Asszociativitási és biszimmetria egyenletek

MTA doktori értekezés

MAKSA GYULA

a matematikai tudomány kandidátusa

Debreceni Egyetem

Matematikai Intézet

Debrecen

2004

Bevezetés

Függvényegyenletek vizsgálatával matematikusok régóta foglalkoznak. D'Alembert, Euler, Gauss, Cauchy, Abel, Weierstrass, Darboux és Hilbert is ott vannak azok között a nagy matematikusok között, akik valamilyen formában dolgoztak függvényegyenletekkel. A témakör első szisztematikus kifejtése Aczél Jánostól származik 1961-ből, akinek a ,,*Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*" című könyve illetve ennek a ,,*Functional equations and their applications*" című átdolgozott kiadása 1966-ból az elmélet meghatározó műve. Itt több fejezetben is foglalkozik a szerző asszociativitási és biszimmetria egyenletekkel, amelyek – és különböző általánosításaik – e disszertáció témájául is szolgálnak.

A disszertációban tárgyalt egyenletek csaknem mindegyike többváltozós ismeretlen függvényekből összetett függvényeket tartalmaz, így megoldásuk módszere lényegesen eltér az egyváltozós függvényekre felírt és függvényösszetételeket nem tartalmazó egyenletekétől, a megoldást pedig a legtöbb esetben az jelenti, hogy a többváltozós ismeretlen függvényt egyváltozós függvényekkel ,,ki lehet fejezni". Az alacsonyabb változószámú ismeretlen függvényeket tartalmazó egyenletek megoldásaiból következtetünk a magasabb változószám esetére. A legkisebb változószámú egyenletekről (amelyek itt még szóbajöhetnek) szóló eredményeket – az absztrakt esetben (első fejezet) – átvesszük, de a valós esetben ki kell, hogy dolgozzuk. Ilyenkor az alapvető regularitási feltevésünk az ismeretlen függvényekről az, hogy folytonosak és minden változójukban szigorúan monotonak (második-negyedik fejezet). Ezekben a vizsgálatokban a kvázi-összeg fogalma hasznosnak bizonyul.

Meg kell jegyeznünk, hogy az asszociativitási és biszimmetria egyenletekre az újbóli figyelmet közgazdászok, pszichológusok és szociológusok kutatásai és kérdései irányították. Szakértelem híján mi ezekkel a disszertációban részletesen nem foglalkozunk, de néhány egyszerűbb esetben röviden írunk a motivációkról és minden esetben megadjuk azoknak a műveknek az irodalmi adatait, amelyekben a témáról részletesebben lehet tájékozódni.

A disszertáció öt fejezetből áll, tartalmaz név- és tárgymutatót, valamint irodalomjegyzéket. Minden fejezet önálló bevezetéssel kezdődik, ezért most csak röviden ismertetjük az egyes fejezetek tartalmát.

Az első fejezet témája az úgynevezett konzisztens aggregáció problémájának megoldása absztrakt körülmények között. A probléma ekvivalens egy $m + n + 2$ darab ismeretlen függvényt és mn darab szabad változót tartalmazó úgynevezett $m \times n$ típusú általánosított biszimmetria egyenlet megoldásával. A megoldást két különböző feltételrendszer mellett is megadjuk – az értelmezési tartományul illetve értékkészletül szolgáló halmazokról csak azt tesszük fel, hogy nem üresek, a függvényekre azonban ,,megoldhatósági" feltételeket szabunk. A kapott eredmények algebrai jellegűek. Ezekből Aczél Jánosnak az intervallumon tekintett asszociativitási egyenletről szóló tétele segítségével következtetünk analitikus jellegű eredményekre, illetve a valós esetre.

A megoldhatósági feltételek azonban több fontos függvényt kirekesztenek a vizsgálatból, így – legalábbis a valós esetben – igyekszünk ezektől megszabadulni. Ez végülis a negyedik fejezetben sikerül, és ennek van szolgálatába állítva a második és harmadik fejezet egy része.

A második fejezet úgynevezett kvázi-összegekről szól, amelyek speciális – egyváltozós folytonos és szigorúan monoton függvényekből összetett – $(x, y) \mapsto \gamma(\alpha(x) + \beta(y))$ alakú – függvények. A velük kapcsolatos fő eredmény (a ,,lokális" kvázi-összegek ,,globálisak" is) hatékonyan alkalmazható bizonyos függvényegyenletek megoldása során. Ebben a fejezetben foglalkozunk még két fontos speciális kvázi-összeggel. Az egyik esetben a kérdés az, hogy a súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek közül melyek kvázi-összegek. Ennek a hátterében a súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek egyenlőségének klasszikus problémája áll. A másik kérdés pedig, hogy a Cauchy differenciák közül melyek a kvázi-összegek. Ennek közvetlen motivációja egy – a hasznosságelméletből (utility theory) eredő – függvényegyenlet vizsgálata. A megoldáshoz a függvényegyenletek elmélete különböző regularitásjavító irányzataihoz tartozó eredményeket használunk.

A harmadik fejezetben megoldjuk az általánosított asszociativitási egyenletet – a megoldásokról csak folytonosságot és mindkét változóban való szigorú monotonitást feltételezve. Ehhez az egyik alapeszköz a lokális kvázi-összegeknek az a tulajdonsága, hogy azok ,,globális" kvázi-összegek is. Ez az eredmény megnyitja az utat számos asszociatív típusú egyenlet és a 2×2-es általánosított biszimmetria egyenlet – szürjektivitási, megoldhatósági feltételek nélküli – megoldásához.

A negyedik fejezetben – több speciális biszimmetria egyenlet megoldásán keresztül – eljutunk az $m \times n$ típusú általánosított biszimmetria egyenlet olyan folytonos megoldásainak a meghatározásaihoz, amelyek minden változójukban szigorúan monoton függvények. Ezzel olyan körülmények között tudunk választ adni a konzisztens aggregációval összefüggő kérdésekre, amelyek nem zárnak ki a megoldhatósági (szürjektivitási) feltételek miatt az első fejezet vizsgálataiból kirekesztett egyes függvényeket, például a korlátos intervallumokon tekintett középértékeket. Ezek mellett ebben a fejezetben foglalkozunk a többváltozós súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek jellemzésének több mint ötvenéves problémájával és ennek kapcsán adunk egy új bizonyítást a kvázi-aritmetikai középértékek Kolmogorov-Nagumo-de Finetti-féle jellemzési tételére.

Végül az ötödik fejezetben vektor-értékű függvényekre felírt biszimmetria egyenletekkel foglalkozunk. Az egyenletek a matematikai pszichológiából származnak és úgynevezett választási valószínűségek meghatározására szolgálnak. Megoldásukhoz új ötletek szükségesek, mert a disszertáció első négy fejezetében használt módszereket rájuk nem lehet alkalmazni.

A disszertációban bemutatott eredmények egy viszonylag összefüggő részét képezik azoknak, amelyeket a szerző az utóbbi tíz évben ért el. Tágabb értelemben a disszertáció témájához tartozónak lehet tekinteni a szerző azon eredményeit is, amelyek – a matematikai pszichológiából származó – de egyváltozós ismeretlen függvényekből összetett függvényeket tartalmazó egyenletekről szólnak. Ezekre a disszertációban helyenként utalunk, szerepelnek az irodalomjegyzékben, de a részletes tárgyalásukat mellőzzük.

A disszertációban – néhány esettől eltekintve – az eredmények mellett feltüntetjük, hogy azok melyik dolgozatból illetve kitől származnak. A kivételek abból adódnak, hogy az illető eredmény általánosan használt, de nem tudtuk megállapítani az eredetét vagy pedig a közölt formában – tudomásunk szerint – ebben a dolgozatban jelenik meg először.

A disszertáció elkészítése során és azt megelőzően is sok segítséget kaptam

kollégáimtól, az Analízis Tanszék oktatóitól – közülük elsősorban Daróczy Zoltántól és Páles Zsolttól – továbbá Aczél Jánostól, aki a disszertációmban szereplő problémák közül többre felhívta a figyelmemet és számos esetben lehetővé tette, hogy a megoldásukon együtt dolgozzam vele. Mindnyájuknak köszönöm. Köszönetemet fejezem ki a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének, ahol ezt az értekezést jelentős anyagi és erkölcsi támogatással elkészíthettem, valamint a Széchenyi István Kuratóriumnak, amely ösztöndíjával három éven át támogatta munkámat. Komoly segítséget jelentett továbbá a T-030082 és a T-043080 számú OTKA, valamint a 0215/2001 számú FKFP pályázat.

1 Konzisztens aggregáció és általánosított biszimmetria

A konzisztens aggregáció problémáját az alábbi példán keresztül vezetjük be. Tegyük fel hogy m darab termelő mindegyike n fajta ráfordítással termel, a j-edik termelő (maximális) eredménye (kibocsátása, outputja) függ az $x_{j1}, \dots, x_{jn}$ ráfordításaitól (inputjaitól) (a k-adik fajtából x_{jk} mennyiséget használ fel) és a függést egy termelő-specifikus (mikroökonomiai) F_j úgynevezett *termelési függvény* írja le ($j = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$). Összesítve (aggregálva) a rendszer egyes termelőinek $F_1(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F_m(x_{m1}, \dots, x_{mn})$ termelési eredményeit egy G *aggregáló függvény* segítségével kapjuk, hogy az m termelőből álló rendszer összesített termelési eredménye (kibocsátása, outputja)

$$G(F_1(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F_m(x_{m1}, \dots, x_{mn})).$$

Másrészt eljárhatunk úgy is, hogy először az egyes ráfordításokat aggregáljuk fajtánként (a fajtáktól esetleg függő) $G_1, \dots, G_n$ aggregáló függvényekkel, majd az így kapott összesített $G_1(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, G_n(x_{1n}, \dots, x_{mn})$ ráfordításokból számoljuk ki a rendszer termelési eredményét egy – a rendszer egészétől függő – F (makroökonomiai) termelési függvény segítségével, ami ekkor

$$F(G_1(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, G_n(x_{1n}, \dots, x_{mn})).$$

Ha ez megegyezik az x_{jk} változók minden lehetséges értékére a korábban kiszámolttal, azaz

$$\begin{aligned} &G(F_1(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F_m(x_{m1}, \dots, x_{mn})) \\ &\qquad = F(G_1(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, G_n(x_{1n}, \dots, x_{mn})), \end{aligned} \tag{1.1}$$

akkor *konzisztens aggregációról* beszélünk. Az (1.1) egyenlet az $m \times n$ *típusú általánosított biszimmetria egyenlet.* Több kérdés felvetődik: Mi legyen az (1.1)-ben szereplő függvények értelmezési tartománya illetve értékkészlete ? Mely függvényeket tekintsük (1.1)-ben adottaknak illetve ismeretleneknek ? Milyen termelési $(F, F_1, \dots, F_m)$ illetve aggregáló $(G, G_1, \dots, G_n)$ függvények jöhetnek szóba konzisztens aggregáció során? A gyakorlatban előfordul, hogy ha a ráfordítások értékét pénzben fejezik ki, akkor aggregáláskor a közönséges összeadást használják, azaz

$$G_k(y_1, \dots, y_m) = y_1 + \cdots + y_m \quad \text{és} \quad G(y_1, \dots, y_m) = y_1 + \cdots + y_m$$

$(k = 1, \dots, n)$, így (1.1)-ből a termelési függvényekre a tőle sokkal egyszerűbb

$$F(x_1 + \cdots + x_m) = F_1(x_1) + \cdots + F_m(x_m) \qquad (x_j = (x_{j1}, \dots, x_{jn}))$$

ú.n. Pexider egyenlet adódik, amelynek a valós értékű folytonos megoldásai – amint az Radó-Baker [RB87, Corollary 3]-ból indukcióval könnyen következik – legfeljebb elsőfokú polinomok. Ugyanakkor a gyakorlatban is használt CD (Cobb-Douglas) és CES (Constant Elasticity of Substitution) termelési függvények

$$F(z_1, \dots, z_n) = az_1^{b_1} \dots z_n^{b_n} \quad (z_1, \dots, z_n \in]0, +\infty[\,)$$

illetve

$$F(z_1, \dots, z_n) = a(c_1 z_1^b + \dots + c_n z_n^b)^{1/b} \quad (z_1, \dots, z_n \in]0, +\infty[\,)$$

alakúak (itt $a, c_1, \dots, c_n$ pozitív, $b, b_1, \dots, b_n$ pedig nullától különböző valós számok), így a CD függvényekkel egyáltalán nem, a CES függvényekkel pedig csak a $b = 1$ esetben valósítható meg (az összeadással) konzisztens aggregáció. Ebben a fejezetben – alkalmas feltételek mellett – megadjuk (1.1) összes megoldását, a szereplő függvények értelmezési tartományáról csak azt tesszük fel, hogy nem üres halmazok. Hasonló eredmények – amelyeket gyakran Klein-Nataf ([Kle46], [Nat48]) típusú tételeknek neveznek – 1946 óta ismertek (lásd például van Daal-Merkies [vDM87], Green [Gre64], Aczél [Acz97]). Részletesebben itt csak a jelentős hatású Gorman [Gor68] dolgozatról szólunk, amelyet helyenként ki kellett javítani (lásd von Stengel, [vS93]). [Gor68]-ban az a fő kérdés, hogy mikor lehet az mn változós Δ függvényt – alkalmas $G, F_1, \dots, F_m, F, G_1, \dots, G_n$ függvények segítségével – egyidejűleg felírni az alábbi két alakban

$$\Delta(x_{11}, \dots, x_{mn}) = G(F_1(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F_m(x_{m1}, \dots, x_{mn}))$$

és

$$\Delta(x_{11}, \dots, x_{mn}) = F(G_1(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, G_n(x_{1n}, \dots, x_{mn})).$$

Világos, hogy ha ez a kétféle felírás lehetséges, akkor teljesül (1.1) is. [Gor68]-ban a válasz az, hogy a kétféle felírás – bizonyos feltételek mellett – pontosan akkor lehetséges, ha

$$\Delta(x_{11}, \dots, x_{mn}) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}(x_{jk})\right)$$

teljesül alkalmas φ és β_{jk} függvényekkel. A konzisztens aggregáció problémája szempontjából viszont fontos lenne meghatározni magukat a $G, G_1, \dots, G_n, F, F_1, \dots, F_m$ függvényeket is (lásd még Pokropp [Pok78], [vDM87]). [Gor68]-ban és később [vS93]-ban is a bizonyítások halmazelméleti és kombinatorikai megfontolásokon túl az

$$F(G(x, y), z) = H(x, K(y, z))$$

általánosított asszociativitási egyenleten alapulnak és Aczél [Acz66]-ra (311–313 oldal) hivatkoznak. Itt azonban néhány oldallal később (314–315) és Taylor [Tay78]-ban más feltételek mellett a

$$G(F_1(x_{11}, x_{12}), F_2(x_{21}, x_{22})) = F(G_1(x_{11}, x_{21}), G_2(x_{12}, x_{22})) \tag{1.2}$$

általánosított biszimmetria egyenlet – amely (1.1) $n = m = 2$ speciális esete – is meg van oldva. Ezért természetesnek látszik az (1.2) egyenletre vonatkozó ismert eredményt az (1.1) egyenletre indukcióval kiterjeszteni. Ebben a fejezetben először ezt fogjuk megtenni és – ellentétben az említett ismert eredményekkel – az (1.1)-ben szereplő függvények értelmezési tartományaiként szolgáló halmazokra semmilyen rendezési vagy topológiai jellegű feltételt nem szabunk. Az 1.1. és 1.2. részekben egy-egy megoldását adjuk az (1.1) egyenletnek, majd az 1.3. részben ezekből következtetéseket vonunk le a valós esetre. E fejezet eredményei Aczél-Maksa [AM96b]-ben, Aczél-Maksa-Taylor [AMT97]-ben továbbá részben Aczél-Maksa [AM96a]-ban és Aczél-Maksa [AM97]-ben vannak publikálva. Magyar nyelven a Maksa [Mak97]-ben és Maksa [Mak01]-ben jelentek meg ismertetések az ide vonatkozó eredményekről.

1.1 A konzisztens aggregáció problémájának megoldása erős szürjektivitás és injektivitás mellett

Legyen $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmaza), legyenek $A_1, \dots, A_n$ nem-üres halmazok, B egy halmaz, $H : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ egy függvény, $1 \le p \le n$ és $a_k \in A_k$, $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p\}$ rögzített. Ekkor a

$$H^p(t) = H(a_1, \dots, a_{p-1}, t, a_{p+1}, \dots, a_n) \qquad (t \in A_p) \tag{1.3}$$

módon definiált $H^p : A_p \to B$ függvény H egy – p-edik változója szerinti – *parciális függvénye.* Nyilvánvaló, hogy H-nak általában több p-edik változója szerinti parciális függvénye van, minden $a_k \in A_k$, $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p\}$ elem $(n-1)$-eshez tartozik egy. Azt mondjuk, hogy H *erősen szürjektív* (*injektív, bijektív*) a p-edik változójában, ha H összes $H^p : A_p \to B$ parciális függvénye szürjektív (injektív, bijektív). Azaz, bármely $b \in B$ és $a_k \in A_k$, $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p\}$ esetén létezik (legfeljebb egy, pontosan egy) $a_p \in A_p$ úgy, hogy $H^p(a_p) = b$. Ennek a résznek a fő eredménye annak igazolása lesz, hogy ha (1.1)-ben a külső G és F függvények minden változójukban erősen injektívek és a belső $F_1, \dots, F_m$, $G_1, \dots, G_n$ függvények minden változójukban erősen szürjektívek, akkor (1.1) megoldásai kifejezhetők egy alkalmas Abel csoport-művelet valamint egyváltozós bijekciók és szürjekciók segítségével. Először az alábbi két lemmát igazoljuk.

1.1 Lemma. ([AM96b]) *Legyen $2 \le M \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, X_{jk} nem-üres halmaz ($j = 1, \dots, M;\ k = 1, \dots, N$), $(T, *)$ Abel csoport, $\Phi : T^N \to T$, $E_j : X_{j1} \times \cdots \times X_{jN} \to T$ tetszőleges és $f_{jk} : X_{jk} \to T$ szürjektív ($j = 1, \dots, M;\ k = 1, \dots, N$). Pontosan akkor igaz, hogy Φ az összes változójában erősen bijektív és*

$$\begin{aligned}\Phi(f_{11}(x_{11}) * \cdots * f_{M1}(x_{M1}), \dots, f_{1N}(x_{1N}) * \cdots * f_{MN}(x_{MN}))\\ = E_1(x_{11}, \dots, x_{1N}) * \cdots * E_M(x_{M1}, \dots, x_{MN})\end{aligned} \tag{1.4}$$

teljesül minden $x_{jk} \in X_{jk}$ ($j = 1, \dots, M;\ k = 1, \dots, N$) esetén, ha $(T, *)$-nak vannak olyan $p_1, \dots, p_N$ automorfizmusai és T-nek olyan $d_1, \dots, d_M$ elemei, hogy

$$\Phi(t_1, \dots, t_N) = p_1(t_1) * \cdots * p_N(t_N) * d_1 * \cdots * d_M \qquad \text{és} \tag{1.5}$$

$$E_j(x_{j1}, \dots, x_{jN}) = p_1\big(f_{j1}(x_{j1})\big) * \cdots * p_N\big(f_{jN}(x_{jN})\big) * d_j \tag{1.6}$$

minden $t_k \in T$, $x_{jk} \in X_{jk}$, $j \in \{1, \dots, M\}$ és $k \in \{1, \dots, N\}$ esetén.

B i z o n y í t á s. Legyen $e \in T$ az egységelem. Mivel $f_{jk} : X_{jk} \to T$ szürjekció, van olyan $x^0_{jk} \in T$, hogy $f_{jk}(x^0_{jk}) = e$ $(j = 1, \dots, M;\ k = 1, \dots, N)$. Legyen $1 \le i \le M$ rögzített és $x_{jk} = x^0_{jk}$, $j \in \{1, \dots, M\} \setminus \{i\}$ (1.4)-ben. Mivel $(T, *)$ kommutatív,

$$\Phi\big(f_{i1}(x_{i1}), \dots, f_{iN}(x_{iN})\big) = E_i(x_{i1}, \dots, x_{iN}) * \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{M} E_j(x^0_{j1}, \dots, x^0_{jN}) \tag{1.7}$$

minden $x_{ik} \in X_{ik}$, $k = 1, \dots, N$ mellett. Itt és a továbbiakban is használjuk a

$$\prod_{j=1}^{M} s_j = s_1 * \dots * s_M \quad \text{és a} \quad \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{M} s_j = \left(\prod_{j=1}^{M} s_j \right) * s_i^{-1}$$

jelöléseket, ha $s_1, \dots, s_M \in T$. (s_i^{-1} az $s_i \in T$ elem inverze.) Legyen

$$q_i = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{M} E_j(x^0_{j1}, \dots, x^0_{jN}) \right)^{-1}.$$

Ekkor (1.7)-ből

$$E_i(x_{i1}, \dots, x_{iN}) = \Phi\big(f_{i1}(x_{i1}), \dots, f_{iN}(x_{iN})\big) * q_i \tag{1.8}$$

következik. Ezt felhasználva, (1.4)-ből azt kapjuk, hogy

$$\Phi\left(\prod_{j=1}^{M} f_{j1}(x_{j1}), \dots, \prod_{j=1}^{M} f_{jN}(x_{jN}) \right) = \prod_{j=1}^{M} \Phi\big(f_{j1}(x_{j1}), \dots, f_{jN}(x_{jN})\big) * \prod_{j=1}^{M} q_j.$$

Mivel $f_{jk} : X_{jk} \to T$ szürjekció, ebből

$$\Phi\left(\prod_{j=1}^{M} t_{j1}, \dots, \prod_{j=1}^{M} t_{jN} \right) = \prod_{j=1}^{M} \Phi(t_{j1}, \dots, t_{jN}) * \prod_{j=1}^{M} q_j \tag{1.9}$$

következik minden $t_{jk} \in T$ $(j = 1, \dots, M;\ k = 1, \dots, N)$ mellett. Legyen itt $t_{jk} = e$, ha $3 \le j \le M$ és $1 \le k \le N$, legyen továbbá

$$c = \Phi(e, \dots, e)^{M-2} * \prod_{j=1}^{M} q_j. \tag{1.10}$$

Ekkor – (1.9) szerint –

$$\Phi(t_{11} * t_{21}, \dots, t_{1N} * t_{2N}) = \Phi(t_{11}, \dots, t_{1N}) * \Phi(t_{21}, \dots, t_{2N}) * c,$$

ami a

$$\Psi(t_1, \dots, t_N) = \Phi(t_1, \dots, t_N) * c \quad \big((t_1, \dots, t_N) \in T^N\big) \tag{1.11}$$

definícióval

$$\Psi(t_{11} * t_{21}, \dots, t_{1N} * t_{2N}) = \Psi(t_{11}, \dots, t_{1N}) * \Psi(t_{21}, \dots, t_{2N})$$

alakú lesz. Jól ismert (lásd például Aczél-Dhombres [AD89], 46. oldal), hogy ekkor vannak olyan $p_k : T \to T$ endomorfizmusok (azaz amelyekre $p_k(u * v) = p_k(u) * p_k(v)$ teljesül minden $u, v \in T$ esetén) ($k = 1, \dots, N$), hogy

$$\Psi(t_1, \dots, t_N) = p_1(t_1) * \dots * p_N(t_N) \qquad ((t_1, \dots, t_N) \in T^N). \tag{1.12}$$

Mivel Φ az összes változójában erősen bijektív – (1.11) miatt – Ψ is az, ezért (1.12)-ből azt kapjuk, hogy p_k bijekció és így automorfizmus ($k = 1, \dots, N$). Ezek után (1.6) következik az (1.8), (1.11) és (1.12) egyenlőségekből a $d_i = c^{-1} * q_i$ ($i = 1, \dots, N$) definícióval. Így (1.6)-ból, (1.4)-ből, (1.12)-ből $c^{-1} = d_1 * \dots * d_M$ adódik, majd (1.11)-ből és (1.12)-ből megkapjuk (1.5)-öt is.

A fordított irányú állítás számolással igazolható. □

1.2 Lemma. ([AM96b]) *Legyen $2 \le m \in \mathbb{N}$, $2 \le n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \ne X_{jk}$, Y_j, Z_k, S tetszőleges halmaz, $F_j : X_{j1} \times \dots \times X_{jn} \to Y_j$, $G_k : X_{1k} \times \dots \times X_{mk} \to Z_k$ ($j = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$), $F : Z_1 \times \dots \times Z_n \to S$, $G : Y_1 \times \dots \times Y_m \to S$, $T = G(Y_1, \dots, Y_m)$. Tegyük fel továbbá, hogy F_j és G_k minden változójában erősen szürjektív ($j = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$), F és G pedig minden változójában erősen injektív valamint teljesül* (1.1) *bármely $x_{jk} \in X_{jk}$ esetén ($j = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, n$). Ekkor $F : Z_1 \times \dots \times Z_n \to T$ és $G : Y_1 \times \dots \times Y_m \to T$ minden változójukban erősen bijektív függvények.*

B i z o n y í t á s. A feltételek miatt $F(Z_1, \dots, Z_n) = T$ is teljesül. Legyen $1 \le p \le n$. Igazoljuk, hogy $F : Z_1 \times \dots, \times Z_n \to T$ a p-edik változójában erősen bijektív. Legyen ugyanis $a_k \in Z_k$, $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p\}$ és $b \in T$. Ekkor van olyan $(a_{1k}, \dots, a_{mk}) \in X_{1k} \times \dots \times X_{mk}$, hogy $a_k = G_k\ (a_{1k}, \dots, a_{nk})$, mert G_k szürjektív ($k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p\}$). Másrészt olyan $(y_1, \dots, y_m) \in Y_1 \times \dots \times Y_m$ is van, melyre $b = G(y_1, \dots, y_m)$ teljesül. Ugyanakkor az $F_1, \dots, F_m$ függvények a p-edik változójukban erősen szürjektívek , ezért van olyan $(a_{1p}, \dots, a_{mp}) \in X_{1p} \times \dots \times X_{mp}$, hogy $F_j(a_{j1}, \dots, a_{jp}, \dots, a_{jn}) = y_j$, $j = 1, \dots, m$. Ezért (1.1) miatt

$$\begin{aligned} b &= G(y_1, \dots, y_m) = G(F_1(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, F_m(a_{m1}, \dots, a_{mn})) \\ &= F(G_1(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, G_p(a_{1p}, \dots, a_{mp}), \dots, G_n(a_{1n}, \dots, a_{mn})) \\ &= F(a_1, \dots, a_{p-1}, G_p(a_{1p}, \dots, a_{mp}), a_{p+1}, \dots, a_n), \end{aligned}$$

azaz F p-edik változója szerinti parciális függvénye a $G_p(a_{1p}, \dots, a_{mp}) \in Z^p$ pontban felveszi a $b \in T$ értéket. Így F a p-edik változójában erősen szürjektív. Mivel erősen injektív is, ezért erősen bijektív. Hasonlóan igazolható, hogy G is erősen bijektív minden változójában. □

Ezek után, igazoljuk ennek a résznek a fő eredményét.

1.3 Tétel. ([AM96b]) *Legyenek* $2 \leq m$ *és* $2 \leq n$ *rögzített természetes számok,* $\emptyset \neq X_{jk}$*,* Y_j*,* Z_k *és* S *halmazok,* $F_j : X_{j1} \times \cdots \times X_{jn} \to Y_j$*,* $G_k : X_{1k} \times \cdots \times X_{mk} \to Z_k$*,* $F : Z_1 \times \cdots \times Z_n \to S$ *és* $G : Y_1 \times \cdots \times Y_m \to S$ *függvények* $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$*. Pontosan akkor igaz, hogy az* F_j *és* G_k *függvények erősen szürjektívek* $(j = 1, \ldots, m;$ $k = 1, \ldots, n)$ *minden változójukban, az* F *és* G *függvények erősen injektívek minden változójukban, továbbá fennáll, hogy*

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad & G(F_1(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn})) \\ & \quad = F(G_1(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, G_n(x_{1n}, \ldots, x_{mn}))\end{aligned}$$

minden $x_{jk} \in X_{jk}$ *esetén* $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$*, ha van olyan* $(T, *)$ *Abel csoport, hogy* $T = G(Y_1, \ldots, Y_m)$*, továbbá vannak olyan* $f_{jk} : X_{jk} \to T$ *szürjekciók és olyan* $g_j : Y_j \to T$*,* $h_k : Z_k \to T$ *bijekciók, hogy*

$$(1.13)\qquad F(z_1, \ldots, z_n) = h_1(z_1) * \cdots * h_n(z_n),$$

$$(1.14)\qquad G(y_1, \ldots, y_m) = g_1(y_1) * \cdots * g_m(y_m),$$

$$(1.15)\qquad F_j(x_{j1}, \ldots, x_{jn}) = g_j^{-1}(f_{j1}(x_{j1}) * \cdots * f_{jn}(x_{jn}))$$

és

$$(1.16)\qquad G_k(x_{1k}, \ldots, x_{mk}) = h_k^{-1}(f_{1k}(x_{1k}) * \cdots * f_{mk}(x_{mk}))$$

teljesül minden $z_k \in Z_k$*,* $y_j \in Y_j$ *és* $x_{jk} \in X_{jk}$ *esetén* $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$*.*

B i z o n y í t á s. Az az állítás, hogy az (1.13) – (1.16)-ban definiált függvények (1.1) kívánt tulajdonságú megoldásai, számolással igazolható, ezért nem bizonyítjuk.

(i) A fordított állítást először az $m = 2$ esetben igazoljuk, éspedig n szerinti teljes indukcióval. Ha még $n = 2$ is teljesül, akkor (1.1) az

$$(1.2)\qquad G(F_1(x_{11}, x_{12}), F_2(x_{21}, x_{22})) = F(G_1(x_{11}, x_{21}), G_2(x_{12}, x_{22}))$$

egyenletbe megy át és a feltételeink garantálják, hogy alkalmazható Taylor [Tay78, Theorem 5] eredménye, amely szerint igaz az állítás az ($m = 2$ és) $n = 2$ esetben, azaz van olyan $(T, *)$ Abel csoport ($T = G(Y_1, Y_2)$) és vannak olyan $f_{jk} : X_{jk} \to T$ szürjekciók és olyan $g_j : Y_j \to T$, $h_k : Z_k \to T$ $(j = 1, 2;\ k = 1, 2)$ bijekciók, hogy fennáll (1.13) – (1.16), ha $m = n = 2$. Folytatva az n-szerinti indukciós bizonyítást, tegyük fel, hogy $n > 2$ és igaz az állítás n helyett $(n-1)$-re. Az $m = 2$ esetben (1.1)

$$(1.17)\qquad G(F_1(x_{11}, \ldots x_{1n}), F_2(x_{21}, \ldots x_{2n})) = F(G_1(x_{11}, x_{21}), \ldots, G_n(x_{1n}, x_{2n}))$$

alakú. A feltételek és az 1.2. Lemma miatt F_1, F_2, $G_1, \ldots, G_n$ minden változójukban erősen szürjektívek míg $G : Y_1 \times Y_2 \to T = G(Y_1, Y_2)$ és $F : Z_1 \times \cdots \times Z_n \to T = F(Z_1, \ldots, Z_n)$ minden változójukban erősen bijektívek. Legyen $a_{jn} \in X_{jn}$ rögzített $(j = 1, 2)$ és definiáljuk az $\tilde{F}$ és $\tilde{F}_j$ függvényeket az alábbiak szerint:

$$\tilde{F}(z_1, \ldots, z_{n-1}) = F(z_1, \ldots, z_{n-1}, G_n(a_{1n}, a_{2n})) \quad (z_k \in Z_k,\ 1 \leq k \leq n-1)$$

és

$$\tilde{F}_j(x_1,\ldots,x_{n-1}) = F_j(x_1,\ldots,x_{n-1},a_{jn}) \quad (x_k \in X_{jk}\,,\ 1 \le k \le n-1;\ j=1,2).$$

Ekkor (1.17)-ből az $x_{jn} = a_{jn}$ $(j = 1,2)$ helyettesítés után

$$G(\tilde{F}_1(x_{11},\ldots,x_{1,n-1}),\tilde{F}_2(x_{21},\ldots,x_{2,n-1})) = \tilde{F}(G_1(x_{11},x_{21}),\ldots,G_{n-1}(x_{1,n-1},x_{2,n-1}))$$

adódik, ami ugyanolyan alakú egyenlet, mint (1.17) csak n helyett $(n-1)$, F_j helyett $\tilde{F}_j$ $(j=1,2)$ és F helyett $\tilde{F}$ szerepel benne. Alkalmazható az indukciós feltétel, amely szerint G és $G_1,\ldots,G_{n-1}$ máris (1.14) illetve (1.16) alakú (itt természetesen $m=2$), azaz

$$G(y_1,y_2) = g_1(y_1) * g_2(y_2) \qquad (y_1 \in Y_1,\ y_2 \in Y_2), \tag{1.18}$$

$$G_k(x_{1k},x_{2k}) = \tilde{h}_k^{-1}(\tilde{f}_{1k}(x_{1k}) * \tilde{f}_{2k}(x_{2k})) \tag{1.19}$$

$$(x_{jk} \in X_{jk}\,,\ j=1,2;\ k=1,\ldots,n-1),$$

ahol $\tilde{f}_{jk} : X_{jk} \to T = G(Y_1,Y_2)$ szürjektív, $g_j : Y_j \to T$ és $\tilde{h} : Z_k \to T$ bijektív függvények $(j=1,2;\ k=1,\ldots,n-1)$ és $(T,*)$ Abel csoport. Helyettesítsük (1.17)-be G (1.18) alakját. Ekkor

$$\begin{aligned} &g_1 \circ F_1(x_{11},\ldots,x_{1,n-1},x_{1n}) * g_2 \circ F_2(x_{21},\ldots,x_{2,n-1},x_{2n}) \\ &\quad = G(G_1(x_{11},x_{21}),\ldots,G_{n-1}(x_{1,n-1},x_{2,n-1}),G_n(x_{1n}x_{2n})) \\ &\quad (x_{jk} \in X_{jk}\,,\ j=1,2;\ k=1,\ldots,n) \end{aligned} \tag{1.20}$$

következik. Legyenek ezúttal az $a_{jk} \in X_{jk}$ elemek rögzítettek $(j=1,2;\ k=1,\ldots,n-1)$ és definiáljuk a $\tilde{h}_n$ és $\tilde{f}_{jn}$ függvényeket $(j=1,2)$ az alábbiak szerint:

$$\tilde{h}_n(t) = F(G_1(a_{11},a_{21}),\ldots,G_{n-1}(a_{1,n-1}a_{2,n-1}),t) \qquad (t \in Z_n), \tag{1.21}$$

$$\tilde{f}_{jn}(x) = g_j \circ F_j(a_{j1},\ldots,a_{j,n-1},x) \qquad (x \in X_{jn}\,,\ j=1,2). \tag{1.22}$$

Mivel F_j erősen szürjektív az n-edik változójában és g_j bijekció T-re, ezért $\tilde{f}_{jn}$ is szürjekció T-re $(j=1,2)$. Másrészt az 1.2 Lemma miatt F erősen bijektív, tehát $\tilde{h}_n$ bijekció T-re. Továbbá (1.22), (1.20) és (1.21) miatt

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1n}(x_{1n}) * \tilde{f}_{2n}(x_{2n}) &= g_1 \circ F_1(a_{11},\ldots,a_{1,n-1},x_{1n}) * g_2 \circ F_2(a_{21},\ldots,a_{2,n-1},x_{2n}) \\ &= F(G_1(a_{11},a_{21}),\ldots,G_{n-1}(a_{1,n-1},a_{2,n-1}),G_n(x_{1n},x_{2n})) \\ &= \tilde{h}_n \circ G_n(x_{1n},x_{2n}), \end{aligned}$$

azaz

$$G_n(x_{1n},x_{2n}) = \tilde{h}_n^{-1}\big(\tilde{f}_{1n}(x_{1n}) * \tilde{f}_{2n}(x_{2n})\big) \quad (x_{jn} \in X_{jn}\,,\ j=1,2). \tag{1.23}$$

Ezek után helyettesítsük (1.20)-ba a G_k függvények (1.19)-ben illetve (1.23)-ban megadott alakját. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(1.24)\qquad & g_1 \circ F_1(x_{11},\dots,x_{1n}) * g_2 \circ F_2(x_{21},\dots,x_{2n}) \\ & \quad = F\big(\tilde{h}_1^{-1}\big(\tilde{f}_{11}(x_{11}) * \tilde{f}_{21}(x_{21})\big),\dots,\tilde{f}_n^{-1}\big(\tilde{f}_{1n}(x_{1n}) * \tilde{f}_{2n}(x_{2n})\big)\big)\end{aligned}$$

minden $x_{jk} \in X_{jk}$ mellett ($j = 1, 2$; $k = 1,\dots,n$). Ez egy (1.4) alakú egyenlet, amelyre alkalmazható az 1.1. Lemma. Valóban, legyen $M = 2$, $N = n$ továbbá

$$\begin{aligned}\Psi(t_1,\dots,t_N) &= F\big(\tilde{h}_1^{-1}(t_1),\dots,\tilde{h}_N^{-1}(t_N)\big) && (t_k \in T,\ k = 1,\dots,N),\\ E_j(x_1,\dots,x_N) &= g_j \circ F_j(x_1,\dots,x_N) && (x_k \in X_{jk},\ j = 1,2;\ k = 1,\dots,N).\end{aligned}$$

Ekkor (1.24) éppen az (1.4) egyenlet, és az 1.1. Lemma többi feltétele is teljesül, így $(T,*)$-nak vannak olyan $p_1,\dots,p_n$ automorfizmusai és vannak olyan $d_1, d_2 \in T$ elemek, hogy

$$F_j(x_1,\dots,x_n) = g_j^{-1}\left(\prod_{k=1}^{n} p_k \circ \tilde{f}_{jk}(x_k) * d_j\right) \tag{1.25}$$

és

$$F(z_1,\dots,z_n) = \prod_{k=1}^{n} p_k \circ \tilde{h}_k(z_k) * d_1 * d_2 \tag{1.26}$$

minden $x_k \in X_{jk}$ és $z_k \in Z_k$ esetén ($k = 1,\dots,n$; $j = 1, 2$). Most már csak néhány újabb jelölést kell bevezetni: legyen

$$\begin{aligned}(1.27)\qquad h_1(z_1) &= p_1 \circ \tilde{h}_1(z_1) * d_1 * d_2 \quad \text{és} \quad h_k(z_k) = p_k \circ \tilde{h}_k(z_k)\ (2 \le k \le n),\\ (1.28)\qquad f_{j1}(x_1) &= p_1 \circ f_{j1}(x_1) * d_j \qquad \text{és} \quad f_{jk}(x_k) = p_k \circ \tilde{f}_{jk}(x_k)\ (2 \le k \le n)\end{aligned}$$

($z_k \in Z_k$, $x_k \in X_{jk}$, $k = 1,\dots,n$; $j = 1, 2$). Nyilvánvaló, hogy ekkor $h_k : Z_k \to T$ bijekció, $f_{jk} : X_{jk} \to T$ szürjekció ($k = 1,\dots,n$; $j = 1, 2$) és (1.25)-ből illetve (1.26)-ból következik (1.15) (az $m = 2$ esetben) illetve (1.13). Végül felhasználva (1.27)-et kapjuk, hogy

$$\tilde{h}_1^{-1}(t) = h_1^{-1}(p_1(t) * d_1 * d_2) \quad \text{és} \quad \tilde{h}_k^{-1}(t) = h_k^{-1} \circ p_k(t)\ (2 \le k \le n).$$

Ezért (1.19)-ből illetve (1.23)-ból – (1.28)-at, valamint azt figyelembe véve, hogy p_k automorfizmus – adódik, hogy

$$\begin{aligned}G_1(x_1,x_2) &= \tilde{h}_1^{-1} \circ \big(\tilde{f}_{11}(x_1) * \tilde{f}_{21}(x_2)\big)\\ &= h_1^{-1}\big(p_1(\tilde{f}_{11}(x_1) * \tilde{f}_{21}(x_2)) * d_1 * d_2\big)\\ &= h_1^{-1}\big(p_1 \circ \tilde{f}_{11}(x_1) * p_1 \circ \tilde{f}_{21}(x_2) * d_1 * d_2\big)\\ &= h_1^{-1}(f_{11}(x_1) * f_{21}(x_2)),\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} G_k(x_1, x_2) &= h_k^{-1}\big(p_k(\tilde{f}_{1k}(x_1) * \tilde{f}_{2k}(x_2))\big) \\ &= h_k^{-1}\big(p_k \circ \tilde{f}_{1k}(x_1) * p_k \circ \tilde{f}_{2k}(x_2)\big) \\ &= h_k^{-1}\big(f_{1k}(x_1) * f_{2k}(x_2)\big), \end{aligned}$$

ha $2 \le k \le n$. Ezzel igazoltuk az állítást $m = 2$ és $2 \le n \in \mathbb{N}$ esetén.

(ii) Most m-szerinti teljes indukcióval igazoljuk az állítást tetszőleges $2 \le m \in \mathbb{N}$ és $2 \le n \in \mathbb{N}$ mellett. A bizonyítás (i) részében megmutattuk, hogy igaz az állítás, ha $m = 2$. Legyen tehát (rögzített n mellett) $m > 2$ és tegyük fel, hogy igaz az állítás m helyett $(m-1)$-re. Legyen $a_{mk} \in X_{mk}$ rögzített $(k = 1, \dots, n)$,

$$\tilde{G}(y_1, \dots, y_{m-1}) = G(y_1, \dots, y_{m-1}, F_m(a_{m1}, \dots, a_{mn})) \qquad (y_j \in Y_j,\ 1 \le j \le m-1)$$

és

$$\tilde{G}_k(x_1, \dots, x_{m-1}) = G_k(x_1, \dots, x_{m-1}, a_{mk}) \quad (x_j \in X_{jk},\ 1 \le j \le m-1;\ 1 \le k \le n).$$

Ekkor (1.1)-ből

$$\begin{aligned} &\tilde{G}\big(F_1(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F_{m-1}(x_{m-1,1}, \dots, x_{m-1,n})\big) \\ &\qquad = F\big(\tilde{G}_1(x_{11}, \dots, x_{m-1,1}), \dots, \tilde{G}_n(x_{1n}, \dots, x_{m-1,n})\big) \end{aligned} \tag{1.29}$$

következik $(x_{jk} \in X_{jk},\ 1 \le j \le m-1;\ 1 \le k \le n)$. Alkalmazható az indukciós feltétel és azt kapjuk, hogy $F, F_1, \dots, F_{m-1}$ (1.13), illetve (1.15) alakú, azaz

$$F(z_1, \dots, z_n) = \tilde{h}_1(x_1) * \cdots * \tilde{h}_n(z_n) \quad (z_k \in Z_k\,,\ 1 \le k \le n), \tag{1.30}$$

$$F_j(x_{j1}, \dots, x_{jn}) = \tilde{g}_j^{-1}\big(\tilde{f}_{j1}(x_{j1}) * \cdots * \tilde{f}_{jn}(x_{jn})\big) \tag{1.31}$$

$$(x_{jk} \in X_{jk},\ 1 \le k \le n;\ 1 \le j \le m-1),$$

ahol $\tilde{f}_{jk} : X_{jk} \to T$ szürjektív, $\tilde{g}_j : Y_j \to T$ és $\tilde{h}_k : Z_k \to T$ bijektív $(1 \le j \le m-1;$ $1 \le k \le n)$ és $(T, *)$ Abel csoport. Írjuk be (1.1)-be F (1.30) alakját. Ekkor

$$\begin{aligned} &G(F_1(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F_m(x_{m1}, \dots, x_{mn})) \\ &\qquad = \tilde{h}_1 \circ G_1(x_{11}, \dots, x_{m1}) * \cdots * \tilde{h}_m \circ G_n(x_{1n}, \dots, x_{mn}) \end{aligned} \tag{1.32}$$

adódik minden $x_{jk} \in X_{jk}$ esetén $(1 \le j \le m;\ 1 \le k \le n)$. Rögzítsük ezúttal az $a_{jk} \in X_{jk}$ elemeket $(1 \le j \le m-1;\ 1 \le k \le n)$ és definiáljuk a $\tilde{g}$ és $\tilde{f}_{mk}$ függvényeket az alábbiak szerint:

$$\tilde{g}_m(t) = G(F_1(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, F_{m-1}(a_{m-1}, \dots, a_{m-1,n}), t) \quad (t \in Y_m), \tag{1.33}$$

$$\tilde{f}_{mk}(x) = \tilde{h}_k \circ G_k(a_{1k}, \dots, a_{m-1,k}, x) \quad (x \in X_{mk},\ 1 \le k \le n). \tag{1.34}$$

A feltételek miatt $\tilde{f}_{mk} : X_{mk} \to T$ szürjekció ($1 \leq k \leq n$) és $\tilde{g}_m : Y_m \to T$ bijekció (az 1.2. Lemma miatt ugyanis G erősen bijektív az utolsó változójában). Továbbá (1.32)-ből, (1.33)-ból és (1.34)-ből az $x_{jk} = a_{jk}$ ($1 \leq j \leq m-1$; $1 \leq k \leq n$) helyettesítéssel

$$F_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn}) = \tilde{g}_m^{-1}\big(\tilde{f}_{m1}(x_{m1}) * \cdots * \tilde{f}_{mn}(x_{mn})\big) \tag{1.35}$$

következik minden $x_{mk} \in X_{mk}$ ($1 \leq k \leq n$) esetén. Írjuk most be (1.1)-be F (1.30) és F_j (1.31) illetve (1.35) alakját. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G\big(\tilde{g}_1^{-1}(\tilde{f}_{11}(x_{11}) * \cdots * \tilde{f}_{1n}(x_{1n})), \ldots, g_m^{-1}(\tilde{f}_{m1}(x_{m1}) * \cdots * \tilde{f}_{mn}(x_{mn}))\big) \\ = \tilde{h}_1 \circ G_1(x_{11}, \ldots, x_{m1}) * \cdots * \tilde{h}_m \circ G_n(x_{1n}, \ldots, x_{mn}) \end{aligned}$$

fennáll minden $x_{jk} \in X_{jk}$ ($1 \leq j \leq m$; $1 \leq k \leq n$) mellett. Ez ismét egy (1.4) típusú egyenlet, amelyre teljesülnek az 1.1. Lemma feltételei. Ezért

$$G_k(x_1, \ldots, x_m) = \tilde{h}_k^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m} p_j \circ \tilde{f}_{jk}(x_j) * c_k\right) \tag{1.36}$$

és

$$G(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{j=1}^{n} p_j \circ \tilde{g}_j(y_j) * c_1 * \cdots * c_n \tag{1.37}$$

teljesül T alkalmas $p_1, \ldots, p_m$ automorfizmusaival és $c_1, \ldots, c_n$ elemeivel minden $x_j \in X_{jk}$ és $y_j \in Y_j$ mellett ($1 \leq j \leq m$; $1 \leq k \leq n$). Definiáljuk az alábbi függvényeket:

$$\begin{aligned} & h_1(z) = \tilde{h}_1(z) * c_2 * \cdots * c_n,\ h_k(z) = \tilde{h}_k(z) * c_k^{-1} \qquad (2 \leq k \leq n), \\ & g_1(y) = p_1 \circ \tilde{g}_1(y) * c_1 * \cdots * c_n,\ g_j(y) = p_j \circ \tilde{g}_j(y) \quad (2 \leq j \leq m) \\ & \qquad (z \in Z_k,\ y \in Y_j) \end{aligned} \tag{1.38}$$

és

$$\begin{aligned} & f_{11}(x) = p_1 \circ \tilde{f}_{11}(x) * c_1 * \cdots * c_n, \\ & f_{jk}(x) = p_j \circ \tilde{f}_{jk}(x), \quad \text{ha } j + k > 2; \quad 1 \leq j \leq m;\ 1 \leq k \leq n \quad (x \in X_{jk}). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Nyilvánvaló, hogy a $h_k : Z_k \to T$ és $g_j : Y_j \to T$ függvények bijekciók, $f_{jk} : X_{jk} \to T$ pedig szürjekció ($1 \leq j \leq m$; $1 \leq k \leq n$), továbbá (1.36)-ból, (1.38)-ból és (1.39)-ből következik (1.16), mert:

$$\begin{aligned} G_1(x_{11} \ldots, x_{m1}) &= \tilde{h}_1^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m} p_j \circ \tilde{f}_{j1}(x_{j1}) * c_1\right) \\ &= h_1^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m} p_j \circ \tilde{f}_{j1}(x_{j1}) * c_1 * \cdots * c_n\right) \end{aligned}$$

$$= \quad h_1^{-1}\big(f_{11}(x_{11}) * f_{21}(x_{21}) * \cdots * f_{m1}(x_{m1})\big),$$

illetve $2 \leq k \leq n$ esetén

$$\begin{aligned} G_k(x_{1k},\dots,x_{mk}) &= \tilde{h}_k^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m} p_j \circ \tilde{f}_{jk}(x_{jk}) * c_k\right) \\ &= h_k^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m} p_j \circ \tilde{f}_{jk}(x_{jk}) * c_k^{-1} * c_k\right) \\ &= h_k^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m} f_{jk}(x_{jk})\right). \end{aligned}$$

Végül (1.30)-ból illetve (1.37)-ből (1.38) alapján könnyen következik (1.13) illetve (1.14), míg (1.15) (1.31)-ből illetve (1.35)-ből adódik – (1.38) és (1.39) figyelembevételével:

$$F_1(x_1,\dots,x_n) = g_1^{-1}\left(\prod_{k=1}^{n} p_1 \circ \tilde{f}_{1k}(x_k) * c_1 \cdots * c_n\right) = g_1^{-1}(f_{11}(x_1) * \cdots * f_{1n}(x_n)),$$

illetve a $2 \leq j \leq m$ esetben

$$\begin{aligned} F_j(x_1,\dots,x_n) &= g_j^{-1} \circ p_j\left(\prod_{k=1}^{n} \tilde{f}_{jk}(x_k)\right) \\ &= g_j^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n} p_j \circ \tilde{f}_{jk}(x_k)\right) = g_j^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n} f_{jk}(x_k)\right). \end{aligned}$$

□

1.2 A konzisztens aggregáció problémájának megodása gyenge szürjektivitás és erős injektivitás mellett

Legyen $n \in \mathbb{N}$, legyenek $A_1,\dots,A_n$ nem-üres halmazok, B egy halmaz, $H : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ egy függvény és $1 \leq p \leq n$. Azt mondjuk, hogy H *gyengén szürjektív* a p-edik változójában, ha léteznek olyan $a_k \in A_k$, $k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{p\}$ elemek, hogy az (1.3) módon definiált $H^p : A_p \to B$ függvény szürjektív. Nyilvánvaló, hogy a p-edik változójukban erősen szürjektív függvények a p-edik változójukban gyengén szürjektívek is. Azt mondjuk továbbá, hogy $b \in B$ *elérhető eleme* H-nak, ha minden $1 \leq p \leq n$ és minden $a_k \in A_k$, $k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{p\}$ esetén van olyan $c_p \in A_p$, hogy $H(a_1,\dots,a_{p-1},c_p,a_{p+1},\dots,a_n) = b$. Az is nyilvánvaló, hogy ha H minden változójában erősen szürjektív, akkor B minden eleme elérhető eleme H-nak. Van viszont olyan függvény, amely minden változójában gyengén szürjektív, van elérhető eleme is, de egyetlen változójában sem erősen szürjektív. Legyen például d a Dirichlet függvény, azaz

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

($\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza) és $H(x,y) = d(x)d(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor $A_1 = A_2 = \mathbb{R}$, $B = \{0,1\}$. H mindkét változójában gyengén szürjektív, mert $H(x,1) = d(x)$ és $H(1,y) = d(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$, $0 \in B$ H-nak elérhető eleme de $H(x, \sqrt{2}\,) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ illetve $H(\sqrt{2}, y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$ miatt sem az első sem a második változójában nem erősen szürjektív. Ebben a részben azt fogjuk igazolni, hogy (1.1)-ben a belső függvények erős szürjektivitása gyenge szürjektivitással és elérhető elem létezésével helyettesíthető. Az előzetes eredmények megfogalmazásához szükségünk van még két fogalomra. Legyenek U, V és W halmazok. Azt mondjuk, hogy a $H : U \times V \to W$ függvény eleget tesz a *Reidemeister feltételnek* (lásd Taylor [Tay75], Aczél [Acz65]), ha abból hogy $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ továbbá $H(u_1, v_2) = H(u_2, v_1)$, $H_1(u_1, v_4) = H(u_2, v_3)$ és $H(u_3, v_2) = H(u_4, v_1)$ következik, hogy $H(u_3, v_4) = H(u_4, v_3)$. Ha egy $H : U \times V \to W$ függvény eleget tesz a Reidemeister feltételnek, akkor azt mondjuk, hogy H egy *R-függvény.* Az R-függvényekkel kapcsolatban ismert Taylor alábbi eredménye:

1.4 Lemma. ([Tay75]) *Legyen $H : U \times V \to W$ egy R-függvény. Ha H valamelyik változójában gyengén szürjektív és H-nak van elérhető eleme W-ben, akkor vannak olyan $f : U \to W$, $g : V \to W$ szürjekciók és van olyan $(W, *)$, csoport , hogy*

$$H(u,v) = f(u) * g(v) \quad ((u,v) \in U \times V).$$

Ezt felhasználva igazolható az alábbi lemma:

1.5 Lemma. ([AMT97]) *Legyenek az F_j, G_k, F és G függvények úgy definiálva, mint az 1.3. Tételben és tegyük fel, hogy fennáll (1.1) minden $x_{jk} \in X_{jk}$ esetén ($1 \le j \le m$; $1 \le k \le n$). Tegyük fel továbbá, hogy F és G minden változójában erősen injektív és mindegyik F_j és G_k függvénynek van elérhető eleme Y_j-ben illetve Z_k-ban ($1 \le j \le m$; $1 \le k \le n$). Ekkor bárhogyan is rögzítsük F_j és G_k $(m-2)$ illetve $(n-2)$ változóját, az így kapott kétváltozós függvények mind R-függvények ($1 \le j \le m$; $1 \le k \le n$).*

B i z o n y í t á s. Legyen $j \in \{1, \dots, m\}$ rögzített, $1 \le s < t \le n$ pedig két rögzített természetes szám, $a_k \in X_{jk}$, $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{s, t\}$ és

$$F_j^{st}(x_s, x_t) = F_j(a_1, \dots, a_{s-1}, x_s, a_{s+1}, \dots, a_{t-1}, x_t, a_{t+1}, \dots, a_n), \tag{1.40}$$

ha $(x_s, x_t) \in X_{js} \times X_{jt}$. Igazolni fogjuk, hogy F_j^{st} R-függvény. Legyen ezért $u_1, u_2, u_3, u_4 \in X_{js}$ és $v_1, v_2, v_3, v_4 \in X_{jt}$, továbbá tegyük fel, hogy

$$F_j^{st}(u_1, v_2) = F_j^{st}(u_2, v_1),\ F_j^{st}(u_1, v_4) = F_j^{st}(u_2, v_3),\ F_j^{st}(u_3, v_2) = F_j^{st}(u_4, v_1). \tag{1.41}$$

Használjuk fel először (1.41) első egyenlőségét (1.1) baloldalán. (1.1) megfelelő jobboldalainak egyenlőségéből

$$
\begin{aligned}
&F\big(G_1(x_{11},\dots,a_1,\dots,x_{m1}),\dots,G_s(x_{1s},\dots,u_1,\dots,x_{ms}),\\
&\qquad \dots,G_t(x_{1t},\dots,v_2,\dots,x_{mt}),\dots,G_n(x_{1n},\dots,a_n,\dots,x_{mn})\big)\\
&= F\big(G_1(x_{11},\dots,a_1,\dots,x_{m1}),\dots,G_s(x_{1s},\dots,u_2,\dots,x_{ms}),\\
&\qquad \dots,G_t(x_{1t},\dots,v_1,\dots,x_{mt}),\dots,G_n(x_{1n},\dots,a_n,\dots,x_{mn})\big)
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

következik. Hasonlóan, (1.41) második egyenlőségéből és (1.1)-ből

$$
\begin{aligned}
&F\big(G_1(x_{11},\dots,a_1,\dots,x_{m1}),\dots,G_s(x_{1s},\dots,u_1,\dots,x_{ms}),\\
&\qquad \dots,G_t(x_{1t},\dots,v_4,\dots,x_{mt}),\dots,G_n(x_{1m},\dots,a_n,\dots,x_{mn})\big)\\
&= F\big(G_1(x_{11},\dots,a_1,\dots,x_{m1}),\dots,G_s(x_{1s},\dots,u_2,\dots,x_{ms}),\\
&\qquad \dots,G_t(x_{1t},\dots,v_3,\dots,x_{mt}),\dots,G_n(x_{1n},\dots,a_n,\dots,x_{mn})\big)
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

adódik minden $x_{jk} \in X_{jk}$ ($j \in \{1,\dots,m\}$, $k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{s,t\}$) esetén. A (1.42) és (1.43) egyenlőségek baloldalai csupán a $G_t(x_{1t},\dots,v_2,\dots,x_{mt})$ és $G_t(x_{1t},\dots,v_4,\dots,x_{mt})$ tagokban különbözhetnek egymástól. Megmutatjuk, hogy az x_{jt} változók alkalmas értékeire ezek egyenlőek. Legyen $p \in \{1,\dots,m\} \setminus \{j\}$ és legyen $b \in Z_t$ a G_t függvény elérhető eleme. Legyen továbbá $b_{kt} \in X_{kt}$ ($k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j,p\}$). Ekkor – az elérhető elem definíciója szerint – van olyan $b_{pt} \in X_{pt}$, hogy

$$G_t(b_{1t},\dots,v_2,\dots,b_{pt},\dots,b_{mt}) = b,$$

azaz v_2-höz vannak olyan $b_{it} \in X_{it}$ ($i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}$) elemek, hogy

$$G_t(b_{1t},\dots,v_2,\dots,b_{mt}) = b. \tag{1.44}$$

Hasonlóan igazolható, hogy v_4-hez vannak olyan $c_{it} \in X_{it}$ ($i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}$) elemek, hogy

$$G_t(c_{1t},\dots,v_4,\dots,c_{mt}) = b.$$

Ezért (1.44)-ből

$$G_t(b_{1t},\dots,v_2,\dots,b_{mt}) = G_t(c_{1t},\dots,v_4,\dots,c_{mt}) \tag{1.45}$$

következik. Használjuk ezt fel úgy, hogy legyen először (1.42)-ben $x_{jt} = b_{jt}$ ($j \in \{1,\dots,m\} \setminus \{s\}$), majd (1.43)-ban $x_{jt} = c_{jt}$ ($j \in \{1,\dots,m\} \setminus \{s\}$). Ekkor (1.42) és (1.43) így kapott baloldalainak egyenlőségéből a megfelelő jobboldalak egyenlősége, azaz

$$
\begin{aligned}
&F\big(G_1(x_{11},\dots,a_1,\dots,x_{m1}),\dots,G_s(x_{1s},\dots,u_2,\dots,x_{ms}),\dots,G_t(b_{1t},\dots,v_1,\dots,b_{mt}),\\
&\qquad \dots,G_n(x_{1n},\dots,a_n,\dots,x_{mn})\big)\\
&= F\big(G_1(x_{11},\dots,a_1,\dots,x_{m1}),\dots,G_s(x_{1s},\dots,u_2,\dots,x_{ms}),\dots,G_t(x_{1t},\dots,v_3,\dots,x_{mt}),\\
&\qquad \dots,G_n(x_{1n},\dots,a_n,\dots,x_{mn})\big)
\end{aligned}
$$

következik. F azonban a t-edik változójában erősen injektív, így

$$G_t(b_{1t}, \dots, v_1, \dots, b_{mt}) = G_t(c_{1t}, \dots, v_3, \dots, c_{mt}). \tag{1.46}$$

Használjuk most fel (1.41) harmadik egyenletét és (1.1)-et valamint az (1.40) definíciót. Ekkor

$$\begin{aligned} &F\big(G_1(x_{11}, \dots, a_1, \dots, x_{m1}), \dots, G_s(x_{1s}, \dots, u_3, \dots, x_{ms}), \dots, G_t(x_{1t}, \dots, v_2, \dots, x_{mt}), \\ &\quad \dots, G_n(x_{1n}, \dots, a_n, \dots, x_{mn})\big) \\ &\quad = F\big(G_1(x_{11}, \dots, a_1, \dots, x_{m1}), \dots, G_s(x_{1s}, \dots, u_4, \dots, x_{ms}), \dots, G_t(x_{1t}, \dots, v_1, \dots, x_{mt}), \\ &\quad \dots, G_n(x_{1n}, \dots, a_n, \dots, x_{mn})\big) \end{aligned}$$

következik. Legyen itt $x_{it} = b_{it}$ $(i \neq j)$. Így

$$\begin{aligned} &F\big(G_1(x_{11}, \dots, a_1, \dots, x_{m1}), \dots, G_s(x_{1s}, \dots, u_3, \dots, x_{ms}), \\ &\quad \dots, G_t(b_{1t}, \dots, v_2, \dots, b_{mt}), \dots, G_n(x_{1n}, \dots, a_n, \dots, x_{mn})\big) \\ &= F\big(G_1(x_{11}, \dots, a_1, \dots, x_{m1}), \dots, G_s(x_{1s}, \dots, u_4, \dots, x_{ms}), \\ &\quad \dots, G_t(b_{1t}, \dots, v_1, \dots, b_{mt}), \dots, G_n(x_{1n}, \dots, a_n, \dots, x_{mn})\big) \end{aligned} \tag{1.47}$$

adódik. Figyelembe véve (1.45)-öt és (1.46)-ot, az (1.47) egyenletből

$$\begin{aligned} &F\big(G_1(x_{11}, \dots, a_1, \dots, x_{m1}), \dots, G_s(x_{1s}, \dots, u_3, \dots, x_{ms}), \dots, G_t(c_{1t}, \dots, v_4, \dots, c_{mt}), \\ &\quad \dots, G_n(x_{1n}, \dots, a_n, \dots, x_{mn})\big) \\ &\quad = F\big(G_1(x_{11}, \dots, a_1, \dots, x_{m1}), \dots, G_s(x_{1s}, \dots, u_4, \dots, x_{ms}), \\ &\quad \dots, G_t(c_{1t}, \dots, v_3, \dots, c_{mt}), \dots, G_n(x_{1n}, \dots, a_n, \dots, x_{mn})\big) \end{aligned}$$

következik. Innen az (1.1) egyenlet alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &G\big(F_1(x_{11}, \dots, x_{1s}, \dots, c_{1t}, \dots, x_{1n}), \dots, F_j^{st}(u_3, v_4), \\ &\quad \dots, F_m(x_{m1}, \dots, x_{ms}, \dots, c_{mt}, \dots, x_{mn})\big) \\ &\quad = G\big(F_1(x_{11}, \dots, x_{1s}, \dots, c_{1t}, \dots, x_{1m}), \dots, F_j^{st}(u_4, v_3), \\ &\quad \dots, F_m(x_{m1}, \dots, x_{ms}, \dots, c_{mt}, \dots, x_{mn})\big). \end{aligned}$$

Ezért – G j-edik változójában való erős injektivitásából – $F_j^{st}(u_3, v_4) = F_j^{st}(u_4, v_3)$ következik, így F_j^{st} R-függvény. Hasonlóan bizonyítható az állítás F_j helyett G_k-ra is. $\square$

Most már igazoljuk ennek a résznek a fő eredményét, amely az 1.3. Tétel általánosítása.

1.6 Tétel. ([AMT97]) *Legyenek* $2 \leq m$ *és* $2 \leq n$ *rögzített természetes számok,* $\emptyset \neq X_{jk}$, Y_j, Z_k *és* S *halmazok,* $F_j : X_{j1} \times \cdots \times X_{jn} \to Y_j$, $G_k : X_{1k} \times \cdots \times X_{mk} \to Z_k$, $F : Z_1 \times \cdots \times Z_n \to S$ *és* $G : Y_1 \times \cdots \times Y_m \to S$ *függvények* $(j = 1, \dots, m;\ k =$

$1,\dots,n)$. *Pontosan akkor igaz, hogy minden* F_j *és* G_k *függvénynek van elérhető eleme* Y_j*-ben illetve* Z_k*-ban,* F_j *és* G_k *gyengén szürjektív valamelyik változójában* $(j=1,\dots,m;$ $k=1,\dots,n)$*,* F *és* G *erősen injektív minden változójában, továbbá*

$$G\big(F_1(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F_m(x_{m1},\dots,x_{mn})\big) = F\big(G_1(x_{11},\dots,x_{m1}),\dots,G_n(x_{1n},\dots,x_{mn})\big) \tag{1.1}$$

fennáll minden $x_{jk}\in X_{jk}$ *esetén* $(j=1,\dots,m;\ k=1,\dots,n)$*, ha van olyan* $(T,*)$ *Abel csoport , hogy* $T=G(Y_1,\dots,Y_m)$*, továbbá vannak olyan* $f_{jk}:X_{jk}\to T$ *szürjekciók és olyan* $g_j:Y_j\to T$*,* $h_k:Z_k\to T$ *bijekciók, amelyekre teljesülnek az* (1.13) – (1.16) *egyenlőségek minden* $z_k\in Z_k$*,* $y_j\in Y_j$ *és* $x_{jk}\in X_{jk}$ *mellett* $(j=1,\dots,m;\ k=1,\dots,n)$*.*

B i z o n y í t á s. Az 1.3. Tétel miatt elegendő azt belátni, hogy ha minden F_j és G_k függvénynek van elérhető eleme és mindegyik valamely változójában gyengén szürjektív és teljesül (1.1), akkor F_j és G_k minden változójában erősen szürjektív ($j=1,\dots,m$; $k=1,\dots,n$). Tegyük fel először, hogy F_j gyengén szürjektív a q-adik változójában, azaz vannak olyan $a_k\in X_{jk}$ ($k\in\{1,\dots,n\}\setminus\{q\}$) elemek, hogy az

$$x_q\mapsto F_j(a_1,\dots,a_{q-1},x_q,a_{q+1},\dots,a_n)\quad (x_q\in X_{jq})$$

függvény értékkészlete Y_j. Legyen $r\in\{1,\dots,n\}\setminus\{q\}$ és tegyük fel például, hogy $q<r$. Ekkor az 1.5. Lemma miatt az

$$F_j^{qr}(x_q,x_r)=F_j(a_1,\dots,a_{q-1},x_q,a_{q+1},\dots,a_{r-1},x_r,a_{r+1},\dots,a_n) \tag{1.48}$$

($x_q\in X_{jq},\ x_r\in X_{jr}$) módon definiált F_j^{qr} függvény R-függvény. Másrészt F_j^{qr} gyengén szürjektív az első változójában és van elérhető eleme is, amelyet F_j-től örökölt. Ezért az 1.4. Lemma alapján azt kapjuk, hogy van olyan $f:X_{jq}\to Y_j$ és $g:X_{jr}\to Y_j$ szürjekció és olyan $(Y_j,*)$ csoport, hogy

$$F_j^{qr}(x_q,x_r)=f(x_q)*g(x_r)\qquad (x_q\in X_{jq},\ x_r\in X_{jr}).$$

Most megmutatjuk, hogy F_j^{qr} erősen szürjektív az első változójában. Legyen ugyanis $a\in X_{jr}$ és $y\in Y_j$. Mivel $y*g(a)^{-1}\in Y_j$ és $f:X_{jq}\to Y_j$ szürjekció, ezért van olyan $x_q\in X_{jq}$, hogy $f(x_q)=y*g(a)^{-1}$. Így

$$F_j^{qr}(x_q,a)=f(x_q)*g(a)=\big(y*g(a)^{-1}\big)*g(a)=y.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy F_j^{qr} a második változójában is erősen szürjektív. Ezért figyelembe véve (1.48)-at – F_j gyengén szürjektív az r-edik változójában, ha $q<r$. Hasonlóan igazolható, hogy F_j gyengén szürjektív az r-edik változójában akkor is, ha $r<q$. Nyilvánvaló, hogy F_j a q-adik és így minden változójában gyengén szürjektív, ami az előzőek szerint azt eredményezi, hogy F_j^{qr} erősen szürjektív mindkét változójában minden $q,r\in\{1,\dots,n\}$, $q\neq r$ esetén. Most azt fogjuk igazolni, hogy F_j erősen szürjektív az i-edik változójában bármely $1\le i\le n$ mellett. Mivel F_j gyengén szürjektív az i-edik

változójában, vannak olyan $a_s \in X_{js}$ $(s \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\})$ elemek, hogy minden $y \in Y_j$ esetén

$$F_j(a_1, \dots, a_{i-1}, x_1, a_{i+1}, \dots, a_n) = y$$

teljesül valamely $x_1 \in X_{ji}$ mellett. Legyen $b_s \in X_{js}$, $(s \in \{1, \dots, n\}\setminus\{i\})$ tetszőleges. Az előbb megállapítottuk, hogy (többek között) F_j^{1i} mindkét változójában erősen szürjektív, ezért $F_j^{1i}(a_1, x_1) = F_j^{1i}(b_1, x_2)$valamely $x_2 \in X_{ji}$ mellett és így

$$F_j(b_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_2, a_{i+1}, \dots, a_n) = y.$$

Folytassuk ezt az eljárást úgy, hogy az a_s elemeket rendre cseréljük ki a b_s elemekre $(s \neq i)$ valamint az x_s elemet x_{s+1}-re, ha $s < i$ és x_{s-1}-re ha $s > i$ mindaddig, amíg meg nem kapjuk, hogy

$$F_j(b_1, \dots, b_{i-1}, x_n, b_{i+1}, \dots, b_n) = y,$$

ami igazolja, hogy F_j erősen szürjektív az i-edik változójában és így – mivel $1 \leq i \leq n$ tetszőleges volt – minden változójában. Hasonlóan bizonyítható, hogy G_k is erősen szürjektív minden változójában. $\square$

1.3 Egyértelműség, következtetések a valós esetre

Az előző két részben a konzisztens aggregáció alapproblémájára, hogy tudniillik milyen termelési és aggregáló függvények jöhetnek szóba az eljárásnál, tetszőleges nemüres halmazok esetében adtunk egy-egy megoldást. A témakörben további kérdés azonban az, hogy adott termelési függvényekhez (mint pl. a bevezetésben definiált CD és CES függvények) milyen aggregáló függvények tartoznak, amelyekkel az aggregáció konzisztens. Az említett (CD, CES) termelési függvények változói pozitív számok, a függvények maguk pedig folytonosak és minden változójukban szigorúan monotonak. A CD függvények minden változójukban erősen bijektívek, így rájuk alkalmazható az 1.3. Tétel. A CES függvények azonban egyetlen változójukban sem gyengén szürjektívek, így rájuk még az 1.6. Tétel sem alkalmazható közvetlenül. Ebben a részben ezekkel a kérdésekkel foglalkoztunk, először azonban az (1.13) – (1.16) előállítások egyértelműségét vizsgáljuk.

Az (1.1) egyenlet összes – az 1.3. illetve 1.6. Tételekben szereplő – megoldása

$$(x_1, \dots, x_M) \mapsto h\big(f_1(x_1) * \cdots * f_M(x_M)\big) \qquad \big((x_1, \dots, x_M) \in X_1 \times \cdots \times X_m\big) \tag{1.49}$$

alakú, ahol $f_j : X_j \to T$ szürjekció $(j = 1, \dots, M)$, $h : T \to Z$ bijekció, $(T, *)$ Abel csoport, Z pedig egy alkalmas halmaz (maga T az (1.13) – (1.14) esetben és ekkor h T identikus függvénye, és Y_j illetve Z_k az (1.15) illetve (1.16) esetben). Tegyük fel, hogy (1.1) valamely megoldása (a G, F_j, F, G_k függvények közül valamelyik) (1.49) és $(x_1, \dots, x_M) \mapsto \tilde{h}\big(\tilde{f}_1(x_1), \dots, \tilde{f}_M(x_M)\big)$, $(x_1, \dots, x_M) \in X_1 \times \cdots \times X_M$ alakú is. Ekkor

$$h(f_1(x_1) * \cdots * f_M(x_m)) = \tilde{h}\big(\tilde{f}_1(x_1) * \cdots * \tilde{f}_M(x_M)\big) \quad \big((x_1, \dots, x_M) \in X_1 \times \cdots \times X_M\big),$$

ami a $\Phi = \tilde{h}^{-1} \circ h$ definícióval

$$\Phi\big(f_1(x_1) * \cdots * f_M(x_M)\big) = \tilde{f}_1(x_1) * \cdots * \tilde{f}_M(x_M)$$

alakba írható. Erre az egyenletre alkalmazható az 1.1. Lemma $N = 1$, $E_j(x_1) = \tilde{f}_j(x_1)$ speciális esete, és ezért azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h(t) &= \tilde{h}\big(p(t) * d_1 * \cdots * d_M\big) \qquad (t \in T), \\ \tilde{f}_j(x_j) &= p \circ f_j(x_j) * d_j \quad (x_j \in X_j,\ j = 1, \ldots, M) \end{aligned}$$

valamely $p : T \to T$ automorfizmus és $d_j \in T$ esetén $(1 \le j \le M)$. Ez azt jelenti, hogy (1.1) megoldása (az 1.3. illetve 1.6. Tétel feltételei mellett) a $(T, *)$ csoport automorfizmusaitól és T-beli konstansoktól eltekintve egyértelmű.

Most rátérünk annak a vizsgálatára, hogy milyen következményei vannak az 1.3. illetve 1.6. Tételeknek abban a speciális esetben amikor az (1.1) egyenletben szereplő függvények valós értékűek és értelmezési tartományuk például pozitív hosszúságú valós intervallumok Descartes szorzata. Az 1.1. Tétel Aczél János (lásd [Acz48b], illetve [Acz66]-ban a 256–267 oldalakat, továbbá [Acz87]-ben a 107–122 oldalakat, valamint a Craigen-Páles [CP89] dolgozatot) alábbi tételével kapcsolható össze a valós esetben.

1.7 Tétel. ([Acz66]) *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ha $* : I \times I \to I$ folytonos és mindkét változójában szigorúan monoton, továbbá*

$$(x * y) * z = x * (y * z) \qquad (x, y, z \in I),$$

akkor van olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton folytonos függvény, hogy

$$x * y = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)) \qquad (x, y \in I).$$

Ezt alkalmazva a következő eredményre jutunk:

1.8 Tétel. ([AM96b]) *Legyenek $2 \le m$ és $2 \le n$ rögzített természetes számok, X_{jk} összefüggő topologikus terek, Y_j és Z_k valós számhalmazok, $G_k : X_{1k} \times \cdots \times X_{mk} \to Z_k$ és $F : Z_1 \times \cdots \times Z_n \to \mathbb{R}$ folytonos, nem-konstans függvények, $F_j : X_{j1} \times \cdots \times X_{jn} \to Y_j$, G_k erősen szürjektív, F és $G : Y_1 \times \cdots \times Y_m \to \mathbb{R}$ erősen injektív, G folytonos és tegyük fel, hogy (1.1) minden $x_{jk} \in X_{jk}$ $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ esetén fennáll. Ekkor $Z_1, \ldots, Z_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$, valamint $I = F(Z_1, \ldots, Z_n)$ nyílt intervallumok és vannak olyan folytonos $\beta_{jk} : X_{jk} \to \mathbb{R}$ szürjekciók és olyan $\alpha_k : Z_k \to \mathbb{R}$, $\gamma_j : Y_j \to \mathbb{R}$ és $\varphi : I \to \mathbb{R}$ homeomorfizmusok $(1 \le j \le m;\ 1 \le k \le n)$, hogy*

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(z_k)\right), \tag{1.50}$$

$$G(y_1, \ldots, y_m) = \varphi^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j(y_j)\right), \tag{1.51}$$

$$F_j(x_{j1}, \ldots, x_{jn}) = \gamma_j^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}(x_{jk})\right) \tag{1.52}$$

és

$$G_k(x_{1k},\dots,x_{mk})=\alpha_k^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_{jk}(x_{jk})\right) \tag{1.53}$$

fennáll minden $x_{jk}\in X_{jk}$, $y_j\in Y_j$ és $z_k\in Z_k$ esetén $(1\le j\le m;\ 1\le k\le n)$.

B i z o n y í t á s. A feltételek miatt Z_k és I intervallumok $(1\le k\le n)$, továbbá alkalmazható az 1.3. Tétel. Mivel a $h_k: Z_k\to I$ függvények (1.13)-ban bijekciók, vannak olyan $z_k^0\in Z_k$ elemek, hogy $h_k(z_k^0)=e$ $(1\le k\le n)$, ahol e az $(I,*)$ Abel csoport egységeleme. Ezért (1.13)-ból

$$h_k(z_k)=F(z_1^0,\dots,z_{k-1}^0,z_k,z_{k+1}^0,\dots,z_n^0)\quad (z_k\in Z_k)$$

következik, ami azt mutatja, hogy h_k folytonos bijekció a Z_k intervallumról az I intervallumra, ezért h_k szigorúan monoton homeomorfizmus $(1\le k\le n)$.

Szintén (1.13)-ból következik, hogy

$$h_1(z_1)*h_2(z_2)=F(z_1,z_2,z_3^0,\dots,z_n^0)\qquad ((z_1,z_2)\in Z_1\times Z_2),$$

azaz

$$t_1*t_2=F\big(h_1^{-1}(t_1),f_2^{-1}(t_2),z_3^0,\dots,z_n^0\big)\qquad ((t_1,t_2)\in I\times I).$$

Ezek szerint $*: I\times I\to I$ folytonos és mindkét változójában szigorúan monoton csoportművelet. Ezért alkalmazható az 1.7. Tétel, így

$$t_1*t_2=\varphi^{-1}\big(\varphi(t_1)+\varphi(t_2)\big)\qquad (t_1,t_2\in I) \tag{1.54}$$

valamilyen folytonos és szigorúan monoton $\varphi: I\to\mathbb{R}$ függvénnyel. Mivel azonban $(I,*)$ csoport φ csak bijekció és így homeomorfizmus lehet. Tehát $I=\varphi^{-1}(\mathbb{R})$ nyílt intervallum. Továbbá, minthogy az $f_{jk}: X_{jk}\to I$ függvények szürjekciók, $f_{jk}(x_{jk}^0)=e$ valamilyen $x_{jk}^0\in X_{jk}$ mellett $(1\le j\le m;\ 1\le k\le n)$, így (1.16)-ból

$$f_{jk}(x_{jk})=h_k\circ G_k\big(x_{1k}^0,\dots,x_{j-1,k}^0,x_{jk},x_{j+1,k}^0,\dots,x_{mk}^0\big)$$

következik, ami azt mutatja hogy az összes $f_{jk}: X_{jk}\to I$ szürjekció folytonos $(1\le j\le m;\ 1\le k\le n)$. Legyen ezek után $\alpha_k=\varphi\circ h_k$ Z_k-n, $\gamma_j=\varphi\circ g_j$ Y_j-n és $\beta_{jk}=\varphi\circ f_{jk}$ X_{jk}-n $(1\le j\le m;\ 1\le k\le n)$. Ekkor $\beta_{jk}: X_{jk}\to\mathbb{R}$ folytonos szürjekció, $\alpha_k: Z_k\to\mathbb{R}$ homeomorfizmus, így Z_k is nyílt intervallum, továbbá $\gamma_j: Y_j\to\mathbb{R}$ bijekció $(1\le j\le m;\ 1\le k\le n)$ és – (1.54) figyelembevételével – az (1.13) – (1.16) egyenlőségekből következnek a (1.50) – (1.53) egyenlőségek. Végül (1.51)-ből – mivel G folytonos – adódik hogy a γ_j bijekció is homeomorfizmus így $Y_j=\gamma_j^{-1}(\mathbb{R})$ is nyílt intervallum $(1\le j\le m)$. $\square$

Mint említettük, az

$$F(z_1,\dots,z_n)=az_1^{c_1}\dots z_n^{c_n}\qquad (z_k\in\,]0,+\infty[,\ 1\le k\le n)$$

($0 < a \in \mathbb{R}$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ún. CD (Cobb-Douglas) típusú termelési függvények minden változójukban erősen bijektívek ($]0,+\infty[$-re), így az előző tétel alapján meghatározhatók hozzájuk azok az aggregáló függvények, amelyekkel az aggregáció konzisztens, azaz fennáll (1.1) minden $x_{jk} \in]0,+\infty[$ esetén. A részletes számítások mellőzésével közöljük, hogy CD típusú F, F_j termelési függvényekhez csak CD típusú G, G_k aggregáló függvények jöhetnek szóba konzisztens aggregáció alkalmával.

A helyzet különbözik az

$$F(z_1, \dots, z_n) = a(c_1 z_1^b + \cdots + c_n z_n^b)^{1/b} \qquad (z_k \in]\,0,+\infty[\,,\ 1 \le k \le n) \tag{1.55}$$

($a, c_1, \dots, c_n \in]\,0,+\infty[\,$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) alakú ún. CES típusú termelési függvények esetében, mert ezek egyetlen változójukban sem gyengén szürjektívek. Ki lehet azonban terjeszteni az (1.55) szerint definiált F függvényt $\mathbb{R}^n$-re a következőképpen: legyen $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\varphi_b(z) = \begin{cases} z^b, & \text{ha } z \ge 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0 \\ -|z|^b, & \text{ha } z < 0 \end{cases}$$

és

$$\tilde{F}(z_1, \dots, z_n) = \varphi_b^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_b\big(a c_k^{1/b} z_k\big) \right) \qquad (z_k \in \mathbb{R},\ 1 \le k \le n). \tag{1.56}$$

Ha $b > 0$, akkor $\tilde{F}$ folytonos és minden változójában erősen bijektív ($\mathbb{R}$-re képez), így a 1.8. Tétel a $b > 0$ esetben alkalmas arra, hogy „kiterjesztett CES típusú" F, F_j termelési függvényekhez velük kompatibilis G, G_k aggregáló függvényeket szolgáltasson. A részletek elhagyásával közöljük, hogy a megfelelő aggregáló függvények $]0,+\infty[^n$-re való leszűkítései

$$\big(d_0 + d_1 x_1^{b_1} + \cdots + d_m x_m^{b_m}\big)^{1/b}$$

alakúak, ahol $d_0 \ge 0$, $d_1, \dots, d_m \in]\,0,+\infty[$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstansok. Azonban, ha $b < 0$, akkor $\tilde{F}$ nem folytonos, így az 1.8. Tétel közvetlenül nem alkalmazható. Ezért először az alábbi tételt igazoljuk.

1.9 Tétel. ([AM96b]) *Legyen $(T,*)$ Abel csoport , $T_0 \subset T$ intervallum, amely generálja T-t, azaz $T = \{x * y^{-1} : x \in T_0,\ y \in T_0\}$, legyen továbbá $(T_0,*)$ félcsoport és $*$ folytonos $T_0 \times T_0$-on. Ekkor van olyan $\Psi : T \to \mathbb{R}$ bijekció, amelynek a T_0-ra való leszűkítése folytonos és*

$$u * v = \Psi^{-1}(\Psi(u) + \Psi(v)) \qquad (u, v \in T). \tag{1.57}$$

Bizonyítás. Mivel a $(T_0,*)$ félcsoport a $(T,*)$ csoport része és $*$ folytonos $T_0 \times T_0$-on, ezért a 1.7. Tétel szerint (lásd még Craigen-Páles [CP89]-et is) van olyan $J = \langle c, +\infty[$ intervallum („$\langle$" azt jelzi, hogy J balról lehet nyílt is és zárt is) ahol $c = -\infty$ (ekkor azonban $J = \mathbb{R}$) vagy $0 \le c \in \mathbb{R}$ és van olyan $\Psi_0 : T_0 \to J$ folytonos bijekció, hogy

$$\Psi_0(x * y) = \Psi_0(x) + \Psi_0(y) \qquad (x, y \in T_0). \tag{1.58}$$

Nyilvánvalóan

$$\mathbb{R} = J - J = \Psi_0(T_0) - \Psi_0(T_0). \tag{1.59}$$

Mivel T_0 generálja T-t, minden $u \in T$ esetén van olyan x és y T_0-ban, hogy $u = x * y^{-1}$. Legyen $\Psi(u) = \Psi_0(x) - \Psi_0(y)$. Igazoljuk, hogy $\Psi : T \to \mathbb{R}$ függvény. Valóban, tegyük fel, hogy $u = x * y^{-1} = p * q^{-1}$ $(x, y, p, q \in T_0)$. Ekkor $x * q = p * y$, így (1.58) miatt $\Psi_0(x) + \Psi_0(q) = \Psi_0(p) + \Psi_0(y)$, amiből $\Psi_0(x) - \Psi_0(y) = \Psi_0(p) - \Psi_0(q)$ következik. Most megmutatjuk, hogy Ψ injektív. Legyen ugyanis $u, v \in T$, $u = x * y^{-1}$, $v = a * b^{-1}$ $(x, y, a, b \in T_0)$ és tegyük fel, hogy $\Psi(u) = \Psi(v)$. Ekkor Ψ definíciója miatt $\Psi_0(x) - \Psi_0(y) = \Psi_0(a) - \Psi_0(b)$, azaz $\Psi_0(x) + \Psi_0(b) = \Psi_0(a) + \Psi_0(y)$, ami (1.58) miatt úgy írható, hogy $\Psi_0(x*b) = \Psi_0(a*y)$. De $\Psi_0 : T_0 \to J$ bijektív, így $x*b = a*y$, amiből $u = x*y^{-1} = a*b^{-1} = v$ következik. Tehát Ψ injektív, sőt figyelembe véve a definícióját és (1.59)-et is, azt kapjuk, hogy $\Psi : T \to \mathbb{R}$ bijektív. Most megmutatjuk, hogy Ψ eleget tesz (1.57)-nek. Legyen ugyanis $u = x * y^{-1}$, $v = a * b^{-1} \in T$ $(x, y, a, b \in T_0)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \Psi(u * v) &= \Psi(x * y^{-1} * a * b^{-1}) = \Psi(x * a * (y * b^{-1}) \\ &= \Psi_0(x * a) - \Psi_0(y * b) = \Psi_0(x) - \Psi_0(y) + \Psi_0(a) - \Psi_0(b) \\ &= \Psi(u) + \Psi(v). \end{aligned}$$

Végül igazoljuk, hogy Ψ leszűkítése T_0-ra a folytonos Ψ_0 függvény. Valóban, legyen $u = x * y^{-1} \in T_0$ $(x, y \in T_0)$. Ekkor $u * y = x$, ezért $\Psi_0(x) = \Psi_0(u * y) = \Psi_0(u) + \Psi_0(y)$, azaz $\Psi_0(u) = \Psi_0(x) - \Psi_0(y) = \Psi(u)$. □

Megjegyezzük, hogy előfordulhat olyan eset, amikor $T \not\subset \mathbb{R}$ de van olyan $T_0 \subset T$ intervallum, amely generálja T-t. Például (lásd Aczél-Maksa-Taylor [AMT97]) legyen $T = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{t + \pi i : t \in \mathbb{R}\}$ és

$$u * v = \log(e^u + e^v) \qquad (u, v \in T),$$

ahol log a komplex exponenciális függvény $\{t + si : t \in \mathbb{R},\ s \in [0, 2\pi[\,\}$ halmazra való leszűkítésének az inverze, $e^{-\infty} = 0$, $\log 0 = -\infty$ definíció szerint. Ekkor $(T, *)$ Abel csoport, $-\infty$ az egységelem, $t \in \mathbb{R}$ és $t + \pi i$ egymás inverzei. Ezt a csoportot generálja az $(\mathbb{R}, *)$ félcsoport és $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos. Természetesen az is előfordulhat (mint például a kiterjesztett CES függvények esetében, ha $b < 0$), hogy T intervallum, de a folytonosság csak egy $T_0 \subsetneqq T$ intervallumon garantált.

Összekapcsolva az 1.9. Tételt az 1.6. Tétellel olyan eredményhez jutunk, amely alkalmazható a kiterjesztett CES függvényekre a $b < 0$ esetben is. Az 1.6. Tétel feltételeit az alábbi (A) feltételrendszerrel egészítjük ki: legyenek $2 \le n \in \mathbb{N}$, $Z_1, \ldots, Z_n$ halmazok, $F : Z_1 \times \cdots \times Z_n \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy van olyan $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, $k < \ell$, továbbá vannak olyan $a_p \in Z_p$ $(1 \le p \le n)$ elemek és olyan $Z_{k0} \subset Z_k$, $Z_{\ell 0} \subset Z_\ell$ intervallumok, hogy az

$$F^p(z) = F(a_1, \ldots, a_{p-1}, z, a_{p+1}, \ldots, a_n), \quad z \in Z_p \quad (1 \le p \le n)$$

és az

$$F^{k\ell}(s, t) = F(a_1, \ldots, a_{k-1}, s, a_{k+1}, \ldots, a_{\ell-1}, t, a_{\ell+1}, \ldots, a_n) \qquad ((s, t) \in Z_k \times Z_\ell)$$

módon definiált F^p és $F^{k\ell}$ függvényekre teljesül, hogy

(a) $F^k(Z_{k0}) = F^\ell(Z_{\ell 0})$,

(b) $F^{k\ell}(Z_{k0}, Z_{\ell 0}) \subset F^k(Z_{k0})$,

(c) minden $s \in Z_k$ esetén vannak olyan $w, w' \in Z_{\ell 0}$ elemek, hogy $F^{k\ell}(s, w) = F^\ell(w')$ és

(d) $F^{k\ell}$ folytonos $Z_{k0} \times Z_{\ell 0}$-on.

Megjegyezzük, hogy az (A) feltételrendszer teljesül a kiterjesztett CES függvényekre ($Z_1 = \cdots = Z_n = \mathbb{R}$, $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, $k < \ell$ tetszőleges $a_p = 0$, $p = 1, \ldots, n$, $Z_{k0} = Z_{\ell 0} = \,]\,0, +\infty[\,$.) Ezek után igazoljuk az alábbi tételt:

1.10 Tétel. ([AMT97]) *Legyenek $2 \le m$ és $2 \le n$ rögzített természetes számok, $\emptyset \ne X_{jp}, Y_j$ és Z_p halmazok,*

$$F_j : X_{j1} \times \cdots \times X_{jn} \to Y_j, \;\; G_p : X_{1p} \times \cdots \times X_{mp} \to Z_p,$$

$$F : Z_1 \times \cdots \times Z_n \to \mathbb{R} \quad \textit{és} \quad G : Y_1 \times \cdots \times Y_m \to \mathbb{R}$$

függvények ($j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$). Ha minden F_j és G_p függvénynek van elérhető eleme Y_j-ben illetve Z_p-ben, F_j és G_p gyengén szürjektív valamelyik változójában ($j = 1, \ldots, m$; $p = 1, \ldots, n$), F és G erősen injektív minden változójában, F-re teljesül az (A) feltételrendszer, továbbá (1.1) fennáll minden $x_{jp} \in X_{jp}$ esetén ($j = 1, \ldots, m$; $p = 1, \ldots, n$), akkor fennáll (1.50) – (1.53) is, ahol $\beta_{jp} : X_{jp} \to \mathbb{R}$ szürjekció, $\gamma_j : Y_j \to \mathbb{R}$, $\alpha_p : Z_p \to \mathbb{R}$ és $\varphi : T \to \mathbb{R}$ bijekciók ($j = 1, \ldots, m$; $p = 1, \ldots, n$), $T = F(Z_1, \ldots, Z_n) \subset \mathbb{R}$ továbbá van olyan $T_0 \subset T$ intervallum, hogy $\alpha_k \,|\, Z_{k0}$, $\alpha_\ell \,|\, Z_{\ell 0}$, $\varphi \,|\, T_0$ és $\varphi^{-1} \,|\, \varphi(T_0)$ folytonos és szigorúan monoton.

B i z o n y í t á s. Az 1.6. Tétel miatt van olyan $(T, *)$ Abel csoport, hogy $T = F(Z_1, \ldots, Z_n) \subset \mathbb{R}$ és vannak olyan $h_p : Z_p \to \mathbb{R}$ bijekciók ($p = 1, \ldots, n$), melyekre teljesül (többek között), hogy

$$F(z_1, \ldots, z_n) = h_1(z_1) * \cdots * h_n(z_n) \quad (z_p \in Z_p,\; p = 1, \ldots, n). \tag{1.13}$$

A $\tilde{h}_p(z) = h_p(z) * h_p(a_p)^{-1}$, $z \in Z_p$ módon definiált $h_p : Z_p \to T$ függvények (ahol a_p létezése az (A) feltételrendszerben szerepel) ($1 \le p \le n$) szintén bijekciók, de rájuk még az is teljesül, hogy $\tilde{h}_p(a_p) = e$ (az e elem $(T, *)$ egységeleme). Így (1.13)-ból azt kapjuk, hogy

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \tilde{h}_1(z_1) * \cdots * \tilde{h}_n(z_n) * c, \tag{1.60}$$

ahol $c = h_1(a_1) * \cdots * h_n(a_n) = F(a_1, \ldots, a_n)$. Nyilvánvaló, hogy

$$F^p(z) = \tilde{h}_p(z) * c \quad \text{és} \quad F^{k\ell}(s, t) = \tilde{h}_k(s) * \tilde{h}_\ell(t) * c \tag{1.61}$$

($z \in Z_p$, $s \in Z_k$, $t \in Z_\ell$, $1 \le p \le n$). Ezért (A)-ból az (a) feltétel azt jelenti, hogy $\tilde{h}_k(Z_{k0}) = \tilde{h}_\ell(Z_{\ell 0})$. Jelöljük T-nek ezt a részhalmazát $\tilde{T}$-mal, azaz legyen

$$\tilde{T} = \tilde{h}_k(Z_{k0}) = \tilde{h}_\ell(Z_{\ell 0}). \tag{1.62}$$

Mivel a $\tilde{h}_p : Z_p \to T$ függvények bijekciók $(1 \le p \le n)$, ezért a $\tilde{h}_k \,|\, Z_{k0}$ és $\tilde{h}_\ell \,|\, Z_{\ell 0}$ függvények is bijekciók Z_{k0}-ról illetve $Z_{\ell 0}$-ról $\tilde{T}$-ra. Igazolni fogjuk, hogy $\tilde{T} \subset T$ generálja T-t. Valóban, mivel $\tilde{h}_k : Z_k \to T$ bijekció, tetszőleges $t \in T$-hez van olyan $s \in Z_k$, hogy $t = \tilde{h}_k(s)$. Alkalmazzuk (A) (c) feltételét erre az s-re: van olyan $w, w' \in Z_{\ell 0}$, hogy $F^{k\ell}(s,w) = F^\ell(w')$ és így (1.61) szerint $\tilde{h}_k(s) * \tilde{h}_\ell(w) = \tilde{h}_\ell(w')$, azaz $t = \tilde{h}_k(s) = \tilde{h}_\ell(w') * \tilde{h}_\ell(w)^{-1} \in \tilde{T} * \tilde{T}^{-1}$. Vezessük be $*$ helyett a $\odot$ műveletet az alábbi definícióval:

$$u \odot v = u * v * c^{-1} \qquad (u, v \in T).$$

Nyilvánvaló, hogy ekkor $(T, \odot)$ is Abel csoport, amelynek c az egységeleme ($u \odot c = u * c * c^{-1} = u$), de az elemek inverze ugyanaz, mint $(T, *)$-ban volt: $u^{-1} \odot u = u^{-1} * u * c^{-1} = c^{-1} = c$ $(u \in T)$. Most azt vizsgáljuk meg, hogy hol folytonos $\odot$. (1.61)-ből

$$F^{k\ell}(s,t) = F^k(s) \odot F^\ell(t) \qquad \big((s,t) \in Z_{k0} \times Z_{\ell 0}\big) \tag{1.63}$$

következik. (A) (d) feltétele valamint (1.61) és (1.62) miatt $F^{k\ell}$ valamint az $F^r : Z_{r0} \to \tilde{h}_r(Z_{r0}) * c = \tilde{T} * c =: T_0$ bijekciók ($r = k$ vagy $r = \ell$) folytonosak $Z_{k0} \times Z_{\ell 0}$-on illetve Z_{r0}-on ($r = k$ vagy $r = \ell$). Ezért T_0 is intervallum és az F^k, F^ℓ függvények szigorúan monoton homeomorfizmusok Z_{k0}-ról illetve $Z_{\ell 0}$-ról T_0-ra. Ezért (1.63)-ból

$$u \odot v = F^{k\ell}\big((F^k)^{-1}(u), (F^\ell)^{-1}(v)\big) \qquad \big((u,v) \in T_0 \times T_0\big),$$

ami azt mutatja, hogy $\odot$ folytonos $T_0 \times T_0$-on. $(T_0, \odot)$ is Abel félcsoport, ugyanis ha $u, v \in T_0$, akkor $u = \xi * c$, $v = \eta * c$ valamilyen $\xi, \eta \in \tilde{T}$ mellett, így $u \odot v = (\xi * c) * (\eta * c) * c^{-1} = \xi * \eta * c \in \tilde{T} * c = T_0$. Másrészt $\odot$ kommutativitása és asszociativitása $*$-ából következik. Most igazoljuk, hogy T_0 generálja $(T, \odot)$-t. Valóban, mivel az inverz ugyanaz $(T, \odot)$-ban mint $(T, *)$-ban, azt kell igazolnunk, hogy $T = T_0 \odot T_0^{-1}$. Ez pedig igaz, mert minden $t \in T$ esetén van olyan $u, v \in \tilde{T}$, hogy $t * c = u * v^{-1}$ (mert $(\tilde{T}, *)$ generálja $(T, *)$-ot), így

$$\begin{aligned} t &= u * v^{-1} * c^{-1} = (u * c) * (v * c)^{-1} * c^{-1} \\ &= (u * c) \odot (v * c)^{-1} \in (\tilde{T} * c) \odot (\tilde{T} * c)^{-1} = T_0 \odot T_0^{-1}. \end{aligned}$$

Most már alkalmazható az 1.9. Tétel a $(T, \odot)$ Abel csoportra és a $T_0 = \tilde{T} * c \subset T$ félcsoportra: van olyan $\Psi : T \to \mathbb{R}$ bijekció, amelynek a T_0-ra való leszűkítése folytonos és amellyel

$$u \odot v = \Psi^{-1}(\Psi(u) + \Psi(v)) \qquad (u, v \in T)$$

teljesül, azaz $\Psi(u * v * c^{-1}) = \Psi(u) + \Psi(v)$. Definiáljuk a $\varphi : T \to \mathbb{R}$ függvényt a $\varphi(t) = \Psi(t * c)$, $t \in T$ képlettel. Ekkor φ bijekció és

$$u * v = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \qquad (u, v \in T) \tag{1.64}$$

adódik. Mivel $\varphi(e) = 0$, ezért $\varphi(v^{-1}) = -\varphi(v)$ és így

$$\Psi(u) = \varphi(u * c^{-1}) = \varphi(u) - \varphi(c) \qquad (u \in T), \tag{1.65}$$

ezért $\varphi\,|\,T_0$ is folytonos, $\varphi(T_0)$ pedig intervallum tehát $\varphi\,|\,T_0$ és $\varphi^{-1}\,|\,\varphi(T_0)$ szigorúan monoton folytonos függvények. Ezek után (1.59)-ből, (1.64)-ből és (1.61)-ből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(z_1,\dots,z_n) &= \varphi^{-1}\left(\sum_{p=1}^{n}\varphi\circ\tilde{h}_p(z_p)+\varphi(c)\right)\\ &= \varphi^{-1}\left(\sum_{p=1}^{n}\varphi\big(\tilde{h}_p(z_p)*c\big)+(1-n)\varphi(c)\right)\\ &= \varphi^{-1}\left(\sum_{p=1}^{n}\varphi\circ F^p(z_p)+(1-n)\varphi(c)\right)\\ &= \varphi^{-1}\left(\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(z_p)\right), \end{aligned}$$

azaz az

$$(1.66)\qquad \alpha_p(z_p)=\varphi\circ F^p(z_p)+\frac{1-n}{n}\varphi(c)\qquad (z_p\in Z_p,\ p=1,\dots,n)$$

definícióval megkapjuk F (3.2) alakját. Ebből, valamint (A) (d) feltételéből következik, hogy α_k és α_ℓ folytonosak a Z_{k0} illetve $Z_{\ell 0}$ halmazokon. Másrészt F^r bijekció, a Z_{r0} és $F^r(Z_{r0})=T_0$ halmazok intervallumok, ha $r=k$ vagy $r=\ell$, így (1.66) szerint $\alpha_k\,|\,Z_{k0}$ és $\alpha_\ell\,|\,Z_{\ell 0}$ folytonos, szigorúan monoton függvények. Tekintettel az (1.14) – (1.16) egyenlőségekre és az (1.64) előállításra, az (1.51) – (1.53) egyenlőségek is megkaphatók a bennük szereplő $\beta_{jp}:X_{jp}\to\mathbb{R}$ szürjekciók valamint a $\gamma_j:Y_j\to\mathbb{R}$ és $\alpha_p:Z_p\to\mathbb{R}$ bijekciók alkalmas definiálásával ($j=1,\dots,m$; $p=1,\dots,m$). $\square$

Az előző tételben azt tettük csak fel, hogy az (A) feltételrendszer egy rögzített $(k,\ell)\in\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$ $(k<\ell)$ párra áll fenn. Ha ehelyett (A) fennállását minden (k,ℓ) pára feltesszük, akkor $\alpha_k\,|\,Z_{k0}$ minden $k\in\{1,\dots,n\}$ esetén szigorúan monoton és folytonos. Továbbá, ha vannak olyan Y_{j0}, X_{jk0} részhalmazai Y_j-nek illetve X_{jk}-nak, amelyek topologikus terek és amelyekre a $G\,|\,Y_{10}\times\cdots\times Y_{m0}$, $F_j\,|\,X_{j10}\times\cdots\times X_{jn0}$ és $G_n\,|\,X_{1k0}\times\cdots\times X_{mk0}$ függvények folytonosak, akkor a $\gamma_j\,|\,Y_{j0}$ és $\beta_{jk}\,|\,X_{jk0}$ leszűkítések is folytonosak ($j=1,\dots,m$; $k=1,\dots,n$). Ezek az állítások az előző tétel bizonyításából és (1.14)-ből következnek. Ez az eredmény már alkalmas arra, hogy segítségével a kiterjesztett CES típusú F, F_j termelési függvényekhez meg lehessen határozni a velük kompatibilis G, G_k aggregáló függvényeket. A részletek elhagyásával megjegyezzük, hogy a megfelelő aggregáló függvények

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto\varphi_b^{-1}(d_0+d_1\varphi_{b_1}(x_1)+\cdots+d_n\varphi_{b_n}(x_n)),\qquad ((x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n)$$

alakúak, ahol $d_0\in\mathbb{R}$, $b,d_k,b_k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $k=1,\dots,n$, $\varphi_c(z)=|z|^c\operatorname{sgn} z$, $z\in\mathbb{R}$, ha $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Előfordulhat – egyebek között – az a vegyes eset is, hogy F CD típusú de az összes F_j CES típusú. Ezt az esetet az eddigi eredményeink alapján még nem tudjuk kezelni, de a 4. fejezetben visszatérünk rá.

2 Kvázi-összegek

Sierpiński [Sie34], [Sie58] az elsők között foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy ,,ki lehet-e fejezni" többváltozós függvényeket kevesebb változós függvényekkel. Híres észrevétele szerint van két olyan függvény $\alpha : X \to \mathbb{R}$ és $\beta : Y \to \mathbb{R}$, hogy minden $Q : X \times Y \to \mathbb{R}$ függvény alkalmas γ függvénnyel

$$Q(x, y) = \gamma(\alpha(x) + \beta(y)) \qquad ((x, y) \in X \times Y) \tag{2.1}$$

alakban áll elő. Itt X és Y $\mathbb{R}$ nem-üres részhalmazai. Hilbert [Hil00] 13. problémájában megfogalmazta azt a sejtését, hogy nem minden folytonos (analitikus) háromváltozós függvény áll elő kétváltozós folytonos függvények összetételeként. Arnold ([Arn63]) cáfolta ezt a sejtést, Kolmogorov [Kol63] pedig megmutatta, hogy minden n-változós folytonos függvény egyváltozós folytonos függvényekkel az összeadás és az összetett függvény-képzés segítségével kifejezhető. Speciálisan, a $[0, 1]^2$-en folytonos valós értékű függvények előállnak legfeljebb öt (2.1) alakú Q függvény összegeként, ahol $\alpha, \beta : [0, 1] \to \mathbb{R}$ és $\gamma : \alpha([0, 1]) + \beta([0, 1]) \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. A 3. fejezetben látni fogjuk, hogy ebben az összegben a tagok száma a minimálisra (1-re) redukálható az asszociatív függvények esetén. Pontosabban, mindazok a folytonos és mindkét változójukban szigorúan monoton F, G, H, K függvények, amelyekre teljesül, hogy

$$F(G(x, y), z) = H(x, K(y, z)), \tag{2.2}$$

(2.1) alakúak, szigorúan monoton és folytonos egyváltozós α, β, γ függvényekkel. A (2.2) egyenletről a 3. fejezetben részletesen írunk, itt csak azt jegyezzük meg, hogy számunkra ez az egyenlet motiválta a kvázi-összegek ((2.1) alakú Q függvények) vizsgálatát.

A továbbiakban *intervallumokon* $\mathbb{R}$ pozitív hosszúságú részintervallumait, *téglalapon* pedig két intervallum Descartes szorzatát értjük. Ennek a fejezetnek az első három részében X, Y és R végig intervallumokat illetve téglalapot jelöl. *CM függvényeknek* azokat a valós értékű függvényeket nevezzük, amelyek intervallumon vagy véges sok intervallum Descartes szorzatán vannak értelmezve, folytonosak és minden változójukban szigorúan monotonak (nem szükségképpen ugyanabban az értelemben). Legyen $X \times Y \subset R$. Azt mondjuk, hogy egy $Q : R \to \mathbb{R}$ függvény *kvázi-összeg* az $X \times Y$ téglalapon, ha vannak olyan $\alpha : X \to \mathbb{R}$, $\beta : Y \to \mathbb{R}$ és $\gamma : \alpha(X) + \beta(Y) \to \mathbb{R}$ CM függvények, hogy

$$Q(x, y) = \gamma(\alpha(x) + \beta(y)) \qquad ((x, y) \in X \times Y) \tag{2.1}$$

teljesül. Az (α, β, γ) hármas egy *generátora* Q-nak $X \times Y$-on. Azt mondjuk továbbá, hogy Q *lokális kvázi-összeg* $X \times Y$-on, ha minden $(x_0, y_0) \in X \times Y$ esetén van olyan $(x_0, y_0) \in R_0$ nyílt téglalap, hogy Q kvázi-összeg az $(X \times Y) \cap R_0$ téglalapon.

A kvázi-összeg (quasisum) elnevezés Aczél Jánostól [Acz50] származik, lehet, hogy helyesebb lenne a ,,kvázi-összeadás" kifejezést használni helyette, de már a ,,kvázi-összeg" vált megszokottá, ezért nem változtatunk rajta.

A fejezet fő eredménye az, hogy mindazok a függvények, amelyek egy téglalapon lokális kvázi-összegek, kvázi-összegek is azon a téglalapon. A 3. fejezetben látni fogjuk, hogy (2.2) CM megoldásai (olyan megoldásai, amelyek CM függvények) kvázi-összegek. Fontos példa kvázi-összegre az

$$M(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \qquad (x,y \in I)$$

módon definiált *kvázi-aritmetikai középérték*, ahol $\varphi : I \to \mathbb{R}$ CM függvény (lásd Aczél [Acz66], Hardy-Littlewood-Pólya [HLP34]). Természetesen vannak olyan CM függvények is, amelyek nem kvázi-összegek. Például, ha a $Q(x,y) = x + xy + y^2$ $(x \geq 0,$ $y \geq 0)$ függvény kvázi-összeg lenne az $R = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$ téglalapon, (ahol egyébként CM függvény), akkor lennének olyan $\alpha, \beta, f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ CM függvények, amelyekre

$$f(x + xy + y^2) = \alpha(x) + \beta(y) \qquad (x \geq 0,\ y \geq 0)$$

teljesülne. Mivel az $y = 0$ illetve $x = 0$ helyettesítések után α illetve β kifejezhető f-fel, így azt kapnánk, hogy

$$f(x + xy + y^2) = f(x) - \beta(0) + f(y^2) - \alpha(0),$$

azaz

$$f(x + x\sqrt{y} + y) = f(x) + f(y) - f(0) \qquad (x \geq 0,\ y \geq 0).$$

Innen a jobboldal szimmetriájából és f injektivitásából az $(x,y) \mapsto x + x\sqrt{y} + y$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ függvény szimmetrikussága következne, ami lehetetlen. Nem annyira egyszerű példa olyan (ráadásul szimmetrikus) CM függvényre, amely nem kvázi-összeg a nevezetes Gauss-féle

$$M(x,y) = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2 t + y^2\sin^2 t}}\right)^{-1} \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

számtani-mértani közép. Könnyen látható ugyanis, hogy ha M kvázi-összeg lenne, akkor egyúttal kvázi-aritmetikai középérték is lenne, de Daróczy-Maksa-Páles [DMP, Corollary 2.2.] szerint ez lehetetlen.

E fejezet első, előkészítő részében a CM függvények néhány – a későbbiekben felhasználásra kerülő – tulajdonságával foglalkozunk. A második részben illesztési eredményeket igazolunk kvázi-összegekre és itt bizonyítjuk azt is, hogy a lokális kvázi-összegek „globálisak” is. A harmadik rész ennek néhány egyszerű alkalmazását tartalmazza. Végül – az utolsó két részben – speciális kvázi-összegekkel foglalkozunk. Az első négy rész eredményei Maksa [Mak04]-ben, Maksa [Mak99]-ben, Maksa [Mak00]-ban, valamint Daróczy-Maksa-Páles [DMP04]-ben jelentek meg, míg az ötödik rész eredményei Járai-Maksa-Páles [JMP]-ben várnak publikálásra.

2.1 A CM függvények néhány tulajdonsága

Először az egyváltozós CM függvények alábbi tulajdonságát bizonyítjuk.

2.1 Lemma. ([Mak04]) *Legyenek X, Y_1 és Y_2 intervallumok, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ és $\alpha : X \to \mathbb{R}$, $\beta : Y_1 \cup Y_2 \to \mathbb{R}$ CM függvények. Ekkor*

$$\alpha(X) + \beta(Y_1 \cap Y_2) = (\alpha(X) + \beta(Y_1)) \cap (\alpha(X) + \beta(Y_2)). \tag{2.3}$$

B i z o n y í t á s. Mivel a „$\subset$” irányú tartalmazás az egyenlőség két oldala között nyilvánvaló, csak a fordított tartalmazást bizonyítjuk. Legyen $\xi \in (\alpha(X) + \beta(Y_1)) \cap (\alpha(X) + \beta(Y_2))$. Ekkor alkalmas $x_1, x_2 \in X$, $y_1 \in Y_1$ és $y_2 \in Y_2$ számokkal

$$\xi = \alpha(x_1) + \beta(y_1) = \alpha(x_2) + \beta(y_2). \tag{2.4}$$

Ha y_1 vagy y_2 benne van $Y_1 \cap Y_2$-ben, akkor véget is ér a bizonyítás. Ezért tegyük fel, hogy $y_1 \in Y_1 \setminus Y_2$, $y_2 \in Y_2 \setminus Y_1$ és legyen $y_0 \in Y_1 \cap Y_2$ rögzített. Mivel β szigorúan monoton $\beta(y_0)$ a $\beta(y_1)$ és $\beta(y_2)$ számok között van, ezért

$$\beta(y_0) = \lambda\beta(y_1) + (1-\lambda)\beta(y_2) \tag{2.5}$$

valamilyen $0 < \lambda < 1$ mellett. Másrészt a $\lambda\alpha(x_1) + (1-\lambda)\alpha(x_2)$ szám $\alpha(x_1)$ és $\alpha(x_2)$ között van, így – α folytonossága miatt –

$$\lambda\alpha(x_1) + (1-\lambda)\alpha(x_2) = \alpha(x_0) \tag{2.6}$$

valamely $x_0 \in X$ esetén. Ezek után (2.4)-ből, (2.6)-ból és (2.5)-ből

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda\xi + (1-\lambda)\xi = \lambda(\alpha(x_1) + \beta(y_1)) + (1-\lambda)(\alpha(x_2) + \beta(y_2)) \\ &= \lambda\alpha(x_1) + (1-\lambda)\alpha(x_2) + \lambda\beta(y_1) + (1-\lambda)\beta(y_2) \\ &= \alpha(x_0) + \beta(y_0) \end{aligned}$$

következik, ezért $\xi \in \alpha(X) + \beta(Y_1 \cap Y_2)$. □

Ebben a fejezetben és a 3. fejezetben is gyakran fogjuk használni – többnyire explicit hivatkozás nélkül – a kétváltozós CM függvények alábbi tulajdonságát. A bizonyítás alapgondolata [Acz66]-ban (255. oldal) megtalálható.

2.2 Lemma. ([Mak04]) *Legyen $Q : X \times Y \to \mathbb{R}$ CM függvény. Ekkor,*

(a) *ha $Q(\cdot, y_0)$ szigorúan növekvő (illetve csökkenő) valamilyen $y_0 \in Y$ mellett, akkor $Q(\cdot, y)$ is szigorúan növekvő (illetve csökkenő) bármely $y \in Y$ mellet, és hasonlóan,*

(b) *ha $Q(x_0, \cdot)$ szigorúan növekvő (illetve csökkenő) valamilyen $x_0 \in X$ mellett, akkor $Q(x, \cdot)$ is szigorúan növekvő (illetve csökkenő) bármely $x \in X$ mellett.*

B i z o n y í t á s. Tegyük fel például, hogy $Q(\cdot, y_0)$ szigorúan növekvő de $Q(\cdot, y_1)$ szigorúan csökkenő valamilyen rögzített $y_0, y_1 \in Y$ esetén. Legyen $x_1, x_2 \in X$ és $x_1 < x_2$. Ekkor

$$Q(x_1, y_0) - Q(x_2, y_0) < 0 \quad \text{és} \quad Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_1) > 0.$$

Ezért a folytonosság miatt $Q(x_1, y_2) - Q(x_2, y_2) = 0$ valamilyen – y_0 és y_1 közötti – y_2 számra, ami ellentmond annak, hogy $Q(\cdot, y_2)$ szigorúan monoton. A lemma többi állítását hasonlóan lehet igazolni. □

A következő lemmában, és a disszertációban máshol is, A°-rel jelöljük az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz belső pontjainak halmazát (nyílt magját).

2.3 LEMMA. ([Mak04]) *Legyen $Q : X \times Y \to \mathbb{R}$ CM függvény. Ekkor*

$$Q(X, Y^\circ) = Q(X^\circ, Y) = Q(X^\circ, Y^\circ) = Q(X, Y)^\circ.$$

B i z o n y í t á s. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy Q mindkét változójában szigorúan monoton növekvő. Ha például Q az első változójában szigorúan növekvő, a másodikban pedig szigorúan csökkenő lenne, akkor a $Q_1(x, y) = Q(x, -y)$, $x \in X$, $y \in -Y$ függvénnyel dolgoznánk Q helyett (lásd a 2.2. Lemmát is). Először azt igazoljuk, hogy

$$Q(X, Y^\circ) \subset Q(X^\circ, Y^\circ). \tag{2.7}$$

Legyen $(x^*, y) \in X \times Y^\circ$. Ha $x^* \in X^\circ$, akkor nyilvánvaló, hogy $Q(x^*, y) \in Q(X^\circ, Y^\circ)$. Ha $x^* \in X \setminus X^\circ$, akkor két esetet különböztetünk meg:

1. eset: $x^* = \min X$.
Ebben az esetben válasszunk olyan $y_1 \in Y^\circ$ elemet, hogy $y_1 < y$ és legyen $\varepsilon = Q(x^*, y) - Q(x^*, y_1)$. Ekkor $\varepsilon > 0$ és – Q folytonossága miatt – van olyan $(x_1, y) \in X^\circ \times Y^\circ$ hogy

$$Q(x_1, y) - Q(x^*, y) < \varepsilon = Q(x^*, y) - Q(x^*, y_1),$$

azaz

$$\frac{Q(x_1, y) + Q(x^*, y_1)}{2} < Q(x^*, y). \tag{2.8}$$

Definiáljuk a $q : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$q(t) = Q((1-t)x_1 + tx^*,\ (1-t)y + ty_1) \qquad (t \in [0, 1])$$

képlettel. Ekkor q folytonos, így

$$q(t_0) = \frac{q(0) + q(1)}{2} = \frac{Q(x_1, y) + Q(x^*, y_1)}{2}. \tag{2.9}$$

valamely $t_0 \in [0, 1]$ esetén. Ha $t_0 \in \{0, 1\}$, akkor $q(0) = q(1)$, ezért (2.8) miatt $Q(x_1, y) < Q(x^*, y)$. Ez azonban ellentmond annak, hogy $x^* = \min X$ és $Q(\cdot, y)$ szigorúan növekvő. Ezért $t_0 \in\,]0, 1[$ és így $((1-t_0)x_1 + t_0x^*, (1-t_0)y + t_0y_1) \in X^\circ \times Y^\circ$, továbbá (2.8)-ból és (2.9)-ből azt kapjuk, hogy

$$Q((1-t_0)x_1 + t_0x^*, (1-t_0)y + t_0y_1) < Q(x^*, y).$$

Másrészt pedig $Q(x^*, y) < Q(x_2, y)$, ha $x^* < x_2 \in X$. Tehát Q felvesz $Q(x^*, y)$-tól kisebb és nagyobb értéket is $X^\circ \times Y^\circ$-on, amiből $Q(x^*, y) \in Q(X^\circ, Y^\circ)$ következik. Így fennáll (2.7) ebben az esetben.

2. eset: $x^* = \max X$.
A gondolatmenet hasonló az előzőhöz: először válasszunk egy $y < y_2 \in Y^\circ$ elemet és

legyen $\varepsilon = Q(x^*, y_2) - Q(x^*, y)$. Ezután válasszunk olyan $x_1 \in X^\circ$ elemet (a folytonosság miatt lehet), hogy $Q(x^*, y) - Q(x_1, y) < \varepsilon = Q(x^*, y_2) - Q(x^*, y)$, azaz

$$Q(x^*, y) < \frac{Q(x_1, y) + Q(x^*, y_2)}{2}$$

teljesüljön. Követve az 1. esetben használt gondolatmenetet, ismét azt kapjuk, hogy Q felvesz $Q(x^*, y)$-tól nagyobb és kisebb értéket is $X^\circ \times Y^\circ$-on, tehát $Q(x^*, y) \in Q(X^\circ, Y^\circ)$. Így tehát (2.7) fennáll. Mivel a $Q(X^\circ, Y^\circ) \subset Q(X, Y^\circ)$ tartalmazás nyilvánvaló, azt kapjuk, hogy

$$Q(X, Y^\circ) = Q(X^\circ, Y^\circ). \tag{2.10}$$

Felcserélve a változók szerepét az előző gondolatmenetben, megkapjuk a

$$Q(X^\circ, Y) = Q(X^\circ, Y^\circ) \tag{2.11}$$

egyenlőséget is. Hátramaradt még a

$$Q(X^\circ, Y^\circ) = Q(X, Y)^\circ \tag{2.12}$$

egyenlőség igazolása. A $Q(X^\circ, Y^\circ) \subset Q(X, Y)^\circ$ tartalmazás nyilvánvaló, ezért csak a fordított irányú tartalmazást bizonyítjuk. Legyen ezért $z \in Q(X, Y)^\circ$, $z = Q(x^*, y^*)$ valamely $(x^*, y^*) \in X \times Y$ esetén. Ha $y^* \in Y^\circ$ vagy $x^* \in X^\circ$, akkor (2.10) vagy (2.11) szerint $z \in Q(X^\circ, Y^\circ)$. Ha pedig $x^* \in X \setminus X^\circ$ és $y^* \in Y \setminus Y^\circ$, akkor vagy

$$x^* = \min X \quad \text{és} \quad y^* = \max Y \tag{2.13}$$

vagy

$$x^* = \max X \quad \text{és} \quad y^* = \min Y, \tag{2.14}$$

egyébként ugyanis z nem lehetne $Q(X, Y)^\circ$-ban. Ha (2.13) teljesül, akkor

$$Q(x^*, y') < z = Q(x^*, y^*) < Q(x', y^*),$$

ha pedig (2.14), akkor

$$Q(x'', y^*) < z = Q(x^*, y^*) < Q(x^*, y'')$$

valamilyen $x', x'' \in X^\circ$ és $y', y'' \in Y^\circ$ mellett. Így (2.10) és (2.11) szerint $Q(x^*, y')$, $Q(x', y^*)$, $Q(x'', y^*)$ és $Q(x^*, y'')$ Q-nak $X^\circ \times Y^\circ$-on is felvett értékei, így $z \in Q(X^\circ, Y^\circ)$. $\square$

Végül ebben a részben igazoljuk az alábbi kiterjesztési tételt, amely szerint, ha értelmezési tartománya belsején kvázi-összeg egy CM függvény, akkor kvázi-összeg az egész értelmezési tartományán is, mert a generátorát alkotó függvények értelmezése alkalmasan kiterjeszthető a határpontokra.

2.4 Tétel. ([Mak04]) *Legyen a $Q : X \times Y \to \mathbb{R}$ CM függvény kvázi-összeg az $X^\circ \times Y^\circ$ téglalapon és legyen $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ Q egy generátora $X^\circ \times Y^\circ$-on. Ekkor Q kvázi-összeg $X \times Y$-on, sőt Q-nak van olyan (α, β, γ) generátora $X \times Y$-on, hogy*

$$\alpha_0 = \alpha \,|\, X^\circ, \ \beta_0 = \beta \,|\, Y^\circ \quad \textit{és} \quad \gamma_0 = \gamma \,|\, \big(\alpha_0(X^\circ) + \beta_0(Y^\circ)\big).$$

B i z o n y í t á s. Először megmutatjuk, hogy ha $x^* \in X \setminus X^\circ$, akkor α_0-nak x^*-ban létezik valós határértéke. Legyen ugyanis $(x_n) : \mathbb{N} \to X^\circ$ tetszőleges és $x_n \to x^*$. Legyen továbbá $y \in Y^\circ$ szintén tetszőleges. A 2.3. Lemma szerint $Q(x^*, y) \in Q(X^\circ, Y^\circ)$, másrészt $\gamma_0^{-1} : Q(X^\circ, Y^\circ) \to \mathbb{R}$ és Q folytonos függvények, így

$$\alpha_0(x_n) = \gamma_0^{-1}(Q(x_n, y)) - \beta_0(y) \to \gamma_0^{-1}(Q(x^*, y)) - \beta_0(y). \tag{2.15}$$

Ezért az

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_0(x), & \text{ha } x \in X^\circ \\ \lim\limits_{t \to x^*} \alpha_0(t), & \text{ha } x = x^* \end{cases}$$

definíció korrekt, $\alpha : X \to \mathbb{R}$ CM függvény, $\alpha_0 \,|\, X^\circ = \alpha$ és – (2.15) miatt –

$$Q(x, y) = \gamma_0(\alpha(x) + \beta_0(y)),$$

ha $x \in X$, $y \in Y^\circ$. Ugyanígy történhet β_0 kiterjesztése Y°-ról Y-ra egy olyan β CM függvénnyé, amelyre

$$Q(x, y) = \gamma_0(\alpha(x) + \beta(y))$$

teljesül, ha $x \in X$, $y \in Y^\circ$ vagy $x \in X^\circ$, $y \in Y$. Végül legyen $z^* \in \alpha(X) + \beta(Y)$ határpont. Ekkor z^* maximuma vagy minimuma az $(x, y) \mapsto \alpha(x) + \beta(y)$, $(x, y) \in X \times Y$ függvénynek. Ezért egyetlen olyan $(x^*, y^*) \in (X \setminus X^\circ) \times (Y \setminus Y^\circ)$ pont van, amelyre $z^* = \alpha(x^*) + \beta(y^*)$. Legyen $\gamma(z^*) = Q(x^*, y^*)$ és $\gamma(z) = \gamma_0(z)$, ha $z \in (\alpha(X) + \beta(Y))^\circ$. Ekkor a 2.3. Lemma szerint

$$\big(\alpha(X) + \beta(Y)\big)^\circ = \alpha(X^\circ) + \beta(Y^\circ) = \alpha_0(X^\circ) + \beta_0(Y^\circ)$$

és így $\gamma_0 = \gamma \,|\, \big(\alpha_0(X^\circ) + \beta_0(Y^\circ)\big)$. Másrészt

$$\gamma(z^*) = \inf\big\{\gamma_0(z) : z \in \alpha_0(X^\circ) + \beta_0(Y^\circ)\big\}$$

vagy

$$\gamma(z^*) = \sup\big\{\gamma_0(z) : z \in \alpha_0(X^\circ) + \beta_0(Y^\circ)\big\},$$

így γ egy CM függvény és (α, β, γ) generátora Q-nak $X \times Y$-on. □

2.2 Illesztési eredmények kvázi-összegekre

E fejezet fő eredményének (a lokális kvázi-összegek kvázi-összegek is) igazolásához először azt fogjuk kimutatni, hogy ha egy függvény véges sok – egymáshoz speciálisan illeszkedő – téglalap mindegyikén kvázi-összeg, akkor e téglalapok unióján is az. Megjegyezzük, hogy e rész eredményei Maksa [Mak04] mellett – kevésbé általános formában – megjelentek már Maksa [Mak99]-ben is. A bizonyítások során alapeszközünk az

$$f(u+v) = g(u) + h(v) \tag{2.16}$$

ún. Pexider egyenlet lesz ([Pex03]). Ennek a CM megoldásait általános tételek (Radó-Baker [RB87], Rimán [Rim76], Aczél [Acz87]) következményeként meg lehet kapni, de az alábbi egyszerű, közvetlen gondolatmenet sem hosszabb.

2.5 Lemma. *Legyen U és V intervallum, legyenek $f : U+V \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$, $h : V \to \mathbb{R}$ CM függvények és tegyük fel, hogy (2.16) teljesül minden $u \in U$ és $v \in V$ esetén. Ekkor vannak olyan $a \neq 0$, b_1, b_2 valós számok, hogy*

$$\begin{aligned} f(t) &= at + b_1 + b_2 && (t \in U+V),\\ g(u) &= au + b_1 && (u \in U),\\ h(v) &= av + b_2 && (v \in V). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $v_1, v_2 \in V$, $v_1 < v_2$ és integráljuk (2.16) mindkét oldalát v szerint a $[v_1, v_2]$ intervallumon. Ekkor

$$\int_{v_1}^{v_2} f(u+v)dv = (v_2 - v_1)g(u) + \int_{v_1}^{v_2} h(v)dv,$$

azaz

$$\int_{v_1+u}^{v_2+u} f(w)dw = (v_2 - v_1)g(u) + \int_{v_1}^{v_2} h(v)dv \qquad (u \in U).$$

Ezért g folytonosan differenciálható. Hasonlóan látható be, hogy h is folytonosan differenciálható, ezért – (2.16) miatt – f is. Így (2.16)-ból u illetve v szerinti differenciálással

$$f'(u+v) = g'(u) \quad \text{illeve} \quad f'(u+v) = h'(v)$$

adódik ($u \in U$, $v \in V$), amiből következik, hogy f, g és h differenciálhányadosa értelmezési tartományaik minden pontjában ugyanaz az $a \neq 0$ valós szám. Ebből az állítást már könnyen kapjuk. □

Látni fogjuk, hogy a kvázi-összegek egymáshoz való illesztését az teszi lehetővé, hogy a kvázi-összegek nem határozzák meg egyértelműen a generátoraikat, de ha a generátorra alkalmas további feltételeket szabunk, akkor már igen. (Lásd [Acz66]-ot is.)

2.6 Lemma. *Legyen $Q : R \to \mathbb{R}$ kvázi-összeg az $X \times Y \subset R$ téglalapon, $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ és $y_0 \in Y$. Ekkor bármely $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, $p_1 \neq p_2$ és $q_0 \in \mathbb{R}$ esetén Q-nak egyetlen olyan (α, β, γ) generátora van $X \times Y$-on, amelyre teljesül, hogy*

$$\alpha(x_1) = p_1, \quad \alpha(x_2) = p_2, \quad \beta(y_0) = q_0. \tag{2.17}$$

B i z o n y í t á s. Definíció szerint Q-nak van $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ generátora $X \times Y$-on. Definiáljuk az (α, β, γ) függvényhármast az alábbiak szerint:

$$\alpha(x) = \frac{1}{a}(\alpha_1(x) - b_1) \qquad (x \in X),$$

$$\beta(y) = \frac{1}{a}(\beta_1(y) - b_2) \qquad (y \in Y),$$

$$\gamma(t) = \gamma_1(at + b_1 + b_2) \qquad (t \in \alpha(X) + \beta(Y)),$$

ahol

$$a = \frac{\alpha_1(x_1) - \alpha_1(x_2)}{p_1 - p_2}, \quad b_1 = \alpha_1(x_1) - ap_1 \quad \text{és} \quad b_2 = \beta_1(y_0) - aq_0.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy (α, β, γ) a kívánt tulajdonságú generátora Q-nak $X \times Y$-on.

Az egyértelműség igazolásához tegyük fel, hogy az (α, β, γ) generátoron kívül $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ is olyan generátora Q-nak $X \times Y$-on, amelyre

$$\alpha_2(x_1) = p_1, \quad \alpha_2(x_2) = p_2, \quad \beta_2(y_0) = q_0 \tag{2.18}$$

teljesül. Ekkor

$$\gamma(\alpha(x) + \beta(y)) = \gamma_2(\alpha_2(x) + \beta_2(y)) \qquad ((x, y) \in X \times Y),$$

amiből tetszőleges $u \in \alpha(X)$ és $v \in \beta(Y)$ esetén

$$\gamma_2^{-1} \circ \gamma(u + v) = \alpha_2 \circ \alpha^{-1}(u) + \beta_2 \circ \beta^{-1}(v)$$

következik. Ez – az $f = \gamma_2^{-1} \circ \gamma$, $g = \alpha_2 \circ \alpha^{-1}$ és $h = \beta_2 \circ \beta^{-1}$ jelölésekkel – éppen a (2.16) Pexider egyenlet, ezért a 2.5. Lemma miatt

$$\alpha_2 \circ \alpha^{-1}(u) = au + b_1 \qquad \big(u \in \alpha(X)\big),$$

$$\beta_2 \circ \beta^{-1}(v) = av + b_2 \qquad \big(v \in \beta(Y)\big),$$

$$\gamma_2^{-1} \circ \gamma(t) = at + b_1 + b_2 \qquad \big(t \in \alpha(X) + \beta(Y)\big)$$

alkalmas $a \neq 0$, b_1, b_2 valós számokkal, azaz

$$\alpha(x) = \frac{1}{a}(\alpha_2(x) - b_1) \qquad (x \in X), \tag{2.19}$$

$$\beta(y) = \frac{1}{a}(\beta_2(y) - b_2) \qquad (y \in Y), \tag{2.20}$$

$$\gamma(t) = \gamma_2(at + b_1 + b_2) \qquad \big(t \in \alpha(X) + \beta(Y)\big). \tag{2.21}$$

Ezek után (2.19)-ből – (2.17) és (2.18) figyelembevételével –

$$ap_1 = a\alpha(x_1) = \alpha_2(x_1) - b_1 = p_1 - b_1$$

és

$$ap_2 = a\alpha(x_2) = \alpha_2(x_2) - b_1 = p_2 - b_1$$

következik, innen pedig $(a-1)(p_1 - p_2) = 0$ adódik. Mivel $p_1 \neq p_2$, ezért $a = 1$ és így $b_1 = 0$. Másrészt (2.20)-ból ezek után

$$q_0 = \beta(y_0) = \beta_2(y_0) - b_2 = q_0 - b_2,$$

így $b_2 = 0$ és végül a (2.19) – (2.21) összefüggések alapján kapjuk, hogy $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_2$ és $\gamma = \gamma_2$. $\square$

Ebből a lemmából egyszerűen következik az alábbi egyértelműségi állítás, amelyet a későbbiekben gyakran használunk majd.

2.7 Lemma. *Legyen a $Q : R \to \mathbb{R}$ kvázi-összeg két generátora az $X \times Y \subset T$ téglalapon $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ és $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Ha valamely $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ és $y_0 \in Y$ esetén*

$$\alpha_1(x_1) = \alpha_2(x_1),\ \alpha_1(x_2) = \alpha_2(x_2) \quad \text{és} \quad \beta_1(y_0) = \beta_2(y_0),$$

akkor a két generátor azonos, azaz $\alpha_1 = \alpha_2$ X-en, $\beta_1 = \beta_2$ Y-on és $\gamma_1 = \gamma_2$ az $\alpha_1(X) + \beta_1(Y) = \alpha_2(X) + \beta_2(Y)$ intervallumon.

A következő négy lemmában kvázi-összegek ,,összeillesztéséről" lesz szó.

2.8 Lemma. ([Mak04]) (Függőleges illesztés.) *Tegyük fel, hogy az Y_1 és Y_2 intervallumoknak van közös belső pontjuk és $(X \times Y_1) \cup (X \times Y_2) \subset R$. Legyen $Q : R \to \mathbb{R}$ kvázi-összeg az $X \times Y_1$ és $X \times Y_2$ téglalapokon. Ekkor Q kvázi-összeg az $X \times (Y_1 \cup Y_2)$ téglalapon is.*

Bizonyítás. Ha $Y_1 \subset Y_2$ vagy $Y_2 \subset Y_1$, akkor az állítás triviális, ezért a továbbiakban tegyük fel, hogy Y_1 és Y_2 közül egyik sem részhalmaza a másiknak. Legyen $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ Q egy generátora $X \times Y_1$-en és $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $y_0 \in Y_1 \cap Y_2$. Mivel Q $X \times Y_2$-n is kvázi-összeg, a 2.6. Lemma szerint, van olyan $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ generátora $X \times Y_2$-n, amelyre

$$\alpha_2(x_1) = \alpha_1(x_1),\ \alpha_2(x_2) = \alpha_1(x_2), \quad \beta_2(y_0) = \beta_1(y_0).$$

A Q függvény nyilván kvázi-összeg az $(X \times Y_1) \cap (X \times Y_2) = X \times (Y_1 \cap Y_2)$ téglalapon is, ezért a 2.7. Lemma miatt

$$\alpha_2(x) = \alpha_1(x) \qquad (x \in X), \tag{2.22}$$

$$\beta_2(y) = \beta_1(y) \qquad (y \in Y_1 \cap Y_2), \tag{2.23}$$

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t) \qquad (t \in \alpha_1(X) + \beta_1(Y_1 \cap Y_2)). \tag{2.24}$$

Vezessük be ezek után az alábbi definíciókat:

$$\alpha(x) = \alpha_1(x) \qquad\qquad (x \in X),$$

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_1(y), & \text{ha } \ y \in Y_1 \\ \beta_2(y), & \text{ha } \ y \in Y_2 \end{cases}$$

és

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{ha } t \in \alpha(X) + \beta(Y_1) \\ \gamma_2(t), & \text{ha } t \in \alpha(X) + \beta(Y_2) \end{cases}.$$

Az azonnal látható, hogy α és β CM függvények, (2.23) miatt ugyanis (és mivel $Y_1 \cap Y_2$ pozitív hosszúságú) β_1 és β_2 ugyanolyan értelemben szigorúan monoton függvények. γ azért függvény, mert ha $t \in \big(\alpha(X) + \beta(Y_1)\big) \cap \big(\alpha(X) + \beta(Y_2)\big)$, akkor a 2.1. Lemma (2.3) egyenlősége miatt $t \in \alpha(X) + \beta(Y_1 \cap Y_2)$ és így α és β definíciójából és (2.24)-ből következik, hogy $\gamma(t)$ egyértelműen meghatározott. Mivel $\alpha(X) + \beta(Y_1 \cap Y_2)$ intervallum, ezért γ_1 és γ_2 ugyanolyan értelemben szigorúan monoton függvények, tehát γ CM függvény. Végül nyilvánvaló, hogy (α, β, γ) Q generátora az $X \times (Y_1 \cup Y_2)$ téglalapon. □

2.9 LEMMA. ([Mak04]) (Vízszintes illesztés.) *Tegyük fel, hogy az X_1 és X_2 intervallumoknak van közös belső pontjuk és $(X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y) \subset R$. Legyen továbbá $Q : R \to \mathbb{R}$ kvázi-összeg az $(X_1 \times Y)$ és $(X_2 \times Y)$ téglalapokon. Ekkor Q kvázi-összeg az $(X_1 \cup X_2) \times Y$ téglalapon is.*

B i z o n y í t á s. Alkalmazzuk a 2.8. Lemmát a $Q_1(y, x) = Q(x, y)$, $(x, y) \in R$ módon értelmezett Q_1 függvényre. □

A 2.7. és 2.8. Lemmákat ismételten alkalmazva többszörös illesztésre is van lehetőség.

2.10 LEMMA. ([Mak04]) *Legyen $2 \le N \in \mathbb{N}$, $2 \le M \in \mathbb{N}$, $X, X_1, \ldots, X_N$, $Y, Y_1, \ldots, Y_M$ intervallum. Tegyük fel, hogy $X_i \cap X_{i+1}$-nek illetve $Y_j \cap Y_{j+1}$-nek van belső pontja minden $i = 1, \ldots, N-1$ illetve $j = 1, \ldots, M-1$ mellett, továbbá $\left(\bigcup_{i=1}^{N} X_i\right) \times Y \subset R$, illetve $X \times \left(\bigcup_{j=1}^{M} Y_j\right) \subset R$ és $Q : R \to \mathbb{R}$ kvázi-összeg az $X_i \times Y$ illetve $X \times Y_j$ téglalapokon minden $i = 1, \ldots, N$ illetve $j = 1, \ldots, M$ esetén. Ekkor Q kvázi-összeg az $\left(\bigcup_{i=1}^{N} X_i\right) \times Y$ illetve az $X \times \left(\bigcup_{j=1}^{M} Y_j\right)$ téglalapon is.*

Az alábbi illesztési eredmény lehetővé teszi, hogy bizonyos vizsgálatainkban kompakt téglalapokra szorítkozzunk.

2.11 LEMMA. ([Mak04]) *Legyenek X_n, Y_n intervallumok, $R_n = X_n \times Y_n \subset R$, $R_n \subset R_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és $R_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$. Legyen továbbá $Q : R \to \mathbb{R}$ kvázi-összeg R_n-en minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor Q kvázi-összeg R_0-on is.*

B i z o n y í t á s. Legyen $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ Q egy generátora R_1-en, $x_1, x_2 \in X_1$, $x_1 \neq x_2$, $y_0 \in Y_1$ és ha már Q $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ generátorát megválasztottuk R_n-en, válasszuk Q $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$ generátorát R_{n+1}-en úgy, hogy

$$\alpha_{n+1}(x_1) = \alpha_n(x_1),\ \alpha_{n+1}(x_2) = \alpha_n(x_2),\ \beta_{n+1}(y_0) = \beta_n(y_0)$$

teljesüljön, ha $n \in \mathbb{N}$. Ez a 2.6. Lemma miatt lehetséges és a 2.7. Lemma szerint azzal a következménnyel jár, hogy

$$\alpha_{n+1}(x) = \alpha_n(x) \qquad (x \in X_n)\,, \qquad \beta_{n+1}(y) = \beta_n(y) \qquad (y \in Y_n)$$

és

$$\gamma_{n+1}(t) = \gamma_n(t) \qquad \big(t \in \alpha_n(X_n) + \beta_n(Y_n)\big)$$

minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ezért az $\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ (azaz $\alpha(x) = \alpha_n(x)$, ha $x \in X_n$), $\beta = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ és $\gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ képletek CM függvényeket definiálnak az $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ és az $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n(X_n) + \beta_n(Y_n)) \left(= \alpha\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right) + \beta\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n\right)\right)$ intervallumokon és azonnal látható, hogy (α, β, γ) generátora Q- nak R_0-on. $\square$

Most már nem lesz nehéz igazolni ennek a fejezetnek a fő eredményét.

2.12 Tétel. ([Mak04]) *Legyen X és Y két intervallum és $Q : X \times Y \to \mathbb{R}$ lokális kvázi-összeg $X \times Y$-on. Ekkor Q kvázi-összeg $X \times Y$-on.*

B i z o n y í t á s. Mivel $X \times Y$ előáll benne levő kompakt téglalapok monoton növekvő sorozata elemeinek uniójaként, – a 2.11. Lemma miatt – elég azt igazolni, hogy Q kvázi-összeg minden $C = [a, b] \times [c, d] \subset X \times Y$ téglalapon. Legyen $\xi \in [a, b]$ rögzített és $C_\xi = \{(\xi, y) : y \in [c, d]\}$. C_ξ minden pontjához van olyan C-beli, C-ben nyílt téglalap, amely tartalmazza a pontot és amelyen Q kvázi-összeg. Mivel C_ξ is kompakt, vannak olyan $X_1^{(\xi)} \times Y_1^{(\xi)}, \ldots, X_N^{(\xi)} \times Y_N^{(\xi)}$ téglalapok, amelyek szintén C-beliek, C-ben nyíltak, Q mindegyikükön kvázi-összeg és $C_\xi \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} \big(X_i^{(\xi)} \times Y_i^{(\xi)}\big)$. Legyen $R_\xi = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{N} X_i^{(\xi)}\right) \times \bigcup\limits_{i=1}^{N} Y_i^{(\xi)}$. Ekkor $C_\xi \subset R_\xi \subset C$ téglalap, amely nyílt C-ben és – a 2.10. Lemma (függőleges illesztés) miatt – Q kvázi-összeg R_ξ-n. Ezért – mivel C kompakt – vannak olyan $\xi_j \in [a, b]$, $j = 1, \ldots, M$ számok, hogy $C = \bigcup\limits_{j=1}^{M} R_{\xi_j}$ teljesül. Ismét alkalmazva a 2.10 Lemmát (vízszintes illesztés) kapjuk, hogy Q kvázi-összeg C-n. $\square$

A 2.4. és 2.12. Tételek azonnali következménye az alábbi

2.13 Tétel. *Ha a $Q : X \times Y \to \mathbb{R}$ CM függvény lokális kvázi-összeg az $X^\circ \times Y^\circ$ téglalapon, akkor Q kvázi-összeg az $X \times Y$ téglalapon.*

Ezt a részt egy olyan speciális illesztési tétellel zárjuk, amelyet a (2.2) általánosított asszociativitási egyenlet megoldásakor fogunk használni a 3. fejezetben.

2.14 Tétel. ([Mak04]) *Legyenek X, Y, Z intervallumok, $Q_1 : X \times Y \to \mathbb{R}$ és $Q_2 : Y \times Z \to \mathbb{R}$ CM függvények. Tegyük fel, hogy bármely $(x_0, y_0, z_0) \in X^\circ \times Y^\circ \times Z^\circ$ esetén vannak olyan X_0, Y_0, Z_0 nyílt intervallumok és olyan $\alpha_0 : X_0 \to \mathbb{R}$, $\beta_0 : Y_0 \to \mathbb{R}$, $\gamma_0 : Z_0 \to \mathbb{R}$, $\delta_{10} : \alpha_0(X_0) + \beta_0(Y_0) \to \mathbb{R}$, $\delta_{20} : \beta_0(Y_0) + \gamma_0(Z_0) \to \mathbb{R}$ CM függvények, hogy $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, $z_0 \in Z_0$, $X_0 \times Y_0 \times Z_0 \subset X^\circ \times Y^\circ \times Z^\circ$,*

$$Q_1(x, y) = \delta_{10}(\alpha_0(x) + \beta_0(y)) \qquad \big((x, y) \in X_0 \times Y_0\big), \tag{2.25}$$

$$Q_2(y, z) = \delta_{20}(\beta_0(y) + \gamma_0(z)) \qquad \big((y, z) \in Y_0 \times Z_0\big). \tag{2.26}$$

Ekkor Q_1 és Q_2 kvázi-összegek, sőt vannak olyan $\alpha : X \to \mathbb{R}$, $\beta : Y \to \mathbb{R}$, $\gamma : Z \to \mathbb{R}$, $\delta_1 : \alpha(X) + \beta(Y) \to \mathbb{R}$, $\delta_2 : \beta(Y) + \gamma(Z) \to \mathbb{R}$ CM függvények, hogy

$$Q_1(x, y) = \delta_1(\alpha(x) + \beta(y)) \qquad \big((x, y) \in X \times Y\big),$$
$$Q_2(y, z) = \delta_2(\beta(y) + \gamma(z)) \qquad \big((y, z) \in Y \times Z\big).$$

B i z o n y í t á s. Mivel a feltételek miatt a Q_1 és Q_2 CM függvények lokális kvázi-összegek az $X^\circ \times Y^\circ$ illetve az $Y^\circ \times Z^\circ$ téglalapon, ezért – a 2.13. Tétel szerint – kvázi-összegek a teljes értelmezési tartományukon is. Legyen $(\alpha, \beta, \delta_1)$ Q_1 egy generátora $X \times Y$-on, $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$ és válasszuk meg Q_2 egy $(\beta_1, \gamma, \delta_2)$ generátorát $Y \times Z$-n úgy, hogy

$$\beta_1(y_1) = \beta(y_1) \quad \text{és} \quad \beta_1(y_2) = \beta(y_2) \tag{2.27}$$

teljesüljön. Ez a 2.6. Lemma miatt lehetséges. Ki fogjuk mutatni, hogy $\beta_1 = \beta$ az Y intervallumon.

Valóban, legyen $y_0 \in Y$ tetszőleges, legyen továbbá $x_0 \in X$ és $z_0 \in Z$. A feltételek miatt fennáll (2.25) és (2.26) alkalmas CM függvényekkel és $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, $z_0 \in Z_0$ nyílt intervallumokkal. Ezért – mivel $(\alpha, \beta, \delta_1)$ Q generátora $X \times Y$-on, $(\beta_1, \gamma, \delta_2)$ pedig Q_2-é $Y \times Z$-n (2.25)-ből és (2.26)-ból azt kapjuk, hogy

$$\delta_{10}(\alpha_0(x) + \beta_0(y)) = \delta_1(\alpha(x) + \beta(y)) \qquad \big((x, y) \in X_0 \times Y_0\big),$$

illetve

$$\delta_{20}(\beta_0(y) + \gamma_0(z)) = \delta_2(\beta_1(y) + \gamma(z)) \qquad \big((y, z) \in Y_0 \times Z_0\big).$$

Innen – hasonlóan, mint a 2.6. Lemma bizonyításában – a

$$\delta_1^{-1} \circ \delta_{10}(u + v) = \alpha \circ \alpha_0^{-1}(u) + \beta \circ \beta^{-1} \circ (v),$$

illetve a

$$\delta_2^{-1} \circ \delta_{20}(v + w) = \beta_1 \circ \beta_0^{-1}(v) + \gamma \circ \gamma_0^{-1}(w)$$

Pexider egyenletek adódnak ($u \in \alpha_0(X_0)$, $v \in \beta_0(Y_0)$, $w \in \gamma_0(Z_0)$). Ezekből pedig a 2.5. Lemma miatt – egyebek között –

$$\beta \circ \beta_0^{-1}(v) = a_1 v + b_1 \quad \text{és} \quad \beta_1 \circ \beta_0^{-1}(v) = a_2 v + b_2$$

következik valamilyen $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ $a_1 a_2 \neq 0$ és minden $v \in \beta_0(Y_0)$ esetén. Így

$$\beta(y) = a_1\beta_0(y) + b_1 \quad \text{és} \quad \beta_1(y) = a_2\beta_0(y) + b_2,$$

ha $y \in Y_0$. Ezért – mivel $a_2 \neq 0$ –

$$\beta(y) = a_0\beta_1(y) + b_0 \quad (y \in I_{y_0} = Y_0), \tag{2.28}$$

ahol $0 \neq a_0 \in \mathbb{R}$, $b_0 \in \mathbb{R}$ (y_0-től esetleg függő) alkalmas számok. Fedjük le az $[y_1, y_2]$ kompakt intervallum minden y_0 elemét olyan I_{y_0} nyílt intervallummal, melyre (2.28) teljesül valamilyen (a_0, b_0) konstans-párra ($a_0 \neq 0$). A kompaktság miatt véges sok ilyen intervallum is lefedi $[y_1, y_2]$-t. Hagyjuk el a fölöslegeseket (amelyeket a véges lefedésben tőle bővebb lefed) a véges lefedésből és a maradék intervallumokat rendezzük olyan $I_1, \ldots, I_n$ sorrendbe, hogy baloldali végpontjaik szigorúan monoton növekvő módon kövessék egymást. Igazolni fogjuk, hogy van olyan $0 \neq a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R}$, hogy

$$\beta(y) = a\beta_1(y) + b \qquad (y \in [y_1, y_2]). \tag{2.29}$$

Ez nyilvánvaló, ha $n = 1$. Ha $n > 1$ és $1 \leq k \leq n-1$, akkor

$$\beta(y) = a'_k\beta_1(y) + b'_k = a'_{k+1}\beta_1(y) + b'_{k+1}, \tag{2.30}$$

ha $y \in I_k \cap I_{k+1}$ valamely $a'_k, b'_k, a'_{k+1}, b'_{k+1} \in \mathbb{R}$ mellett ($a'_k a'_{k+1} \neq 0$). Mivel $I_k \cap I_{k+1}$ (pozitív hosszúságú) intervallum és β_1 nem konstans $I_k \cap I_{k+1}$-en, ezért (2.30)-ból $a'_k = a'_{k+1}$ és $b'_k = b'_{k+1}$ következik. Tehát az $a := a'_1 (= \cdots = a'_n)$, $b := b'_1 (= \cdots = b'_n)$ definíciókkal (2.29)-et kapjuk. Másrészt (2.27)-ből és (2.29)-ből azonnal adódik, hogy $a = 1$ és $b = 0$. Így ismét (2.29)-ből az következik, hogy $\beta = \beta_1$ Y minden kompakt részintervallumán, így magán Y-on is. $\square$

2.3 Néhány egyszerű alkalmazás

A 2.13. Tétel legfontosabb alkalmazására a 3. fejezetben a

$$F(G(x, y), z) = H(x, K(y, z)) \tag{2.2}$$

egyenlet CM megoldásainak meghatározásakor kerül majd sor. Itt három olyan egyenletet oldunk meg, amelyekkel később még találkozunk. Az első ezek közül a (2.2) egyenlet

$$A(u + v, w) = B(u, v + w) \tag{2.31}$$

speciális esete. Megjegyezzük, hogy ez az egyenlet Maksa [Mak00]-ben általánosan is meg van oldva, de felhasználva csak abban az esetben van, amikor A és B CM függvények.

2.15 Tétel. ([Mak00]) *Legyenek U, V és W intervallumok, $A : (U + V) \times W \to \mathbb{R}$ és $B : U \times (V + W) \to \mathbb{R}$ CM függvények. Akkor és csak akkor teljesül* (2.31) *minden $(u, v, w) \in U \times V \times W$ esetén, ha van olyan $\varphi : U + V + W \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy*

$$A(t, w) = \varphi(t + w) \qquad (t \in U + V,\ w \in W) \tag{2.32}$$

és

$$B(u, s) = \varphi(u + s) \qquad (u \in U,\ s \in V + W). \tag{2.33}$$

B i z o n y í t á s. (Nem az eredeti, a [Mak00]-ben megjelent bizonyítást írjuk le, hanem lényegében azt, amely [Mak04]-ben szerepel.) Mivel (2.31)-ből azonnal következik, hogy

$$B(u,s) = A(u+s-w,w) \qquad (u \in U,\ s \in V+W,\ w \in W),$$

ezért a B CM függvény lokális kvázi-összeg értelmezési tartományának belsején. Így a 2.13. Tétel szerint B kvázi-összeg az $U \times (V+W)$ téglalapon. Ezért

$$B(u,s) = \varphi_1(a(u)+b(s)) \qquad (u \in U,\ s \in V+W) \tag{2.34}$$

alkalmas $a : U \to \mathbb{R}$, $b : V+W$ és $\varphi_1 : a(U)+b(V+W) \to \mathbb{R}$ CM függvényekre. A (2.34) és (2.31) egyenlőségek szerint

$$A(u+v,w) = \varphi_1(a(u)+b(v+w)),$$

azaz

$$\varphi_1^{-1} \circ A(u+v,w) = a(u)+b(v+w)$$

teljesül minden $(u,v,w) \in U \times V \times W$ esetén. Ez – minden rögzített $w \in W$ mellett – egy Pexider egyenlet, amelyben CM függvények szerepelnek, ezért a 2.5. Lemma szerint

$$a(u) = a_0(w)u + b_1(w), \tag{2.35}$$

$$b(v+w) = a_0(w)v + b_2(w) \tag{2.36}$$

és

$$\varphi_1^{-1} \circ A(t,w) = a_0(w)t + b_1(w) + b_2(w) \tag{2.37}$$

minden $(u,v,w) \in U \times V \times W$, $t \in U+V$ és alkalmas $a_0 : W \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b_1, b_2 : W \to \mathbb{R}$ függvények mellett. (A 2.5. Lemmában szereplő $a_0 \neq 0$, b_1, b_2 konstansok itt függhetnek a rögzített w- től.) (2.35)-ből azonnal következik, hogy az a_0 függvény konstans, amelyet szintén a_0-lal jelölünk és ezért a b_1 függvény is konstans, amelyet szintén b_1-gyel jelölünk. Ezek után (2.36)-ból ismét egy Pexider egyenlet adódik, nevezetesen

$$b(v+w) = a_0 v + b_2(w) \qquad (v \in V,\ w \in W).$$

Nyilvánvaló, hogy b_2 is CM függvény. Ezért ismét a 2.5. Lemma miatt

$$b_2(w) = a_0 w + b_0 \qquad (w \in W)$$

valamilyen $b_0 \in \mathbb{R}$ mellett. Most már (2.37)-ből

$$A(t,w) = \varphi_1(a_0 t + b_1 + a_0 w + b_0),$$

amiből pedig – a $\varphi(\tau) = \varphi_1(a_0\tau + b_0 + b_1)$, $t \in U+V+W$ definícióval – (2.32) következik. φ nyilván CM függvény, mert $a_0 \neq 0$. Végül (2.33) igazolásához legyen $u \in U$ és $s \in V+W$, $s = v+w$ ($v \in V$, $w \in W$). Ekkor (2.31)-ből és (2.32)-ből adódik, hogy

$$B(u,s) = B(u,v+w) = A(u+v,w) = \varphi(u+v+w) = \varphi(u+s).$$

A megfordítás nyilvánvaló. □

A (2.31) egyenlethez hasonlóan kezelhető a

$$C(x+y,u+v)=D(x+u,y+v) \tag{2.38}$$

egyenlet is. Ez Maksa [Mak99]-ben meg van oldva általánosan, de csak a CM megoldásokat használjuk majd később.

2.16 Tétel. ([Mak99]) *Legyenek X, Y, U és V intervallumok, $C:(X+Y)\times(U+V)\to\mathbb{R}$ és $D:(X+U)\times(Y+V)\to\mathbb{R}$ CM függvények. Akkor és csak akkor teljesül* (2.38) *minden $(x,y,u,v)\in X\times Y\times U\times V$ esetén, ha van olyan $\varphi:X+Y+U+V\to\mathbb{R}$ CM függvény, hogy*

$$C(p,q)=\varphi(p+q) \qquad (p\in X+Y,\ q\in U+V) \tag{2.39}$$

és

$$D(s,t)=\varphi(s+t) \qquad (s\in X+U,\ t\in Y+V). \tag{2.40}$$

B i z o n y í t á s. (Nem az eredeti, a [Mak99]-ben publikált bizonyítást írjuk le.) (2.32)-ből azonnal következik, hogy

$$C(x+y-(u+v),u+v)=D(x,y) \qquad (x\in X,\ y\in Y+v,\ u\in U,\ v\in V).$$

Ezért D lokális kvázi-összeg értelmezési tartománya belsején, így a 2.13. Tétel szerint kvázi-összeg az egész értelmezési tartományán is. Így

$$D(s,t)=\varphi_1(a(s)+b(t)) \qquad (s\in X+U,\ t\in Y+V) \tag{2.41}$$

alkalmas $a:X+U\to\mathbb{R}$, $b:Y+V\to\mathbb{R}$ és $\varphi_1:a(X+U)+b(Y+V)\to\mathbb{R}$ CM függvényekkel. A (2.38) és (2.41) egyenlőségekből

$$C(x+y,u+v)=\varphi_1(a(x+u)+b(y+v)),$$

azaz

$$\varphi_1^{-1}\circ C(x+y,u+v)=a(x+u)+b(y+v)$$

következik minden $(x,y,u,v)\in X\times Y\times U\times V$ esetén. Ez – minden rögzített $(u,v)\in U\times V$ mellett – ismét egy Pexider egyenlet ismeretlen CM függvényekkel, ezért a 2.5. Lemma szerint

$$a(x+u)=a_0(u,v)x+b_1(u,v), \tag{2.42}$$

$$b(y+v)=a_0(u,v)y+b_2(u,v) \tag{2.43}$$

és

$$\varphi_1^{-1}\circ C(p,u+v)=a_0(u,v)p+b_1(u,v)+b_2(u,v) \tag{2.44}$$

minden $(x, y, u, v) \in X \times Y \times U \times V$, $p \in X + Y$ és alkalmas $a_0 : U \times V \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b_1, b_2 : U \times V \to \mathbb{R}$ függvények mellett. (A 2.5. Lemmában szereplő konstansok most az (u, v) pártól függhetnek.) (2.42)-ből azonban rögtön következik, hogy a_0 nem függhet a második változójától és így b_1 sem. (Helyettesítsünk ugyanis (2.42)-be két különböző x értéket és a kapott egyenletrendszerből fejezzük ki $a_0(u, v)$-t.) Hasonlóan eljárva (2.43)-mal kapjuk, hogy a_0 nem függhet az első változójától sem és így b_2 sem függhet az első változójától. Tehát az a_0 függvény konstans, amelyet szintén a_0-lal jelölünk, továbbá b_1 legfeljebb az első, b_2 pedig legfeljebb a második változójától függ. Az újabb (egyváltozós) függvényeket ismét b_1-gyel illetve b_2-vel jelölve a (2.42) – (2.44) egyenletekből az

(2.45) $$a(x + u) = a_0 x + b_1(u) \qquad (x \in X,\ u \in U),$$

(2.46) $$b(y + v) = a_0 y + b_2(v) \qquad (y \in Y,\ v \in V),$$

(2.47) $$\varphi_1^{-1} \circ C(p, u + v) = a_0 p + b_1(u) + b_2(v) \qquad (p \in X + Y,\ u \in U,\ v \in V)$$

egyenletek adódnak. (2.45) és (2.46) ismét Pexider egyenlet, amelyekből az is következik, hogy b_1 és b_2 CM függvény, ezért a 2.5. Lemma miatt

$$b_1(u) = a_0 u + b_{11}\ (u \in U) \quad \text{illetve} \quad b_2(v) = a_0 v + b_{12}\ (v \in V),$$

ahol b_{11} és b_{12} alkalmas valós számok. Ezért (2.47)-ből azt kapjuk, hogy

$$C(p, u + v) = \varphi_1\big(a_0(p + u + v) + b_{11} + b_{12}\big),$$

amiből – a $\varphi(\tau) = \varphi_1(a_0\tau + b_{11} + b_{12})$, $\tau \in X + Y + U + V$ definícióval – (2.39) következik. Mivel $a_0 \neq 0$, ezért φ CM függvény. (2.40) igazolásához legyen $s \in X + U$, $s = x + u$ $(x \in X,\ u \in U)$ és $t \in Y + V$, $t = y + v$ $(y \in Y,\ v \in V)$. Felhasználva (2.38)-at és (2.39)-et kapjuk, hogy

$$D(s, t) = D(x + u, y + v) = C(x + y, u + v) = \varphi(x + y + u + v) = \varphi(s + t).$$

A megfordítás nyilvánvaló. □

Ebben a részben végül az

(2.48) $$f(x + y) = E(g(x), h(y))$$

egyenlet CM megoldásaival foglakozunk. Ez az egyenlet általánosítása a (2.16) Pexider egyenletnek, de speciális esete az (1.1) biszimmetria egyenletnek. Csak ez utóbbi állítás szorul magyarázatra: legyen $2 \leq m \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_m$ intervallum,

$$I = X_1 \times \cdots \times X_m, \qquad J = Y_1 \times \cdots \times Y_m,$$

$$f : I + J \to \mathbb{R}, \quad g : I \to \mathbb{R},\ h : J \to \mathbb{R} \quad \text{és} \quad E : g(I) \times h(J) \to \mathbb{R}.$$

Ilyen körülmények között (2.48) részletesen kiírva:

(2.49) $$f(x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m) = E(g(x_1, \ldots, x_m),\ h(y_1, \ldots, y_m)),$$

ami valóban (1.1) alakú egyenlet és fontos szerepe lesz (1.1) CM megoldásainak meghatározásában. Ezek után nézzük a (2.48) egyenletre vonatkozó állítást.

2.17 TÉTEL. ([Mak04]) *Legyenek az I és J halmazok úgy definiálva mint az előbb, legyenek továbbá*

$$f : I + J \to \mathbb{R},\ g : I \to \mathbb{R},\ h : J \to \mathbb{R} \quad \textit{és} \quad E : g(I) \times h(J) \to \mathbb{R}$$

CM függvények. Ekkor (2.48) *pontosan akkor teljesül minden $x \in I$ és $y \in J$ esetén, ha van olyan $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ és vannak olyan $\alpha : g(I) \to \mathbb{R}$, $\beta : h(J) \to \mathbb{R}$, $\varphi : \alpha(I) + \beta(J) \to \mathbb{R}$ CM függvények, hogy $a_1 \dots a_n \neq 0$ és*

$$f(t) = \varphi(\langle a, t\rangle) \qquad (t \in I + J), \tag{2.50}$$

$$g(x) = \alpha^{-1}(\langle a, x\rangle) \qquad (x \in I), \tag{2.51}$$

$$h(y) = \beta^{-1}(\langle a, y\rangle) \qquad (y \in J) \quad \textit{és} \tag{2.52}$$

$$E(p,q) = \varphi(\alpha(p) + \beta(q)) \qquad \big((p,q) \in g(I) \times h(J)\big), \tag{2.53}$$

ahol $\langle\ ,\ \rangle$ a szokásos belsőszorzat $\mathbb{R}^m$-ben.

B i z o n y í t á s. Legyen $(p_0, q_0) \in g(I)^0 \times h(J)^0$, $p_0 = g(x_{10}, \dots, x_{m0})$, $q_0 = h(y_{10}, \dots, y_{m0})$ valamely $(x_{10}, \dots, x_{m0}) \in I^0$, $(y_{10}, \dots, y_{m0}) \in J^0$ mellett. Ekkor (2.49) szerint

$$f(x_1 + y_1, x_{20} + y_{20}, \dots, x_{m0} + y_{m0}) = E\big(g(x_1, x_{20}, \dots, x_{m0}), h(y_1, y_{20}, \dots, y_{m0})\big)$$

minden $(x_1, y_1) \in X_1 \times Y_1$ esetén. Ez azt mutatja, hogy E lokális kvázi-összeg értelmezési tartománya belsején, ezért a 2.13. Tétel szerint E kvázi-összeg a teljes értelmezési tartományán, azaz vannak olyan $\alpha_1 : g(I) \to \mathbb{R}$, $\beta_1 : h(J) \to \mathbb{R}$ és $\varphi_1 : g(I) + h(J) \to \mathbb{R}$ CM függvények, amelyekkel

$$E(p,q) = \varphi_1(\alpha_1(p) + \beta_1(q)) \qquad \big((p,q) \in g(I) \times h(J)\big). \tag{2.54}$$

Ebből és (2.48)-ból

$$\varphi_1^{-1} \circ f(x + y) = \alpha_1 \circ g(x) + \beta_1 \circ h(y) \qquad (x \in I,\ y \in J)$$

adódik, ami egy eredeti (m-dimenziós) Pexider egyenlet. Ennek a CM megoldásaira (lásd Radó-Baker [RB87, Colloray 3]) azt kapjuk, hogy van olyan $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, továbbá $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, hogy $a_1 \dots a_m \neq 0$ és

$$\varphi_1^{-1} \circ f(t) = \langle a, t\rangle + b_1 + b_2 \qquad (t \in I + J), \tag{2.55}$$

$$\alpha_1 \circ g(x) = \langle a, x\rangle + b_1, \qquad (x \in I) \tag{2.56}$$

és

$$\beta_1 \circ h(y) = \langle a, y\rangle + b_2 \qquad (y \in J). \tag{2.57}$$

Definiáljuk ezek után az $\alpha : g(I) \to \mathbb{R}$, $\beta : h(J) \to \mathbb{R}$ és $\varphi : g(I) + h(J) \to \mathbb{R}$ CM függvényeket az

$$\alpha(p) = \alpha_1(p) - b_1 \quad \beta(q) = \beta_1(q) - b_2, \quad \varphi(r) = \varphi_1(r + b_1 + b_2)$$

képletekkel. Így egyrészt (2.55) – (2.57)-ből azonnal adódik (2.50) – (2.52), másrészt – közvetlen számolással vagy a 2.2. Lemma bizonyításának (2.19) – (2.21) egyenlőségeit felhasználva – (2.54)-ből megkapjuk (2.53)-at is. $\square$

2.4 Speciális kvázi-összegek: súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek

Ebben a részben arra a kérdésre adunk választ, hogy a kétváltozós, súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek közül melyek azok, amelyek egyúttal kvázi-összegek is. A kérdés hátterében a súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek egyenlőségének problémája áll. Legyen I intervallum $\Phi : I \to \mathbb{R}$ CM függvény, $F : I \to \mathbb{R}$ pedig egy pozitív értékeket felvevő függvény, azaz $F(x) > 0$, ha $x \in I$. Az $x_1, \ldots, x_n \in I$ számok F *súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai középértéke*

$$M_{\Phi F}(x_1, \ldots, x_n) = \Phi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Phi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} F(x_i)}\right). \tag{2.58}$$

A súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek egyenlőségének problémája az, hogy találjunk olyan szükséges és elegendő feltételeket a $\Phi, \Psi : I \to \mathbb{R}$ CM függvényekre és az $F, G : I \to]0, +\infty[$ súlyfüggvényekre, hogy az $M_{\Phi F} \equiv M_{\Psi G}$ egyenlőség, részletesebben a

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Phi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} F(x_i)}\right) = \Psi^{-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} G(x_i)\Psi(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} G(x_i)}\right) \tag{2.59}$$

egyenlőség fennálljon minden $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ mellett. Feltéve, hogy (2.59) valamely rögzített $n \geq 3$ mellett fennáll és hogy a Φ, Ψ, F és G függvények kétszer differenciálhatóak Bajraktarević [Baj58] igazolta , hogy vannak olyan a, b, c, d valós számok, hogy

$$(c^2 + d^2)(ad - bc) \neq 0$$

és

$$\Psi(x) = \frac{a\Phi(x) + b}{c\Phi(x) + d}, \qquad G(x) = F(x)(c\Phi(x) + d) \qquad (x \in I).$$

Aczél és Daróczy [AD63] pusztán azt feltételezve a (2.59)-ben szereplő függvényekről, ami $M_{\Phi F}$ és $M_{\Psi G}$ definíciójában szerepel, de (2.59) fennállását minden $n \geq 2$-re megkövetelve bizonyították ugyanezt.

Losonczi [Los99] volt az, aki először ért el eredményt – a legnehezebb – az $n = 2$ esetben: feltéve, hogy

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\Phi(X)F(X) + \Phi(Y)F(Y)}{F(X) + F(Y)}\right) = \Psi^{-1}\left(\frac{\Psi(X)G(X) + \Psi(Y)G(Y)}{G(X) + G(Y)}\right) \tag{2.60}$$

fennáll, a szereplő függvények hatszor differenciálhatóak és még bizonyos technikai feltételek is teljesülnek – a korábban ismerten kívül – kapott további 32 megoldás-családot. A Daróczy-Maksa-Páles [DMP04] dolgozatban az volt a célunk, hogy megoldjuk (2.60)-at differenciálhatósági feltétel nélkül. Ezt azonban csak úgy tudtuk elérni, hogy feltételeztük – G konstans függvény. Ezáltal arra a kérdésre kaptunk választ, hogy egy súlyfüggvénnyel súlyozott kétváltozós kvázi-aritmetikai középérték mikor kvázi-aritmetikai középérték, vagy úgyis lehet fogalmazni, hogy mikor kvázi-összeg. Ugyanis ha $M_{\Phi F}$ kvázi-összeg, akkor

$$M_{\Phi F}(X,Y) = \gamma\big(\alpha(X) + \beta(Y)\big) \qquad (X, Y \in I) \tag{2.61}$$

valamilyen $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$, $\gamma : \alpha(I) + \beta(I) \to \mathbb{R}$ CM függvényekkel. A baloldal szimmetriája és γ injektivitása miatt azonban

$$\alpha(X) + \beta(Y) = \alpha(Y) + \beta(X) \qquad (X, Y \in I)$$

adódik, amiből

$$\beta(Y) = \alpha(Y) + c \qquad (Y \in I) \tag{2.62}$$

következik alkalmas $c \in \mathbb{R}$ mellett. Másrészt (2.61)-ből és (2.62)-ből

$$X = M_{\Phi F}(X,X) = \gamma\big(\alpha(X) + \beta(X)\big) = \gamma\big(2\alpha(X) + c\big)$$

adódik, amiből kapjuk, hogy

$$\gamma(U) = \alpha^{-1}\left(\frac{U-c}{2}\right) \qquad (U \in 2\alpha(I) + c).$$

Ezért (2.61)-ből a $\Psi = \alpha$ definícióval ugyanaz adódik, mint (2.60) jobboldalából a $G =$ konstans esetben. Az alábbi eredmények Daróczy-Maksa-Páles [DMP04]-ben jelentek meg és hozzájárulnak a Páles [Pál02] problémákat megfogalmazó dolgozat 6. problémájának (amely Losonczi Lászlótól származik) megoldásához.

Először egy regularitási tételt igazolunk. Legyen $x = \Psi(X)$, $y \in \Psi(Y)$, $J = \Psi(I)$, $g = G \circ \Psi^{-1}$, $f = F \circ \Psi^{-1}$ és $\varphi = \Phi \circ \Psi^{-1}$ a (2.60) egyenletben. Ekkor az a

$$\frac{\varphi(x)f(x) + \varphi(y)f(y)}{f(x) + f(y)} = \varphi\left(\frac{g(x)x + g(y)y}{g(x) + g(y)}\right) \qquad (x, y \in J) \tag{2.63}$$

alakot ölti. A továbbiakban feltesszük, hogy G és így g is konstans, ezért (2.63)-ból

$$\frac{\varphi(x)f(x) + \varphi(y)f(y)}{f(x) + f(y)} = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (x, y \in J) \tag{2.64}$$

következik. Regularitási tételünk erre az egyenletre vonatkozik.

2.18 Tétel. ([DMP04]) *Legyen J nyílt intervallum, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ CM függvény és $f : J \to]0, +\infty[$. Tegyük fel továbbá, hogy (2.64) fennáll minden $x, y \in J$ esetén. Ekkor φ és f végtelen sokszor differenciálható függvények és $\varphi'(x) \neq 0$ bármely $x \in J$ esetén.*

Bizonyítás. (2.64)-ből kifejezhető $f(x)$ a következőképpen:

$$f(x) = f(y)\frac{\varphi(y) - \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \varphi(x)} \qquad (x, y \in J,\ x \neq y), \tag{2.65}$$

ami azt mutatja, hogy f is folytonos. Másrészt legyen $J_0 \subset J$ olyan nyílt intervallum, amelynek még a lezártja is J-ben van. Megmutatjuk, hogy φ két folytonosan differenciálható függvény hányadosa J_0-on és így φ folytonosan differenciálható J-n. Valóban, válasszuk meg a $\delta > 0$ valós számot úgy, hogy $J_0 + \delta \subset J$ és $J_0 - \delta \subset J$ is teljesüljön és legyen $u \in J_0, v \in \mathbb{R}, |v| \leq \delta$. Ekkor (2.64)-ből az $x = u+v$, $y = u-v$ helyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$(f(u+v) + f(u-v))\varphi(u) = f(u+v)\varphi(u+v) + f(u-v)\varphi(u-v).$$

Integráljuk mindkét oldalt v szerint a $[0,\delta]$ intervallumon. Ekkor – helyettesítéses integrálás után –

$$\left(\int_{u-\delta}^{u+\delta} f\right)\varphi(u) = \int_{u-\delta}^{u+\delta} f\varphi \qquad (u \in J_0)$$

következik. Mivel f pozitív és folytonos, ebből az következik, hogy φ két folytonosan differenciálható függvény hányadosa J_0-on és így maga is folytonosan differenciálható J_0-on és így J-n is. (2.65)-ből pedig az adódik ezek után, hogy f is folytonosan differenciálható J-n. Differenciáljuk (2.65) mindkét oldalát x szerint. Az így kapott egyenletből és (2.65)-ből – némi számolás után –

$$\frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x+y}{2}\right)(f(x)+f(y)) = (f\varphi)'(x) - f'(x)\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (x, y \in J) \tag{2.66}$$

adódik. Használjuk itt ismét az $x = u+v$, $y = u-v$ ($u \in J_0$, $v \in \mathbb{R}$, $|v| \leq \delta$) helyettesítéseket, majd integráljuk mindkét oldalt v szerint $[0,\delta]$- n. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\varphi'(u)\int_{u-\delta}^{u+\delta} f = \int_{u}^{u+\delta}(f\varphi)' - \varphi(u)\int_{u}^{u+\delta} f' \quad (u \in J_0).$$

Ez azt mutatja (mivel f pozitív, folytonos függvény), hogy φ' is folytonosan differenciálható J-n, azaz φ kétszer folytonosan differenciálható J-n és ezért – (2.65) miatt – f is. Cseréljük most fel az x és y változókat (2.66)-ban, vonjuk ki az így kapott egyenletet (2.66)-ból és osszuk mindkét oldalt $(y-x)$-szel. Ekkor

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x} = \frac{(f\varphi)'(y)-(f\varphi)'(x)}{y-x} \qquad (x, y \in J,\ y \neq x)$$

adódik. Az előzőek szerint mindkét oldalon létezik a határérték ha $y \to x$ és így

$$\varphi(x)f''(x) = (f\varphi)''(x) \qquad (x \in J),$$

azaz $(\varphi' f^2)' = 0$ J-n, amiből

$$\varphi'(x) = \frac{k}{f(x)^2} \tag{2.67}$$

következik valamilyen $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és minden $x \in J$ esetén. Ebből egyrészt az adódik, hogy $\varphi'(x) \neq 0$, ha $x \in J$, másrészt pedig – (2.65)-tel együtt alkalmazva – az, hogy ha f n-szer folytonosan differenciálható, akkor φ $(n+1)$-szer és ezért f is $(n+1)$-szer így φ $(n+2)$-szer $(n \in \mathbb{N})$. Mivel azt már tudjuk, hogy f és φ kétszer folytonosan differenciálható, az állítást kapjuk. □

A 2.17. Tétel lehetővé teszi Losonczi ([Los99, Theorem 3, Theorem 4]) eredményeinek alkalmazását.

2.19 Tétel. ([DMP04]) *Legyen J nyílt intervallum, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ CM függvény és $f : J \to\ ]0,+\infty[$. Ekkor a (φ, f) pár pontosan akkor megoldása* (2.64)*-nek, ha φ illetve f valamelyike az alább felsoroltaknak:*

	$\varphi(x)$	$f(x)$
(2.68)	$Ax + D$	E
(2.69)	$\dfrac{A}{x+C} + D$	$E(x+C)$
(2.70)	$A\,\mathrm{th}(Bx+C) + D$	$E\,\mathrm{ch}(Bx+C)$
(2.71)	$A\,\mathrm{cth}(Bx+C) + D$	$E\,\mathrm{sh}(Bx+C)$
(2.72)	$A\,\mathrm{tg}(Bx+C) + D$	$E\cos(Bx+C)$
(2.73)	$A\exp(-2Bx) + D$	$E\exp(Bx)$

minden $x \in J$ és valamilyen $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ esetén, amelyekre még az is teljesül, hogy $ABE \neq 0$ és olyanok, hogy $f(x) > 0$, ha $x \in J$.

B i z o n y í t á s. Nyilvánvaló, hogy a [Los99]-beli Theorem 3 összes feltétele teljesül, kivéve (iii)-t. A mi speciális esetünkben – (2.67)-nek köszönhetően – (iii) ekvivalens a következővel:

$$\left(\frac{f''}{f}\right)' \text{ vagy azonosan zéró vagy seholsem zéró } J\text{-n.} \tag{2.74}$$

Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{f''}{f}\right)'$ azonosan zéró J-n a mi esetünkben. Valóban, tegyük fel ugyanis, hogy $\left(\frac{f''}{f}\right)'$ nem zéró valamely J-beli pontban. Ekkor $\left(\frac{f''}{f}\right)'$ folytonossága miatt $\left(\frac{f''}{f}\right)'$ seholsem zéró valamely $J^* \subset J$ nyílt intervallumon. Így érvényes (2.74) J helyett J^*-on és lehet alkalmazni [Los99, Theorem 3]-at. Így megkapjuk a (2.68) – (2.73) megoldásokat J^*-on. Azonban számolással igazolható, hogy ezekre a megoldásokra az teljesül, hogy $\left(\frac{f''}{f}\right)'$ eltűnik J^* minden pontjában. Ezért állításunk következik [Los99, Theorem 3]-ból. □

Azonnali következményként megfogalmazhatjuk válaszunkat az e rész elején feltett kérdésre, hogy tudniillik mikor lesz egy kétváltozós súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai középérték kvázi-összeg (kvázi-aritmetikai középérték).

2.20 TÉTEL. ([DMP04]) *Legyen I nyílt intervallum, $\Phi, \Psi : I \to \mathbb{R}$ CM függvény és $F : I \to]0, +\infty[$. Ekkor*

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\Phi(X)F(X)+\Phi(Y)F(Y)}{F(X)+F(Y)}\right)=\Psi^{-1}\left(\frac{\Psi(X)+\Psi(Y)}{2}\right) \tag{2.75}$$

pontosan akkor áll fenn minden $X, Y \in I$ esetén, ha

$$\Phi = \varphi \circ \Psi \qquad \text{és} \qquad F = f \circ \Psi \quad I\text{-n},$$

ahol a $\varphi, f : \Psi(I) \to \mathbb{R}$ függvények a 2.18. Tételben szereplő (2.68) – (2.73) *függvények.*
□

Végül még meghatározzuk azokat a súlyfüggvénnyel súlyozott aritmetikai középértékeket is, amelyek kvázi-aritmetikai középértékek.

2.21 TÉTEL. ([DMP04]) *Legyen I nyílt intervallum és $F : I \to]0, +\infty[$. A*

$$\frac{F(X)X+F(Y)Y}{F(X)+F(Y)} \qquad (X, Y \in I) \tag{2.76}$$

súlyfüggvénnyel súlyozott aritmetikai középérték pontosan akkor kvázi-aritmetikai középérték, ha vannak olyan a, b, c valós számok, hogy

$$aX^2+bX+c>0 \qquad (X \in I) \quad \text{és} \tag{2.77}$$

$$F(X)=\frac{1}{\sqrt{aX^2+bX+c}} \qquad (X \in I). \tag{2.78}$$

B i z o n y í t á s. A (2.76) középérték pontosan akkor kvázi-aritmetikai, ha van olyan $\Psi : I \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$\frac{F(X)X+F(Y)Y}{F(X)+F(Y)}=\Psi^{-1}\left(\frac{\Psi(X)+\Psi(Y)}{2}\right) \quad (X, Y \in I). \tag{2.79}$$

Legyen $\varphi = \Psi^{-1}$ és $f = F \circ \Psi^{-1}$. Ekkor látható, hogy (2.79) ekvivalens (2.64)-gyel, ezért (2.79) pontosan akkor áll fenn, ha

$$\Psi = \varphi^{-1} \qquad \text{és} \qquad F = f \circ \varphi^{-1} \quad I\text{-n}, \tag{2.80}$$

ahol a $\varphi, f : \Psi(I) \to \mathbb{R}$ függvények a 2.18. Tételben szereplő (2.68) – (2.73) függvények. Ha f konstans, azaz f (2.68) alakú, akkor (2.78) $a = b = 0$ és $c = \frac{1}{\sqrt{E}}$-vel teljesül. Ha f és φ (2.69) – (2.73) alakúak, akkor rendre kapjuk, hogy

$$F(X)=E(\varphi^{-1}(X)+C)=\frac{EA}{X-D}=|E|\frac{1}{\sqrt{\frac{(X-D)^2}{A^2}}},$$

$$F(X)=E\,\mathrm{ch}(B\varphi^{-1}(X)+C)=E\,\mathrm{ch}\circ\mathrm{th}^{-1}\frac{X-D}{A}=E\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(X-D)^2}{A^2}}},$$

$$F(X) = E\,\mathrm{sh}(B\varphi^{-1}(X) + C) = E\,\mathrm{sh} \circ \mathrm{ch}^{\,-1} \frac{X-D}{A} = |E| \frac{1}{\sqrt{\frac{(X-D)^2}{A^2} - 1}},$$

$$F(X) = E\cos(B\varphi^{-1}(X) + C) = E\cos \circ \mathrm{tg}^{\,-1} \frac{X-D}{A} = |E| \frac{1}{\sqrt{\frac{(X-D)^2}{A^2} + 1}},$$

$$F(X) = E\exp(B\varphi^{-1}(X)) = E\exp \circ \ln \left(\frac{X-D}{A}\right)^{-1/2} = E\frac{1}{\sqrt{\frac{X-D}{A}}}.$$

Nyilvánvaló, hogy a fenti esetek mindegyikében megválaszthatók az a, b, c valós számok úgy, hogy (2.78) teljesüljön. Megfordítva, ha (2.77) teljesül és F (2.78) szerint van definiálva, akkor megkülönböztetve a

(i) $P(X) = aX^2 + bX + c$ konstans,

(ii) P-nek egy valós zéróhelye van,

(iii) P-nek két valós zéróhelye van és $a < 0$,

(iv) P-nek két valós zéróhelye van és $a > 0$,

(v) P-nek nincs valós zéróhelye és $a \neq 0$,

(vi) $a = 0$

eseteket, meghatározhatók olyan A, B, C, D, és E valós számok, amelyekkel (2.80) fennáll, ahol a (φ, f) pár (2.68) – (2.73) szerint van definiálva. □

2.5 Speciális kvázi-összegek: Cauchy differenciák

Ebben a részben arra a kérdésre adunk választ, hogy melyek azok a Cauchy differenciák, amelyek egyúttal kvázi-összegek is. A Cauchy differenciák

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - f(x + y)$$

alakú kétváltozós függvények, ahol f adott függvény, amely általában egy kommutatív félcsoportot Abel csoportba képez. A Cauchy differenciák a függvényegyenletek elméletében jelentős szerepet játszanak, eleget tesznek az ún. kociklus egyenletnek:

$$F(x + y, z) + F(x, y) = F(x, y + z) + F(y, z)$$

és ezáltal megoldási módszert szolgáltatnak függvényegyenletek bizonyos osztályaira (Aczél-Daróczy [AD75], Ebanks-Maksa [EM86], Maksa [Mak82], Maksa-Ng [MN86], Lajkó [Laj74], Maksa [Mak77], Ebanks [Eba04]). Jellemzésük általános feltételek mellett megtalálható a Jessen-Karpf-Thorup [JKT68], Erdős [Erd59] és Hosszú [Hos71] dolgozatokban, az alkalmas körülmények közötti korlátosságuk következményeinek vizsgálata pedig az

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Cauchy egyenlet stabilitáselméletéhez tarozik (Hyers [Hye41], Ger [Ger94], Forti [For95], Páles [Pál94], Székelyhidi [Szék95]). A kvázi-összegek is jelentős szerepet játszanak a függvényegyenletek elméletében: segítségükkel jellemezni lehet az asszociatív és biszimmetrikus műveleteket (Aczél [Acz48b], [Acz66], Taylor [Tay78], Craigen-Páles [CP89], [Acz04]), a kvázi-aritmetikai középértékeket (Aczél [Acz47], [Acz48a], [Acz66], Maksa [Mak02]) és válaszokat lehet adni a konzisztens aggregációval összefüggő kérdésekre (Aczél-Maksa [AM96a], [AM96b], [AM97], Maksa [Mak99], Münnich-Maksa-Mokken [MMM99], [MMM00]), ezért talán nem érdektelen megvizsgálni, hogy mely Cauchy differenciák kvázi-összegek is.

Van azonban konkrét motiváció is: a hasznosságelméletben (utility theory) egy bizonytalan kimenetelű alternatívának egy (x, C, y) elemhármassal jelölt játszma (fogadás) felel meg, amit úgy lehet interpretálni, hogy ha a C ,,esemény" következik be, akkor annak x a ,,következménye", míg ha a ,,nem $C = \bar{C}$ esemény" következik be, annak y a következménye. A következmények egy féligrendezett halmaz elemei: például $y \prec x$ jelentheti azt, hogy a fogadó az x következményt jobban kedveli y-nál. Adott egy u ,,hasznosságfüggvény", amely számértéket (hasznosságot) rendel a következményekhez és keresendő az U függvény, amely várható hasznosságot rendel a játszmákhoz. Például

$$U(x, C, y) = \begin{cases} u(x)W(C) + u(y)(1 - W(C)), & \text{ha } y \precsim x \\ u(x)(1 - W(\bar{C})) + u(y)W(\bar{C}), & \text{ha } x \prec y, \end{cases}$$

ahol W eseményekhez $[0, 1]$-beli számokat rendelő függvény, egy tipikus hasznosságfüggvény, amely a ,,rangsorolástól" is függ. Az U hasznosságfüggvényre vonatkozó ,,egyszerű és természetes" feltételek vezetnek az ún. Luce-Marley egyenletekre. Részletesebb motiváció és a témakörhöz tartozó eredmények találhatók például a Luce [Luc00] monográfiában és az Aczél-Luce-Maksa [ALM96], Aczél-Maksa-Páles [AMP99], Aczél-Maksa-Ng-Páles [AMNP01], Aczél-Maksa [AM01], Maksa-Marley-Páles [MMP00] és a Maksa-Páles [MP04] dolgozatokban. A számos Luce-Marley egyenlet közül itt csak a

$$(LM) \qquad \begin{aligned} &\varphi\big(\varphi^{-1}(\varphi(xz) + \varphi(y) - \varphi(yz))w\big) - \varphi(yw) \\ &\quad = \varphi\big(\varphi^{-1}(\varphi(xw) + \varphi(y) - \varphi(yw))z\big) - \varphi(yz) \end{aligned}$$

egyenlettel foglalkozunk, ahol az ismeretlen $\varphi : [0, K[\to [0, +\infty[$ $(0 < K \leq +\infty)$ függvény CM függvény, $\varphi(0) = 0$ és (LM) fennáll minden $x, y \in [0, K[$, $y \leq x$ és $z, w \in [0, 1]$ esetén. Azért, hogy az egyenletnek legyen értelme, az is fel van tételezve, hogy

$$(2.81) \qquad \varphi(xz) + \varphi(y) - \varphi(yz) \in \text{range}(\varphi) \quad (0 \leq y \leq x \leq K,\ z \in [0, 1]).$$

Az (LM) egyenlet φ megoldásait Aczél-Maksa [AM01]-ben meghatároztuk – feltételezve, hogy φ kétszer differenciálható $]0, K[$-n és φ' seholsem zéró $]0, K[$-n. Itt az (LM) egyenlettel kapcsolatban egy olyan eredményt mutatunk be, amelynek az elérésében alapvető szerep jut két fontos ,,regularitásjavító" módszernek: az egyik Páles Zsolttól származik ([Pál98a], [Pál98b], [Pál99], [Pál03]) és a konvex függvények alapvető tulajdonságait (Roberts-Varberg [RV73], Kuczma [Kuc85]) valamint Lebesgue tételét használja monoton függvények majdnem mindenütti differenciálhatóságáról és hatékonynak bizonyult a monoton függvényekből álló összetételeket tartalmazó egyenletek megoldása során, így csaknem az összes Luce-Maley egyenlet megoldásakor is. (Lásd például Aczél-Maksa-Ng-Páles [AMNP01], Aczél-Maksa-Páles [AMP99] [AMP01].)A másik Járai Antaltól származik ([Jár96], [Jár99], [Jár04]) és – bizonyos feltételek teljesülése esetén – alkalmas arra, hogy függvényegyenletek mérhető megoldásainak végtelen sokszori differenciálhatóságát garantálja – lehetőséget adva ezzel arra, hogy a függvényegyenlet differenciálegyenletre legyen redukálható.

Ennek a résznek az eredményei a Járai-Maksa-Páles [JMP03]-ben publikált előzetes gondolatok után – általánosabb formában – a Járai-Maksa-Páles [JMP] dolgozatban várnak megjelenésre.

A következő tétel azt mutatja meg, hogy (LM) megoldása hogyan vezet az e rész elején megfogalmazott problémára. A tételben (2.81) helyett az erősebb

$$\varphi(xz) + \varphi(y) - \varphi(yz) < \varphi(x) \qquad (0 \le y < x \le K,\ z \in [0, 1[\,) \tag{2.82}$$

feltételt használjuk. Mivel $\varphi : [0, K[\, \to [0, +\infty[$ CM függvény és $\varphi(0) = 0$, ezért φ csak szigorúan növekvő lehet, így $0 \le \varphi(xz)+\varphi(y)-\varphi(yz)$ mindig teljesül, ha $0 \le y < x < K$ és $z \in [0, 1[$, tehát (LM)-nek a (2.82) feltétel mellett is van értelme. A továbbiakban $\mathbb{R}_+$ a dolgozatban mindvégig a pozitív valós számok halmazát jelöli.

2.22 Tétel. ([JMP]) *Legyen $0 < K \le +\infty$, $\varphi : [0, K[\, \to [0, +\infty[$ CM függvény és $\varphi(0) = 0$. Tegyük fel továbbá, hogy teljesül (2.82) és fennáll (LM) minden $x, y \in [0, K[$, $y \le x$ és $z, w \in [0, 1]$ esetén. Ekkor bármely $x_0 \in\ ]0, K[$ mellett az*

$$f(x) = \varphi(x_0 e^{-x}) \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{2.83}$$

módon definiált f függvénnyel képzett

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - f(x + y) \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \tag{2.84}$$

Cauchy differencia kvázi-összeg $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$-on.

B i z o n y í t á s. Legyen

$$\Psi(t) = \varphi(x_0 t) \qquad (t \in\ ]0, 1[\,). \tag{2.85}$$

Ekkor $\Psi :\ ]0, 1[\, \to\ ]0, \varphi(x_0)[$ szigorúan növekvő, folytonos bijekció és – (2.82) miatt – bármely $s, t \in\ ]0, 1[$ esetén

$$\begin{aligned} \Psi(s) + \Psi(t) - \Psi(st) &= \varphi(x_0 s) + \varphi(x_0 t) - \varphi(x_0 st) \\ &= \varphi(x_0 s) + \varphi(t x_0) - \varphi\big((t x_0) s\big) < \varphi(x_0), \end{aligned}$$

míg Ψ pozitivitásából és szigorú növekedéséből

$$0 < \Psi(s) < \Psi(s) + \Psi(t) - \Psi(st)$$

adódik. Továbbá

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \big(\Psi(s)+\Psi(t)-\Psi(st)\big) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{(s,t)\to(1,1)} \big(\Psi(s)+\Psi(t)-\Psi(st)\big) = \varphi(x_0),$$

így $\Psi(s)+\Psi(t)-\Psi(st) \in \operatorname{range}(\Psi)$, ha $(s,t) \in]\,0,1[\,\times\,]0,1[$. Ezért az

$$F_1(s,t) = \Psi^{-1}\big(\Psi(s)+\Psi(t)-\Psi(st)\big) \qquad ((s,t) \in]0,1[\times]0,1[) \tag{2.86}$$

definícó korrekt. $F_1 :]0,1[\times]0,1[\to]0,1[$ nyilván folytonos és az $s_1, s_2, t \in \,]\,0,1[\,$, $s_1 < s_2$ számokra (2.82)-ből adódó

$$\varphi(s_1x_0) - \varphi\big((s_1x_0)t\big) < \varphi(s_2x_0) - \varphi\big((s_2x_0)t\big),$$

azaz

$$\Psi(s_1) - \Psi(s_1t) < \Psi(s_2) - \Psi(s_2t) \tag{2.87}$$

egyenlőtlenség miatt F_1 az első, de – szimmetriája miatt – a második változójában is szigorúan növekvő. Most igazoljuk, hogy

$$F_1\big(F_1(s,t),u\big) = F_1\big(s,F_1(t,u)\big) \qquad (s,t,u \in \,]\,0,1[\,). \tag{2.88}$$

Figyelembe véve F_1 definícióját, (2.88) azzal ekvivalens, hogy

$$\Psi(F_1(s,t)) + \Psi(u) - \Psi(F_1(s,t)u) = \Psi(s) + \Psi(F_1(t,u)) - \Psi(sF_1(t,u)),$$

azaz

$$\Psi(F_1(s,t)u) - \Psi(tu) = \Psi(sF_1(t,u)) - \Psi(st).$$

Ez pedig (LM)-ből adódik az

$$x = x_0, \quad y = tx_0, \quad z = s, \quad w = u$$

helyettesítésekkel, valamint (2.85) és (2.86) figyelembevételével. F_1 tehát folytonos és mindkét változójában szigorúan monoton növekvő megoldása a (2.88) asszociativitási egyenletnek. Ezért Aczél János 1.7. Tétele miatt van olyan $\alpha : \,]\,0,1[\,\to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$F_1(s,t) = \alpha^{-1}(\alpha(s)+\alpha(t)) \qquad ((s,t) \in \,]\,0,1[\,\times\,]0,1[\,).$$

Ebből F_1 (2.86) definíciója szerint

$$\Psi^{-1}(\Psi(s)+\Psi(t)-\Psi(st)) = \alpha^{-1}(\alpha(s)+\alpha(t)) \qquad (s,t \in \,]\,0,1[\,) \tag{2.89}$$

következik. Legyen ezek után $a = \Psi \circ \alpha^{-1}$ és $b(x) = \alpha(e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}_+$. Ekkor a és b CM függvények és (2.89)-ből az $s = e^{-x}$, $t = e^{-y}$ $(x,y \in \mathbb{R}_+)$ helyettesítésekkel valamint (2.85), (2.83) és (2.84) figyelembevételével

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - f(x+y) = a(b(x)+b(y)) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$$

következik. Ez azt mutatja, hogy az F Cauchy differencia valóban kvázi-összeg $R_+ \times R_+$-on. □

A következőkben – átmenetileg eltekintve attól, hogy a (2.83)-ban definiált f függvény az (LM) egyenlet szigorúan monoton φ megoldásából származik és így maga is szigorúan monoton – csak azt vizsgáljuk, hogy melyek azok a Cauchy differenciák, amelyek kvázi-összegek $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$-on. Segítségünkre lesz az alábbi két „regularitásjavító" tétel.

2.23 Tétel. ([JMP]) *Legyenek $f, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ és $a : b(\mathbb{R}_+) + b(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre*

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = a(b(x) + b(y)) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+) \tag{2.90}$$

teljesül. Ha a és b szigorúan monoton, akkor van olyan $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény (azaz, amely eleget tesz az $A(x+y) = A(x) + A(y)$; $x, y \in \mathbb{R}$ Cauchy egyenletnek), hogy a $g(x) = f(x) - A(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$ módon definiált g valamint az a és b függvény értelmezési tartománya minden pontjában jobbról is és balról is differenciálható. Továbbá g abszolút folytonos, g'_+ (g jobboldali deriváltfüggvénye) szigorúan monoton, b'_+ seholsem zéró $\mathbb{R}_+$-on és

$$g(x) + g(y) - g(x+y) = a(b(x) + b(y)) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}_+). \tag{2.91}$$

B i z o n y í t á s. A (2.90) egyenlőségből következik, hogy minden rögzített $y \in \mathbb{R}_+$ mellett az

$$x \mapsto f(x+y) - f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

differencia-függvény szigorúan monoton, azaz f Wright konvex vagy Wright konkáv $\mathbb{R}_+$-on (Wright [Wri54]), így Ng tétele miatt ([Ng87])

$$f(x) = g(x) + A(x) \qquad (x \in \mathbb{R}_+), \tag{2.92}$$

ahol $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex vagy szigorúan konkáv és $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív. Ismert ([Kuc85], [RV73]), hogy g R_+ minden pontjában jobbról is és balról is differenciálható, megszámlálható sok pont kivételével differenciálható, g abszolút folytonos és g'_+, g'_- szigorúan monoton. Az A függvény additivitása miatt (2.90)-ből azonnal adódik (2.91), amiből látható, hogy a értékkészlete pozitív hosszúságú intervallum, ezért a folytonos.

Most megmutatjuk, hogy b mindkét oldalról differenciálható $\mathbb{R}_+$ minden pontjában (ezért b folytonos is) és $b'_+(x)b'_-(x) \neq 0$, ha $x \in \mathbb{R}_+$. (2.91)-ből ugyanis

$$b(x) = a^{-1}(g(x) + g(y) - g(x+y)) - b(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+) \tag{2.93}$$

következik. Legyen $x \in \mathbb{R}_+$ rögzített és válasszuk meg az y pozitív számot úgy, hogy a^{-1} differenciálható legyen a $g(x) + g(y) - g(x+y)$ pontban. Ez azért lehetséges, mert $I_x = \{g(x) + g(y) - g(y+y) : y \in \mathbb{R}_+\}$ pozitív hosszúságú intervallum, az a^{-1} szigorúan monoton függvény pedig – Lebesgue tétele szerint – majdnem mindenütt differenciálható, így I_x-ben kell olyan pontnak lennie, amelyben a^{-1} differenciálható. Ezért

(2.93)-ból azt kapjuk, hogy b jobbról is és balról is differenciálható az x pontban. Mivel b folytonos, így (2.90) illetve (2.91) jobboldala valóban kvázi-összeg $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$-on. Ha valamilyen $x_0 \in \mathbb{R}_+$ pontban $b'_+(x_0)b'_-(x_0) = 0$ lenne, akkor válasszunk olyan $y \in \mathbb{R}_+$ elemet, melyre teljesül, hogy a differenciálható $b(x_0)+b(y)$-ban (ez ismét Lebesgue tétele miatt lehetséges). Ekkor (2.91)-ből vagy

$$g'_+(x_0) - g'_+(x_0 + y) = a'(b(x_0) + b(y))b'_+(x_0) = 0$$

vagy pedig

$$g'_-(x_0) - g'_-(x_0 + y) = a'(b(x_0) + b(y))b'_-(x_0) = 0$$

következik, ami ellentmond g'_+ vagy g'_- szigorúan monotonitásának. Tehát a b'_+ és b'_- deriváltfüggvények seholsem tűnnek el, ezért b^{-1} is differenciálható jobbról is és balról is. Ennek pedig a (2.91) egyenletből adódó

$$(2.94)\quad g \circ b^{-1}(t) + g \circ b^{-1}(s) - g(b^{-1}(t) + b^{-1}(s)) = a(t + s) \qquad ((t, s) \in b(\mathbb{R}_+) \times b(\mathbb{R}_+))$$

egyenlet szerint az a következménye, hogy a is differenciálható mindkét oldalról a $b(\mathbb{R}_+) + b(\mathbb{R}_+)$ nyílt intervallum minden pontjában. □

A (2.91)-ben szereplő függvények differenciálhatósági tulajdonságai lehetővé teszik az egyenletből a függvényösszetétel eliminációját és így (2.91) redukcióját „hagyományosabb” egyenletre. A következő tételben az így kapott egyenletben szereplő ismeretlen függvények erős regularitását igazoljuk.

2.24 Tétel. ([JMP]) *Legyenek g, a és b az előző tételben szereplő függvények, amelyekre teljesül* (2.91) *bármely $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén. Legyen továbbá*

$$(2.95)\qquad G(x) = g'_+(x) \quad \text{és} \quad h(x) = \frac{1}{b'_+(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Ekkor G és h injektív, végtelen sokszor differenciálható függvények, amelyekre fennáll, hogy

$$(2.96)\qquad G(x + y)(h(x) - h(y)) = h(x)G(x) - h(y)G(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

B i z o n y í t á s. Az előző tétel szerint G szigorúan monoton és h definíciója korrekt. Nyilvánvaló, hogy h seholsem zéró. Differenciáljuk (2.91) mindkét oldalát x-szerint jobbról, majd a kapott egyenletben cseréljük meg x-et és y-t. Ekkor az alábbi két egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} g'_+(x) - g'_+(x + y) &= a'_\pm(b(x) + b(y))b'_+(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+), \\ g'_+(y) - g'_+(x + y) &= a'_\pm(b(x) + b(y))b'_+(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

$$\text{ahol} \qquad a'_\pm = \begin{cases} a'_+, & \text{ha } b \text{ szigorúan növekvő} \\ a'_-, & \text{ha } b \text{ szigorúan csökkenő.} \end{cases}$$

A fenti két egyenletből – $b'_+(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ miatt – (2.95) figyelembevételével (2.96) következik. Ebből azonnal adódik, hogy h injektív: ugyanis, ha $h(x) = h(y)$ $(x, y \in \mathbb{R}_+)$, akkor (2.96) miatt (és mert h seholsem zéró) $G(x) = G(y)$ következik. De G injektív, így $x = y$, tehát h is injektív. A továbbiakban az a közvetlen célunk, hogy (2.96)-ból levezessünk egy olyan egyenletet, amelyre alkalmazható Járai [Jár96] 1.8. Tétele (vagy 1.9. Tétele). Ehhez először kifejezzük $G(x + y)$-t $(x \neq y)$ G alkalmas eltoltjai x és y helyen felvett értékeinek racionális függvényeként. Legyen ezért $x, y, t, u \in \mathbb{R}_+$. Ekkor (2.96)-ból

$$G(t + u)(h(t) - h(u)) = h(t)G(t) - h(u)G(u)$$

adódik, ahonnan

$$h(t) = h(u)\frac{G(t + u) - G(u)}{G(t + u) - G(t)} \tag{2.97}$$

következik. Itt a nevező – G injektivitása miatt – nem zéró. Ezért ismét (2.96)-ból és (2.97)-ből – feltéve, hogy $x \neq y$ – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(x + y) &= \frac{h(x)G(x) - h(y)G(y)}{h(x) - h(y)} \\ &= \frac{h(u)\dfrac{G(x + u) - G(u)}{G(x + u) - G(x)}G(x) - h(u)\dfrac{G(y + u) - G(u)}{G(y + u) - G(y)}G(y)}{h(u)\dfrac{G(x + u) - G(u)}{G(x + u) - G(x)} - h(u)\dfrac{G(y + u) - G(u)}{G(y + u) - G(y)}}. \end{aligned}$$

Tekintve, hogy $h(u) \neq 0$, ebből

$$G(x + y) = H\big(G(x + u), G(y + u), G(x), G(y), G(u)\big) \tag{2.98}$$

következik minden $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \neq y$ és alkalmas H racionális függvény mellett. Legyen itt $x = t - y$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$G(t) = H\big(G(t - y + u), G(y + u), G(t - y), G(y), G(u)\big)$$

minden olyan (y, u, t) hármasra, amelyre $t > y > 0, u > 0, 2y \neq t$. Mivel G – monoton lévén – majdnem mindenütt differerenciálható, igy Járai [Jár96] 1.8. Tétele (vagy 1.9. Tétele) miatt G végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}_+$-on. Ezért – (2.97) miatt – h is végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}_+$-on. □

2.25 Tétel. ([JMP]) *Legyenek $f, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ és $a : b(\mathbb{R}_+) + b(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre fennáll* (2.90). *Ha a és b szigorúan monoton függvények, akkor f csak az alábbi függvények valamelyike lehet:*

$$f(x) = \alpha \ln \operatorname{ch}(\beta x + \gamma) + A(x) + \delta \qquad (x \in \mathbb{R}_+), \tag{2.99}$$

$$f(x) = \alpha \ln |\operatorname{sh}(\beta x + \gamma)| + A(x) + \delta \qquad (x \in \mathbb{R}_+), \tag{2.100}$$

$$f(x) = \alpha e^{\beta x} + A(x) + \delta \qquad (x \in \mathbb{R}_+), \tag{2.101}$$

$$f(x) = \alpha \ln |\beta x + \gamma| + A(x) + \delta \qquad (x \in \mathbb{R}_+), \tag{2.102}$$

$$f(x) = \alpha x^2 + A(x) + \delta \qquad (x \in \mathbb{R}_+), \tag{2.103}$$

ahol $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\alpha\beta \neq 0$ és $\beta\gamma \geq 0$.

B i z o n y í t á s. A 2.23. és 2.24. Tételek szerint f lehetséges alakjának meghatározásához elég g lehetséges alakját meghatározni (ettől f-é csak additív függvényben különbözhet), ez utóbbit pedig – g abszolút folytonossága és megszámlálható sok pont kivételével való differenciálhatósága miatt – (2.95)-ből megkaphatjuk, ha (2.96)-ból G lehetséges alakját ki tudjuk következtetni – felhasználva, hogy G és h injektív, végtelen sokszor differenciálható függvények és h seholsem zéró.

Alkalmazzuk (2.96) mindkét oldalára a $\partial_y \partial_x$ differenciáloperátort. Ez a jobboldalt zéróvá teszi, aminek eredményeképpen

$$G''(x+y)(h(x) - h(y)) + G'(x+y)(h'(x) - h'(y)) = 0 \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+) \tag{2.104}$$

adódik. Mindkét oldalt $(x - y)$-nal osztva ($x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \neq y$), majd elvégezve az $y \to x$ határátmenetet

$$G''(2x)h'(x) + G'(2x)h''(x) = 0, \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

és így

$$\left(G'(2x)h'(x)^2\right)' = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

következik. Ezért van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy

$$G'(2x)h'(x)^2 = k \qquad (x \in \mathbb{R}_+). \tag{2.105}$$

Most igazoljuk, hogy $k \neq 0$. Ugyanis G szigorúan monoton és végtelen sokszor differenciálható, ezért deriváltja nem zéró valamely intervallumon. Ha $k = 0$ lenne, akkor h konstans lenne egy intervallumon, de ez nem lehet, mert h is injektív. (2.105) miatt tehát G és h deriváltfüggvényei seholsem tűnnek el $\mathbb{R}_+$-on.

Ezek után (2.104)-ből

$$-\frac{G''(x+y)}{G'(x+y)} = \frac{h'(x) - h'(y)}{h(x) - h(y)} \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+,\ x \neq y)$$

adódik. Alkalmazzuk mindkét oldalra a $\partial_y - \partial_x$ differenciáloperátort. Ez a baloldalt nullává teszi, ezért – némi számolás után –

$$(h''(x) + h''(y))(h(x) - h(y)) = h'(x)^2 - h'(y)^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+) \tag{2.106}$$

következik. Legyen

$$P(u) = h'(h^{-1}(u))^2 \qquad (u \in h(\mathbb{R}_+)). \tag{2.107}$$

Ekkor – mivel h' seholsem zéró és h végtelen sokszor differenciálható – p is végtelen sokszor differenciálható és – $P(h(x)) = h'(x)^2$ miatt – (2.106)-ból

$$\left(\frac{1}{2}\,P'\big(h(x)\big) + \frac{1}{2}\,P'\big(h(y)\big)\right)\big(h(x) - h(y)\big) = P(h(x)) - P(h(y)),$$

azaz

$$\big(P'(u) + P'(v)\big)(u - v) = 2\big(P(u) - P(v)\big) \qquad (u, v \in h(\mathbb{R}_+))$$

adódik. Differenciáljuk itt mindkét oldalt u-szerint kétszer. Ennek eredményeképpen azt kapjuk, hogy $P'''(u) = 0$, $u \in h(\mathbb{R}_+)$ és így P egy legfeljebb másodfokú polinom $h(\mathbb{R}_+)$-ra való leszűkítése. Ezek után a

$$h'(x)^2 = P(h(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}_+)$$

differenciálegyenlet integrálással megoldható. A lehetséges injektív megoldások R_+-on:

$$h(x) = \alpha_0 \operatorname{sh}(\gamma_0 x + \delta_0) + \beta_0,$$

$$h(x) = \alpha_0 \operatorname{ch}(\gamma_0 x + \delta_0) + \beta_0,$$

$$h(x) = \alpha_0 e^{\gamma_0 x} + \beta_0,$$

$$h(x) = \alpha_0 x^2 + \beta_0 x + \gamma_0,$$

ahol $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$, az első három esetben $\alpha_0\gamma_0 \neq 0$, az utolsó esetben $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$. Megjegyezzük, hogy R_+-tól szűkebb alkalmas intervallumon a $h(x) = \alpha_0 \sin(\gamma_0 x + \delta_0) + \beta_0$ képlet is szolgáltat el nem tűnő injektív megoldást (lásd [JMP]). A h függvény ismeretében (2.105)-ből származtatható G', abból pedig – (2.95) szerint – a g függvény, amely f-től csak egy additív függvényben különbözik. Végül tehát – elemi számolások után, amelyeket itt most mellőzünk – kapjuk f lehetséges (2.99) – (2.103) alakjait. $\square$

A (2.99) – (2.103) egyenlőségek jobboldalán szereplő elemi függvények addíciós képleteinek köszönhetően a baloldalon álló f függvénnyel képzett Cauchy differenciák – amint azt látni fogjuk – mind kvázi-összegek. E kvázi-összegek (b, b, a) generátorai közül elég meghatározni egyet, a többi abból a 2.6. Lemma bizonyításában szereplő módon származtatható.

2.26 Tétel. ([JMP]) *Legyen* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *a* (2.99) – (2.103)*-ban szereplő függvények valamelyike és* F *az* f*-ből származó Cauchy differencia, azaz*

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - f(x + y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+). \tag{2.108}$$

Ekkor F *kvázi-összeg* (b, b, a) *generátorral, ahol* $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *illetve* $a : b(\mathbb{R}_+) + b(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$ *rendre az alábbi függvények:*

(M1) *ha* f *a* (2.99)*-ben adott függvény, akkor*

$$b(x) = \frac{p}{\operatorname{ch}\gamma} \ln|\operatorname{ch}\gamma \operatorname{th}(\beta x + \gamma) - \operatorname{sh}\gamma| + q, \;\; a(\xi) = \delta - \alpha \ln \frac{e^{\frac{\xi - 2q}{p}} \operatorname{ch}\gamma + 1}{\operatorname{ch}\gamma},$$

(M2) *ha f a (2.100) adott függvény és $\gamma \neq 0$, akkor*

$$b(x) = \frac{p}{\operatorname{sh}\gamma} \ln|\operatorname{sh}\gamma \operatorname{cth}(\beta x + \gamma) - \operatorname{ch}\gamma| + q, \;\; a(\xi) = \delta - \alpha \ln\left|\frac{e^{\frac{\xi - 2q}{p}\operatorname{sh}\gamma} - 1}{\operatorname{sh}\gamma}\right|,$$

($\mathrm{M2}_0$) *ha f a (2.100) adott függvény és $\gamma = 0$, akkor*

$$b(x) = p \operatorname{cth}\beta x + q, \quad a(\xi) = \delta - \alpha \ln\left|\frac{\xi - 2q}{p}\right|,$$

(M3) *ha f a (2.101)-ben adott függvény, akkor*

$$b(x) = p \ln|e^{\beta x} - 1| + q, \quad a(\xi) = \delta - \alpha\left(e^{\frac{\xi - 2q}{p}} - 1\right),$$

(M4) *ha f a (2.102)-ben adott függvény és $\gamma \neq 0$, akkor*

$$b(x) = \frac{p\beta}{\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{\beta x}\right) + q, \quad a(\xi) = \delta - \alpha \ln\left|\frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\xi - 2q}{p}\frac{\gamma}{\beta}}\right)\right|,$$

($\mathrm{M4}_0$) *ha f a (2.102)-ben adott függvény és $\gamma = 0$, akkor*

$$b(x) = \frac{p}{x} + q, \quad a(\xi) = \delta - \alpha \ln\left|\frac{1}{\beta}\,\frac{\xi - 2q}{p}\right|,$$

(M5) *és végül, ha f a (2.103)-ban adott függvény, akkor*

$$b(x) = p \ln x + q, \quad a(\xi) = \delta - 2\alpha e^{\frac{\xi - 2q}{p}},$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p, q, \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta p \neq 0$ és $\beta\gamma \geq 0$.

B i z o n y í t á s. A bizonyítást csak a tipikus (M1) esetben végezzük el. Legyen tehát f (2.99) szerint adott és ebből – (2.108) alapján – számoljuk ki az $F(x, y)$ értéket, ha $x, y \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \alpha \ln \frac{\operatorname{ch}(\beta x + \gamma)\operatorname{ch}(\beta y + \gamma)}{\operatorname{ch}(\beta(x + y) + \gamma)} + \delta \\
&= \delta - \alpha \ln \frac{\operatorname{ch}(\beta x + \gamma + \beta y + \gamma - \gamma)}{\operatorname{ch}(\beta x + \gamma)\operatorname{ch}(\beta y + \gamma)} \\
&= \delta - \alpha \ln \frac{\operatorname{ch}(\beta x + \gamma + \beta y + \gamma)\operatorname{ch}\gamma - \operatorname{sh}(\beta x + \gamma + \beta y + \gamma)\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{ch}(\beta x + \gamma)\operatorname{ch}(by + \gamma)} \\
&= \delta - \alpha \ln\left[\big(1 + \operatorname{th}(\beta x + \gamma)\operatorname{th}(\beta y + \gamma)\big)\operatorname{ch}\gamma - \big(\operatorname{th}(\beta x + \gamma) + \operatorname{th}(\beta y + \gamma)\big)\operatorname{sh}\gamma\right] \\
&= \delta - \alpha \ln \frac{\big(\operatorname{ch}\gamma \operatorname{th}(\beta x + \gamma) - \operatorname{sh}\gamma\big)\big(\operatorname{ch}\gamma \operatorname{th}(\beta y + \gamma) - \operatorname{sh}\gamma\big) + 1}{\operatorname{ch}\gamma}.
\end{aligned}$$

Mos már számolással könnyen ellenőrizhető, hogy F kvázi-összeg és egy generátora (b_0, b_0, a_0), ahol

$$b_0(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}\gamma} \ln|\operatorname{ch}\gamma \operatorname{th}(\beta x + \gamma) - \operatorname{sh}\gamma| \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \tag{2.109}$$

és

$$a_0(\xi) = \delta - \alpha \ln \frac{e^{\xi \operatorname{ch}\gamma} + 1}{\operatorname{ch}\gamma} \qquad \big(\xi \in b_0(\mathbb{R}_+) + b_0(\mathbb{R}_+)\big). \tag{2.110}$$

Ha (b, b, a) is egy generátora F-nek, akkor az

$$a_0(b_0(x) + b_0(y)) = a(b(x) + b(y)) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

egyenlet az

$$a^{-1} \circ a_0(u + v) = b \circ b_0^{-1}(u) + b \circ b_0^{-1}(v) \qquad (u, v \in b_0(\mathbb{R}_+))$$

Pexider egyenletre vezet, amelyben CM függvények szerepelnek, így a 2.5. Lemma felhasználása után

$$\begin{aligned} b(x) &= pb_0(x) + q \qquad (x \in \mathbb{R}_+), \\ a(\xi) &= a_0\left(\frac{\xi - 2q}{p}\right) \qquad \big(\xi \in b(\mathbb{R}_+) + (\mathbb{R}_+)\big) \end{aligned}$$

következik valamilyen $p \neq 0$ és q valós konstansokkal. Ebből pedig – (2.109) és (2.110) figyelembevételével – megkapjuk (M1)-et. Hasonló számolással igazolható (M2)–(M5) is. □

Megjegyezzük, hogy az (M2$_0$)-ban illetve (M4$_0$)-ban megadott függvények az (M2)-ben illetve (M4)-ben szereplő megfelelő függvényekből a $\gamma \to 0$ határátmenettel megkaphatók.

A tétel alapján válasz adható az e rész elején feltett kérdésre: pontosan azok az F Cauchy differenciák kvázi-összegek $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$-on, amelyek (2.108) szerint képezhetők a (2.99) – (2.103) képletekkel megadott f függvényből. Ezek explicit alakjának felírása helyett foglalkozzunk még az (LM) egyenlet megoldásaival.

A 2.22. és 2.25. Tételek lehetővé teszik, hogy meghatározzuk az (LM) egyenlet $\varphi : [0, K[\to [0, +\infty[$ $(0 < K \leq +\infty)$, $\varphi(0) = 0$ tulajdonságú és (2.82)-nek eleget tevő CM megoldásait. A (2.83) egyenlőség miatt ugyanis

$$\varphi(x) = f\left(-\ln \frac{x}{x_0}\right) \qquad (x \in]0, x_0[\,) \tag{2.111}$$

és φ-vel együtt f is CM függvény $\mathbb{R}_+$-on. Ezért a (2.99) – (2.103) képletekben szereplő A additív függvény folytonos, azaz $A(x) = \varepsilon x$, $x \in \mathbb{R}_+$ valamely $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mellett (lásd például [Acz66]). Igy f végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}_+$-on, következésképpen φ is a $]0,K[$ intervallumon, ugyanis $x_0 \in]0,K[$ tetszőleges. Másrészt f' csak az ε additív konstansban különbözik a 2.23. Tételben szereplő g'_+ szigorúan monoton függvénytől, így f' is szigorúan monoton, továbbá – (2.111) miatt – f is. Ezért f' seholsem zéró $\mathbb{R}_+$-on. Ugyanakkor (2.111)-ből azt kapjuk, hogy

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} f'\big(-\log(x/x_0)\big) \qquad \big(x \in]0, x_0[\big).$$

Igy – mivel $x_0 \in]0,K[$ tetszőleges – $\varphi'(x) \neq 0$, ha $x \in]0,K[$. Ezért alkalmazható az Aczél-Maksa [AM01]-ben igazolt eredmény, ami alapján vagy

$$\varphi(x) = \lambda \ln(\mu x^\nu + 1) \qquad (x \in [0,K[)$$

vagy

$$\varphi(x) = \tau x^\nu \qquad (x \in [0,K[)$$

a megoldások, ahol $\lambda, \mu, \nu, \tau \in \mathbb{R}$ konstansok, $\nu > 0$, $\tau > 0$, $\lambda\mu > 0$, $\mu \geq -K^{-\nu}$, ha $K \in \mathbb{R}$ és $\mu \geq 0$, ha $K = +\infty$. Megjegyezzük, hogy nem veszítettünk megoldást azáltal, hogy (2.81) helyett az erősebb (2.82) feltételt használtuk. Megjegyezzük még azt is, hogy egy másik lehetséges elegendő feltétele annak, hogy (2.81) fennálljon a

$$\varphi(xz) + \varphi(y) - \varphi(yz) > \varphi(x) \qquad \big(0 < y < x < K,\ z \in [0,1]\big)$$

egyenlőtlenség. Ekkor φ és ψ szigorúan csökkenő függvények $]0,K[$-n illetve $\mathbb{R}_+$-on, f pedig szigorúan növekvő és szigorúan konkáv. Minden úgy megy, mint az előzőekben és megkaphatjuk (LM) $]0,K[$-n nemnegatív és szigorúan csökkenő megoldásait (lásd Aczél-Maksa [AM01, Theorem 1]).

3 Általánosított asszociativitás intervallumokon

Valószínűleg Abel [Abe26] volt az első, aki asszociatív függvényeket tanulmányozott intervallumokon, de azóta is számos matematikus foglalkozott ezzel. Az Aczél-könyvben [Acz66] például több mint 140 hivatkozást találunk asszociatív függvényekről szóló munkákra, és a könyv megjelenése óta is többen publikáltak a témában: például Hosszú [Hos67], Kimberling [Kim73], Taylor [Tay73], [Tay75], [Tay78], Eichhorn [Eic78], Frank [Fra79], Darsow-Frank [DF83], Schweizer-Sklar [SA83], Alsina-Ger [AG85], [AG88], Aczél [Acz87], Craigen-Páles [CP89], von Stengel [vS93], Maksa [Mak00], Alsina-Frank-Schweizer [AFS03], Boros [Bor04], Aczél [Acz04]. A témakör legismertebb tétele Aczél Jánostól származik ([Acz48b]), [Acz66]) és azt állítja, hogy ha I intervallum és $F : I \times I \to I$ CM függvény, amelyre

$$F\big(F(x,y),z\big) = F\big(x,F(y,z)\big) \qquad (x,y,z \in I) \tag{3.1}$$

teljesül, akkor van olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$F(x,y) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)+\varphi(y)\big) \qquad (x,y \in I). \tag{3.2}$$

(Lásd az 1.7. Tételt.) Felvetődött további – asszociatív típusú – egyenletek vizsgálata is (lásd Hosszú [Hos54]). Például

$$F(F(x,u),v) = F(x,G(u,v)), \tag{3.3}$$

$$F(F(x,u),v) = F(x,u+v), \tag{3.4}$$

$$F(F(x,y),z) = F(x,F(z,y)), \tag{3.5}$$

$$F(x,F(y,z)) = F(z,F(y,x)), \tag{3.6}$$

$$F(x,F(y,z)) = F(F(z,x),y), \tag{3.7}$$

$$F(x,F(y,z)) = F(y,F(x,z)). \tag{3.8}$$

Ezeknek az egyenleteknek külön nevük is van: (3.3) a transzformáció egyenlet (szerepet játszik a valószínűségelmélet egyfajta matematikai megalapozásában (lásd Cox [Cox61])), (3.4) a transzláció egyenlet (valószínűleg az iterációelméletben vetődött fel először), (3.5) a Tarski-féle asszociatív törvény, (3.6) a Grassmann-féle asszociatív törvény, (3.7) a ciklikus asszociatív törvény, (3.8) pedig a Hosszú-féle asszociatív törvény. Ezeknek az egyenleteknek közös általánosítása az

$$F(G(x,y),z) = H(x,K(y,z)) \tag{3.9}$$

egyenlet, amelyet már a 2. fejezetben szerepeltettünk ((2.2) egyenlet). Ezt is többen vizsgálták általános struktúrákon (kvázi-csoportokon, mint például Aczél-Belousov-Hosszú [ABH60]-ban vagy általánosított grupoidokon, mint például Taylor [Tay78]-ban) és az így nyert eredményekből következtettek Aczél 1.7. Tétele segítségével a valós esetre (lásd például Aczél [Acz66], 31. oldal). A kvázi-csoport technikának köszönhetően ezekben a tételekben – azon kívül, hogy a (3.9)-ben szereplő függvények folytonossága meg van követelve – szürjektivitási feltételek is szerepelnek: egy (általánosított) kvázi-csoport ugyanis egy $(X, Y, Z, *)$ négyes, ahol X, Y, Z halmazok, $* : X \times Y \to Z$ és bármely $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ esetén egyetlen olyan $(x', y') \in X \times Y$ van, hogy $x' * y = x * y' = z$ (Aczél-Dhombres [AD89]), ezek pedig számos nevezetes lehetséges megoldást kizárnak. Ennek esett „áldozatul" (majdnem) a CES függvény az 1. fejezetben, de az egyszerű számtani közép is ki van zárva a megoldások közül korlátos intervallumok vagy például a $]0, +\infty[$ esetén, ugyanis ilyen intervallumok Descartes szorzatán a számtani közép nem gyengén szürjektív egyik változójában sem. (3.9) megoldásának másik megközelítési módja a differenciálhatóság feltételezése volt (lásd a 31 darab hivatkozást Aczél [Acz66] 327. oldalán), ezáltal (3.9)-ből parciális differenciálegyenletet lehetett levezetni. Ez az eljárás azonban csak lokális megoldásokat szolgáltat ([Acz66], 329. oldal).

Ebben a fejezetben megadjuk a (3.9) egyenlet CM megoldásait – nem tételezve fel semmiféle szürjektivitást vagy kvázi-csoport tulajdonságot – összhangban azzal, amit Aczél János a függvényegyenletek elmélete néhány megoldatlan problémájáról írt negyven évvel ezelőtt (lásd [Acz64]). Fő eszközünk a 2.13. Tétel lesz. Ennek alkalmazásához a 3.1. részben először „lokálisan" megoldunk egy feltételes asszociativitási egyenletet (lásd (3.10)). Ez az egyenlet azért feltételes, mert a változók szóbajövő értékeire maga az egyenlet ad korlátozást, ami nélkül az egyenlet értelmetlen lenne. A 3.2. részben bemutatjuk a kapcsolatot a lokális kvázi-összegek és az általánosított asszociativitási egyenlet megoldásai között és megadjuk (3.9) CM megoldásait (3.3. Tétel). Végül a 3.3. részben ennek segítségével oldunk meg további asszociatív típusú egyenleteket. E fejezet eredményei részben Maksa [Mak00]-ban jelentek meg, ahol von Stengel [vS93] 21. Tételének egy következményére alapoztunk. E tétel bizonyítása azonban – véleményünk szerint – nem eléggé kidolgozott, így Maksa [Mak04]-ben már nem használjuk (3.9) CM megoldásainak meghatározásakor. Itt ez utóbbi változatot írjuk majd le a 3.2. részben. A 3.3. rész eredményei Maksa [Mak]-ban várnak megjelenésre.

3.1 Egy feltételes asszociativitási egyenlet lokális megoldása

Ebben a részben csak egy tételt bizonyítunk. A bizonyítás során felhasználjuk Aczél [Acz66] (54–57, 268. oldal) és von Stengel [vS93] (383–388 oldal) néhány gondolatát és megkonstruáljuk egy „feltételesen asszociatív struktúra" „logaritmus függvényeit" – legalábbis lokálisan. Ezt úgy tesszük, hogy előbb lokális „exponenciális függvényeket" konstruálunk, amire az ad lehetőséget, hogy a feltételek miatt definiálható a racionális kitevős, majd a valós kitevős „hatványozás".

3.1 Tétel. ([Mak04]) *Legyen J nyílt intervallum, $e \in J$ és $* : J \times J \to \mathbb{R}$ folytonos és mindkét változójában szigorúan monoton növekvő függvény. Tegyük fel, hogy*

$$(u * v) * w = u * (v * w) \qquad (\text{ha } u, v, w, u * v, v * w \in J) \tag{3.10}$$

és

$$u * e = e * u = u \qquad (u \in J). \tag{3.11}$$

Ekkor vannak olyan $a, b \in J$ *számok, hogy* $a < e < b$ *és van olyan* $\Phi : [a, b] \to [-1, 1]$ *folytonos és szigorúan monoton növekvő függvény, hogy*

$$\Phi(u * v) = \Phi(u) + \Phi(v) \qquad (ha\ u, v, u * v \in [a, b]) \tag{3.12}$$

és

$$\Phi(a) = -1, \qquad \Phi(b) = 1. \tag{3.13}$$

B i z o n y í t á s. (i) Először azt igazoljuk, hogy van olyan $a, b \in J$, hogy $a < e < b$ és $a * b = e$, továbbá bármely $u \in [a, b]$ esetén egyetlen olyan $u^{-1} \in [a, b]$ van, melyre $u * u^{-1} = u^{-1} * u = e$. Ugyanis, mivel J nyílt és $*$ folytonos az (e, e) pontban valamint – (3.11) miatt $e * e = e$ – van olyan $a', b' \in J$, hogy $a' < e < b'$ és $a' * b' \in J$. Ha $a' * b' = e$, akkor $a = a'$, $b = b'$ megfelelő választás. Ha $a' * b' < e$, akkor (3.11) miatt $a' * b' < e < b' = e * b'$ és így $*$ első változójában való folytonosságából $a * b' = e$ következik valamely $a' < a < e$ mellett, ami $b = b'$-vel a kívánt állítás. Ha pedig $e < a' * b'$, akkor – ismét (3.11) miatt – $a' * e = a' < e < a' * b'$ és így – $*$ második változójában való folytonosságából – $a' * b = e$ valamely $e < b < b'$ mellett, ezért $a = a'$-vel teljesül az állítás. Most megmutatjuk, hogy $b * a = e$ is igaz. Ugyanis $a = e * a < b * a < b * e = b$, így $b * a \in [a, b] \subset J$ és így – (3.10) és (3.11) miatt –

$$(b * a) * b = b * (a * b) = b * e = b = e * b,$$

amiből – $*$ első változójában való szigorúan monotonitása miatt – $b * a = e$ következik. Ezek után (i) maradék része a következőképpen bizonyítható: az unicitás a szigorú monotonitás miatt nyilvánvaló, az egzisztencia bizonyításához legyen $u \in [a, b]$. Az $u \in \{a, b\}$ esetet már vizsgáltuk, az $u = e$ eset nyilvánvaló, legyen tehát először $u \in]a, e[$. Ekkor $u * e = u < e$, másrészt $u * b > a * b = e$, így valamely $u^{-1} \in]e, b[$ mellett $u * u^{-1} = e$. Hasonlóan, ha $u \in]e, b[$, akkor $u * e = u > e$ és $u * a < b * a = e$, ezért $u * u^{-1} = e$ valamely $u^{-1} \in]a, e[$ esetén. Végül $u^{-1} * u = e$ is teljesül, mert ha $u < e$, akkor $u^{-1} > e$ és így $u = e * u < u^{-1} * u < u^{-1} * e = u^{-1}$, ha pedig $u > e$, akkor $u^{-1} < e$, ezért $u^{-1} = u^{-1} * e < u^{-1} * u < e * u = u$. Tehát mindkét esetben $u^{-1} * u \in J$, így (3.10) és (3.11) miatt

$$(u^{-1} * u) * u^{-1} = u^{-1} * (u * u^{-1}) = u^{-1} * e = u^{-1} = e * u^{-1},$$

amiből – $*$ második változójában való szigorú monotonitása miatt – $u^{-1} * u = e$ következik.

(ii) Most megkonstruáljuk a tételben szereplő Φ függvény inverzét $[-1, 1]$ racionális pontjaiban. Ehhez először definiáljuk a φ_n, $(0 \leq n \in \mathbb{Z})$, ($\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza) függvényt az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(t) = e && (t \in J_0 := J), \\ &\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(t) * t && (t \in J_n := \varphi_{n-1}^{-1}(J) \cap J_{n-1},\ n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

($\varphi_n(t)$ a $t \in J_n$ szám n-edik ,,hatványa", amelyet csak a fenti (korlátozott) körülmények között tudunk értelmezni.) Világos, hogy $\varphi_n : J_n \to \mathbb{R}$ folytonos (ha $n \geq 0$) és szigorúan monoton növekvő is (ha $n \geq 1$), továbbá $e \in J_n$, J_n nyílt intervallum (ha $n \geq 0$) és

$$J_n \subset J_{n-1}, \qquad \text{ha} \quad n \geq 1. \tag{3.15}$$

Most megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén egyetlen olyan $x_n \in]e, b] \cap J_n$ van, melyre $\varphi_n(x_n) = b$ (x_n b n-edik ,,gyöke"), és az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő. Az egyértelműség φ_n injektivítása miatt nyilvánvaló, x_n létezését indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor $x_1 = b$ megfelel. Tegyük fel, hogy $n > 1$ és igaz állítás n helyett $(n-1)$-re, azaz van olyan $x_{n-1} \in]e, b] \cap J_{n-1}$, hogy $\varphi_{n-1}(x_{n-1}) = b$. Mivel $b \in J$, ezért $x_{n-1} \in \varphi_{n-1}^{-1}(J)$ is teljesül, így $x_{n-1} \in J_n$. Felhasználva φ_n defincíóját, az indukciós feltételt, (3.11)-et és $*$ második változójában való szigorú monoton növekedését kapjuk, hogy

$$\varphi_n(x_{n-1}) = \varphi_{n-1}(x_{n-1}) * x_{n-1} = b * x_{n-1} > b * e = b.$$

Másrészt $\varphi_n(e) = e < b$, tehát φ_n felvesz b-ből nagyobb és kisebb értékeket is az $[e, x_{n-1}] \subset J_n$ intervallumon. Ezért $\varphi_n(x_n) = e$ valamely $x_n \in]e, x_{n-1}[\subset J_n$ mellett. Ez azt is mutatja, hogy (x_n) szigorúan monoton csökkenő.

A bizonyítás (i) része szerint egyetlen olyan $x_n^{-1} \in [a, e[$ elem van, amelyre

$$x_n * x_n^{-1} = x_n^{-1} * x_n = e \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.16}$$

Mivel (x_n) szigorúan monoton csökkenő, (x_n^{-1}) szigorúan monoton növekvő. Valóban, ha $2 \leq n \in N$, akkor

$$e = x_n * x_n^{-1} < x_{n-1} * x_n^{-1} < x_{n-1} * e = x_{n-1} < b,$$

így ebből, (3.11)-ből, (3.10)-ből és (3.16)-ból

$$x_{n-1}^{-1} = x_{n-1}^{-1} * e < x_{n-1}^{-1} * (x_{n-1} * x_n^{-1}) = (x_{n-1}^{-1} * x_{n-1}) * x_n^{-1} = e * x_n^{-1} = x_n^{-1}$$

következik.

Most indukcióval igazoljuk, hogy

$$x_n^{-1} \in J_n \quad \text{és} \quad \varphi_n(x_n^{-1}) = a \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.17}$$

(x_n^{-1} a b szám $(-\frac{1}{n})$-edik ,,hatványa", azaz a n-edik ,,gyöke".) Ha $n = 1$, akkor $x_1 = b$ és $a \in [a, b] \subset J = J_1$, így a bizonyítás (i) része miatt $x_1^{-1} = a \in J_1$ és φ_1 definíciója miatt $\varphi_1(x_1^{-1}) = \varphi_1(a) = a$. Tegyük fel, hogy $n > 1$ és igaz (3.17) n helyett $(n-1)$-re, azaz $x_{n-1}^{-1} \in J_{n-1}$ és $\varphi_{n-1}(x_{n-1}^{-1}) = a$. Mivel $x_{n-1}^{-1} < x_n^{-1} < e$ és $e \in J_{n-1}$, ezért az $x_{n-1}^{-1} \in J_{n-1}$ indukciós feltétel miatt és azért mert J_{n-1} intervallum azt kapjuk, hogy

$$x_n^{-1} \in J_{n-1}. \tag{3.18}$$

Ismét az indukciós feltétel miatt és mivel φ_{n-1} szigorúan monoton növekedő

$$a = \varphi_{n-1}(x_{n-1}^{-1}) < \varphi_{n-1}(x_n^{-1}) < \varphi_{n-1}(e) = e,$$

ezért $\varphi_{n-1}(x_n^{-1}) \in]a,e[\subset J$, így $x_n^{-1} \in \varphi_{n-1}^{-1}(J)$, ami (3.18)-cal együtt azt eredményezi, hogy $x_n^{-1} \in J_n$.

Definiáljuk ezek után a Ψ függvényt – amelyet Φ inverzének szánunk – a $[-1,1]$ intervallum racionális pontjaiban a következőképpen:

$$\Psi\left(\frac{m}{n}\right) = \varphi_m(x_n) \quad \text{és} \quad \Psi\left(-\frac{m}{n}\right) = \varphi_m(x_n^{-1}) \quad (0 \le m \le n,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in N). \tag{3.19}$$

A definíció korrektsége következik a

$$\varphi_{km}(x_{kn}) = \varphi_m(x_n) \quad \text{és} \quad \varphi_{km}(x_{kn}^{-1}) = \varphi_m(x_n^{-1}) \tag{3.20}$$

egyenlőségekből, ahol $k \in \mathbb{N}$, $0 \le m \in \mathbb{Z}$ és $m \le n \in \mathbb{N}$. (3.20) első felének belátásához vegyük észre, hogy $b = \varphi_{km}(x_{km}) = \varphi_n(\varphi_k(x_{kn}))$, ezért $\varphi_k(x_{kn}) = x_n$, tehát $\varphi_{km}(x_{kn}) = \varphi_m\big(\varphi_k(x_{kn})\big) = \varphi_m(x_n)$. (3.20) második fele – (3.17) felhasználásával – hasonlóan látható be.

(iii) A (3.19) definícióból és x_n definíciójából rögtön következik, hogy $\Psi(1) = b$, $\Psi(0) = e$, $\Psi(-1) = a$. Most megmutatjuk, hogy

$$\Psi\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n}\right) = \Psi\left(\frac{m}{n}\right) * \Psi\left(\frac{m'}{n}\right), \tag{3.21}$$

ha $n \in N$; $m, m' \in \mathbb{Z}$; $|m| \le n$, $|m'| \le n$, $|m+m'| \le n$, azaz

$$\Psi(r+s) = \Psi(r) * \Psi(s) \qquad (r, s, r+s \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}). \tag{3.22}$$

($\mathbb{Q}$ a racionális számok halmaza.) Nézzük először azt az esetet, amikor $m \ge 0$, $m' \ge 0$, $m + m' \le n$. Ekkor – (3.15) miatt –
$x_n \in J_n \subset J_{m+m'}$, ezért φ_m definíciójából adódik, hogy

$$\varphi_{m+m'}(x_n) = \varphi_m(x_n) * \varphi_{m'}(x_n),$$

ami (3.21)-et igazolja. Hasonló a bizonyítás az $m \le 0$, $m' \le 0$, $-m-m' \le n$ esetben is. A maradék két „vegyes” eset közül csak azt vizsgáljuk, amikor

$$0 \le \frac{m}{n} \le 1, \quad -1 \le -\frac{m'}{n} \le 0, \quad 0 \le \frac{m-m'}{n} \le 1, \tag{3.23}$$

mert a másik hasonlóan kezelhető. Ha (3.23) teljesül, akkor (3.21) felhasználásához – (3.19) alapján – azt kell igazolni, hogy

$$\varphi_{m-m'}(x_n) = \varphi_m(x_n) * \varphi_{m'}(x_n^{-1}),$$

ez pedig következik a (3.14) definícióból valamint (3.17)-ből, (3.16)-ból, (3.10)-ből és (3.11)-ből.

Ebben a részben igazoljuk még azt is, hogy $\Psi : [-1,1] \cap \mathbb{Q} \to [a,b]$ szigorúan monoton növekvő. Ehhez elég azt belátni, hogy

$$\Psi\left(\frac{m}{n}\right) < \Psi\left(\frac{m+1}{n}\right), \tag{3.24}$$

ha $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $-1 \le \frac{m}{n}$ és $\frac{m+1}{n} \le 1$. Az $\frac{m}{n} \ge 0$ esetben (3.24) azzal ekvivalens, hogy $\varphi_m(x_n) < \varphi_{m+1}(x_n)$. Ez pedig igaz, mert $x_n > e$ és így – (3.14) miatt – $\varphi_{m+1}(x_n) = \varphi_m(x_n) * x_n > \varphi_m(x_n) * e = \varphi_m(x_n)$. Az $\frac{m+1}{n} \le 0$ eset hasonlóan kezelhető, csak itt azt kell felhasználni, hogy $x_n^{-1} < e$. Végül, ha $\frac{m}{n} \le 0 \le \frac{m+1}{n}$, akkor az eddigiek alapján $\Psi\left(\frac{m}{n}\right) \le \Psi(0) \le \Psi\left(\frac{m+1}{n}\right)$ adódik és ebben a sorban mindkét egyenlőtlenség nem lehet egyidejűleg egyenlőség.

(iv) Most megadjuk Ψ szigorúan monoton növekvő és folytonos kiterjesztését a $[-1,1]$ intervallumra. Legyen ugyanis

$$\underline{\Psi}(x) = \sup\{\Psi(r) : -1 \le r \le x\} \qquad (x \in [-1,1])$$

(3.25) és

$$\overline{\Psi}(x) = \inf\{\Psi(s) : x \le s \le 1\} \qquad (x \in [-1,1]).$$

Nyilvánvaló, hogy $\underline{\Psi}$ és $\overline{\Psi}$ a Ψ függvény monoton növekvő kiterjesztései $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$-ról $[-1,1]$-re, továbbá $\underline{\Psi}$ balról, $\overline{\Psi}$ pedig jobbról folytonos a $]-1,1]$ illetve $[-1,1[$ intervallumon és $\underline{\Psi}(x) \le \overline{\Psi}(x)$ bármely $x \in [-1,1]$ esetén. Kimutatjuk, hogy $\underline{\Psi}(x) = \overline{\Psi}(x)$, ha $x \in [-1,1]$. Ez nyilvánvaló, ha $x = -1$ vagy $x = 1$. Ha $-1 < x < 1$, akkor először válasszunk olyan (r_n), $(s_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sorozatokat, amelyekre $-1 < r_n < \frac{x}{2} < s_n < 1$, $-1 < r_n + s_n < x$ $(n \in \mathbb{N})$ és $r_n \to \frac{x}{2}$, $s_n \to \frac{x}{2}$, majd olyan $(r_n'), (s_n') : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ sorozatokat, melyekre $1 < r_n' < \frac{x}{2} < s_n' < 1$, $x < r_n' + s_n' < 1$ $(n \in \mathbb{N})$ és $r_n' \to \frac{x}{2}$, $s_n' \to \frac{x}{2}$ teljesül. Felhasználva a (3.22) egyenletet, valamint $\underline{\Psi}$ baloldali, $\overline{\Psi}$ jobboldali folytonosságát $\frac{x}{2}$-ben és $*$ folytonosságát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\underline{\Psi}(x) &= \lim_{n\to\infty} \Psi(r_n + s_n) = \lim_{n\to\infty} (\Psi(r_n) * \Psi(s_n)) \\
&= \underline{\Psi}\left(\frac{x}{2}\right) * \overline{\Psi}\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} (\Psi(r_n') * \Psi(s_n')) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Psi(r_n' + s_n') = \overline{\Psi}(x).
\end{aligned}$$

Ezért $\underline{\Psi} = \overline{\Psi}$ folytonos és monoton kiterjesztése Ψ-nek $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$-ról $[-1,1]$-re, amelyet szintén Ψ-vel jelölünk. Nyilván $\Psi : [-1,1] \to [a,b]$ szürjektív és Ψ szigorúan monoton növekvő, mert ha valamely $-1 \le x < y \le 1$ esetén $\Psi(x) = \Psi(y)$ lenne, akkor válasszunk olyan $r, s \in \mathbb{Q}$ számokat, melyekre $x < r < s < y$ teljesül, amiből Ψ $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$-n való szigorú monotonitása és Ψ $[-1,1]$-en való monoton növekedése miatt

$$\Psi(x) \le \Psi(r) < \Psi(s) \le \Psi(y)$$

következik, ami ellentmondás. Ψ folytonosságából és (3.22)-ből

$$\Psi(x+y) = \Psi(x) * \Psi(y) \qquad (x, y, x+y \in [-1,1])$$

adódik. Ezek után a $\Phi = \Psi^{-1}$ definícióval a tétel állítását kapjuk. $\square$

3.2 Lokális kvázi-összegek és általánosított asszociativitás

Ebben a részben először azt mutatjuk meg, hogy kapcsolat van az

$$F(G(x,y),z) = H(x,K(y,z)) \tag{3.9}$$

általánosított asszociativitási egyenlet és a 3.1. Tételben tárgyalt (3.10) feltételes asszociativitási egyenlet között . Ehhez lényeges hozzájárulás a következő lemma.

3.2 Lemma. ([Mak04]) *Legyenek X, Y, Z intervallumok, $G : X \times Y \to \mathbb{R}$, $K : Y \times Z \to \mathbb{R}$, $F : G(X,Y) \times Z \to \mathbb{R}$ és $H : X \times K(Y,Z) \to \mathbb{R}$ CM függvények és tegyük fel, hogy* (3.9) *fennáll minden $(x,y,z) \in X \times Y \times Z$ esetén. Definiáljuk továbbá az $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ függvényt és tetszőlegesen rögzített $(x_0, y_0, z_0) \in X \times Y \times Z$ esetén az $f_1 : X \to \mathbb{R}$, $f_2 : Y \to \mathbb{R}$ és $f_3 : Z \to \mathbb{R}$ függvényeket az alábbi képletekkel:*

$$f(x,y,z) = F\big(G(x,y),z\big)\big(= H(x,K(y,z))\big), \tag{3.26}$$

$$f_1(x) = f(x,y_0,z_0),\ f_2(y) = f(x_0,y,z_0),\ f_3(z) = f(x_0,y_0,z). \tag{3.27}$$

Ekkor vannak olyan

$$f_{12} : f_1(X) \times f(x_0,Y,Z) \to \mathbb{R} \quad \textit{és} \quad f_{21} : f(X,Y,z_0) \times f_3(Z) \to \mathbb{R}$$

folytonos és mindkét változójukban szigorúan monoton növekvő függvények, hogy minden $(x,y,z) \in X \times Y \times Z$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$f(x,y,z) = f_{12}(f_1(x), f(x_0,y,z)), \tag{3.28}$$

$$f(x,y,z) = f_{21}(f(x,y,z_0), f_3(z)), \tag{3.29}$$

$$f_{12}(f_1(x), f_{21}(f_2(y), f_3(z))) = f_{21}(f_{12}(f_1(x), f_2(y)), f_3(z)), \tag{3.30}$$

$$f_1(x) = f_{12}(f_1(x), f_2(y_0)), \tag{3.31}$$

$$f_3(z) = f_{21}(f_2(y_0), f_3(z)), \tag{3.32}$$

$$f_{12}(f_1(x), f_3(z)) = f_{21}(f_1(x), f_3(z)). \tag{3.33}$$

B i z o n y í t á s. Legyen $p(t) = H(x_0,t)$, $t \in K(Y,Z)$. Ekkor p CM függvény és (3.26)-ból az $x = x_0$ helyettesítéssel $f(x_0,y,z) = p(K(y,z))$ következik, amiből

$$K(y,z) = p^{-1}(f(x_0,y,z)) \qquad \big((y,z) \in Y \times Z\big)$$

adódik. Ezért ismét (3.26)-ból kapjuk, hogy

$$f(x,y,z) = H\big(x, p^{-1}(f(x_0,y,z))\big) \qquad \big((x,y,z) \in X \times Y \times Z\big), \tag{3.34}$$

amiből az

$$f_{12}(\xi,\eta) = H\big(f_1^{-1}(\xi), p^{-1}(\eta)\big) \qquad \big(\xi \in f_1(X),\ \eta \in p(K(Y,Z))\big) \tag{3.35}$$

definícióval valamint (3.34) felhasználásával

$$\begin{aligned} f_{12}(f_1(x), f(x_0,y,z)) &= H\big(f_1^{-1}(f_1(x)), p^{-1}(f(x_0,y,z))\big) \\ &= H\big(x, p^{-1}(f(x_0,y,z))\big) \\ &= f(x,y,z), \end{aligned}$$

azaz (3.28) adódik. Világos, hogy f_{12} CM függvény, sőt – figyelembe véve a 2.2. Lemmát, (3.35)-öt és (3.27)-et – mindkét változójában szigorúan monoton növekvő. Mivel (3.9)-ben az x és z változók ,,egyenértékűek", (3.29) hasonlóan igazolható. (3.30) bizonyításához legyen (3.28)-ban illetve (3.29)-ben $z = z_0$ illetve $x = x_0$. Így

$$f(x,y,z_0) = f_{12}(f_1(x), f_2(y)), \tag{3.36}$$

illetve

$$f(x_0,y,z) = f_{21}(f_2(y), f_3(z)) \tag{3.37}$$

adódik minden $(x,y,z) \in X \times Y \times Z$ esetén. Ezért (3.28) és (3.37) valamint (3.29) és (3.36) miatt

$$f(x,y,z) = f_{12}(f_1(x), f_{21}(f_2(y), f_3(z))) = f_{21}(f_{12}(f_1(x), f_2(y)), f_3(z)),$$

amiből (3.30) következik. (3.36)-ból illetve (3.37)-ből az $y = y_0$ helyettesítéssel rögtön kapjuk (3.31)-et illetve (3.32)-t. Végül (3.33) (3.30)-ból az $y = y_0$ helyettesítéssel, valamint (3.31) és (3.32) figyelembevételével adódik. □

A következő tételben megadjuk (3.9) CM megoldásait.

3.3 Tétel. ([Mak04], [Mak00]) *Legyenek X, Y, Z intervallumok, $G : X \times Y \to \mathbb{R}$, $K : Y \times Z \to \mathbb{R}$, $F : G(X,Y) \to \mathbb{R}$ és $H : X \times K(Y,Z) \to \mathbb{R}$ CM függvények. Ekkor (3.9) pontosan akkor teljesül minden $(x,y,z) \in X \times Y \times Z$ esetén, ha vannak olyan $\alpha : X \to \mathbb{R}$, $\beta : Y \to \mathbb{R}$, $\gamma : Z \to \mathbb{R}$, $\delta_1 : \alpha(X) + \beta(Y) \to \mathbb{R}$, $\delta_2 : \beta(Y) + \gamma(Z) \to \mathbb{R}$ és $\varphi : \alpha(X) + \beta(Y) + \gamma(Z) \to \mathbb{R}$ CM függvények, hogy*

$$F(\xi, z) = \varphi(\delta_1^{-1}(\xi) + \gamma(z)), \tag{3.38}$$

$$G(x,y) = \delta_1(\alpha(x) + \beta(y)), \tag{3.39}$$

$$H(x,\eta) = \varphi(\alpha(x) + \delta_2^{-1}(\eta)) \tag{3.40}$$

és

$$K(y,z) = \delta_2(\beta(y) + \gamma(z)) \tag{3.41}$$

teljesül minden $(x,y,z) \in X \times Y \times Z$ és $\xi \in G(X,Y)$, $\eta \in K(Y,Z)$ esetén.

B i z o n y í t á s. (i) Először azt mutatjuk meg, hogy G és K kvázi-összegek az $X \times Y$, illetve $Y \times Z$ téglalapokon, ráadásul speciális $(\alpha, \beta, \delta_1)$ illetve $(\beta, \gamma, \delta_2)$ generátorokkal, azaz fennáll (3.39) és (3.41). Legyen ehhez $(x_0, y_0, z_0) \in X^0 \times Y^0 \times Z^0$ tetszőleges. Igazolni fogjuk, hogy ha f a (3.26)-ban definiált függvény, akkor $f(\cdot\,, \cdot\, z_0)$ és $f(x_0, \cdot\,, \cdot)$ kvázi-összegek (speciális generátorokkal) $X^0 \times Y^0$-on illetve $Y^0 \times Z^0$-on. Legyen ezért $f_1(X) = U$, $f_2(Y) = V$, $f_3(Z) = W$, ahol f_1, f_2, f_3 a (3.27)-ben definiált függvények, legyen továbbá $e = f_1(x_0)$. Ekkor U, V, W intervallumok és – mivel $f_1(x_0) = f_2(y_0) = f_3(z_0) = e \in U \cap V \cap W$, sőt e belső pont, ezért $U \cap V \cap W$ is intervallum és van olyan $J \subset U \cap V \cap W$ nyílt intervallum, hogy $e \in J$. A 3.2. Lemma szerint vannak olyan f_{12} és f_{21} folytonos és mindkét változójukban szigorúan növekvő függvények, amelyekkel teljesülnek a (3.28) – (3.33) egyenlőségek. Ezekből az

$$u * v = f_{12}(u, v) \qquad (u, v \in J) \tag{3.42}$$

módon definiált folytonos és mindkét változójában szigorúan monoton növekvő $* : J \times J \to \mathbb{R}$ függvényre kapjuk, hogy

$$(u * v) * w = u * (v * w) \qquad (u, v, w, u * v, v * w \in J)$$

és

$$u * e = e * u = u \qquad (u \in J).$$

Így a 3.1. Tétel szerint van olyan $[a, b] \subset J$ intervallum és $\Phi : [a, b] \to [-1, 1]$ bijektív CM függvény, hogy $a < e < b$ és

$$\Phi(u * v) = \Phi(u) + \Phi(v) \qquad (u, v, u * v \in [a, b]). \tag{3.43}$$

Ezért (3.42) és (3.43) miatt

$$f_{12}(u, v) = f_{21}(u, v) = u * v = \Phi^{-1}\big(\Phi(u) + \Phi(v)\big), \tag{3.44}$$

ha u, v, $f_{12}(u, v) \in [a, b]$. Mivel $f_1(x_0) = f_2(y_0) = f_3(z_0) = f(x_0, y_0, z_0) = e$ és f_1 x_0-ban, f_2 y_0-ban, f_3 z_0-ban, $f(\cdot\,, \cdot\,, z_0)$ (x_0, y_0)-ban és $f(x_0, \cdot\,, \cdot)$ (y_0, z_0)-ban folytonos függvények, vannak olyan $X_0 \times Y_0 \subset X^0 \times Y^0$ és $Y_0 \times Z_0 \subset Y^0 \times Z^0$ nyílt téglalapok, hogy

$$(x_0, y_0) \in X_0 \times Y_0,\ (y_0, z_0) \in Y_0 \times Z_0 \quad \text{és} \quad f_1(x), f_2(y), f_3(z), f_{12}(x, y), f_{21}(y, z) \in [a, b],$$

ha $(x, y) \in X_0 \times Y_0$ és $(y, z) \in Y_0 \times Z_0$. Így (3.28), (3.29) és (3.44), valamint (3.43) következtében

$$\begin{aligned}\Phi(f(x, y, z_0)) &= \Phi\big(f_{12}(f_1(x), f_2(y))\big) = \Phi(f_1(x) * f_2(y)) \\ &= \Phi(f_1(x)) + \Phi(f_2(y))\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\Phi(f(x_0, y, z)) &= \Phi\big(f_{21}(f_2(y), f_3(z))\big) = \Phi(f_2(y) * f_3(z)) \\ &= \Phi(f_2(y)) + \Phi(f_3(z)),\end{aligned}$$

ha $(x,y) \in X_0 \times Y_0$ és $(y,z) \in Y_0 \times Z_0$. Ezekből az egyenlőségekből az

$$\alpha_0(x) = \Phi(f_1(x))\ (x \in X_0), \quad \beta_0(y) = \Phi(f_2(y))\ (y \in Y_0), \quad \gamma_0(z) = \Phi(f_3(z))\ (z \in Z_0),$$

$$\delta_{10} = \Phi^{-1} \mid \big(\alpha_0(X_0) + \beta_0(Y_0)\big), \quad \delta_{20} = \Phi^{-1} \mid \big(\beta_0(Y_0) + \gamma_0(Z_0)\big)$$

definíciókkal

$$f(x,y,z_0) = \delta_{10}(\alpha_0(x) + \beta_0(y)) \quad \text{és} \quad f(x_0,y,z) = \delta_{20}(\beta_0(y) + \gamma_0(z))$$

$((x,y) \in X_0 \times Y_0,\ (y,z) \in Y_0 \times Z_0)$ adódik. Mivel α_0, β_0, γ_0, δ_{10} és δ_{20} CM függvények valamint $(x_0,y_0) \in X^0 \times Y^0$ illetve $(y_0,z_0) \in Y^0 \times Z^0$ tetszőlegesek, ezért $f(\cdot\,,\,\cdot\,,z_0)$ és $f(x_0,\,.\,,\,.)$ lokális kvázi-összegek $X^0 \times Y^0$-on illetve $Y^0 \times Z^0$-on – speciális generátorokkal, így a 2.14. Tétel miatt $f(\cdot\,,\,\cdot\,,z_0)$ és $f(x_0,\cdot\,,\cdot)$ kvázi-összeg $X \times Y$-on illetve $Y \times Z$-n speciális (α,β,δ_1') illetve (β,γ,δ_2') generátorokkal. Mivel $F(\cdot\,,z_0)$ és $H(x_0,\,\cdot)$ CM függvények, (3.26)-ból következik, hogy fennáll (3.39) és (3.41) G illetve K alkalmas (α,β,δ_1) illetve (β,γ,δ_2) generátoraival.

(ii) Írjuk most G és K (3.39) illetve (3.41) előállításait (3.9)-be. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$F\big(\delta_1(\alpha(x)+\beta(y)),z\big) = H\big(x,\delta_2(\beta(y)+\gamma(z)\big) \qquad \big((x,y,z) \in X \times Y \times Z\big). \tag{3.45}$$

Ebből pedig

$$F\big(\delta_1(u+w),\gamma^{-1}(w)\big) = H\big(\alpha^{-1}(u),\delta_2(v+w)\big) \tag{3.46}$$

következik minden $(u,v,w) \in \alpha(X) \times \beta(Y) \times \gamma(Z))$ esetén. Definiáljuk ezek után az A és B függvényeket az

$$A(t,w) = F\big(\delta_1(t),\gamma^{-1}(w)\big) \qquad \big((t,w) \in \big(\alpha(X)+\beta(Y)\big) \times \gamma(Z)\big), \tag{3.47}$$

illetve a

$$B(u,s) = H\big(\alpha^{-1}(u),\delta_2(s)\big) \quad \big((u,s) \in \alpha(X) \times (\beta(Y)+\gamma(Z))\big) \tag{3.48}$$

képlettel. Ekkor A és B CM függvények, amelyekre teljesül, hogy

$$A(u+v,w) = B(u,v+w) \qquad \big((u,v,w) \in \alpha(X) \times \beta(Y) \times \gamma(Z)\big). \tag{2.30}$$

Ezért a 2.15. Tétel miatt van olyan $\varphi : \alpha(X)+\beta(Y)+\gamma(Z) \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$A(t,w) = \varphi(t+w) \quad \text{és} \quad B(u,s) = \varphi(u+s),$$

ha $t \in \alpha(X)+\beta(Y)$, $w \in \gamma(Z)$, $u \in \alpha(X)$ és $s \in \beta(Y)+\gamma(Z)$. Így (3.47) és (3.48) miatt megkapjuk a (3.38) illetve (3.40) egyenlőségeket is.

Az, hogy a (3.38) – (3.41) képletekkel definiált F, G, H, K kvázi-összegek (3.9) megoldásai, számolással ellenőrizhető. □

E tétel néhány következményét a 3.3. és 3.4. részben tárgyaljuk. Itt most csak két eredményt fogalmazunk meg, amelyek azonnal adódnak a 3.3. Tételből. Az első (lásd [vS93], Theorem 21-et is) a

3.4 Tétel. ([Mak]) *Legyenek* X, Y, Z *intervallumok,* $G : X\times Y \to \mathbb{R}$, $K : Y\times Z \to \mathbb{R}$, $F : G(X,Y) \times Z \to \mathbb{R}$ *és* $H : X \times K(Y,Z) \to \mathbb{R}$ CM *függvények, amelyekre teljesül* (3.9) *minden* $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ *esetén. Ekkor van olyan* $\alpha : X \to \mathbb{R}$, $\beta : Y \to \mathbb{R}$, $\gamma : Z \to \mathbb{R}$ *és* $\varphi : \alpha(X) + \beta(Y) + \gamma(Z) \to \mathbb{R}$ CM *függvény, hogy*

$$F(G(x,y),z) = H(x,K(y,z)) = \varphi(\alpha(x) + \beta(y) + \gamma(z)), \tag{3.49}$$

ha $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$.

A második eredmény egy pozitív válasz Steinhaus azon kérdésére (lásd Ryll-Nardzewski [RN55], és Aczél [Acz66], 329. oldal), hogy ha egy háromváltozós f függvény kétváltozós függvények segítségével előáll

$$f(x,y,z) = F\big(G(x,y),z\big) \text{ és } f(x,y,z) = H\big(x,K(y,z)\big) \tag{3.50}$$

alakban, akkor előáll-e egy további lehetséges

$$f(x,y,z) = L(M(z,x),y) \tag{3.51}$$

alakban is. A válasz – amely itt teljesebb mint [RN55]-ben vagy [Acz66]-ban – a következő:

3.5 Tétel. *Ha* X, Y, Z *intervallumok,* $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ *és* $G : X \times Y \to \mathbb{R}$, $K : Y \times Z \to \mathbb{R}$, $F : G(X,Y) \times Z \to \mathbb{R}$ *és* $H : X \times K(Y,Z) \to \mathbb{R}$ CM *függvények, továbbá fennáll* (3.50) *minden* $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ *esetén, akkor vannak olyan* $M : Z\times X \to \mathbb{R}$ *és* $L : M(Z,X)\times Y \to \mathbb{R}$ CM *függvények is, melyekre* (3.51) *teljesül minden* $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$ *mellett.*

B i z o n y í t á s. Alkalmazzuk a 3.4. Tételt és legyen

$$M(z,x) = \gamma(z) + \alpha(x), \quad (z,x) \in Z \times X \quad \text{és} \quad L(\xi,y) = \varphi(\xi + \beta(y)),$$

$\xi \in M(Z,X)$, $y \in Y$, ahol α, β, γ és φ a 3.4. Tételben definiált CM függvények. Ekkor M és L is CM függvények és (3.50) miatt teljesül (3.51) is. □

3.3 Néhány további asszociatív típusú egyenlet

Negyven-ötven évvel ezelőtt Hosszú Miklós vizsgálta (többek között) a (3.3) – (3.8) asszociatív típusú egyenleteket (lásd [Hos54], [Hos67]). Fő eszköze az

$$F\big(F(x,y),z\big) = F\big(x,F(y,z)\big) \tag{3.1}$$

egyenletre vonatkozó Aczél-féle 1.7. Tétel, a szintén Aczél Jánostól származó és a

$$B\big(B(x,y),B(u,v)\big) = B\big(B(x,u),B(y,v)\big) \tag{3.52}$$

egyenletről szóló tétel ([Acz66], 287. oldal) valamint néhány – a (3.9) egyenlet folytonosan differenciálható (lokális) megoldásait megadó – saját eredménye volt (lásd

Hosszú [Hos54], [Hos67], Aczél [Acz66], 329. oldal). Néhány esetben (például a (3.3), (3.7) és (3.8) egyenletek esetében) megoldhatósági feltételeket is használt. A 3.3. illetve 3.4. Tételeknek köszönhetően itt most egységes módszerrel tudjuk meghatározni a (3.3) – (3.8) egyenletek CM megoldásait – mellőzve mindenféle megoldhatósági feltételt. Először az

$$F(F(x,u),v) = F(x,G(u,v)) \tag{3.3}$$

úgynevezett transzformáció egyenlettel foglalkozunk.

3.6 Tétel. ([Mak]) *Legyenek X és U intervallumok, $F : X \times U \to X$ és $G : U \times U \to U$ CM függvények. Ekkor a (3.3) egyenlet pontosan akkor áll fenn minden $x \in X$ és $u, v \in U$ esetén, ha vannak olyan $\alpha : X \to \mathbb{R}$ és $\beta : U \to \mathbb{R}$ CM függvények, hogy*

$$F(x,u) = \alpha^{-1}(\alpha(x) + \beta(u)) \qquad \big((x,u) \in X \times U\big) \tag{3.53}$$

és

$$G(u,v) = \beta^{-1}(\beta(u) + \beta(v)) \qquad \big((u,v) \in U \times U\big) \tag{3.54}$$

teljesül.

Bizonyítás. Számolással ellenőrizhető, hogy a (3.53) és (3.54) szerint definiált F és G CM függvényekre fennáll (3.3), ezért csak a megfordítás bizonyításával foglalkozunk. A 3.4. Tétel szerint minden $x \in X$ és $u, v \in U$ esetén

$$F(F(x,u),v) = F(x,G(u,v)) = \varphi(\alpha(x) + \beta_1(u) + \beta_2(v)) \tag{3.55}$$

valamilyen $\alpha : X \to \mathbb{R}$, $\beta_1, \beta_2 : U \to \mathbb{R}$ és $\varphi : \alpha(X) + \beta_1(U) + \beta_2(U) \to \mathbb{R}$ CM függvényekkel. Legyen $v = v_0 \in U$ rögzített és definiáljuk az F_1 és Ψ függvényeket az

$$F_1(x) = F(x, v_0) \ (x \in X) \quad \text{és} \quad \Psi(t) = F_1^{-1} \circ \varphi(t + \beta_2(v_0)) \ \big(t \in \alpha(X) + \beta_1(U)\big)$$

képletekkel. Ekkor F_1 és Ψ CM függvények és (3.55)-ből a $v = v_0$ helyettesítéssel

$$F(x,u) = \Psi(\alpha(x) + \beta_1(u)) \qquad \big((x,u) \in X \times U\big) \tag{3.56}$$

adódik. Így ismét (3.55)-ből

$$\alpha(x) + \beta_1 \circ G(u,v) = \alpha \circ \Psi(\alpha(x) + \beta_1(u)) + \beta_1(v) \qquad (x \in X,\ u, v \in U)$$

következik. Ezért, minden $p \in \alpha(X)$, $q, r, \in \beta_1(U)$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\alpha \circ \Psi(p+q) = p + \beta_1 \circ G\big(\beta_1^{-1}(q), \beta_1^{-1}(r)\big) - r.$$

Ez az egyenlet minden rögzített $r \in \beta_1(U)$ mellet egy Pexider egyenlet, amelynek a CM megoldásait a 2.5. Lemma szolgáltatja:

$$\alpha \circ \Psi(t) = t + b_2(r) \qquad \big(t \in \alpha(X) + \beta_1(U)\big) \tag{3.57}$$

és

$$\beta_1 \circ G\big(\beta_1^{-1}(q), \beta_1^{-1}(r)\big) - r = q + b_2(r) \qquad (q, r \in \beta_1(U)) \tag{3.58}$$

valamilyen $b_2 : \beta_1(U) \to \mathbb{R}$ függvénnyel, amely azért adódik mert a 2.5. Lemmában szereplő b_2 konstans függhet a rögzített r-től. (3.57)-ből azonban rögtön következik, hogy b_2 r-től nem függ, azaz $b_2(r) = b$ valamilyen $b \in \mathbb{R}$ és minden $r \in \beta_1(U)$ esetén. Így (3.57) és (3.58) miatt

$$\Psi(t) = \alpha^{-1}(t + b) \qquad \big(t \in \alpha(X) + \beta_1(U)\big)$$

és

$$G(u, v) = \beta_1^{-1}(\beta_1(u) + \beta_1(v) + b) \qquad (u, v \in U).$$

Ezek után (3.53) és (3.54) a $\beta(u) = \beta_1(u) + b \quad (u \in U)$ definícióval következik (3.56)-ból és ezekből az egyenletekből. □

Megjegyezzük, hogy az $U = X$ és $G = F$ esetben a (3.3) egyenlet a (3.1) egyenletté válik, így tételünkből következik Aczél János 1.7. Tétele.

3.7 Következmény. ([Mak]) *Legyen X és U intervallum és tegyük fel, hogy $(U, +)$ félcsoport. Ha az $F : X \times U \to X$ CM függvény eleget tesz az*

$$F(F(x, u), v) = F(x, u + v) \tag{3.4}$$

transzláció egyenletnek minden $x \in X$ és $u, v \in U$ esetén, akkor van olyan $\gamma : X \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$F(x, u) = \gamma^{-1}(\gamma(x) + u) \qquad \big((x, u) \in X \times U\big). \tag{3.59}$$

B i z o n y í t á s. Alkalmazzuk a 3.6. Tételt a $G(u, v) = u + v \quad (u, v \in U)$ speciális esetben. Ekkor léteznek $\alpha : X \to \mathbb{R}$ és $\beta : U \to \mathbb{R}$ CM függvények, hogy fennáll (3.53) és (3.54). Ez utóbbiból rögtön adódik, hogy β eleget tesz a

$$\beta(u + v) = \beta(u) + \beta(v) \qquad (u, v \in U)$$

Cauchy egyenletnek, amely természetesen Pexider egyenlet is, így a 2.5. Lemma miatt kapjuk, hogy $\beta(u) = cu$, $u \in U$ valamilyen $0 \neq c \in \mathbb{R}$ mellett. Ezért (3.59) a $\gamma(x) = \frac{1}{c}\alpha(x)$, $x \in X$ definícióval következik (3.53)-ból. □

3.8 Következmény. ([Mak]) *Legyen X intervallum és tegyük fel, hogy az $F : X \times X \to X$ függvény eleget tesz az*

$$F(F(x, y), z) = F(x, F(z, y)) \qquad \big((x, y, z) \in X \times X \times X\big) \tag{3.5}$$

Tarski-féle asszociatív törvénynek. Ekkor van olyan $\beta : X \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$F(x, y) = \beta^{-1}(\beta(x) + \beta(y)) \qquad \big((x, y) \in X \times X\big).$$

B i z o n y í t á s. Alkalmazzuk a 3.6. Tétel-t az $U = X$ és $G(y,z) = F(z,y)$, $(y,z) \in X \times X$ speciális esetben. Ekkor az állítás azonnal adódik (3.53)-ból. $\square$

A (3.3) – (3.8) asszociatív típusú egyenletek közül már csak (3.6)-tal foglalkozunk itt részletesen.

3.9 Tétel. ([Mak]) *Legyen X intervallum és tegyük fel hogy az $F : X \times X \to X$ CM függvény eleget tesz az*

$$F(x, F(y,z)) = F(z, F(y,x)) \qquad \big((x,y,z) \in X \times X \times X\big) \tag{3.6}$$

Grassmann-féle asszociatív törvénynek. Ekkor van olyan $\beta : X \to \mathbb{R}$ CM függvény és vannak olyan $\lambda \neq 0$ és μ valós számok, hogy

$$F(x,y) = \beta^{-1}(\lambda^2\beta(x) + \lambda\beta(y) + \mu) \qquad \big((x,y) \in X \times X\big). \tag{3.60}$$

B i z o n y í t á s. Alkalmazzuk ismét a 3.4. Tételt, mint a 3.6. Tétel bizonyításában. Azt kapjuk, hogy

$$F(x,y) = \Psi(\alpha(x) + \beta(y)) \qquad (x, y \in X) \tag{3.61}$$

alkalmas $\alpha, \beta : X \to \mathbb{R}$, $\Psi : \alpha(X) + \beta(X) \to \mathbb{R}$ CM függvényekkel. Ebből és (3.6)-ból

$$\alpha(x) + \beta \circ \Psi(\alpha(y) + \beta(z)) = \alpha(z) + \beta \circ \Psi(\alpha(y) + \beta(x))$$

következik $(x, y, z \in X)$, ezért

$$\beta \circ \Psi(q + r) = \beta \circ \Psi(q + \beta \circ \alpha^{-1}(p)) - p + \alpha \circ \beta^{-1}(r),$$

ha $p, q \in \alpha(X)$ és $r \in \beta(X)$. Ez az egyenlet minden rögzített $p \in \alpha(X)$ mellet egy Pexider egyenlet CM függvényekkel, ezért – a 2.5. Lemma miatt – az adódik, hogy

$$\beta \circ \Psi(t) = b_0(p)t + b_1(p) + b_2(p) \qquad \big(t \in \alpha(X) + \beta(X),\ p \in \alpha(X)\big) \tag{3.62}$$

és

$$\alpha \circ \beta^{-1}(r) = b_0(p)r + b_2(p) \qquad \big(r \in \beta(X),\ p \in \alpha(X)\big) \tag{3.63}$$

alkalmas $b_0 : \alpha(X) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $b_1, b_2 : \alpha(X) \to \mathbb{R}$ függvényekkel. (A 2.5. Lemmában szereplő b_0, b_1, b_2 konstansok függhetnek az átmenetileg rögzített $p \in \alpha(X)$-től.) (3.62)-ből azonban rögtön kapjuk, hogy b_0 – és így a $b_1 + b_2$ függvény is – konstans, ezért – (3.63) miatt – b_2 is, tehát b_1 is konstans. Következésképpen (3.62)-ből és (3.63)-ból kapjuk, hogy

$$\beta \circ \Psi(t) = \lambda t + \mu_1 \qquad \big(t \in \alpha(X) + \beta(X)\big)$$

és

$$\alpha \circ \beta^{-1}(w) = \lambda w + \mu_2 \qquad \big(w \in \beta(X)\big)$$

alkalmas $0 \neq \lambda$ és μ_1, μ_2 valós számokkal. Végül, ezekből az egyenletekből és (3.61)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \beta^{-1}\big(\lambda(\alpha(x)+\beta(y))+\mu_1\big) \\ &= \beta^{-1}\big(\lambda^2\beta(x)+\lambda\beta(y)+\lambda\mu_2+\mu_1\big) \qquad (x,y \in X), \end{aligned}$$

ahonnan a $\mu = \lambda\mu_2 + \mu_1$ definícióval adódik (3.60). □

Megjegyezzük, hogy ha még azt is feltesszük a tételben szereplő F-ről, hogy az

$$x \mapsto F(x,x) \qquad (x \in X)$$

függvény konstans, akkor (3.60)-ból $\lambda = -1$ következik és így szintén (3.60)-ból a $\delta(x) = \beta(x) - \mu$, $x \in X$ definícióval

$$F(x,y) = \delta^{-1}(\delta(x) - \delta(y)) \qquad (x,y \in X)$$

adódik, azaz F „kvázi-kivonás".

A (3.7) és (3.8) egyenletek az előzőekhez hasonlóan kezelhetők: először – felhasználva a 3.4. Tételt – megkapjuk az F CM megoldás lehetséges alakját, amit visszahelyettesítve a (3.7) illetve (3.8) egyenletbe Pexider egyenletekhez jutunk. Ezeket megoldva megkapjuk F „pontos" alakját. Az eredmény a következő:

3.10 Tétel. ([Mak]) *Legyen X intervallum, $F : X \times X \to X$ pedig CM függvény. Ekkor*

(a) *F akkor és csak akkor tesz eleget a*

(3.7) $$F(x,F(y,z)) = F(F(z,x),y) \quad (x,y,z \in X)$$

ciklikus asszociatív törvénynek, ha van olyan $\beta : X \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$F(x,y) = \beta^{-1}\big(\beta(x)+\beta(y)\big) \qquad (x,y \in X)$$

és

(b) *F akkor és csak akkor tesz eleget a*

(3.8) $$F(x,F(y,z)) = F(y,F(x,z)) \qquad (x,y \in X)$$

Hosszú-féle asszociatív törvények, ha vannak olyan $\alpha, \beta : X \to \mathbb{R}$ CM függvények, hogy

$$F(x,y) = \beta^{-1}(\alpha(x)+\beta(y)) \quad (x,y \in X).$$

Megjegyezzük, hogy kiindulva az eredeti (1.7) asszociativitási egyenletből, a változók felcserélésével és a függvényösszetételek természetes módosításaival (F értékeit F vagy első vagy második változója helyére írva) újabb 15 darab asszociativitási egyenlethez juthatunk. Így az egy ismeretlen függvényt tartalmazó asszociativitási egyenletek:

$$
\begin{aligned}
&F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z)) &\quad& F(F(x,y),z)) = F(y,F(x,z))\\
&F(F(x,y),z) = F(z,F(y,x)) && F(F(x,y),z)) = F(z,F(x,y))\\
&F(F(x,y),z) = F(F(y,z),x) && F(F(x,y),z)) = F(F(x,z),y)\\
&F(F(x,y),z) = F(F(y,x),z) && F(F(x,y),z)) = F(F(z,y),x)\\
&F(z,F(x,y)) = F(x,F(y,z)) && F(z,F(x,y)) = F(y,F(x,z))\\
&F(z,F(x,y)) = F(z,F(y,x)) && F(z,F(x,y)) = F(x,F(z,y))\\
&F(z,F(x,y)) = F(F(y,z),x) && F(z,F(x,y)) = F(F(x,z),y)\\
&F(z,F(x,y)) = F(F(y,x),z) && F(z,F(x,y)) = F(F(y,z),x).
\end{aligned}
$$

Ezeket mind vissza lehet vezetni a (3.6) – (3.8) és (1.7) egyenletek valamelyikére (lásd Hosszú [Hos54]), ,,pexiderizált” változataikat pedig a (3.9) egyenletre.

4 Általánosított biszimmetria intervallumokon

A *biszimmetria* fogalma a

$$B_n(x_1,\ldots,x_n)=\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}{n}\right)\tag{4.1}$$

kvázi-arimetrikai illetve az általánosabb

$$L_n(x_1,\ldots,x_n)=\varphi^{-1}(\lambda_1\varphi(x_1)+\cdots+\lambda_n\varphi(x_n))\tag{4.2}$$

súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek jellemzésének problémájából ered (lásd Aczél [Acz47], [Acz48a]). Itt $n\in\mathbb{N}$ rögzített, az $x_1,\ldots,x_n$ változók egy $I\subset\mathbb{R}$ intervallum elemei, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ rögzített súly, azaz $\lambda_k\in\,]\,0,+\infty[\,$, $k=1,\ldots,n$ és $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=1$, továbbá $\varphi:I\to\mathbb{R}$ egy CM függvény. A kvázi-aritmetikai középértéket – egymástól függetlenül – Kolmogorov ([Kol30]) és Nagumo ([Nag30]) jellemezték. Tételükben a kvázi-aritmetikai középértéket egy (M_n) függvénysorozatnak tekintették, ahol

$$M_n:I^n\to\mathbb{R}\qquad (I\subset\mathbb{R}\text{ intervallum})$$

folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő, szimmetrikus függvény minden $n\in\mathbb{N}$ esetén, továbbá teljesül, hogy

$$M_n\text{ reflexív, azaz }M_n(x,\ldots,x)=x,\ \text{ ha }x\in I\text{ és }n\in\mathbb{N}\tag{4.3}$$

valamint

$$M_n(M_k(x_1,\ldots,x_k),\ldots,M_k(x_1,\ldots,x_k),x_{k+1},\ldots,x_n)=M_n(x_1,\ldots,x_n)\tag{4.4}$$

minden $1\le k\le n$, $x_1,\ldots,x_n\in I$ és $2\le n\in\mathbb{N}$ esetén. Ilyen feltételek mellett igazolták (valamivel később de Finetti ([DF31]) is igazolta), hogy van olyan $\varphi:I\to\mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény, hogy $M_n=B_n$ I^n-en minden $n\in\mathbb{N}$-re, ahol B_n a φ segítségével (4.1)-ben definiált függvény.

Nyilvánvaló, hogy (4.4) egy függvényegyenlet-rendszer, amely ráadásul végtelen sok függvényegyenletből áll, így a Kolmogorov-Nagumo-de Finetti féle jellemzési tétel nem alkalmas arra, hogy rögzített $n\in\mathbb{N}$ mellett jellemezze a B_n n-változós kvázi-aritmetikai középértéket. Az is igaz, hogy a (4.2)-ben definiált L_n súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek általában nem elégítik ki (4.4)-et, így azok jellemzési tételeiben (4.4) nem szerepeltethető. Ezeket a ,,szépséghibákat" küszöbölte ki Aczél János ([Acz47], [Acz48a]), aki (4.4) helyett bevezette a

$$B(B(x_{11},\ldots,x_{1n}),\ldots B(x_{n1},\ldots,x_{nn}))=B(B(x_{11},\ldots,x_{n1}),\ldots,B(x_{1n},\ldots,x_{nn}))\tag{4.5}$$

egyenletet. Ennek az egyenletnek minden rögzített n mellett a (4.2)-ben definiált L_n súlyozott kvázi-aritmetikai középérték is megoldása. Valójában (4.5) CM megoldásai

$$B(x_1,\ldots,x_n)=\varphi^{-1}(a_1\varphi(x_1)+\cdots+a_n\varphi(x_n)+b)$$

alakúak tetszőleges $\varphi : I \to \mathbb{R}$ CM függvény és $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ mellett ([Acz48a]). Ennek az állításnak a bizonyítása csak B szimmetriája mellett volt publikálva ([Acz47]), a nem föltétlenül szimmetrikus esetre csak akkor volt bizonyítás, ha $n = 2$ ([Acz48a]). A Fuchs [Fuc50]-ben és [Acz66]-ban közölt eljárásokat nem látszott reményteljesnek kiterjeszteni az $n > 2$ esetre (lásd Aczél [Acz97]). Az első bizonyított eredményt (4.5) folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő és reflexív megoldásaira Münnich, a szerző és Mokken adták 2000-ben ([MMM00]), egy egyszerűbb bizonyítás pedig – amelyet itt is közölni fogunk – Maksa [Mak02]-ben jelent meg. Már magának a (4.4) egyenletnek is vannak közgazdasági interpretációi (lásd Blackorby-Donaldson [BD84], Diewert [Die93]). A (4.5) egyenletnek, illetve az általánosabb

$$\begin{aligned} &G(F_1(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn})) \\ &\qquad = F(G_1(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, G_n(x_{1n}, \ldots, x_{mn})) \end{aligned} \tag{1.1}$$

egyenletnek még inkább, hiszen ez ekvivalens a konzisztens aggregáció 1. fejezetben is tárgyalt problémájával. Ez a probléma akkor született, amikor a biszimmetria egyenletek problémája is – 1946 körül, Aczél [Acz47] illetve Klein [Kle46], Pu [Pu46] és Nataf [Nat48] munkásságának köszönhetően, de a két témakör ,,egymásról nem tudva" – legfeljebb éppen érintkezve (lásd Gorman [Gor68]) – terebélyesedett tovább. A lényegi összetalálkozás Aczél János felismerésének köszönhető, amelynek nyomán az Aczél-Maksa [AM96b] és az Aczél-Maksa-Taylor [AMT97] dolgozatok alapján, az 1. fejezetben leírt módon, biszimmetria egyenletekre igazolt eredmények segítségével megoldásokat lehetett adni a konzisztens aggregáció problémájára. Természetesen a megoldások nem teljesek, sőt fontos függvények kimaradhatnak a megoldások közül, mert nem gyengén szürjektívek. Ezért maradt meg az igény arra, hogy – még az absztrakció szintjének csökkentése árán is – megszabaduljunk a szürjektívitási és egyéb megoldhatósági feltételektől (pl. elérhető elem létezésétől). Amint azt ebben a fejezetben látni fogjuk, ennek a kulcsa a

$$G(F_1(x_{11}, x_{12}), F_2(x_{21}, x_{22})) = F(G_1(x_{11}, x_{21}), G_2(x_{12}, x_{22})) \tag{1.2}$$

ún. 2×2-es általánosított biszimmetria egyenlet CM megoldásainak meghatározása lesz. Ezzel az egyenlettel foglalkoztak differenciálhatósági feltételek mellett (például Hosszú [Hos54]), de általános algebrai stuktúrákon is (például Aczél-Belousov-Hosszú [ABH60], Taylor [Tay73], [Tay78]). Ez utóbbi esetben azonban megoldhatósági feltételeket használtak. Megjegyezzük, hogy (1.2) kvázi-csoport tulajdonságok feltételezése nélküli megoldása nyitott problémaként szerepel Aczél [Acz64]-ben.

E fejezet 1. részében megadjuk (1.2) CM megoldásait, valamint az eredeti – a kétváltozós kvázi-aritmetikai középértékek Aczél-féle jellemzésében szerepet játszó –

$$M(M(x, y), M(u, v)) = M(M(x, u), M(y, v)) \tag{4.6}$$

([Acz48a]-ban már megoldott) egyenletét is. A második részben a többváltozós kvázi-aritmetikai középértékek jellemzése kapcsán foglalkozunk a (4.5) egyenlet CM megoldásainak meghatározásával. Végül a 3. és 4. részben megadjuk (1.1) CM megoldásait, amivel egy újabb választ adunk a konzisztens aggregáció kérdésére. Az első valamint harmadik és negyedik rész eredményei Maksa [Mak99]-ben, a másodiké Maksa [Mak02]-ben jelentek meg.

4.1 A 2×2-es általánosított biszimmetria egyenlet CM megoldásai

4.1 Tétel. ([Mak99]) *Legyenek X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} intervallumok, $F_j : X_{j1} \times X_{j2} \to \mathbb{R}$, $G_k : X_{1k} \times X_{2k} \to \mathbb{R}$ valamint $F : G_1(X_{11}, X_{21}) \times G_2(X_{12}, X_{22}) \to \mathbb{R}$ és $G : F_1(X_{11}, X_{12}) \times F_2(X_{21}, X_{22}) \to \mathbb{R}$ CM függvények. Ekkor a*

$$G(F_1(x_{11}, x_{12}), F_2(x_{21}, x_{22})) = F(G_1(x_{11}, x_{21}), G_2(x_{12}, x_{22})) \tag{1.2}$$

2×2-es biszimmetria egyenlet pontosan akkor áll fenn minden $x_{jk} \in X_{jk}$ $(j, k = 1, 2)$ esetén ha van olyan I intervallum és vannak olyan $\alpha_k : G_k(X_{1k}, X_{2k}) \to \mathbb{R}$, $\gamma_j : F_j(X_{j1}, X_{j2}) \to \mathbb{R}$, $\beta_{jk} : X_{jk} \to \mathbb{R}$ $(j, k = 1, 2)$ és $\varphi : I \to \mathbb{R}$ CM függvények, hogy

$$F(z_1, z_2) = \varphi^{-1}(\alpha_1(z_1) + \alpha_2(z_2)) \quad \big((z_1, z_2) \in G_1(X_{11}, X_{21}) \times G_2(X_{12}, X_{22})\big), \tag{4.7}$$

$$G(y_1, y_2) = \varphi^{-1}(\gamma_1(y_1) + \gamma_2(y_2)) \quad \big((y_1, y_2) \in F_1(X_{11}, X_{12}) \times F_2(X_{21}, X_{22})\big), \tag{4.8}$$

$$F_j(x_{j1}, x_{j2}) = \gamma_j^{-1}(\beta_{j1}(x_{j1}) + \beta_{j2}(x_{j2})) \quad \big((x_{j1}, x_{j2}) \in X_{j1} \times X_{j2}\big), \tag{4.9}$$

$$G_k(x_{1k}, x_{2k}) = \alpha_k^{-1}(\beta_{1k}(x_{1k}) + \beta_{2k}(x_{2k})) \quad \big((x_{1k}, x_{2k}) \in X_{1k} \times X_{2k}\big), \tag{4.10}$$

$(j, k = 1, 2)$.

B i z o n y í t á s. Legyen $x_{12}^0 \in X_{12}$ és $x_{21}^0 \in X_{21}$ rögzített. Az (1.2) egyenlet az $x_{12} = x_{12}^0$ illetve az $x_{21} = x_{21}^0$ helyettesítések után egy-egy – (3.9) alakú – általánosított asszociativitási egyenletté válik. Alkalmazzuk ezekre a 3.4. Tételt. Azt kapjuk, hogy vannak olyan $a_{11}, b_{11} : X_{11} \to \mathbb{R}$, $a_{21} : X_{21} \to \mathbb{R}$, $b_{12} : X_{12} \to \mathbb{R}$, $a_{22}, b_{22} : X_{22} \to \mathbb{R}$ valamint

$$\varphi_1 : a_{11}(X_{11}) + a_{21}(X_{21}) + a_{22}(X_{22}) \to \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \varphi_2 : b_{11}(X_{11}) + b_{12}(X_{12}) + b_{22}(X_{22}) \to \mathbb{R}$$

CM függvények, hogy

$$\begin{aligned} G(F_1(x_{11}, x_{12}^0), F_2(x_{21}, x_{22})) &= F(G_1(x_{11}, x_{21}), G_2(x_{12}^0, x_{22})) \\ &= \varphi_1(a_{11}(x_{11}) + a_{21}(x_{21}) + a_{22}(x_{22})) \end{aligned} \tag{4.11}$$

és

$$\begin{aligned} G(F_1(x_{11}, x_{12}), F_2(x_{21}^0, x_{22})) &= F(G_1(x_{11}, x_{21}^0), G_2(x_{12}, x_{22})) \\ &= \varphi_2(b_{11}(x_{11}) + b_{12}(x_{12}) + b_{22}(x_{22})) \end{aligned} \tag{4.12}$$

teljesül minden $x_{jk} \in X_{jk}$ $(j, k = 1, 2)$ mellett. A fenti egyváltozós CM függvények közötti kapcsolat megállapításához legyen $x_{12} = x_{12}^0$ (4.12)-ben és $x_{21} = x_{21}^0$ (4.11)-ben. Ekkor a baloldalak egyenlőségéből

$$\varphi_1(a_{11}(x_{11}) + a_{21}(x_{21}^0) + a_{22}(x_{22})) = \varphi_2(b_{11}(x_{11}) + b_{12}(x_{12}^0) + b_{22}(x_{22})) \tag{4.13}$$

következik, ha $x_{kk} \in X_{kk}$ $(k = 1, 2)$, amiből pedig

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x_1 + x_2 + a_{21}(x_{21}^0)) - b_{12}(x_{12}^0) = b_{11} \circ a_{11}^{-1}(x_1) + b_{22} \circ a_{22}^{-1}(x_2)$$

adódik minden $x_k \in a_{kk}(X_k)$ $(k = 1, 2)$ esetén. Ez egy Pexider egyenlet ismeretlen CM függvényekkel. Ezért a 2.5. Lemma szerint $b_{kk} \circ a_{kk}^{-1}(x_k) = cx_k + d_k$, ha $x_k \in a_{kk}(X_k)$ valamilyen $0 \neq c \in \mathbb{R}$ és $d_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2)$ mellett. Ezért $b_{kk} = ca_{kk} + d_k$ az X_{kk} intervallumon $(k = 1, 2)$ és így – (4.12) miatt –

$$\begin{aligned} G(F_1(x_{11}, x_{12}), F_2(x_{21}^0, x_{22})) &= F(G_1(x_{11}, x_{21}^0), G_2(x_{12}, x_{22})) \\ &= \varphi_3(a_{11}(x_{11}) + a_{12}(x_{12}) + a_{22}(x_{22})) \end{aligned} \tag{4.14}$$

minden $x_{11} \in X_{11}$, $x_{12} \in X_{12}$ és $x_{22} \in X_{22}$ esetén, ahol

$$a_{12} = \frac{1}{c}(b_{12} + d_1 + d_2) \ X_{12}\text{-n} \quad \text{és} \quad \varphi_3(t) = \varphi_2(ct), \ \text{ha}$$

$$t \in \frac{1}{c}(b_{11}(X_{11}) + b_{12}(X_{12}) + b_{22}(x_{22})) = a_{11}(X_{11}) + a_{12}(X_{12}) + a_{22}(X_{22}).$$

Nyilvánvaló, hogy a_{12} és φ_3 CM függvények. Rögzített $x_{kk}^0 \in X_{kk}$ $(k = 1, 2)$ mellett definiáljuk a K_1, L_1, K_2, L_2 függvényeket az alábbi képletekkel:

$$\begin{aligned} K_1(s) &= G(F_1(x_{11}^0, x_{12}^0), s) && \big(s \in F_2(X_{21}, X_{22})\big), \\ L_1(t) &= F(t, G_2(x_{12}^0, x_{22}^0)) && \big(t \in G_1(X_{11}, X_{21})\big), \\ K_2(t) &= G(t, F_2(x_{21}^0, x_{22}^0)) && \big(t \in F_1(X_{11}, X_{12})\big) \end{aligned}$$

és

$$L_2(s) = F(G_1(x_{11}^0, x_{21}^0), s) \qquad \big(s \in G_2(X_{12}, X_{22})\big).$$

Ekkor (4.11)-ből illetve (4.14)-ből az $x_{11} = x_{11}^0$ és $x_{22} = x_{22}^0$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} K_1 \circ F_2(x_{21}, x_{22}) &= \varphi_1(a_{11}(x_{11}^0) + a_{21}(x_{21}) + a_{22}(x_{22})), \\ L_1 \circ G_1(x_{11}, x_{21}) &= \varphi_1(a_{11}(x_{11}) + a_{21}(x_{21}) + a_{22}(x_{22}^0)) \end{aligned}$$

illetve

$$L_2 \circ G_2(x_{12}, x_{22}) = \varphi_3(a_{11}(x_{11}^0) + a_{12}(x_{12}) + a_{22}(x_{22}))$$

és

$$K_2 \circ F_1(x_{11}, x_{12}) = \varphi_3(a_{11}(x_{11}) + a_{12}(x_{12}) + a_{22}(x_{22}))$$

adódik minden $x_{jk} \in X_{jk}$ $(j, k = 1, 2)$ mellett. Mivel K_1 L_1, K_2 és L_2 CM függvények, ezekből az egyenlőségekből megkapjuk (4.9)-et és (4.10)-et a következő definíciókkal:

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \varphi_3^{-1} \circ K_2 && F_1(X_{11}, X_{12})\text{-n}, && \gamma_2 = \varphi_1^{-1} \circ K_1 && F_2(X_{21}, X_{22})\text{-n}, \\ &\alpha_1 = \varphi_1^{-1} \circ L_1 && G_1(X_{11}, X_{21})\text{-en}, && \alpha_2 = \varphi_3^{-1} \circ L_2 && G_2(X_{12}, X_{22})\text{-n}, \\ &\beta_{11} = a_{11} + a_{22}(x_{22}^0) && X_{11}\text{-en}, && \beta_{12} = a_{12} && X_{12}\text{-n}, \\ &\beta_{21} = a_{21} && X_{21}\text{-en}, && \beta_{22} = a_{11}(x_{11}^0) + a_{22} && X_{22}\text{-n}. \end{aligned}$$

Hátravan még (4.7) és (4.8) igazolása. Ehhez használjuk fel az (1.2) egyenletet és az éppen most meghatározott belső függvények (4.9) – (4.10) alakját. Az adódik, hogy

$$\begin{aligned} &G\big(\gamma_1^{-1}(\beta_{11}(x_{11})+\beta_{12}(x_{12})),\gamma_2^{-1}(\beta_{21}(x_{21})+\beta_{22}(x_{22}))\big)\\ &\quad= G\big(\alpha_1^{-1}(\beta_{11}(x_{11})+\beta_{21}(x_{21})),\alpha_2^{-1}(\beta_{12}(x_{12})+\beta_{22}(x_{22}))\big)\end{aligned}$$

minden $x_{jk}\in X_{jk}\quad(j,k=1,2)$ esetén. Ez pedig az

$$X=\beta_{11}(X_{11}),\ Y=\beta_{12}(X_{12}),\ U=\beta_{21}(X_{21})\quad \text{és}\quad V=\beta_{22}(X_{22})$$

jelölésekkel, valamint a

$$C(p,q)=G\big(\gamma_1^{-1}(p),\gamma_2^{-1}(q)\big)\qquad \big((p,q)\in(X+Y)\times(U+V)\big), \tag{4.15}$$

$$D(s,t)=F\big(\alpha_1^{-1}(s),\alpha_2^{-1}(t)\big)\qquad \big((s,t)\in(X+U)\times(Y+V)\big) \tag{4.16}$$

definíciókkal éppen a

$$C(x+y,u+v)=D(x+u,y+v)\qquad (x\in X,\ y\in Y,\ u\in U,\ v\in V) \tag{2.37}$$

egyenlet. Mivel C és D CM függvények, a 2.16. Tétel szerint azt kapjuk, hogy van olyan $\varphi_0 : X+Y+U+V\to\mathbb{R}$ CM függvény amelyre

$$C(p,q)=\varphi_0(p+q)\quad \text{és}\quad D(s,t)=\varphi_0(s+t) \tag{4.17}$$

teljesül, ha $(p,q)\in(X+Y)\times(U+V)$ és $(s,t)\in(X+U)\times(Y+V)$. Legyen végül $I=\varphi_0(X+Y+U+V)$ és $\varphi=\varphi_0^{-1}$ I-n. Ekkor a (4.17) egyenlőségből valamint a (4.15) – (4.16) definíciókból következik (4.8) és (4.7) is.

A megfordítás számolással igazolható. □

Következményképpen igazoljuk Aczél János alábbi tételét ([Acz48a], [Acz66]):

4.2 Tétel. *Legyen I intervallum, $M : I^2\to\mathbb{R}$ folytonos és mindkét változójában szigorúan növekvő függvény. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$M \textit{ reflexív, azaz } M(x,x)=x,\ \textit{ha } x\in I \tag{4.18}$$

és

$$M(M(x,y),M(u,v))=M(M(x,u),M(y,v))\qquad (x,y,u,v\in I) \tag{4.19}$$

teljesül, azaz M biszimmetrikus. Ekkor van olyan $\varphi : I\to\mathbb{R}$ CM függvény és olyan $0<\lambda<1$ szám, hogy

$$M(x,y)=\varphi^{-1}(\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y))\qquad (x,y\in I), \tag{4.20}$$

azaz M (kétváltozós) súlyozott kvázi-aritmetikai középérték.

B i z o n y í t á s. A (4.19) egyenletnek van értelme, mert a feltételek miatt, ha $x, y \in I$ és $x < y$, akkor $x = M(x,x) < M(x,y) < M(y,y) = y$, ezért $M(x,y) \in I$ is teljesül. Alkalmazzuk a 4.1. Tételt arra az esetre, amikor (1.2)-ben $X_{11} = X_{12} = X_{21} = X_{22} = I$ és $G = F_1 = F_2 = F = G_1 = G_2 = M$. A (4.7) – (4.10)-ben szereplő egyváltozós CM függvényekre a következőket kapjuk: (4.7) és (4.8) miatt

$$\gamma_1(x) = \alpha_1(x) + c, \quad \gamma_2(x) = \alpha_2(x) - c \qquad (x \in I) \tag{4.21}$$

valamilyen $c \in \mathbb{R}$ mellett, ezért (4.9)-ből és (4.10)-ből

$$\beta_{21}(x) = \beta_{12}(x) - c \qquad (x \in I) \tag{4.22}$$

adódik. Felhasználva (4.9)-ben azt, hogy $F_1 = F_2 = M$, továbbá (4.21)-et és (4.22)-t kapjuk, hogy

$$\alpha_1^{-1}(\beta_{11}(x) + \beta_{12}(y) - c) = \alpha_2^{-1}(\beta_{12}(x) + \beta_{22}(y) - c) \qquad (x, y \in I),$$

ami viszont – a szokásos módon – az

$$\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}(u + v - c) = \beta_{12} \circ \beta_{11}(u) + \beta_{22} \circ \beta_{12}^{-1}(v) - c$$

$(u \in \beta_{11}(I),\ v \in \beta_{12}(I))$ Pexider egyenletre vezet. Alkalmazható a 2.5. Lemma és így – többek között – az adódik, hogy $\beta_{12}(x) = b_0\beta_{11}(x) + b_1$ valamilyen $0 \neq b_0 \in \mathbb{R}$ és $b_1 \in \mathbb{R}$ mellett. Ezért (4.9)-et $j = 1$-re alkalmazva, továbbá felhasználva (4.21)-et is

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \alpha_1^{-1}(\beta_{11}(x) + \beta_{12}(y) - c) \\ &= \alpha_1^{-1}(\beta_{11}(x) + b_0\beta_{11}(y) + b_1 - c) \quad (x, y \in I) \end{aligned} \tag{4.23}$$

következik. Ebből a (4.18) reflexivitás miatt

$$\alpha_1(x) = (1 + b_0)\beta_{11}(x) + b_1 - c \qquad (x \in I)$$

adódik. Mivel α_1 CM függvény, $1 + b_0 \neq 0$, így

$$\beta_{11}(x) = \frac{1}{1+b_0}\alpha_1(x) + \frac{c - b_1}{1+b_0} \qquad (x \in I).$$

Ezek után (4.23)-ból azt kapjuk, hogy

$$M(x,y) = \alpha_1^{-1}\left(\frac{1}{1+b_0}\alpha_1(x) + \frac{b_0}{1+b_0}\alpha_1(y)\right) \qquad (x, y \in I).$$

Ebből – mivel M mindkét változójában szigorúan monoton növekvő – $\lambda = \frac{1}{1+b_0} \in]0,1[$ -el és $\varphi = \alpha_1$ -gyel – adódik (4.20). □

4.2 Többváltozós súlyozott kvázi-aritmetikai középértékek jellemzése

Ebben a részben a

$$
\begin{aligned}
&B\big(B(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,B(x_{n1},\dots,x_{nn})\big)\\
&\qquad\qquad = B\big(B(x_{11},\dots,x_{n1}),\dots,B(x_{1n},\dots,x_{nn})\big)
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

egyenlettel foglalkozunk. A rövidség kedvéért azt a kifejezést használjuk, hogy a (4.5) egyenletet a B függvénynek az

$$
\begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n}\\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n}\\
\vdots & & & \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn}
\end{pmatrix}
$$

mátrixra való alkalmazásával kapjuk. Ugyanis, ha B-be a fenti mátrix soraiban álló elemeket helyettesítjük rendre, majd a kapott n darab számot ismét B-be helyettesítjük, akkor (4.5) baloldalát kapjuk. Ha pedig ezt sorok helyett oszlopokkal tesszük, megkapjuk a jobboldalt. Mielőtt e rész fő eredményét bemutatnánk, foglakozunk az

$$
f(\lambda u + (1-\lambda)v) = \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)
\tag{4.24}
$$

úgynevezett Jensen egyenlettel, ahol $\lambda \in]0,1[$ rögzített, $f : J^n \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény (J intervallum, $n \in \mathbb{N}$ rögzített) és (4.24) bármely $u, v \in J^n$ esetén fennáll. (4.24) folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő és reflexív megoldásaira lesz szükségünk. Ezeket a megoldásokat megkaphatnánk (4.24)-nek az $n = 1, 2$ esetekben ismert (lásd Aczél [Acz66]) megoldásaiból indukcióval, mint Münnich-Maksa-Mokken [MMM00]-ban vagy általános eredményekből (lásd Kuczma [Kuc85]-öt a $\lambda = \frac{1}{2}$ esetben és Daróczy-Maksa [DM95]-öt a $\lambda \neq \frac{1}{2}$ esetben). Mi itt azonban egy – indukciót nem használó – közveten bizonyítást adunk.

4.3 Lemma. ([Mak02]) *Legyen J intervallum, $n \in \mathbb{N}$ és $\lambda \in]0,1[$. Tegyük fel, hogy $f : J^n \to \mathbb{R}$ folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő függvény, amely reflexív, azaz*

$$
f(x,\dots,x) = x \qquad (x \in J)
\tag{4.25}
$$

és fennáll (4.24) *minden $u, v \in J^n$ esetén. Ekkor vannak olyan $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in]0,+\infty[$ számok, hogy $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ és*

$$
f(u_1,\dots,u_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \qquad ((u_1,\dots,u_n) \in J^n).
\tag{4.26}
$$

B i z o n y í t á s. Legyen $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in J^n$, $a, b \in J$, $a < b$ és $k \in \{1, \dots, n\}$ rögzített. Integráljuk (4.24) mindkét oldalát $[a, b]$-n v_k szerint. Integráltranszformáció után

$$\frac{1}{1-\lambda} \int\limits_{\lambda u_k+(1-\lambda)a}^{\lambda u_k+(1-\lambda)b} f(\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1, \dots, \overset{k}{\breve{t}}, \dots, \lambda u_n + (1-\lambda)v_n)\, dt$$

$$= \lambda(b-a) f(u_1, \dots, u_k, \dots, u_n) + (1-\lambda) \int\limits_a^b f(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n)\, dv_k,$$

adódik, amiből $\partial_k f$ (f k-adik változója szerinti parciális derivált függvénye) létezése és folytonossága következik. Ezért f folytonosan differenciálható. A (4.24) egyenlőség mindkét oldalát u_k illetve v_k szerint differenciálva

$$\partial_k f(\lambda u + (1-\lambda)v)\lambda = \lambda \partial_k f(u) \quad \text{illetve} \quad \partial_k f(\lambda u + (1-\lambda)v)(1-\lambda) = (1-\lambda)\partial_k f(v)$$

adódik ($u, v \in J^n$, $1 \le k \le n$), ezekből pedig $f'(u) = f'(v)$ következik, azaz f' konstans. Így van olyan $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, hogy

$$f(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k + \lambda_0 \qquad (u = (u_1, \dots, u_n) \in J^n).$$

Ezek után a (4.25) reflexivitásból $\lambda_0 = 0$ és $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ következik. Mivel f minden változójában szigorúan monoton növekvő, $\lambda_k > 0$ minden $1 \le k \le n$ esetén és megkapjuk (4.26)-ot. □

Mivel a fenti lemma állításának a megfordítása is igaz (számolással ellenőrizhető), a 4.3. Lemma a súlyozott számtani középérték egy jellemzésének tekinthető. Most igazoljuk ennek a résznek a fő eredményét.

4.4 Tétel. ([Mak02]) *Legyen I intervallum, $2 \le n \in \mathbb{N}$ rögzített és $B : I^n \to \mathbb{R}$ folytonos és minden változójában szigorúan monoton növekvő függvény. Ekkor B pontosan akkor*

(4.27) *reflexív, azaz $B(x, \dots, x) = x$, ha $x \in I$ és tesz eleget a*

$$\begin{aligned} &B\big(B(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, B(x_{n1}, \dots, x_{nn})\big) \\ &\qquad = B\big(B(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, B(x_{1n}, \dots, x_{nn})\big) \end{aligned} \tag{4.5}$$

$n \times n$-es biszimmetria egyenletnek minden $x_{jk} \in I$ $(j, k \in \{1, \dots, n\})$ mellett, ha van olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ CM függvény és vannak olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]0, +\infty[$ számok, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ és

$$B(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(x_k)\right) \qquad ((x_1, \dots, x_n) \in I^n). \tag{4.28}$$

B i z o n y í t á s. Legyen $x, y, u, v \in I$ és alkalmazzuk B-t az

$$\begin{pmatrix} x & y & \dots & y \\ u & v & \dots & v \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u & v & \dots & v \end{pmatrix}$$

$n \times n$-es mátrixra. Ekkor az

$$M(x, y) = B(x, y, \dots, y) \qquad ((x, y) \in I^2) \tag{4.29}$$

definicióval (4.5)-ből az

$$M\big(M(x, y), M(u, v)\big) = M\big(M(x, u), M(y, v)\big) \qquad (x, y, u, v \in I) \tag{4.19}$$

2×2-es biszimmetria egyenlet következik. Mivel M folytonos, mindkét változójában szigorúan monoton növekvő és $M(x, x) = x$, $x \in I$ ((4.29) és (4.27) miatt), ezért a 4.2. Tétel szerint van olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ CM függvény és olyan $0 < \lambda < 1$ szám, hogy

$$M(x, y) = \varphi^{-1}\big(\lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)\big) \qquad (x, y \in I). \tag{4.20}$$

Legyen most $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in I^n$ és alkalmazzuk a B függvényt az

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & y_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ x_n & y_n & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

mátrixra. Ekkor – (4.29) és (4.20) figyelembevételével – azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &B\big(\varphi^{-1}(\lambda\varphi(x_1) + (1 - \lambda)\varphi(y_1)\big), \dots, \varphi^{-1}\big(\lambda\varphi(x_n) + (1 - \lambda)\varphi(y_n))\big) \\ &\quad = \varphi^{-1}\big(\lambda\varphi(B(x_1, \dots, x_n)) + (1 - \lambda)\varphi(B(y_1, \dots, y_n))\big). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Legyen $J = \varphi(I)$. Ekkor J intervallum és bármely $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in J^n$ esetén az $x_k = \varphi^{-1}(u_k)$, $y_k = \varphi^{-1}(v_k)$ $(k = 1, \dots, n)$ helyettesítésekkel és a

$$f(u_1, \dots, u_n) = \varphi \circ B(\varphi^{-1}(u_1), \dots, \varphi^{-1}(u_n)) \qquad ((u_1, \dots, u_n) \in J^n) \tag{4.31}$$

definícióval (4.30)-ból a (4.24) Jensen egyenlet következik. Így a 4.3. Lemma miatt teljesül (4.26) alkalmas $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in]0, 1[$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ számokkal. Végül (4.31)-ből és (4.26)-ból (4.28) adódik.

A megfordítás számolással igazolható. $\square$

Az előző tétel tehát rögzített változószám mellett jellemzi a súlyozott kvázi-aritmetikai középértékeket. Segítségével új bizonyítás adható a kvázi-aritmetikai középértékeket jellemző alábbi Kolmogorov-Nagumo-de Finetti-féle tételre.

4.5 Tétel. ([Kol30], [Nag30], [DF31]) *Legyen I intervallum. Az $M_n : I^n \to \mathbb{R}$ $(2 \leq n \in \mathbb{N})$ elemekből álló és minden változójában szigorúan monoton növekvő,* (4.3) *reflexív és szimmetrikus függvények sorozata pontosan akkor azonos a* (4.1) *szerint definiált $B_n : I^n \to \mathbb{R}$ függvényekből (n változós kvázi-aritmetikai középértékekből) álló sorozattal $(2 \leq n \in \mathbb{N})$, ahol $\varphi : I \to \mathbb{R}$ CM függvény, ha bármely $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in I$ és $1 \leq k \leq n$ esetén teljesül, hogy*

$$M_n(M_k(x_1, \ldots, x_k), \ldots, M_k(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n) = M_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.4}$$

B i z o n y í t á s. (i) Először megmutatjuk, hogy rögzített $2 \leq n \in \mathbb{N}$ mellett a feltételekből következik – B helyett M_n-re – (4.5) minden $x_{jk} \in I$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ mellett. (A bizonyításnak ez a része Aczél Jánostól származik, én Daróczy Zoltán és Páles Zsolt kollégáimtól hallottam, de – tudomásom szerint – nyomtatásban eddig csak Maksa [Mak02]-ben jelent meg.) Legyen $y_i = M_n(x_{i1}, \ldots, x_{in})$, $i = 1, \ldots, n$ és használjuk fel M_n szimmetrikusságát, továbbá azt, hogy M_n eleget tesz a (4.4) egyenletrendszernek, valamint M_n (4.3) reflexivitását. Ekkor

$$\begin{aligned}
&M_{n^2}(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn}) \\
&\quad = M_{n^2}(y_1, \ldots, y_1, y_2, \ldots, y_2, \ldots, y_n, \ldots, y_n) \\
&\quad = M_{n^2}(y_1, \ldots, y_n, y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_1, \ldots, y_n) \\
&\quad = M_{n^2}(M_n(y_1, \ldots, y_n), M_n(y_1, \ldots, y_n), \ldots, M_n(y_1, \ldots, y_n)) \\
&\quad = M_n(y_1, \ldots, y_n) \\
&\quad = M_n(M_n(x_{11}, \ldots, x_{1n}), M_n(x_{21}, \ldots, x_{2n}), \ldots, M_n(x_{n1}, \ldots, x_{nn})).
\end{aligned}$$

Ebből – M_{n^2} szimmetrikussága miatt – következik (B helyett M_n-re) a (4.5) egyenlet.

(ii) Mivel M_n folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő és reflexív, a 4.4. Tétel következményeként kapjuk, hogy van olyan $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ CM függvény és vannak olyan $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)} \in]0, 1[$ számok, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} = 1$ és

$$M_n(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_n^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \varphi_n(x_k)\right) \tag{4.32}$$

minden $2 \leq n \leq\in \mathbb{N}$ és $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ esetén. Mivel M_n szimmetrikus és φ_n^{-1} injektív, ezért (4.32)-ből bármely $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ esetén kapjuk, hogy

$$\lambda_k^{(n)} \varphi_n(x_k) + \lambda_\ell^{(n)} \varphi_n(x_\ell) = \lambda_k^{(n)} \varphi_n(x_\ell) + \lambda_\ell^{(n)} \varphi_n(x_k),$$

azaz

$$\left(\lambda_k^{(n)} - \lambda_\ell^{(n)}\right)(\varphi_n(x_k) - \varphi_n(x_\ell)) = 0 \qquad (x_k, x_\ell \in I).$$

Ebből pedig az következik, hogy $\lambda_k^{(n)} = \lambda_\ell^{(n)} = \frac{1}{n}$ minden $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Így (4.32)-ből

$$M_n(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_n^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_n(x_k)\right) \tag{4.33}$$

adódik minden $2 \leq n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \in I$ mellett. Legyen $\varphi = \varphi_2$ és használjuk fel a (4.4) egyenletet a $k = 2$ esetben, valamint (4.33)-at. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$2\,\varphi_n \circ M_2(x_1, x_2) = \varphi_n(x_1) + \varphi_n(x_2) \qquad (x_1, x_2 \in I,\ 2 \leq n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$\varphi_n^{-1}\left(\frac{\varphi_n(x_1) + \varphi_n(x_2)}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2}\right) \qquad (x_1, x_2 \in I,\ 2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Ebből

$$2\,\varphi_n \circ \varphi^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right) = \varphi_n \circ \varphi^{-1}(u) + \varphi_n \circ \varphi^{-1}(v) \qquad (u, v \in \varphi(I))$$

következik. Ez ismét egy Pexider egyenlet ismeretlen CM függvényekkel, így a 2.5. Lemma miatt $\varphi_n \circ \varphi^{-1}(u) = b_0^{(n)} u + b_1^{(n)}$, $u \in \varphi(I)$ alkalmas $0 \neq b_0^{(n)} \in \mathbb{R}$ és $b_1^{(n)} \in \mathbb{R}$ $(2 \leq n \in \mathbb{N})$ számokkal, azaz

$$\varphi_n(x) = b_0^{(n)} \varphi(x) + b_1^{(n)} \qquad (x \in I,\ 2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Ezt felhasználva (4.33)-ból számolással adódik, hogy

$$M_n(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\right) \qquad ((x_1, \ldots, x_n) \in I^n,\ 2 \leq n \in \mathbb{N}),$$

ami igazolja, hogy M_n n-változós kvázi-aritmetikai középérték.

A megfordítás számolással bizonyítható. □

4.3 Speciális biszimmetria egyenletek

Ebben és a következő részben az a fő célunk, hogy meghatározzuk a

$$\begin{aligned} &G(F_1(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F_m(x_{m1}, \ldots, x_{mn})) \\ &\qquad = F(G_1(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, G_n(x_{1n}, \ldots, x_{mn})) \end{aligned} \tag{1.1}$$

biszimmetria egyenlet CM megoldásait. Ezt úgy tesszük, hogy először megoldjuk (1.1)-et alkalmas speciális esetekben és a kapott eredményekből következtetünk (1.1) CM megoldásaira. Megjegyezzük, hogy (1.1) néhány speciális esetét már korábban megoldottuk. Például az $n = m = 2$ esetet a 4.1. Tételben, korábban egy még speciálisabb esetet (a (2.38) egyenletet) a 2.16. Tételben, valamint a (2.49) egyenletet ($n = 2$, $F_1, \ldots, F_n$ összeadás) a 2.17. Tételben. Természetesen a (4.5) egyenlet is speciális esete (1.1)-nek. Most először az

$$f(u+v) = g(u) + h(v) \tag{2.16}$$

Pexider egyenlet

$$f(u_1 + \cdots + u_n) = g_1(u_1) + \cdots + g_n(u_n) \tag{4.34}$$

általánosításával foglalkozunk. Ez szintén (1.1) alakú egyenlet ($m = 1$, F_1 és F összeadás).

4.6 Lemma. *Legyen $2 \le n \in \mathbb{N}$ rögzített, legyenek $U_1, \dots, U_n$ intervallumok, $g_k : U_k \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, n)$ és $f : U_1 + \dots + U_n \to \mathbb{R}$ CM függvények. Ekkor* (4.34) *pontosan akkor áll fenn minden $u_k \in U_k$ mellett $(k = 1, \dots, n)$, ha van olyan $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és vannak olyan $b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots)$ számok, hogy*

$$f(t) = at + b_1 + \dots + b_n \qquad (t \in U_1 + \dots + U_n) \quad \text{és} \tag{4.35}$$

$$g_k(u_k) = au_k + b_k \qquad (u_k \in U_k,\ k = 1, \dots, n). \tag{4.36}$$

B i z o n y í t á s. Legyen $i \in \{1, \dots, n\}$ rögzített, $[a, b] \subset U_i$ $(a < b)$ és integráljuk (4.34) mindkét oldalát u_i szerint $[a, b]$-n. Ekkor – transzformáció után –

$$\int\limits_{a+\sum\limits_{k=1}^{n} u_k - u_i}^{b+\sum\limits_{k=1}^{n} u_k - u_i} f(t)dt = \int\limits_a^b g_i(u_i)du_i + (b-a)\left(\sum_{k=1}^{n} g_k(u_k) - g_i(u_i)\right)$$

adódik, ami azt mutatja, hogy g_k folytonosan differenciálható, ha $k \ne i$. Mivel i tetszőleges, így az összes g_k $(k = 1, \dots, n)$ folytonosan differenciálható, ezért – (4.34) miatt – f is. Ezek után (4.34) mindkét oldalát u_k illetve u_ℓ szerint differenciálva

$$g_k'(u_k) = f'(u_1 + \dots + u_n) = g_\ell'(u_\ell)$$

$(k, \ell \in \{1, \dots, n\})$ adódik, amiből már következik (4.36) és – (4.34)-et is figyelembe véve – (4.35) is. A megfordítás számolással igazolható. □

Most megadjuk (1.1) CM megoldásait abban a speciális esetben, amikor $m = 2$ és minden belső függvény összeadás.

4.7 Lemma. ([Mak99]) *Legyen $2 \le n \in \mathbb{N}$, U_{jk} intervallum $(j = 1, 2;\ k = 1, \dots, n)$, legyenek továbbá*

$$C : \mathop{\times}_{k=1}^{n} (U_{1k} + U_{2k}) \to \mathbb{R} \quad \text{és} \quad D : \left(\sum_{k=1}^{n} U_{1k}\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} U_{2k}\right) \to \mathbb{R}$$

CM függvények és tegyük fel, hogy

$$C(u_{11} + u_{21}, \dots, u_{1n} + u_{2n}) = D(u_{11} + \dots + u_{1n}, u_{21} + \dots + u_{2n}) \tag{4.37}$$

teljesül minden $u_{jk} \in U_{jk}$, $(j = 1, 2,\ k = 1, \dots, n)$ mellett. Ekkor van olyan $\Phi : \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{2} U_{jk} \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$C(y_1, \dots, y_n) = \Phi(y_1 + \dots + y_n) \qquad (y_i \in U_{1k} + U_{2k},\ k = 1, \dots, n) \tag{4.38}$$

és

$$D(z_1, z_2) = \Phi(z_1 + z_2) \qquad (z_j \in \sum_{k=}^{n} U_{jk}, \quad j = 1, 2). \tag{4.39}$$

B i z o n y í t á s. Nyilvánvaló, hogy (4.37) a (2.49) egyenlet speciális esete és teljesülnek a 2.17. Tétel feltételei. Ezért alkalmas α, β, φ CM függvényekkel és $a_1, \dots, a_n$ nemzéró valós számokkal fennállnak a (2.50) – (2.53) egyenlőségek, amelyek jelenlegi speciális esetünkben az alábbiak:

$$C(y_1, \dots, y_n) = \varphi(a_1 y_1 + \dots + a_n y_n), \tag{4.40}$$

$$\alpha(u_{11} + \dots + u_{1n}) = a_1 u_{11} + \dots + a_n u_{1n}, \tag{4.41}$$

$$\beta(u_{21} + \dots + u_{2n}) = a_1 u_{21} + \dots + a_n u_{2n}, \tag{4.42}$$

$$D(z_1, z_2) = \varphi(\alpha(z_1) + \beta(z_2)) \tag{4.43}$$

$$\left(y_k \in U_{1k} + U_{2k},\ u_{jk} \in U_{jk} \quad \text{és} \quad z_j \in \sum_{k=1}^{n} U_{jk}\,, \quad j = 1, 2;\ k = 1, \dots, n \right).$$

A (4.41) egyenlet egy speciális alakú (4.34) egyenlet, ezért a 4.6. Lemma miatt $a_1 = \dots = a_n$, ezért a $\Phi(t) = \varphi(a_1 t)$, $t \in \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} U_{jk}$ definícióval (4.40)-ből következik (4.38), továbbá (4.41) – (4.43)-ból következik (4.39). □

Az (1.1) egyenlet CM megoldásaira vonatkozó állítás bizonyítását rögzített $n \geq 2$ mellett $2 \leq m$-szerinti indukcióval kezdjük majd. Ezért kell ismernünk az (1.1) egyenlet $m = 2$

$$G\big(F_1(x_{11}, \dots, x_{1n}), F_2(x_{21}, \dots x_{2n})\big) = F\big(G_1(x_{11}, x_{21}), \dots (G_n(x_{1n}, x_{2n})\big) \tag{4.44}$$

speciális esetének CM megoldásait.

4.8 Tétel. ([Mak99]) *Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$ rögzített, X_{jk} intervallum, $F_j : X_{j1} \times \dots \times X_{jn} \to \mathbb{R}$, $G_k : X_{1k} \times X_{2k} \to \mathbb{R}$ CM függvény, $F_j(X_{j1}, \dots, X_{jn}) = J_j$, $G_k(X_{1k}, X_{2k}) = I_k$, $j = 1, 2$; $k = 1, \dots, n$. Legyenek továbbá $G : J_1 \times J_2 \to \mathbb{R}$ és $F : I_1 \times \dots \times I_n \to \mathbb{R}$ szintén CM függvények. Ekkor a (4.44) egyenlőség pontosan akkor áll fenn minden $x_{jk} \in X_{jk}$ ($j = 1, 2$; $k = 1, \dots, n$) mellett, ha van olyan I intervallum és vannak olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\alpha_k : I_k \to \mathbb{R}$, $\gamma_j : J_j \to \mathbb{R}$ és $\beta_{jk} : X_{jk} \to \mathbb{R}$ CM függvények ($j = 1, 2$; $k = 1, \dots, n$), hogy*

$$F(z_1, \dots, z_n) = \varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(z_k) \right) \qquad ((z_1, \dots, z_n) \in I_1 \times \dots \times I_n), \tag{4.45}$$

$$G(y_1, y_2) = \varphi^{-1}(\gamma_1(y_1) + \gamma_2(y_2)) \quad ((y_1, y_2) \in J_1 \times J_2), \tag{4.46}$$

$$F_j(x_{j1}, \dots, x_{jn}) = \gamma_j^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}(x_{jk}) \right) \tag{4.47}$$

és

$$G_k(x_{1k}, x_{2k}) = \alpha_k^{-1}(\beta_{1k}(x_{1k}) + \beta_{2k}(x_{2k})) \qquad (x_{jk} \in X_{jk}) \tag{4.48}$$

minden $j = 1, 2$ és $k = 1, \dots, n$ esetén.

B i z o n y í t á s. Számolással igazolható, hogy a (4.45) – (4.48)-ban definiált függvények (4.44) CM megoldásai, ha a definíciókban szereplő egyváltozós függvények CM függvények. Ezért csak a megfordítással foglalkozunk, amit n szerinti indukcióval bizonyítunk. Az állítás az $n = 2$ esetben a 4.1. Tétel miatt igaz. Tegyük fel, hogy $n > 2$ és igaz az állítás n helyett $(n-1)$-re. Rögzítsük először az $(x_{1n}, x_{2n}) \in X_{1n} \times X_{2n}$ párt (4.44)-ben. Ekkor – az indukciós feltétel szerint – megkapjuk (4.48)-at az α_k és β_{jk} $(j = 1, 2;\ k = 1, \ldots, n)$ függvények helyett az $a_k : I_k \to \mathbb{R}$ és $b_{jk} : X_{jk} \to \mathbb{R}$ CM függvényekkel $(j = 1, 2;\ k = 1, \ldots, n-1)$. Ezután rögzítsük az $(x_{11}, x_{21}) \in X_{11} \times X_{21}$ párt (4.44)-ben és alkalmazzuk ismét az indukciós feltételt. Ekkor megkapjuk (4.48)-at a $k = n$ esetben is az α_n, β_{1n}, β_{2n} függvények helyett alkalmas $a_n : I_n \to \mathbb{R}$ és $b_{jn} : X_{jn} \to \mathbb{R}$ CM függvényekkel $(j = 1, 2)$. Helyettesítsük a G_k függvények ilyen módon megkapott alakját (4.44)-be. Ekkor

$$
\begin{aligned}
&G(F_1(x_{11}, \ldots, x_{1n}), F_2(x_{21}, \ldots, x_{2n})) \\
&\quad = F\left(a_1^{-1}(b_{11}(x_{11}) + b_{21}(x_{21})), \ldots, a_n^{-1}(b_{1n}(x_{1n}) + b_{2n}(x_{2n}))\right)
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

adódik. Legyen $U_{jk} = b_{jk}(X_{jk})$, $j = 1, 2;\ k = 1, \ldots, n$ és

$$f(t_1, \ldots, t_n) = F(a_1^{-1}(t_1), \ldots, a_n^{-1}(t_n)) \qquad \big(t_k \in U_{1k} + U_{2k}\big), \tag{4.50}$$

$$E = G, \tag{4.51}$$

$$g(u_{11}, \ldots, u_{1n}) = F_1(b_{11}^{-1}(u_{11}), \ldots, b_{1n}^{-1}(u_{1n})) \qquad \big(u_{1k} \in U_{1k}\big), \tag{4.52}$$

$$h(u_{21}, \ldots, u_{2n}) = F_2(b_{21}^{-1}(u_{21}), \ldots, b_{2n}^{-1}(u_{2n})) \qquad \big(u_{2k} \in U_{2k}\big), \tag{4.53}$$

$(k = 1, \ldots, n)$. Ekkor f, E, g és h CM függvények, amelyekre – (4.49) miatt – teljesül (2.49) (m helyett n-re), ezért a 2.17. Tétel szerint

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \varphi^{-1}(c_1 t_1 + \cdots + c_n t_n) \qquad (t_k \in U_{1k} + U_{2k}), \tag{4.54}$$

$$E(y_1, y_2) = \varphi^{-1}(\gamma_1(y_1) + \gamma_2(y_2)) \qquad (y_j \in J_j), \tag{4.55}$$

$$g(u_{11}, \ldots, u_{1n}) = \gamma_1^{-1}(c_1 u_{11} + \cdots + c_n u_{1n}) \qquad (u_{1k} \in U_{1k}), \tag{4.56}$$

$$h(u_{21}, \ldots, u_{2n}) = \gamma_2^{-1}(c_1 u_{21} + \cdots + c_n u_{2n} \qquad (u_{2k} \in U_{2k}) \tag{4.57}$$

alkalmas $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (I intervallum), $\gamma_j : J_j \to \mathbb{R}$ CM függvényekkel és $c_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számokkal $(j = 1, 2;\ k = 1, \ldots, n)$. Definiáljuk az α_k és β_{jk} függvényeket I_k-n illetve X_{jk}-n az $\alpha_k = c_k a_k$ illetve a $\beta_{jk} = c_k b_{jk}$ képletekkel $(j = 1, 2;\ k = 1, \ldots, n)$. Ekkor α_k és β_{jk} CM függvények, továbbá (4.50)-ből és (4.54)-ből következik (4.45), (4.51)-ből és (4.55)-ből következik (4.46), valamint (4.52) – (4.53)-ból és (4.56) – (4.57)-ből kapjuk (4.47)-et. Végül az indukciós feltétel kétszeres alkalmazása után korábban nyert

$$G_k(x_{1k}, x_{2k}) = a_k^{-1}(b_{1k}(x_{1k}) + b_{2k}(x_{2k}))$$

formulából (4.48) is adódik. □

4.4 Az $m \times n$ típusú általánosított biszimmetria egyenlet CM megoldásai

Folytatjuk az (1.1) egyenlet speciális eseteinek tárgyalását abból a célból, hogy végül megoldjuk magát (1.1)-et is a CM függvények körében. Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor (1.1)-ben az összes belső függvény összeadás. Látni fogjuk, hogy ekkor a külső függvények csak változóik összegétől függenek. Ennek igazolásához szükség lesz az alábbi két egyszerű lemmára, amelyek állításai hasonlítanak a kvázi-összegek illesztési eredményeire (lásd a 2.2. részt). Az első lemma általánosabban Maksa [Mak99]-ben található (Lemma 9), itt egy speciálisabb, de a célnak megfelelő állítást közlünk.

4.9 Lemma. *Legyenek $a_k, b_k, t_k \in \mathbb{R}$ olyan számok, melyekre teljesül, hogy $0 < t_k < b_k - a_k$, ha $k = 1, \dots, n$. Legyen továbbá $X_k = [a_k, b_k]$, $Y_k = X_k + t_k$, $k = 1, \dots, n$, $(X_1 \times \cdots \times X_n) \cup (Y_1 \times \cdots \times Y_n) \subset D \subset \mathbb{R}^n$ és $B : D \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\varphi_1 : \sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$ és $\varphi_2 : \sum_{i=1}^{n} Y_k \to \mathbb{R}$ olyan CM függvények, melyekre teljesül, hogy*

$$B(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1 + \cdots + x_n) \qquad \big((x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n\big)$$

és

$$B(y_1, \dots, y_n) = \varphi_2(y_1 + \cdots + y_n) \qquad \big((y_1, \dots, y_n) \in Y_1 \times \cdots \times Y_n\big).$$

Ekkor van olyan $\varphi_3 : \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \cup \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$B(z_1, \dots, z_n) = \varphi_3(z_1 + \cdots + z_n) \qquad \Big((z_1, \dots, z_n) \in \mathop{\times}_{k=1}^{n} (X_k \cup Y_k)\Big). \tag{4.58}$$

Bizonyítás. A feltételek miatt $\varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi)$, ha $\xi \in \sum_{i=1}^{n}(X_k \cap Y_k)$ $= \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$, ezért a φ_3 függvény a

$$\varphi_3(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(\xi), & \text{ha} \quad \xi \in \sum_{k=1}^{n} X_k \\ \varphi_2(\xi), & \text{ha} \quad \xi \in \sum_{k=1}^{n} Y_k \end{cases}$$

formulával jól van definiálva, teljesül rá (4.58) és mivel $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \cap \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$ (pozitív hosszúságú) intervallum, ezért φ_3 CM függvény. □

4.10 Lemma. ([Mak99]) *Legyen X_i intervallum, $K_i^\ell \subset X_i$ kompakt intervallum és $K_i^\ell \subset K_i^{\ell+1}$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ és $\ell \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel továbbá, hogy $X_i = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_i^\ell$,*

$i = 1, \ldots, n$ és $B : \bigtimes_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ CM függvény. Ha minden $\ell \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $\varphi^\ell : \sum_{i=1}^{n} K_i^\ell \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^\ell(x_1 + \cdots + x_n) \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in K_1^\ell \times \cdots \times K_n^\ell\big) \tag{4.59}$$

teljesül, akkor van olyan $\varphi : \sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ CM függvény is hogy

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 + \cdots + x_n) \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n\big). \tag{4.60}$$

B i z o n y í t á s. A feltételek miatt $\varphi^\ell(\xi) = \varphi^{\ell+1}(\xi)$, ha $\xi \in \sum_{i=1}^{n} K_i^\ell$ minden $\ell \in \mathbb{N}$ mellett. Ezért a φ függvény $\varphi = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \varphi^\ell$ definíciója korrekt, $\varphi : \bigtimes_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ CM függvény, amelyre – (4.59) miatt – teljesül (4.60). □

A következő tétel fontos szerepet játszik (1.1) megoldása során.

4.11 Tétel. ([Mak99]) *Legyen $2 \le m \in \mathbb{N}$, $2 \le n \in \mathbb{N}$ rögzített, T_{jk} intervallum $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, $C : \bigtimes_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} T_{jk} \to \mathbb{R}$ és $D : \bigtimes_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T_{jk} \to \mathbb{R}$ CM függvények. Tegyük fel, hogy*

$$C(t_{11} + \cdots + t_{1n}, \ldots, t_{m1} + \cdots + t_{mn}) = D(t_{11} + \cdots + t_{m1}, \ldots, t_{1n} + \ldots t_{mn}) \tag{4.61}$$

teljesül minden $t_{jk} \in T_{jk}$ esetén ($j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$). Ekkor van olyan $\Phi : \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} T_{jk} \to \mathbb{R}$ CM függvény, hogy

$$C(p_1, \ldots, p_m) = \Phi(p_1 + \cdots + p_m) \qquad \left((p_1, \ldots, p_m) \in \bigtimes_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} T_{jk}\right) \tag{4.62}$$

és

$$D(t_1, \ldots, t_n) = \Phi(t_1 + \cdots + t_n) \qquad \left((t_1, \ldots, t_n) \in \bigtimes_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T_{jk}\right). \tag{4.63}$$

B i z o n y í t á s. (i) A 4.10. Lemma miatt elegendő a bizonyítást csak arra az esetre elvégezni, amikor $T_{jk} = [a_{ji}, b_{jk}]$ kompakt intervallum ($j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$). Rögzített n mellett m-szerinti indukcióval bizonyítunk. A 4.7. Lemma szerint igaz az állítás, ha $m = 2$. Tegyük fel, hogy $m > 2$ és igaz az állítás m helyett $(m-1)$-re.

(ii) Legyen $t'_{mk} \in [a_{mk}, b_{mk}]$ rögzített ($k = 1, \ldots, n$),

$$C'(p_1, \ldots, p_{m-1}) = C(p_1, \ldots, p_{m-1}, t'_{m1} + \cdots + t'_{mn}) \qquad \left((p_1, \ldots, p_{n-1}) \in \bigtimes_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} T_{jk}\right)$$

és

$$(4.64) \qquad D'(t_1,\dots,t_n) = D(t_1+t'_{m1},\dots,t_n+t'_{mn}) \qquad \left((t_1,\dots,t_n)\in \mathop{\mathrm{X}}_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{m-1}T_{jk}\right).$$

Ekkor (4.61)-ből a $t_{mk} = t'_{mk}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy a (C', D') párra is fenáll (4.61) m helyett $(m-1)$-el. Így az indukciós feltétel szerint

$$(4.65) \qquad D'(t_1,\dots,t_n) = \Phi_{00}(t_1+\dots+t_n) \qquad \left((t_1,\dots,t_n)\in \mathop{\mathrm{X}}_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}T_{jk}\right)$$

valamilyen $\Phi_{00} : \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m-1}T_{jk} \to \mathbb{R}$ CM függvénnyel. Ennek segítségével definiáljuk a Φ_0 függvényt a $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m-1}T_{jk} + \sum\limits_{k=1}^{n}t'_{mk}$ intervallumon a

$$\Phi_0(t) = \Phi_{00}\left(t - \sum_{k=1}^{n}t'_{mk}\right)$$

képlettel. Ekkor Φ_0 nyilván CM függvény és (4.64) valamint (4.65) miatt

$$D(t_1,\dots,t_n) = \Phi_0(t_1+\dots+t_n) \qquad \left((t_1,\dots,t_n)\in \mathop{\mathrm{X}}_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m-1}T_{jk}+t'_{mk}\right)\right).$$

A Φ_0 függvény függhet $(t'_{m1},\dots,t'_{mn})$ választásától.

(iii) Legyen

$$A_k = a_{1k}+\dots+a_{m-1k} \quad \text{és} \quad B_k = b_{1k}+\dots+b_{m-1k},$$

továbbá válasszuk olyannak az $[a'_{mk}, b'_{mk}] \subset [a_{mk}, b_{mk}]$ intervallumot, hogy

$$(4.66) \qquad 0 < b'_{mk} - a'_{mk} < B_k - A_k$$

teljesüljön minden $k \in \{1,\dots,n\}$ mellett. Alkalmazzuk először a bizonyítás (ii) részét a $t'_{mk} = a'_{mk}$, majd a $t'_{mk} = a'_{mk}$ esetben. Ekkor először azt kapjuk, hogy

$$D(t_1,\dots,t_n) = \Phi_1(t_1+\dots+t_n) \qquad \left((t_1,\dots,t_n)\in \mathop{\mathrm{X}}_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m-1}T_{jk}+a'_{mk}\right)\right)$$

valamilyen $\Phi_1 : \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{m-1}T_{jk}+a'_{mk}\right) \to \mathbb{R}$ CM függvénnyel, majd azt, hogy

$$D(t_1,\dots,t_n) = \Phi_2(t_1+\dots+t_n) \qquad \left((t_1,\dots,t_n)\in \mathop{\mathrm{X}}_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m-1}T_{jk}+b'_{mk}\right)\right)$$

szintén valamilyen $\Phi_2 : \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m-1} T_{jk} + b'_{mk} \right) \to \mathbb{R}$ CM függvénnyel. Mivel (4.66) miatt

$$\begin{aligned} \inf \left(\sum_{j=1}^{m-1} T_{jk} + a'_{mk} \right) &< \inf \left(\sum_{j=1}^{m-1} T_{jk} + b'_{mk} \right) = A_k + b'_{mk} < B_k + a'_{mk} \\ &= \sup \left(\sum_{j=1}^{m-1} T_{jk} + a'_{mk} \right) < \sup \left(\sum_{j=1}^{m-1} T_{jk} + b'_{mk} \right) \end{aligned}$$

minden $k \in \{1, \ldots, n\}$ esetén, ezért alkalmazható a 4.9. Lemma (az $X_k = [A_k + a'_{mk}, B_k + a'_{mk}]$, $t_k = b'_{mk} - a'_{mk}$ választással), így

$$D(t_1, \ldots, t_n) = \Phi_3(t_1 + \cdots + t_n) \qquad \left((t_1, \ldots, t_n) \in \mathop{\mathrm{X}}_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m-1} T_{jk} + [a'_{mk}, b'_{mk}] \right) \right)$$

valamilyen $\Phi_3 : \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m-1} T_{jk} + [a'_{mk}, b'_{mk}] \right) \to \mathbb{R}$ CM függvénnyel.

(iv) Válasszunk ezek után olyan $\left[a^{\ell}_{mk}, b^{\ell}_{mk}\right] \subset [a_{mk}, b_{mk}]$ részintervallumokat, $\ell = 1, \ldots, N$, hogy

$$(4.67) \qquad a^{\ell}_{mk} < a^{\ell+1}_{mk} < b^{\ell}_{mk} < b^{\ell+1}_{mk} \qquad (k = 1, \ldots, n; \quad \ell = 1, \ldots, N-1),$$

valamint $0 < b^{\ell}_{mk} - a^{\ell}_{mk} < B_k - A_k$ ha $k \in \{1, \ldots, n\}$ és $\ell \in \{1, \ldots, N\}$ és $\bigcup_{\ell=1}^{N} \left[a^{\ell}_{mk}, b^{\ell}_{mk}\right] = [a_{mk}, b_{mk}]$ $(k = 1, \ldots, n)$ teljesüljön. Rögzített $\ell \in \{1, \ldots N\}$ mellett alkalmazzuk a bizonyítás (iii) részét az $[a'_{mk}, b'_{mk}]$ intervallum helyett az $[a^{\ell}_{mk}, b^{\ell}_{mk}]$ intervallumra. Ekkor

$$D(t_1, \ldots, t_n) = \Phi_3^{(k)}(t_1 + \cdots + t_n) \qquad \left((t_1, \ldots, t_n) \in \mathop{\mathrm{X}}_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m-1} T_{jk} + \left[a^{\ell}_{mk}, b^{\ell}_{mk}\right] \right) \right)$$

valamilyen $\Phi_3^{\ell} : \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m-1} T_{jk} + \left[a^{\ell}_{mk}, b^{\ell}_{mk}\right] \right) \to \mathbb{R}$ CM fügvényre. (4.67) miatt a 4.9. Lemma ismételten alkalmazható és végül kapunk egy olyan $\Phi : \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T_{jk} \to \mathbb{R}$ CM függvényt, amellyel fennáll (4.63). A (4.62) egyenlőség igazolásához legyen $(p_1, \ldots, p_m) \in \mathop{\mathrm{X}}_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} T_{jk}$. Ekkor $p_j = t_{j1} + \cdots + t_{jn}$ valamilyen $t_{jk} \in T_{jk}$ $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ elemekkel, és így (4.61) és (4.63) miatt

$$\begin{aligned} C(p_1, \ldots, p_m) &= C(t_{11} + \cdots + t_{1n}, \ldots, t_{m1} + \cdots + t_{mn}) \\ &= D(t_{11} + \cdots + t_{m1}, \ldots, t_{1n} + \cdots + t_{mn}) \\ &= \Phi\Big((t_{11} + \cdots + t_{m1}) + \cdots + (t_{1n} + \cdots + t_{mn})\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \Phi\Big((t_{11}+\cdots+t_{1n})+\cdots+(t_{m1}+\cdots+t_{mn})\Big) \\ &= \Phi(p_1+\cdots+p_m), \end{aligned}$$

azaz (4.62) is fennáll. □

Az (1.1) egyenlet megoldásához vezető út utolsó előtti állomása a következő tétel.

4.12 Tétel. ([Mak99]) *Legyen $2 \le n \in \mathbb{N}$, $2 \le m \in \mathbb{N}$, U_{jk} intervallum minden $j = 1, \ldots, m$ és $k = 1, \ldots, n$ esetén,*

$$A : \mathop{\times}_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} U_{jk} \to \mathbb{R}, \qquad C_k : \mathop{\times}_{j=1}^{m} U_{jk} \to \mathbb{R}, \qquad C_k\left(\mathop{\times}_{j=1}^{m} U_{jk}\right) = I_k,$$

$k = 1, \ldots, n$, $B : \mathop{\times}_{i=1}^{n} I_k \to \mathbb{R}$. Tegyük fel hogy A, C_k és B CM függvények minden $k = 1, \ldots, n$ mellett és

$$\begin{aligned} &A(u_{11}+\cdots+u_{1n}, \ldots, u_{m1}+\cdots+u_{mn}) \\ &\qquad = B(C_1(u_{11}, \ldots, u_{m1}), \ldots, C_n(u_{1n}, \ldots, u_{mn})) \end{aligned} \tag{4.68}$$

fennáll minden $u_{jk} \in U_{jk}$, $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ esetén. Ekkor van olyan I intervallum, vannak olyan $\Psi : I \to \mathbb{R}$, $\beta_k : I_k \to \mathbb{R}$, $(k = 1, \ldots, n)$ CM fügvények és olyan $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számok $(j = 1, \ldots, m)$, hogy

$$A(y_1, \ldots, y_m) = \Psi^{-1}(a_1 y_1 + \cdots + a_m y_m) \qquad \left((y_1, \ldots, y_n) \in \mathop{\times}_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} U_{jk}\right), \tag{4.69}$$

$$B(z_1, \ldots, z_n) = \Psi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k(z_k)\right) \qquad \big((z_1, \ldots, z_n) \in \mathop{\times}_{k=1}^{n} I_k\big) \tag{4.70}$$

és

$$C_k(u_{1k}, \ldots, u_{mk}) = \beta_k^{-1}(a_1 u_{1k} + \cdots + a_m u_{mk}) \quad \big(u_{jk} \in U_{jk}\big) \tag{4.71}$$

minden $j = 1, \ldots, m$ és $i = 1, \ldots, n$ esetén.

B i z o n y í t á s. Rögzített m mellett n szerinti indukcióval bizonyítunk. A 2.17. Tételből következik, hogy igaz az állítás, ha $n = 2$. Tegyük fel, hogy $n > 2$ és igaz az állítás n helyett $(n-1)$-re. Először rögzített $u_{1n}, \ldots, u_{mn}$ mellett használjuk az indukciós feltételt. Ekkor (4.68)-ból kapjuk, hogy (4.71) fennáll alkalmas $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számok és $\beta_k : I_k \to \mathbb{R}$ CM függvények mellett minden $u_{jk} \in U_{jk}$ esetén, ha $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ és $j \in \{1, \ldots, m\}$. Legyen másodszor $u_{11}, \ldots, u_{m1}$ rögzített (4.68)-ban. Ekkor ismét az indukciós feltétel miatt

$$C_k(u_{1k}, \ldots, u_{mk}) = \gamma_k^{-1}(b_1 u_{1k} + \cdots + b_m u_{mk}) \tag{4.72}$$

minden $u_{jk} \in U_{jk}$, $j = 1, \dots, m$; $k = 2, \dots, n$ esetén valamilyen $\gamma_k : I_k \to \mathbb{R}$, $(k = 2, \dots, n)$ CM függvényekkel és $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ számokkal. A $k = 2$ esetben (4.71)-ből és (4.72)-ből azt kapjuk, hogy

$$\beta_2^{-1}(a_1u_{12} + \cdots + a_mu_{m2}) = \gamma_2^{-1}(b_1u_{12} + \cdots + b_mu_{m2}),$$

azaz

$$\gamma_2 \circ \beta_2^{-1}(a_1u_{12} + \cdots + a_mu_{m2}) = \frac{b_1}{a_1}(a_1u_{12}) + \cdots + \frac{b_m}{a_m}(a_mu_{m2})$$

minden $b_{j2} \in U_{j2}$ $(j = 1, \dots, m)$ esetén. Ez utóbbi egy speciális (4.34) alakú egyenlet, amelyre alkalmazható a 4.6. Lemma, amiből – többek között – következik, hogy $b_j = ca_j$ minden $j \in \{1, \dots, m\}$-re valamilyen $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mellett. Ezért (4.72)-ből az $i = n$ esetben a $\beta_n(u) = \frac{1}{c}\gamma_n(u)$, $u \in I_n$ definícióval következik, hogy (4.71) fennáll $i = n$-re is. Helyettesítsük ezek után a C_k függvény (4.71) alakját $(k = 1, \dots, n)$ (4.68)-ba. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &A(u_{11} + \cdots + u_{1n}, \dots, u_{m1} + \cdots + u_{mn}) \\ &\quad = B\left(\beta_1^{-1}(a_1u_1 + \cdots + a_mu_{m1}), \dots, \beta_n^{-1}(a_1a_{1n} + \cdots + a_mu_{mn})\right) \end{aligned}$$

minden $u_{jk} \in U_{jk}$, $(j = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n)$ mellett. Ez az egyenlet pedig a $T_{jk} = a_jU_{jk}$ $(j = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n)$,

$$C(p_1, \dots, p_m) = A\left(\frac{1}{a_1}p_1, \dots, \frac{1}{a_m}p_m\right) \qquad \left((p_1, \dots, p_m) \in \mathop{\mathsf{X}}_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} T_{jk}\right) \tag{4.73}$$

és a

$$D(t_1, \dots, t_n) = B\left(\beta_1^{-1}(t_1), \dots, \beta_n^{-1}(t_n)\right) \qquad \left((t_1, \dots, t_n) \in \mathop{\mathsf{X}}_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T_{jk}\right) \tag{4.74}$$

definíciókkal éppen a (4.61) egyenletbe megy át, amelyre alkalmazható a 4.11. Tétel, amely szerint van olyan $\Phi : \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} T_{jk} \to \mathbb{R}$ CM függvény, amellyel fennáll (4.62) és (4.63). Legyen most már $I = \Phi\left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} T_{jk}\right)$ és $\Psi(s) = \Phi^{-1}(s)$, $s \in I$. Ekkor Ψ CM függvény és (4.69) illetve (4.70) következik (4.62)-ből illetve (4.63)-ból, valamint a C és D függvények (4.73) – (4.74) definíciójából. □

Végül a következő tételben megadjuk

$$\begin{aligned} &G(F_1(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, F_m(x_{m1}, \dots, x_{mn})) \\ &\qquad = F(G_1(x_{11}, \dots, x_{m1}), \dots, G_n(x_{1n}, \dots, x_{mn})) \end{aligned} \tag{1.1}$$

CM megoldásait.

4.13 Tétel. ([Mak99]) *Legyen* $2 \le n \in \mathbb{N}$, $2 \le m \in \mathbb{N}$ *rögzített,* X_{jk} *intervallum,* $G_k : X_{1k} \times \cdots \times X_{mk} \to \mathbb{R}$, $G_k(X_{1k}, \ldots, X_{mk}) = I_k$, $F_j : X_{j1} \times \cdots \times X_{jn} \to \mathbb{R}$, $F_j(X_{j1}, \ldots, X_{jn}) = J_j$, G_k *és* F_j *CM függvények minden* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *és* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *esetén. Legyen továbbá* $G : J_1 \times \cdots \times J_m \to \mathbb{R}$ *és* $F : I_1 \times \cdots \times I_n \to \mathbb{R}$ *szintén CM függvény és tegyük fel, hogy* (1.1) *fennáll minden* $x_{jk} \in X_{jk}$, $(j = 1, \ldots, m;$ $k = 1, \ldots, n)$ *esetén. Ekkor van olyan* I *intervallum és vannak olyan* $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\alpha_k : I_k \to \mathbb{R}$, $\gamma_j : J_j \to \mathbb{R}$ *és* $\beta_{jk} : X_{jk} \to \mathbb{R}$ *CM függvények* $(k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$, *hogy*

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(z_k)\right) \qquad \big((z_1, \ldots, z_n) \in I_1 \times \cdots \times I_n\big), \tag{4.75}$$

$$G(y_1, \ldots, y_m) = \varphi^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j(y_j)\right) \qquad \big((y_1, \ldots, y_m) \in J_1 \times \cdots \times J_m\big), \tag{4.76}$$

$$F_j(x_{j1}, \ldots, x_{jn}) = \gamma_j^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}(x_{jk})\right) \tag{4.77}$$

és

$$G_k(x_{1k}, \ldots, x_{mk}) = \alpha_i^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{jk}(x_{jk})\right) \tag{4.78}$$

minden $x_{jk} \in X_{jk}$ *és* $j \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *esetén.*

B i z o n y í t á s. Rögzített n mellett m szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha $m = 2$, akkor az (1.1) egyenlet éppen a (4.44) egyenlet és így a 4.8. Tétel szerint igaz az állítás. Legyen most már $m > 2$ és tegyük fel, hogy igaz az állítás m helyett $(m-1)$-re. Rögzítsük először az $x_{m1}, \ldots, x_{mn}$ változókat (1.1)-ben. Ekkor az indukciós feltétel miatt megkapjuk (4.77)-et (de csak ha $j \in \{1, \ldots, m-1\}$) γ_j és β_{jk} helyett alkalmas $\gamma'_j : J_j \to \mathbb{R}$ és $\beta'_{jk} : X_{jk} \to \mathbb{R}$ függvényekkel $(k = 1, \ldots, n)$. Ezt követően rögzítsük az $x_{11}, \ldots, x_{1n}$ változókat (1.1)-ben és használjuk fel az indukciós feltételt. Így megkapjuk (4.77)-et a $j = m$ esetben is γ_m és β_{mk} helyett alkalmas $\gamma'_m : J_m \to \mathbb{R}$ és $\beta'_{mk} : X_{mk} \to \mathbb{R}$ *CM* függvényekkel $(k = 1, \ldots, n)$. Helyettesítsük most már F_j $(j = 1, \ldots, m)$ ismert alakját (1.1)-be. Ekkor

$$\begin{aligned} &G\left(\gamma_1'^{-1}(\beta'_{11}(x_{11}) + \cdots + \beta'_{1n}(x_{1n})), \ldots, \gamma_m'^{-1}(\beta'_{m1}(x_{m1}) + \cdots + \beta'_{mn}(x_{mn}))\right) \\ &\qquad = F(G_1(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, G_n(x_{1n}, \ldots, x_{mn})) \end{aligned} \tag{4.79}$$

adódik minden $x_{jk} \in X_{jk}$, $j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$ esetén. Az $U_{jk} = \beta'_{jk}(X_{jk})$,

$$A(y_1, \ldots, y_m) = G(\gamma_1'^{-1}(y_1), \ldots, \gamma_m'^{-1}(y_m)) \qquad \left((y_1, \ldots, y_m) \in \mathop{\times}_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} U_{jk}\right) \tag{4.80}$$

és

$$(4.81)\qquad C_k(u_{1k},\dots,u_{mk})=G_k\left(\beta_{1k}^{\prime -1}(u_{1k}),\dots,\beta_{mk}^{\prime -1}(u_{mk})\right)\qquad \big(u_{jk}\in U_{jk}\big)$$

$(j=1,\dots,m;\ k=1,\dots,n)$ és $B=F$ definícióval (4.79) átmegy a (4.68) egyenletbe és a 4.12. Tétel alkalmazható. Ezért van olyan I intervallum és vannak olyan $\varphi: I\to\mathbb{R}$, $\alpha_k: I_k\to\mathbb{R}$, $(k=1,\dots,n)$ CM függvények és olyan $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ számok, hogy

$$(4.82)\ A(y_1,\dots,y_m)\ =\ \varphi^{-1}(a_1y_1+\dots+a_my_m)\qquad \left((y_1,\dots,y_m)\in \mathop{\mathrm{X}}_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}U_{jk}\right),$$

$$(4.83)\ B(z_1,\dots,z_m)\ =\ \varphi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(z_k)\right)\qquad \Big((z_1,\dots,z_n)\in \mathop{\mathrm{X}}_{k=1}^{n} I_k\Big)$$

és

$$(4.84)\ \ C_k(u_{1k},\dots,u_{mk})=\alpha_k^{-1}\left(\sum_{j=1}^{m}a_ju_{jk}\right)\qquad \big(u_{jk}\in U_{jk},\ j=1,\dots,m;\ k=1,\dots,n\big).$$

Így a $\gamma_j(y)=a_j\gamma_j'(y)$, $y\in J$ $(j=1,\dots,m)$ és a $\beta_{jk}(x)=a_j\beta_{jk}'(x)$, $x\in X_{jk}$ $(j=1,\dots,m;\ k=1,\dots,n)$ definíciókkal (4.82)-ből és (4.80)-ból következik (4.76), (4.81)-ből és (4.84)-ből következik (4.78). Továbbá – mivel $B=F$ – (4.83) azonos (4.75)-tel, végül egyszerű számolás mutatja, hogy

$$F_j(x_{j1},\dots,x_{jn})=\gamma_j^{\prime -1}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}'(x_{jk})\right)=\gamma_j^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}(x_{jk})\right)$$

$(x_{jk}\in X_{jk},\ j=1,\dots,m;\ k=1,\dots,n)$, azaz (4.77) is fennáll. □

Számolással igazolható a tétel megfordítása, vagyis a (4.75) – (4.78)-ban definiált F, G, F_j és G_k CM függvények (1.1) megoldásai. A 4.6. Lemma felhasználásával egyszerű megvizsgálni a megoldások (4.75) – (4.78) előállításainak egyértelműségét. A megoldások mindegyike ugyanis ,,többtagú kvázi-összeg”. Ilyenek egyenlőségéről szól az alábbi lemma.

4.14 LEMMA. *Legyenek $X_1,\dots,X_n$ intervallumok $(n\ge 2)$, $\beta_k,\delta_k: X_k\to\mathbb{R}$ CM függvények $(k=1,\dots,n)$ és $\alpha:\beta_1(X_1)+\dots+\beta_n(X_n)\to\mathbb{R}$, $\gamma:\delta_1(X_1)+\dots+\delta_n(X_n)\to\mathbb{R}$ további két CM függvény. A*

$$(4.85)\qquad \alpha\big(\beta_1(x_1)+\dots+\beta_n(x_n)\big)=\gamma\big(\delta_1(x_1)+\dots+\delta_n(x_n)\big)$$

egyenlőség pontosan akkor áll fenn minden $x_k\in X_k$ $(k=1,\dots,n)$ esetén, ha vannak olyan $a,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$ elemek, hogy $a\neq 0$ és

$$(4.86)\qquad \delta_k(x_k)=a\beta_k(x_k)+b_k\qquad (x_k\in X_k,\ k=1,\dots,n)$$

és

$$(4.87)\qquad \gamma(\xi)=\alpha\left(\frac{1}{a}(\xi-b_1-\dots-b_n)\right)\qquad (\xi\in\beta_1(X_1)+\dots+\delta_n(X_n)).$$

B i z o n y í t á s. Tegyük fel először, hogy fennáll (4.85), amiből az $u_k = \beta_k(x_k)$, $k = 1, \ldots, n$ helyettesítés után

$$\gamma^{-1} \circ \alpha(u_1 + \cdots + u_n) = \delta_1 \circ \beta_1^{-1}(u_1) + \cdots + \delta_n \circ \beta_n^{-1}(u_n)$$

következik minden $u_k \in \beta_k(X_k)$, $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ez pedig egy (4.34) alakú egyenlet, amelyre alkalmazva a 4.6. Lemmát könnyen adódik (4.86) és (4.87). A megfordítás számolással igazolható. □

A 4.13. Tétel és a 4.14. Lemma segítségével ismét végezhetünk kompatibilitásvizsgálatokat, azaz vizsgálhatjuk, hogy konkrét termelési függvényekhez (F, F_j, $j = 1, \ldots, m$) milyen aggregáló függvényeket (G, G_k, $k = 1, \ldots, n$) kell választani, ha azt akarjuk, hogy az aggregáció konzisztens legyen, vagyis fennálljon (1.1). Az 1. fejezetben láttuk, hogy CD típusú

$$F(z_1, \ldots, z_n) = a z_1^{c_1} \ldots z_n^{c_n} \qquad (z_k \in]0, +\infty[\,,\ k = 1, \ldots, n) \tag{4.88}$$

($0 < a \in \mathbb{R}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstansok) termelési függvényekhez kizárólag CD típusú aggregáló függvények tartoznak, míg az eredeti

$$F(z_1, \ldots, z_n) = a(c_1 z_1^b + \cdots + c_n z_n^b)^{1/b} \qquad (z_k \in]0, +\infty[\,,\ 1 \le k \le n) \tag{4.89}$$

($a, c_1, \ldots, c_n \in]0, +\infty[\,,\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstansok) CES függvények esetében az ottani eredmények alapján nem volt lehetőség a kérdés tárgyalására, csak a kiterjesztett CES függvényekre tudtunk eredményt megfogalmazni. Mivel a CES függvények CM függvények és az $\alpha(t) = at^{1/b}$, $t \in]0, +\infty[$ valamint a $\beta_k(x) = c_k x^b$, $x \in]0, +\infty[$ $(k = 1, \ldots, n)$ függvényekkel F

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \alpha(\beta_1(z_1) + \cdots + \beta_n(z_n))$$

alakba írható, ezért a 4.14. Lemma alapján meghatározható az összes $(\gamma, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ függvény $(n+1)$-es, amely CM függvényekből áll és amelyre

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \gamma(\delta_1(z_1) + \cdots + \delta_n(z_n))$$

teljesül. Ezek után a 4.13. Tétel (4.76) illetve (4.78) képleteiből megkaphatók az aggregáló függvények. A részletszámításokat mellőzve közöljük, hogy ezek

$$\left(d_0 + d_1 x_1^{b_1} + \cdots + d_m x_m^{b_m}\right)^{1/b}$$

alakúak, ahol $d_0 \ge 0$, $d_1, \ldots, d_m \in]0, +\infty[\,$, $b, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstansok. Látható, hogy ezek csak speciális esetben ($d_0 = 0$, $b_1 = \cdots = b_m = b$) CES függvények. Az eredmény összhangban van az 1. fejezetben a kiterjesztett CES függvényekre kapott eredménnyel. Hasonlóan vizsgálhatók olyan aggregációk is, amikor például a (makroökonómiai) F termelési függvény CD típusú de a (mikroökonómiai) F_j termelési függvények CES típusúak. A fentiekhez hasonló módon kiszámolható, hogy ekkor az aggregáló (G, G_k) függvények

$$a\, e^{c_1 x_1^{b_1} + \cdots + c_m x_m^{b_m}}$$

alakúak, ahol $a > 0$, $c_1, \dots, c_m, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstansok. Ha pedig F CES típusú, F_j pedig CD típusú ($j = 1, \dots, m$), akkor a hozzájuk tartozó aggregáló függvények

$$(d_0 + d_1 \ln x_1 + \cdots + d_m \ln x_m)^{1/b}$$

alakúak, ahol $d_0 \in \mathbb{R}$, $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olyan konstansok hogy a fenti kifejezés valós szám minden $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}_+$ esetén. Ekkor azonban az aggregáló függvények negatív értékeket is felvehetnek, aminek nem biztos, hogy tulajdonítható közgazdaságtani jelentés. Úgy látszik tehát, hogy CES típusú makroökonómiai és CD típusú mikroökonómiai termelési függvényekkel nem valósítható meg konzisztens aggregáció (legalábbis korlátlanul, vagyis amikor a pozitív változók felülről nem korlátozottak).

5 Biszimmetria egyenletek vektor-értékű függvényekkel

Azt mondjuk, hogy az (R, S, P) hármas *választási modell*, ha R egy nem-üres halmaz, S az R halmaz nem-üres véges részhalmazainak halmaza és $P : R \times S \to [0, 1]$. Ha $e \in R$ és $E \in S$ akkor a $P(e, E)$ számot (amelyre úgy lehet gondolni, mint annak valószínűségére, hogy az E-beli véges sok lehetőség közül az e lehetőséget választjuk) *választási valószínűségnek* nevezzük. Ha van olyan $v : R \to \mathbb{R}_+$ függvény (skála), hogy

$$P(e, E) = \frac{v(e)}{\sum\limits_{d \in E} v(d)},$$

ha $e \in E$ és $P(e, E) = 0$, ha $e \in R \setminus E$, akkor kapjuk a Luce-féle választási valószínűségeket (lásd [Luc59], [Luc77]), illetve az (R, S, P) Luce-féle választási modellt. Az Aczél-Maksa-Marley-Moszner [AMMM97] dolgozatban (lásd még Aczél-Maksa [AM97]-t is) elég természetes és gyenge feltételek mellett leírtuk választási modellek egy széles körét és ennek eredményeképpen jellemeztük – erősebb feltételeket használva – a Luce-féle választási modellt is. E fejezet első részében felsoroljuk a felhasznált egyenleteket és egyenlőtlenségeket azok néhány egyszerű következményével együtt, a második részben pedig bemutatjuk a megoldást. Az első rész eredményei Aczél-Maksa-Marley-Moszner [AMMM97]-ben jelentek meg, ezeket Maksa [Mak98]-ban sikerült kiegészíteni. Ez utóbbit közöljük a fejezet második részében. Megjegyezzük, hogy a kétdimenziós (illetve magasabb dimenziós) választási modellek függvényegyenletekkel és egyenlőtlenségekkel való leírását is elvégeztük, az eredmények Aczél-Gilányi-Maksa-Marley [AGMM00]-ban jelentek meg, ezekkel azonban e diszszertációban nem foglalkozunk.

5.1 Egy választási modelleket leíró rendszer és redukciója

Az alábbiakban felsoroljuk azokat az egyenlőtlenségeket és függvényegyenleteket, amelyeket vizsgálatainkban használtunk. Az egyenlőtlenségek a

$$\Gamma_n = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\},$$

$$F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}_+^n \to \Gamma_n, \qquad H = (H_1, \ldots, H_n) : \Gamma_n^m \to \Gamma_n$$

$(2 \leq n \in \mathbb{N},\ 2 \leq m \in \mathbb{N}$ rögzítettek) jelölésekben vannak elrejtve. További függvények, amelyek szerepelnek még a rendszerben:

$$G : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+, \quad M : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+, \quad N : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad \text{és} \quad \Phi :]0, 1[^m \to \mathbb{R}_+.$$

Az egységesebb írásmód kedvéért jelöljük Ψ-vel Γ_n identikus függvényét. Ezek után az egyenletek:

$$\begin{aligned} &F(G(x_{11}, \ldots, x_{m1}), \ldots, G(x_{1n}, \ldots, x_{mn})) \\ &\qquad\qquad = H(F(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F(x_{m1}, \ldots, x_{mn})) \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$(x_{jk} \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n),$$

$$F(\Phi(z_{11},\dots,z_{m1}),\dots,\Phi(z_{1n},\dots,z_{mn})) \tag{5.2}$$
$$= H(\Psi(z_{11},\dots,z_{1n}),\dots,\Psi(z_{m1},\dots,z_{mn}))$$
$$((z_{j1},\dots,z_{jn})\in\Gamma_n,\ \ j=1,\dots,m),$$

$$G(\alpha_1 y_1,\dots,\alpha_m y_m) = M(\alpha_1,\dots,\alpha_m)G(y_1,\dots,y_m) \tag{5.3}$$
$$(\alpha_j, y_j\in\mathbb{R}_+,\ \ j=1,\dots,m),$$

$$F(\alpha z_1,\dots,\alpha z_n) = N(\alpha)F(z_1,\dots,z_n) \qquad (z_k\in\mathbb{R}_+,\ k=1,\dots,n;\ \alpha\in\mathbb{R}_+) \tag{5.4}$$

és még két további feltétel:

$$F\,|\,\Gamma_n \text{ injektív,} \tag{5.5}$$

$$G \quad \text{korlátos valamely } \mathbb{R}_+^n\text{-beli gömbön.} \tag{5.6}$$

Az egyenletek részletes motivációja megtalálható Aczél-Maksa-Marley-Moszner [AMMM97]-ben és Aczél-Maksa [AM97]-ben, itt csak azt jegyezzük meg, hogy F koordinátafüggvényeinek szánjuk a választási valószínűségek szerepét.

Mivel $\sum\limits_{j=1}^{m} F_j$ az azonosan 1 függvény, (5.4)-ből azonnal következik, hogy N azonosan 1, ezért F 0-ad fokú homogén függvény, így parciális függvényei nem lehetnek injektívek. Az (5.1), (5.2) biszimmetria egyenletek kezelésére tehát sem az 1.3. Tétel sem az 1.6. Tétel nem alkalmas. Másrészt világos, hogy F nem is CM függvény, mert nem valós értékű, ezért a 4.13. Tétel sem használható. Másrészt viszont (5.3)-ból és (5.6)-ból következik, hogy

$$G(y_1,\dots,y_m) = b\,y_1^{a_1}\dots y_m^{a_m} \qquad \big((y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}_+^m\big) \tag{5.7}$$

valamilyen $b>0$, $a_,\dots,a_m\in\mathbb{R}$ mellett, továbbá M a G függvény konstansszorosa (lásd Aczél [Acz87]). Így az (5.1) és (5.2) biszimmetria egyenletekből – figyelembe véve, hogy Ψ Γ_n identikus függvénye – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&F\big(G(x_{11},\dots,x_{m1}),\dots,G(x_{1n},\dots,x_{mn})\big)\\
&\quad= H\big(F(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F(x_{m1},\dots,x_{mn})\big)\\
&\quad= H\big(F_1(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F_n(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F_1(x_{m1},\dots,x_{mn}),\\
&\qquad\dots,F_n(x_{m1},\dots,x_{mn})\big)\\
&\quad= F\big(\Phi(F_1(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F_1(x_{m1},\dots,x_{mn})),\dots,\Phi(F_n(x_{11},\dots,x_{1n}),\\
&\qquad\dots,F_n(x_{m1},\dots,x_{mn}))\big).
\end{aligned}$$

Használjuk most fel azt, hogy F 0-ad fokú homogén függvény és $F\,|\,\Gamma_n$ injektív. Ekkor

$$\frac{G(x_{1k},\dots,x_{mk})}{\sum\limits_{\ell=1}^{n} G(x_{1\ell},\dots,x_{m\ell})} = \frac{\Phi(F_k(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F_k(x_{m1},\dots,x_{mn}))}{\sum\limits_{\ell=1}^{n}\Phi(F_\ell(x_{11},\dots,x_{1n}),\dots,F_\ell(x_{m1},\dots,x_{mn}))}$$

adódik minden $x_{jk} \in \mathbb{R}_+$ $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ esetén. Ebből végül – (5.7) miatt – következik, hogy

$$\frac{\prod_{j=1}^{m} x_{jk}^{a_j}}{\sum_{\ell=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{j\ell}^{a_j}} = \frac{\Psi(F_k(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F_k(x_{m1}, \ldots, x_{mn}))}{\sum_{\ell=1}^{n} \Phi(F_\ell(x_{11}, \ldots, x_{1n}), \ldots, F_\ell(x_{m1}, \ldots, x_{mn}))} \tag{5.8}$$

minden $k = 1, \ldots, n$ és $x_{jk} \in \mathbb{R}_+$ $(j = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ és valamely $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén.

Azt kapjuk tehát, hogy az (5.1) – (5.4) egyenletkeből az (5.5) – (5.6) feltételek mellett az (5.8) fügvényegyenlet-rendszer következik az $F_k(x_1, \ldots, x_n)$ választási valószínűségekre. Célunk az, hogy (5.8)-ból „meghatározzuk” F_k-t $(k = 1, \ldots, n)$. Ez [AMMM97]-ben illetve [AM97]-ben abban a két speciális esetben történt meg, amikor $\sum_{j=1}^{m} a_j \neq 0$, azaz az $y \to G(y, \ldots, y)$, $y \in \mathbb{R}_+$ függvény nem konstans és $y \mapsto \Phi(y, \ldots, y)$, $y \in]0, 1[$ CM függvény, illetve amikor $y \mapsto G(y, \ldots, y)$, $y \in R_+$ konstans, de G nem konstans, viszont $\Phi = G$. A következő részben megoldjuk az (5.8) rendszert azt feltételezve, hogy van olyan $1 \leq p \leq m$, hogy $a_p \neq 0$ (azaz G nem konstans) és bármely rögzített $y \in]0, 1[$ mellett az

$$x \mapsto \Phi(y, \ldots, y, \overset{p}{\breve{x}}, y, \ldots, y) \qquad (x \in]0, 1[) \tag{5.9}$$

függvény folytonos és (y-tól függetlenül) ugyanolyan értelemben szigorúan monoton. Az itt közölt eredmények a Maksa [Mak98]-ban megjelentek módosításai.

5.2 Választási valószínűségek származtatása

Szükségünk lesz a következő egyszerű lemmára:

5.1 Lemma. ([Mak98]) *Legyen* $u, v :]0, 1[^m \to \mathbb{R}$ *és*

$$u(x_1, \ldots, x_m) = v(y_1, \ldots, y_m) \tag{5.10}$$

minden olyan $x_j, y_j \in]0, 1[$ *esetén, amelyre még* $x_j + y_j < 1$ *is teljesül,* $j = 1, \ldots, m$. *Ekkor van olyan* $c \in \mathbb{R}$, *hogy*

$$u(x) = v(y) = c \qquad \big(x, y \in]0, 1[^m\big).$$

B i z o n y í t á s. Legyen $a_q = v\big(\frac{1}{q+1}, \ldots, \frac{1}{q+1}\big)$, $q \in \mathbb{N}$. Mivel $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{2}\frac{q}{q+1} < 1$ és $\frac{1}{2}\frac{q}{q+1} + \frac{1}{q+2} < 1$ – kétszer alkalmazva (5.10)-et – azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_q &= v\left(\frac{1}{q+1}, \ldots, \frac{1}{q+1}\right) = u\left(\frac{1}{2}\frac{1}{q+1}, \ldots, \frac{1}{2}\frac{q}{q+1}\right) \\ &= v\left(\frac{1}{q+2} \ldots, \frac{1}{q+2}\right) = a_{q+1} \end{aligned}$$

minden q természetes száma. Ezért $a_q = c$ minden q-ra és valamely c valós számra. Másrészt legyen $x = (x_1, \ldots, x_m) \in]0,1[^m$ tetszőleges. Ekkor van olyan $q \in \mathbb{N}$, hogy $x_j + \frac{1}{q+1} < 1$, $j = 1, \ldots, m$. Így – (5.10) miatt — $u(x) = a_q = c$. Sőt, ha $y = (y_1, \ldots, y_m) \in]0,1[^m$ tetszőleges, akkor van olyan $x = (x_1, \ldots, x_n) \in]0,1[^m$, hogy $x_j + y_j < 1$ $(j = 1, \ldots, m)$, így ismét (5.10) miatt $v(y) = u(x) = c$. □

A következő tétel lehetőséget ad választási valószínűségek konstruálására.

5.2 Tétel. ([Mak98]) *Legyenek $2 \le m$ és $2 < n$ rögzített természetes számok, $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $a = \sum_{j=1}^{m} a_j$, $1 \le p \le m$ olyanok, hogy $a_p \ne 0$ és a $\Phi :]0,1[^m \to \mathbb{R}$ függvénnyel (5.9) szerint definiált függvény bármely $y \in]0,1[$ mellett folytonos és ugyanolyan értelemben szigorúan monoton. Legyen továbbá $(F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}_+^n \to \Gamma_n$. Ekkor (5.8) pontosan akkor áll fenn minden $1 \le k \le n$ és minden $x_{jk} \in \mathbb{R}_+$ $(1 \le j \le m;$ $1 \le k \le n)$ mellett, ha vannak olyan $c_1, \ldots, c_m$, c pozitív számok és van olyan $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}_+$ CM függvény, hogy*

$$(5.11) \qquad c_k^a = 1 \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

$$(5.12) \qquad \Phi(y_1, \ldots, y_m) = c \prod_{j=1}^{m} \varphi(y_j)^{a_j} \qquad ((y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m)$$

és

$$(5.13) \qquad F_k(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}(c_k x_k L(x_1, \ldots, x_n)) \qquad ((x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n)$$

minden $1 \le k \le n$ esetén, ahol $x = L(x_1, \ldots, x_n)$ bármely rögzített $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ mellett az egyetlen megoldása a

$$(5.14) \qquad \sum_{k=1}^{n} \varphi^{-1}(c_k x_k x) = 1$$

egyenletnek.

B i z o n y í t á s. Tegyük fel, hogy (5.8) fennáll. Legyen $1 \le k \le n$ és

$$(5.15) \qquad \varphi_k(t) = \Phi\big(F_k(\overset{1}{\overbrace{1, \ldots, 1}}), \ldots, \overset{p}{\overbrace{t}}, \ldots, F_k(\overset{m}{\overbrace{1, \ldots, 1}})\big)^{\frac{1}{a_p}} \qquad (t \in]0,1[\,).$$

Ekkor $\varphi_k :]0,1[\to \mathbb{R}_+$ CM függvény $(1 \le k \le n)$, sőt – a feltételek miatt – $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ugyanolyan értelemben szigorúan monoton függvények. Másrészt legyen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges és $x_{jk} = 1$, ha $j \ne p$ valamint $x_{pk} = x_k$ (5.8)-ban. Ekkor – figyelembe véve (5.15)-öt – kapjuk, hogy

$$(5.16) \qquad \frac{x_k^{a_p}}{\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^{a_p}} = \frac{\varphi_k(F_k(x_1, \ldots, x_n))^{a_p}}{\sum_{\ell=1}^{n} \varphi_\ell(F_\ell(x_1, \ldots, x_n))^{a_p}} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Ebből az

$$L(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{\sum\limits_{\ell=1}^{n}\varphi_\ell(F_\ell(x_1,\dots,x_n))^{a_p}}{\sum\limits_{\ell=1}^{n}x_\ell^{a_p}}\right)^{\frac{1}{a_p}}\qquad((x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n)$$

definícióval

$$\varphi_k\big(F_k(x_1,\dots,x_n)\big)=x_kL(x_1,\dots,x_n),$$

azaz

$$F_k(x_1,\dots,x_n)=\varphi_k^{-1}(x_kL(x_1,\dots,x_n)) \tag{5.17}$$

következik minden $1\le k\le n$ és $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n$ esetén. Mivel $(F_1,\dots,F_n):\mathbb{R}_+^n\to\Gamma_n$, ezért (5.17)-ből azt kapjuk, hogy minden rögzített $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n$ esetén $x=L(x_1,\dots,x_n)$ megoldása a

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{-1}(x_kx)=1 \tag{5.18}$$

egyenletnek, sőt – a $t\mapsto\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k^{-1}(x_kt)$ függvény szigorú monotonitása miatt – egyetlen megoldása. Nyilvánvaló, hogy (5.17)-ből adódóan

$$\varphi_k^{-1}(x_kL(x_1,\dots,x_n))>0\qquad(k=1,\dots,n) \tag{5.19}$$

is teljesül. Legyen most $(y_{j1},\dots,y_{jn})\in\Gamma_n$ $(j=1,\dots,m)$ tetszőleges. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{-1}\big(\varphi_k(y_{jk})\cdot1\big)=\sum_{k=1}^{n}y_{jk}=1,$$

ezért 1 az egyetlen megoldása – rögzített $1\le j\le m$ és $x_k=\varphi_k(y_{jk})$, $k=1,\dots,n$ mellett – (5.18)-nak. Így $L(\varphi_1(y_{j1}),\dots,\varphi_n(y_{jn}))=1$ és – (5.17) miatt –

$$F_k(\varphi_1(y_{j1}),\dots,\varphi_n(y_{jn}))=\varphi_k^{-1}(\varphi_k(y_{jk}))=y_{jk}$$

$(k=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m)$. Ezt figyelembevéve, (5.8)-ból az $x_{ik}=\varphi_k(y_{ik})$ helyettesítéssel

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\varphi_k(y_{jk})^{a_j}}{\sum\limits_{\ell=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\varphi_\ell(y_{j\ell})^{a_j}}=\frac{\Phi(y_{1k},\dots,y_{mk})}{\sum\limits_{\ell=1}^{n}\Phi(y_{1\ell},\dots,y_{m\ell})} \tag{5.20}$$

következik. Legyen $1<r\le n$ rögzített egész, $(x_1,\dots,x_m),(y_1,\dots,y_m)\in\mathbb{R}_+^m$ olyanok, hogy $x_j+y_j<1$, ha $1\le j\le m$, legyen továbbá

$$y_{jr}=y_j,\ y_{j_1}=x_j\quad\text{és}\quad y_{jk}=\frac{1-x_j-y_j}{n-2},\quad\text{ha } 1\le k\le n,\ k\ne r.$$

(Itt használjuk azt a feltételt, hogy $n > 2$.) Ekkor $(y_{j1}, \dots, y_{jn}) \in \Gamma_n$, ha $j = 1, \dots, m$ és (5.20)-ból először a $k = r$, majd a $k = 1$ esetben kapjuk, hogy

$$\frac{\prod_{j=1}^{m} \varphi_r(y_j)^{a_j}}{\sum_{\ell=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \varphi_\ell(y_{j\ell})^{a_j}} = \frac{\Phi(y_1, \dots, y_m)}{\sum_{\ell=1}^{n} \Phi(y_{1\ell}, \dots, \varphi_{m\ell})},$$

illetve

$$\frac{\prod_{j=1}^{m} \varphi_1(x_j)^{a_j}}{\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_\ell(y_{j\ell})^{a_j}} = \frac{\Phi(x_1, \dots, x_m)}{\sum_{\ell=1}^{n} \Phi(y_{1\ell}, \dots, y_{m\ell})}.$$

A fenti két egyenletből – mivel a megfelelő nevezők azonosak – látható, hogy

$$\frac{\Phi(x_1, \dots, x_m)}{\prod_{j=1}^{m} \varphi_1(x_j)^{a_j}} = \frac{\Phi(y_1, \dots, y_m)}{\sum_{j=1}^{m} \varphi_r(y_j)^{a_j}}. \tag{5.21}$$

Ebből az 5.1. Lemma felhasználásával kapjuk, hogy

$$\Phi(x_1, \dots, x_m) = c \prod_{j=1}^{m} \varphi_1(x_j)^{a_j} \tag{5.22}$$

minden $(x_1, \dots, x_m) \in]0,1[^m$ és valamely $c \in \mathbb{R}_+$ esetén. Ezek után az (5.21) és (5.22) egyenlőségekből

$$\prod_{j=1}^{m} \varphi_1(y_j)^{a_j} = \prod_{j=1}^{m} \varphi_r(y_j)^{a_j} \qquad \big((y_1, \dots, y_m) \in]0,1[^m\big) \tag{5.23}$$

következik minden $1 \leq r \leq n$ mellett. Legyen $t \in]0,1[$, $y_j = \frac{1}{2}$, ha $1 \leq j \leq m$ de $j \neq p$ és $y_p = t$ (5.23)-ban. Ekkor

$$\varphi_1(t)^{a_p} \varphi_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{a - a_p} = \varphi_r(t)^{a_p} \varphi_r \left(\frac{1}{2}\right)^{a - a_p},$$

azaz

$$c_r \varphi_r(t) = \varphi_1(t), \tag{5.24}$$

ahol $c_r = \left(\frac{\varphi_r(\frac{1}{2})}{\varphi_1(\frac{1}{2})}\right)^{\frac{a-a_p}{a_p}} > 0$, $r = 1, \dots, n$. Legyen végül $\varphi = \varphi_1$. Ekkor $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}_+$ CM függvény, (5.10) és (5.11) következik (5.23) – (5.24)-ből illetve (5.22)-ből, továbbá (5.18) és (5.24) miatt a

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi^{-1}(c_k x_k x) = 1$$

egyenlet egyetlen megoldása (bármely rögzített $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ esetén) $x = L(x_1,\dots,x_n)$ és így – (5.17) és (5.24) miatt – teljesül (5.12) is.

A megfordítás (amely az $n=2$ esetben is igaz) egyszerű számolással bizonyítható. $\square$

Alkalmas pozitív konstansokból és $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}_+$ CM függvényből kiindulva lehet tehát $(F_1,\dots,F_n)$ választási valószínűséget konstruálni, amelyek kielégítik az (5.1) – (5.6) feltételeket.

Például, ha $\varphi(y) = y$, $y \in]0,1[$, akkor (5.14)-ből

$$x = L(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\sum\limits_{\ell=1}^{n} c_\ell x_\ell}$$

és így (5.13) miatt a választási valószínűségek

$$F_k(x_1,\dots,x_n) = \frac{c_k x_k}{\sum\limits_{\ell=1}^{n} c_\ell x_\ell}, \qquad ((x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ 1 \le k \le n) \tag{5.25}$$

ahol $(c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{R}_+^n$ konstans. Ez a „β-modell” (lásd Luce [Luc59]), a $c_1 = \dots = c_n = 1$ speciális esetben pedig az eredeti Luce-féle választási modell (illetve az ezekben szereplő választási valószínűségek (lásd Luce [Luc59], [Luc77])). Számolással ellenőrizhető, hogy ha $\varphi(y) = y$, $y \in]0,1[$, $(c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $c \in \mathbb{R}_+$, $b > 0$, $(a_1,\dots,a_m) \in \mathbb{R}^m$, $a_p \neq 0$ (valamely $1 \le p \le m$ esetén), teljesül (5.11), Φ (5.12) szerint van definiálva, G (5.7) szerint van definiálva, akkor fennáll (5.1) – (5.6) is, ahol H (5.2) szerint adott, az M függvény G alkalmas konstansszorosa és $N \equiv 1$.

Egy másik választási modellt kapunk, ha például a $\varphi(y) = \frac{1}{4}\big(\sqrt{1+4y} - 1\big)^2$, $y \in]0,1[$ függvényből indulunk ki. Ekkor a választási valószínűségek

$$F_k(x_1,\dots,x_n) = x_k L(x_1,\dots,x_n) + \sqrt{x_k}\,\sqrt{L(x_1,\dots,x_n)} \qquad ((x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n)$$

$(k = 1,\dots,n)$, ahol

$$L(x_1,\dots,x_n) = \left[\frac{\sqrt{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\Big)^2 + 4\sum\limits_{k=1}^{n} x_k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}}{2\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}}\right]^2 \qquad ((x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n)$$

és ez most a másodfokú egyenletre vezető

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi^{-1}(x_k x) = 1$$

egyenlet x megoldása. (A részleteket lásd Aczél-Maksa-Marley-Moszner [AMMM97]-ben.)

Irodalomjegyzék

[Abe26] N. H. Abel, *Untersuchungen von Funktionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen x und y, wie $f(x,y)$, welche die Eigenschaft haben, dass $f(z,f(x,y))$ eine symmetrische Funktion von x,y und z ist*, J. Reine Angew. Math. **1** (1826), 11–15, Oeuvres complètes de N.H. Abel, Vol. I, Grondahl & Son, Christiania, 1881, pp.61-65.

[ABH60] J. Aczél, V. D. Belousov, and M. Hosszú, *Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 127–136.

[Acz47] J. Aczél, *The notion of mean values*, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem **19** (1947), no. 23, 83–86.

[Acz48a] J. Aczél, *On mean values*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 392–400.

[Acz48b] J. Aczél, *Sur les opérations définies pour nombres réels*, Bull. Soc. Math. France **76** (1948), 59–64.

[Acz50] J. Aczél, *On quasi-linear functional operations*, Publ. Math. Debrecen **1** (1950), 248–250.

[Acz64] J. Aczél, *Some unsolved problems in the theory of functional equations*, Arch. Math. **15** (1964), 435–444.

[Acz65] J. Aczél, *Quasigroups, nets, and nomograms*, Advances in Math. **1** (1965), no. fasc. 3, 383–450 (1965).

[Acz66] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press, New York–London, 1966.

[Acz87] J. Aczél, *A Short Course on Functional Equations (Based Upon Recent Applications to the Social and Behavioral Sciences)*, Reidel, Dordrecht, 1987.

[Acz97] J. Aczél, *Bisimmetry and consistent aggregation: Historical review and recent results*, Choice, Decision and Measurement (A. A. J. Marley, ed.), Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, 1997, pp. 225–233.

[Acz04] J. Aczél, *The associativity equation re-revisited*, Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering (G. Erikson and Y. Zhai, eds.), American Institute of Physics, Melville–New York, 2004, pp. 195–203.

[AD63] J. Aczél and Z. Daróczy, *Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind*, Publ. Math. Debrecen **10** (1963), 171–190.

[AD75] J. Aczél and Z. Daróczy, *On measures of information and their characterizations*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 115.

[AD89] J. Aczél and J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences.

[AFS03] C. Alsina, M. J. Frank, and B. Schweizer, *Problems on associative functions*, Aequationes Math. **66** (2003), 128–140.

[AG85] C. Alsina and R. Ger, *Associative operations close to a given one*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **7** (1985), no. 3, 207–210.

[AG88] C. Alsina and R. Ger, *On associative copulas uniformly close*, Internat. J. Math. Math. Sci. **11** (1988), no. 3, 439–448.

[AGMM00] J. Aczél, A. Gilányi, Gy. Maksa, and A. A. J. Marley, *Consistent aggregation of simply scalable families of choice probabilities*, Math. Social Sci. **39** (2000), no. 3, 241–262.

[ALM96] J. Aczél, R. D. Luce, and Gy. Maksa, *Solutions to three functional equations arising from different ways of measuring utility*, J. Math. Anal. Appl. **204** (1996), no. 2, 451–471.

[AM96a] J. Aczél and Gy. Maksa, *Consistent aggregation and generalized bisymmetry*, Contributions to the Theory of Functional Equations, II (Zamárdi, 1995) (D. Gronau and Zs. Páles, eds.), Grazer Math. Berichte, vol. 327, Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 1996, pp. 1–4.

[AM96b] J. Aczél and Gy. Maksa, *Solution of the rectangular $m \times n$ generalized bisymmetry equation and of the problem of consistent aggregation*, J. Math. Anal. Appl. **203** (1996), no. 1, 104–126.

[AM97] J. Aczél and Gy. Maksa, *Consistent aggregation and generalized bisymmetry*, Trans. Royal Soc. Canada **6** (1997), no. 6, 21–25.

[AM01] J. Aczél and Gy. Maksa, *A functional equation generated by event commutativity in separable and additive utility theory*, Aequationes Math. **62** (2001), no. 1-2, 160–174.

[AMMM97] J. Aczél, Gy. Maksa, A. A. J. Marley, and Z. Moszner, *Consistent aggregation of scale families of selection probabilities*, Math. Social Sci. **33** (1997), no. 3, 227–250.

[AMNP01] J. Aczél, Gy. Maksa, C. T. Ng, and Zs. Páles, *A functional equation arising from ranked additive and separable utility*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 4, 989–998.

[AMP99] J. Aczél, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Solution to a functional equation arising from different ways of measuring utility*, J. Math. Anal. Appl. **233** (1999), no. 2, 740–748.

[AMP01] J. Aczél, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Solution of a functional equation arising in an axiomatization of the utility of binary gambles*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 2, 483–493.

[AMT97] J. Aczél, Gy. Maksa, and M. Taylor, *Equations of generalized bisymmetry and of consistent aggregation: weakly surjective solutions which may be discontinuous at places*, J. Math. Anal. Appl. **214** (1997), no. 1, 22–35.

[Arn63] V. I. Arnold, *On functions of three variables*, Amer. Math. Soc. Transl. **28** (1963), 51–54.

[Baj58] M. Bajraktarević, *Sur une équation fonctionelle aux valeurs moyennes*, Glasnik Mat–Fiz. Astr. **13** (1958), 243–248.

[BD84] C. Blackorby and D. Donaldson, *Social criteria for evaluating population change*, J. Public. Econ. **25** (1984), 13–33.

[Bor04] Z. Boros, *Systems of generalized translation equations on a restricted domain*, Aequationes Math. **67** (2004), 106–116.

[Cox61] R. T. Cox, *The Algebra of Probable Inference*, John Hopkins Press, Baltimore, 1961.

[CP89] R. Craigen and Zs. Páles, *The associativity equation revisited*, Aequationes Math. **37** (1989), no. 2-3, 306–312.

[DF31] B. De Finetti, *Sul concetto di media*, Giornale dell' Instituto, Italiano degli Attuarii **2** (1931), 369–396.

[DF83] W. F. Darsow and M. J. Frank, *Associative functions and Abel–Schröder systems*, Publ. Math. Debrecen **30** (1983), 253–272.

[Die93] W. Diewert, *Symmetric means and choice under uncertanty*, Essays on index number theory, Elsevier, Amsterdam–New York, 1993, pp. 355–521.

[DM95] Z. Daróczy and Gy. Maksa, *Functional equations on convex sets*, Acta Math. Hungar. **68** (1995), no. 3, 187–195.

[DMP] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Functional equations involving means and their Gauss composition*, Proc. Amer. Math. Soc., beküldve.

[DMP04] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *On two variable means weighted by weight functions*, Aequationes Math. **67** (2004), 154–159.

[Eba04] B. R. Ebanks, *Generalized Cauchy difference functional equations*, Aequationes Math. (2004), megjelenés alatt.

[Eic78] W. Eichhorn, *Functional equations in economics*, Applied Mathematics and Computation, vol. 11, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978.

[EM86] B. Ebanks and Gy. Maksa, *Measures of inset information on open domain I: Inset entropies and information functions of all degrees*, Aequationes Math. **30** (1986), 187–201.

[Erd59] J. Erdős, *A remark on the paper "On some functional equations by S. Kurepa"*, Glasnik Math.-Fiz. Astr. **14** (1959), 3–5.

[For95] G.-L. Forti, *Hyers–Ulam stability of functional equations in several variables*, Aequationes Math. **50** (1995), 143–190.

[Fra79] M.J. Frank, *On the simultaneous associativity of $f(x, y)$ and $x + y - f(x, y)$*, Aequationes Math. **19** (1979), 194–226.

[Fuc50] L. Fuchs, *On mean systems*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **1** (1950), 303–320.

[Ger94] R. Ger, *A survey of recent results on stability of functional equations*, Proc. of the 4th International Conference on Functional Equations and Inequalities (Cracow), Pedagogical University of Cracow, 1994, pp. 5–36.

[Gor68] W. Gorman, *The structure of utility functions*, Rev. Econom. Stud. **35** (1968), 367–390.

[Gre64] H. Green, *Aggregation in Economic Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1964.

[Hil00] D. Hilbert, *Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris, 1900*, Gött. Nachr. (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen) (1900), 253–297, Translated for the Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **37** (1902), no. 4, 407-436.

[HLP34] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934, (first edition), 1952 (second edition).

[Hos54] M. Hosszú, *Some functional equations related with the associative law*, Publ. Math. Debrecen **3** (1954), 205–214.

[Hos67] M. Hosszú, *Néhány többváltozós függvényegyenlet általánosítása*, Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei, Miskolc **15** (1967), 47–60.

[Hos71] M. Hosszú, *On the functional equation* $f(x+y,z)+f(x,y) = f(x,y+z)+f(y,z)$, Period. Math. Hungar. **1** (1971), 213–216.

[Hye41] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **27** (1941), 222–224.

[Jár96] A. Járai, *Regularity properties of functional equations*, Leaflets in Mathematics, vol. 4, Janus Pannonius University, Pécs, 1996.

[Jár99] A. Járai, *Többváltozós függvényegyenletek regularitási tulajdonságai*, Akadémiai doktori értekezés, Informatikai Intézet, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1999.

[Jár04] A. Járai, *Regularity properties of functional equations in several variables*, Adv. Math. (Dordrecht), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[JKT68] B. Jessen, J. Karpf, and A. Thorup, *Some functional equations in groups and rings*, Math. Scand. **22** (1968), 257–265.

[JMP] A. Járai, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *On Cauchy-differences that are also quasisums*, Publ. Math. Debrecen, megjelenés alatt.

[JMP03] A. Járai, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *24. Remark (To J. Aczél's 3. Problem) (in Report of Meeting)*, Aequationes Math. **65** (2003), 314–315.

[Kim73] C. H. Kimberling, *On a class of associative functions*, Publ. Math. Debrecen **20** (1973), 21–39.

[Kle46] L. Klein, *Remarks on the theory of aggregation*, Econometrica **14** (1946), 303–313.

[Kol30] A. Kolmogorov, *Sur la notion de la moyenne*, Rend. Accad. dei Lincei (6) **12** (1930), 388–391.

[Kol63] A. N. Kolmogorov, *On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition*, Amer. Math. Soc. Transl. **28** (1963), 55–59.

[Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[Laj74] K. Lajkó, *Special multiplicative deviations*, Publ. Math. Debrecen **21** (1974), 39–45.

[Los99] L. Losonczi, *Equality of two variable weighted means: reduction to differential equations*, Aequationes Math. **58** (1999), no. 3, 223–241.

[Luc59] R.D. Luce, *Individual choice behavior*, Wiley, New York, 1959.

[Luc77] R.D. Luce, *The choice axiom after twenty years*, J. Math. Psychol. **15** (1977), 215–235.

[Luc00] R. D. Luce, *Utility of Gains and Losses: Measurement-Theoretical and Experimantal Approaches*, Lawrence Erlbaum Publishers, London–Mahwah–New Jersey, 2000.

[Mak] Gy. Maksa, *CM solutions of some functional equations of associative type*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math., megjelenés alatt.

[Mak77] Gy. Maksa, *On the functional equation* $f(x+y)+g(xy)=h(x)+h(y)$, Publ. Math. Debrecen **24** (1977), no. 1-2, 25–29.

[Mak82] Gy. Maksa, *Solution on the open triangle of the generalized fundamental equation of information with four unknown functions*, Utilitas Math. **21** (1982), 267–282.

[Mak97] Gy. Maksa, *A konzisztens aggregáció problémája és a biszimmetria függvényegyenlete*, KLTE MFK Tud. Közl. **23** (1997), 80–84.

[Mak98] Gy. Maksa, *The solution of a system of functional equations related to selection probabilities*, Publ. Math. Debrecen **52** (1998), no. 3-4, 547–557.

[Mak99] Gy. Maksa, *Solution of generalized bisymmetry type equations without surjectivity assumptions*, Aequationes Math. **57** (1999), no. 1, 50–74.

[Mak00] Gy. Maksa, *The generalized associativity equation revisited*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **17** (2000), 175–180, Dedicated to Professor Zenon Moszner on his 70th birthday.

[Mak01] Gy. Maksa, *Biszimmetria-egyenletek*, Közgyűlési előadások, 2000. május, vol. II, Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 2001, pp. 433–450.

[Mak02] Gy. Maksa, *Jensen's equation and bisymmetry*, Publ. Math. Debrecen **61** (2002), no. 3-4, 663–669.

[Mak04] Gy. Maksa, *Quasisums and generalized associativity*, Aequationes Math. (2004), megjelenés alatt.

[MMM99] Á. Münnich, Gy. Maksa, and R. J. Mokken, *Collective judgement: combining individual value judgements*, Math. Social Sci. **37** (1999), no. 3, 211–233.

[MMM00] Á. Münnich, Gy. Maksa, and R. J. Mokken, *n-variable bisection*, J. Math. Psychol. **44** (2000), no. 4, 569–581.

[MMP00] Gy. Maksa, A. A. J. Marley, and Zs. Páles, *On a functional equation arising from joint-receipt utility models*, Aequationes Math. **59** (2000), no. 3, 273–286.

[MN86] Gy. Maksa and C. T. Ng, *The fundamental equation of information on open domain*, Publ. Math. Debrecen **33** (1986), no. 1-2, 9–11.

[MP04] Gy. Maksa and Zs. Páles, *On a composite functional equation arising in utility theory*, Publ. Math. Debrecen **65** (204), no. 1-2, 215–220.

[Nag30] M. Nagumo, *Über eine Klasse der Mittelwerte*, Jap. Jour. of Math. **7** (1930), 71–79.

[Nat48] A. Nataf, *Sur la possibilité de la construction de certains macromodèles*, Econometrica **17** (1948), 232–244.

[Ng87] C. T. Ng, *Functions generating Schur-convex sums*, General Inequalities, 5 (Oberwolfach, 1986) (W. Walter, ed.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 80, Birkhäuser, Basel–Boston, 1987, pp. 433–438.

[Pál94] Zs. Páles, *Bounded solutions and stability of functional equations for two variable functions*, Results Math. **26** (1994), no. 3-4, 360–365.

[Pál98a] Zs. Páles, *11. Remark (to 3. Problem of J. Aczél) (in Report of Meeting)*, Aequationes Math. **56** (1998), 306–307.

[Pál98b] Zs. Páles, *23. Remark (Solution to a problem of J. Aczél) (in Report of Meeting)*, Aequationes Math. **56** (1998), 312–314.

[Pál99] Zs. Páles, *Újabb módszerek a függvényegyenletek és a függvényegyenlőtlenségek elméletében*, Akadémiai doktori értekezés, Matematikai és Informatikai Intézet, Kossuth L. Tudományegyetem, Debrecen, 1999.

[Pál02] Zs. Páles, *Problems in the regularity theory of functional equations*, Aequationes Math. **63** (2002), no. 1-2, 1–17.

[Pál03] Zs. Páles, *A regularity theorem for composite functional equations*, Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 591–604.

[Pex03] J. V. Pexider, *Notiz über funktionaltheoreme*, Monatsh. Math. Phys. **14** (1903), 293–301.

[Pok78] F. Pokropp, *The functional equation of aggregation*, Functional Equations in Economics (W. Eichhorn, ed.), Addison-Wesley, Reading, 1978, pp. 122–139.

[Pu46] S. S. Pu, *A note on macroeconomics*, Econometrica **14** (1946), 299–302.

[RB87] F. Radó and J. A. Baker, *Pexider's equation and aggregation of allocations*, Aequationes Math. **32** (1987), no. 2-3, 227–239.

[Rim76] J. Rimán, *On an extension of Pexider's equation*, Zbornik Rad. Mat. Inst. Beograd (N.S.) **1(9)** (1976), 65–72, Symposium en Quasigroupes et Équations Fonctionnelles (Belgrade-Novi Sad, 1974).

[RN55] C. Ryll-Nardzewski, *On superpositions of functions*, Colloq. Math. **3** (1955), 185.

[RV73] A. W. Roberts and D. E. Varberg, *Convex Functions*, Academic Press, New York–London, 1973.

[SA83] B. Schweizer and Sklar A., *Probabilistic Metric Spaces*, Nort-Holland, New York–Amsterdam–Oxford, 1983.

[Sie34] W. Sierpiński, *Remarques sur les fonctions plusieurs variables réelles*, Prace Mat.-Fiz. **41** (1934), 171–175.

[Sie58] W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, Monografie Matematiczne, vol. 34, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958.

[Szék95] L. Székelyhidi, *Stability properties of functional equations in several variables*, Publ. Math. Debrecen **47** (1995), no. 1-2, 95–100.

[Tay73] M. Taylor, *Certain functional equations on groupoids weaker than quasigroups*, Aequationes Math. **9** (1973), 23–29.

[Tay75] M. Taylor, *R- and T- groupoids: A generalization of groups*, Aequationes Math. **12** (1975), 242–248.

[Tay78] M. Taylor, *On the generalized equation of associativity and bisymmetry*, Aequationes Math. **17** (1978), 154–163.

[vDM87] J. van Daal and A. Merkies, *The problem of aggregation of individual economic relations: Consistency and representativity results in a historical perspective*, Measurement in Economics, Physica Verlag, Heidelberg, 1987, pp. 607–637.

[vS93] B. von Stengel, *Closure properties of independence concepte for continuous utilities*, Math. Oper. Res. **18** (1993), 346–389.

[Wri54] E. M. Wright, *An inequality for convex functions*, Amer. Math. Monthly **61** (1954), 620–622.

NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ

Tartalom