili. *Some Fundamental Problems of Mathematical Theory of Elasticity.* Publisher NAUKA, Moscow, sixth edition, 1966.
31. W. Nowaczky. *Theory of Micropolar Elasticity.* Springer Verlag, Wien – NewYork – Udine, 1970.
32. W. Ornstein. Stress Functions of Maxwell and Morera. *Quart. Appl. Math.*, 2:198–201, 1954.
33. W. Prager. On Plane Elastic Strains in Doubly–Connected Domains. *Quart. Appl. Math.*, 3:377–380, 1946.
34. G. Rieder. Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 7:4–65, 1960.
35. R. J. Rizzo. An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics. *Q. J. Appl. Math.*, 25:83–95, 1967.
36. H. Schaefer. Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers. *Z. Angew. Math. Mech.*, 33:356–362, 1953.
37. H. Schaefer. Die Spannungsfunktionen eines Kontinuums mit momentenspannungen i.–ii. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des sinces techniques*, 15(1):63–67, 69–73, 1967.
38. P. Schiavone and C.-Q. Ru. On the Exterior Mixed Problem in Plane Elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1:335–342, 1996.
39. C. Somigliana. Sopra l' equilibrio di un corpo elastico isotropo I. *Nuovo Cimento*, 17 – 20:140–148, 272–276; 161–166; 84–90, 278–282; 181–185, 1885–1886.
40. R. Southwell. Castigliano's Principle of Minimum Strain Energy. *Proc. Roy. Soc. London (A)*, 154:4–21, 1936.
41. R. Southwell. Castigliano's Principle of Minimum Strain Energy and the Conditions of Compatibility for Strain. In *S. Timoshenko 60th Anniversary Volume.* The McMillan Co., 1938.
42. J. Stickforth. Zur Anwendung des Castiglianoschen Prinzips und der Beltramischen Spannungsfunktionen bei mehrfach zusammenhängenden Körpern unter Berücksichtung von Eigenspannungen. *Techn. Mitt. Krupp., Forsch.-Ber.*, 22:83–92, 1964.
43. J. Stickforth. On the Derivation of Conditions of Compatibility from Castigliano's Principle by Means of Three Dimensional Stress Functions. *J. Math. and Phys.*, 44:214–225, 1965.
44. M. Stippes. On Stress Functions in Classical Elasticity. *Quart. Appl. Math.*, 24:119–120, 1966.
45. G. Szeidl. Supplements to the Field Equations and Boundary Conditions in Terms of Stresses of the Second Plane Problem of Micropolar Elasticity. *Publ TUHI., Series D, Natural Sciences*, 34(2):179–190, 1981.
46. G. Szeidl. Dual Variational Principles in Linear Micropolar Elastostatics. *Acta Techn. Hung.*, 93(3–4):277–296, (1981)[1983].
47. G. Szeidl. Dual Variational Principles for the First Plane Problem of Micropolar Elastostatics. *Publ TUHI., Series D, Natural Sciences*, 35(3):3–20, 1982.
48. G. Szeidl. *Variational Principles and Solutions to Some Boundary Value Problems in the Asymmetric Elasticity [A nemszimmetrikus rugalmasságtan duál variációs elvei és egyes*

peremŕtekfeladatainak megoldása]. Ph. D. Thesis, Hungarian Academy of Sciences, 1985. (in Hungarian).
49. G. Szeidl. Dual Forms of the Principle of Virtual Work for Multiply Connected Micropolar Body. *GÉP*, XXXVIII:243–244, 1986.
50. G. Szeidl. Dual Variational Principles and Compatibility Conditions in the Large in Micropolar Theory of Elasticity. In *The 4–th Hungarian Conference on Mechanics*, page 38, 24–26 August 1983.
51. G. Szeidl and I. van Gemert. On Mitchell's Conditions for Plane Problems in Elastostatics. *Acta Mechanica*, 93(1–3):99–118, 1992.
52. E. Tonti. Variational Principles in Elastostatics. *Meccanica*, 14:201–208, 1967.
53. K. Washizu. A Note on the Condition of Compatibility. *J. Math. and Phys.*, 36:306–312, 1957.
54. J. O. Watson. Advanced Implementation of the Boundary Element Method for Two– and Three–dimensional Elastostatics. In P. K. Banarjee and R. Butterfield, editors, *Developments in Boundary Element Methods–1*, The Development Series, chapter 3, pages 31–63. Applied Science, London, first edition, 1979.
55. L. Xio-Yan. A Bem Formulation of New Boundary Stress Components. *Computers and Structures*, 10:895–906, 1994.

6. A tézisfüzetben felhasznált jelölések

A_e	az egyszeresen összefüggő A_i belső tartományhoz tarozó külső tartomány
A_i	egyszeresen vagy többszörösen összefüggő belső tartomány,
${}_{AB}$	a $\mathcal{H}_{kl}$ feszültségfüggvény tenzor zérusnak választható elemeit azonosító indexek,
e	az alakváltozási tenzor rövid, a statikai kinematikai analógia kapcsán használt jelölése klasszikus esetben,
$\mathcal{F}$	feszültségfüggvény tenzor rövid, a statikai kinematikai analógia kapcsán használt jelölése mikropoláris esetben,
$F_y{}^b$	feszültségfüggvény mikropoláris esetben,
g	az S_t és S_u felületrészek közös peremgörbéje (több zárt görbéből is állhat),
$\mathcal{H}$	feszültségfüggvény tenzor rövid, a statikai kinematikai analógia kapcsán használt jelölése (klasszikus és mikropoláris eset),
H_{kl}	feszültségfüggvény tenzor klasszikus és mikropoláris esetben; klasszikus esetben szimmetrikus a tenzor,
${}_K^L$	az $F_y{}^b$ feszültségfüggvény tenzor zérusnak választható elemeit azonosító indexek,
r	az S_t felületen értelmezett tetszőleges vektormező rövid, a statikai kinematikai analógia kapcsán használt jelölése (mikropoláris eset),
S	a vizsgálat tárgyát képező test peremfelülete (határfelülete),
S_t	az S peremfelület (határfelület) terhelt része,
S_u	az S peremfelület (határfelület) azon része, ahol az elmozdulásmező az előírt,
u	az elmozdulásvektor rövid, a statikai kinematikai analógia kapcsán használt jelölése (klasszikus és mikropoláris eset),
V	a vizsgálat tárgyát képező test által kitöltött térfogati tartomány,

w	az S_t felületen értelmezett tetszőleges vektormező rövid, a statikai kinematikai analógia kapcsán használt jelölése (klasszikus és mikropoláris eset),
${}_{XY}$, ${}_{S}{}^{T}$	a független kompatibilitási egyenletek indexei (illetve a H_{kl} és $F_y{}^l$ feszültségfüggvény tenzorok nem azonosan zérus elemeinek indexei – mikropoláris eset),
γ	az alakváltozási tenzor rövid, a statikai kinematikai analógia kapcsán használt jelölése (mikropoláris eset),
κ	a görbületi alakváltozási tenzor rövid, a statikai kinematikai analógia kapcsán használt jelölése (mikropoláris eset),
φ	a független forgásmező rövid, a statikai kinematikai analógia kapcsán használt jelölése (mikropoláris eset)