Integrálható modellek és az AdS/CFT megfeleltetés

Bajnok Zoltán
tudományos főmunkatárs
Magyar Tudományos Akadémia
Elméleti Fizikai Kutatócsoport

MTA doktori értekezés

Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

I. Bevezetés **5**

II. Integrálható modellek periodikus peremfeltétellel **13**

1. Integrálható modellek klasszikusan **17**
1.1. A klasszikus sine-Gordon modell . . . 17
1.1.1. A sinh-Gordon elmélet . . . 18
1.1.2. A Klein-Gordon egyenlet, mint a gyenge csatolású limesz . . . 18
1.1.3. A sine-Gordon egyenlet sztatikus megoldásai . . . 19
1.1.4. Többrészecskés megoldások, időkésések . . . 20
1.1.5. Integrálhatóság, megmaradó töltések . . . 21

2. Integrálható modellek kvantálása **23**
2.1. Szemiklasszikus megfontolások: fázistolás . . . 23
2.2. Kvantálás a Klein-Gordon elméletre alapozva . . . 24
2.2.1. A szabad modell kvantálása . . . 25
2.2.2. Perturbatív definíció . . . 26
2.2.3. Szórásmátrix, redukciós formulák . . . 27
2.2.4. A szórásmátrix analitikus szerkezete . . . 29
2.3. Az önmegoldó kvantálás . . . 30
2.3.1. Aszimptotikus állapotok, szórásmátrix . . . 30
2.3.2. A szórásmátrix tulajdonságai . . . 31
2.3.3. A Zamolodchikov-Fateev algebra . . . 33
2.3.4. Egyszerű modellek az önmegoldó programból . . . 33
2.3.5. A sine-Gordon modell S-mátrixa . . . 34
2.4. Korrelációs függvények . . . 36
2.5. Az operátorok alaktényezőinek önmegoldó programja . . . 36
2.5.1. Az alaktényezők definíciója . . . 36
2.5.2. Az alaktényező axiómák . . . 37
2.5.3. Megoldások alaktényezőkre . . . 38
2.5.4. A sinh-Gordon és Lee-Yang modellek alaktényezői . . . 39
2.5.5. Korrelációs függvények . . . 41

3. Kvantumtérelméletek véges térfogatban **43**
3.1. Szabad spektrum véges térfogatban . . . 43
3.2. Bethe-Yang egyenletek . . . 44
3.2.1. A sinh-Gordon elmélet . . . 44
3.2.2. A sine-Gordon elmélet és kapcsolata az XXZ spinlánccal . . . 45
3.3. Az alapállapot Lüscher korrekciója . . . 47

3.4. Az alapállapot egzakt leírása . . . 48
3.5. Gerjesztett állapotok egzakt leírása analitikus elfolytatással . . . 50
3.6. Sokrészecskés állapotok Lüscher korrekciója . . . 51
3.6.1. A nemdiagonális modellek sokrészecskés állapotainak Lüscher korrekciója . . . 52

4. AdS/CFT, mint integrálható modell 53
4.1. Klasszikus integrálhatóság . . . 54
4.2. Kvantumelmélet végtelen térfogatban . . . 55
4.2.1. Lagrange-i kvantálási keret . . . 55
4.2.2. Az önmegoldó keret . . . 55
4.3. AdS/CFT véges térfogatban . . . 61
4.3.1. Sokrészecskés állapotok Lüscher korrekciója . . . 62
4.3.2. Általános állapot vezető Lüscher korrekciója . . . 66
4.3.3. Konishi operátor vezető utáni rendű korrekciója . . . 71

III. Peremes integrálható modellek 73

5. Peremes integrálható modellek klasszikusan 77
5.1. A klasszikus sine-Gordon modell . . . 77

6. Peremes modellek kvantumelmélete 81
6.1. Lagrange-i kvantálás . . . 81
6.2. Önmegoldó kvantálás . . . 86
6.2.1. Aszimptotikus állapotok, reflexiós mátrix . . . 86
6.2.2. A reflexiós mátrix tulajdonságai . . . 86
6.2.3. Reflexiós faktorok a sinh-Gordon és Lee-Yang modellre . . . 88
6.2.4. A peremes sine-Gordon modell . . . 89
6.3. Korrelációs függvények . . . 93
6.4. Önmegoldó program a peremes alaktényezőkre . . . 95
6.4.1. Az alaktényező axiómák megoldásai . . . 97

7. Peremes kvantumtérelméletek véges térfogatban 103
7.1. Peremes Bethe-Yang egyenletek . . . 103
7.2. Az alapállapot Lüscher korrekciója . . . 104
7.3. Az alapállapot egzakt leírása: peremes TBA . . . 106
7.4. Gerjesztett állapotok egzakt leírása analitikus elfolytatással . . . 107

IV. Összefoglalás, kitekintés 109

Irodalomjegyzék 117

I. rész

Bevezetés

Motiváció

Két dimenziós kvantumtérelméletek a fizika számos területén fontos szerepet játszanak. „Játékmodellnek” használhatjuk őket elvi kérdések megértésére és megválaszolására. Segítségükkel új módszereket fejleszthetünk ki, vagy szokásos eljárások alkalmazhatósági körét vizsgálhatjuk egyszerűsített körülmények között. Mindezen elméleti jelentőségek mellett még közvetlen fizikai relevanciájuk is van:

- Bizonyos, erősen anizotrop szilárd testekben a rendszer tényleges dimenziója lecsökken és a két, vagy esetleg egy dimenziós leírás jó közelítésnek bizonyul. Az is előfordulhat, hogy a releváns fizikai jelenségek csak egy koordinátától függenek, mert a rendszer eltolásinvariáns a többi irányban. Ilyen például a Casimir effektus két végtelen lap között [20].

- Kritikus rendszerek univerzális viselkedést mutatnak. Az egyes univerzalitási osztályok sokszor tartalmaznak két dimenziós modelleket, így az olyan univerzális tulajdonságok, mint a kritikus exponensek, vizsgálhatóak kétdimenziós konform invariáns kvantumtérelméletekben [29]. Sőt, ennél többet is mondhatunk: a kritikus pont környékén a rendszereket sok esetben a konform modell integrálható perturbációja írja le.

- Integrálható két dimenziós modellek gyümölcsöző alkalmazási területe manapság az AdS/CFT megfeleltetés [56]. A megfeleltetés egy sejtés, mely az Anti de Sitter görbült téren mozgó szuperhúr elméletét (beleértve a kvantumgravitációt is) kapcsolja össze a négy dimenziós maximálisan szuperszimmetrikus (konform) mértékelmélettel. A megfeleltetés jelentősége abban áll, hogy a húrelmélet egy kétdimenziós integrálható modellel írható le, így annak megoldása lehetőséget teremt egyrészről a kvantumgravitáció vizsgálatára, másrészről megérthetjük segítségével az erősen kölcsönható négy dimenziós mértékelméleteket is. Ez azért is fontos, mivel az elemi részecskék erős kölcsönhatását leíró kvantumszíndinamika is ilyen elmélet, melynek kielégítő megoldása a mai napig várat magára.

Célunk tehát egyrészről kétdimenziós integrálható modellek segítségével új módszereket kifejleszteni és azokat magasabb dimenzióban alkalmazni. Másrészről szeretnénk a valós fizikai szituációkban felmerülő modelleket egzaktul megoldani, és azokat alkalmazni többek között az AdS/CFT megfeleltetés alátámasztására.

A dolgozat előzményei

Kétdimenziós integrálható modellek megoldásának mára kikristályosult módszere a következő.

Először a modell szórásmátrixát határozzuk meg [66]. A szórásmátrix az aszimptotikus kezdeti és végső sokrészecskés állapotokat kapcsolja össze és mátrixelemi határozzák meg az adott szórási folyamat valószínűségi amplitúdóit. A kvantumtérelméleti leírásból a szórásmátrix unitaritása és keresztezési szimmetriája következik. A modell integrálhatósága végtelen sok megmaradó mennyiség létezését jelenti, melynek következtében a sokrészecskés szórási folyamatok páronkénti kétrészecskés szórások szorzatára faktorizálódnak. A szórásmátrix összes fizikai tartományba eső szingularitásához fizikai folyamatok kapcsolhatók (maximális analitikusság). Pl. a szórásmátrix pólusa vagy kötött állapot ír le, vagy pedig egy anomális küszöbhöz tartozik. A kötött állapotok szórásmátrixai az összetevőik szórásmátrixaiból számíthatóak garantálva azok unitaritását és keresztezési

szimmetriáját. A maximális analitikussági követelmény viszont erős konzisztencia kényszereket ró ki az összetevők szórásmátrixaira. Ezek sok esetben olyannyira megszorítóak, hogy segítségükkel számos integrálható modell megoldható. Az eljárást melynek során külső információ nélkül a szórásmátrixot csak annak tulajdonságaiból és konzisztenciájából határozzuk meg a szórásmátrix önmegoldó (*bootstrap*) programnak, vagy szórásmátrix önmegoldónak is szokás nevezni.

A modell teljes megoldása felé vezető úton a következő lépés az alaktényező önmegoldó eljárás, melyben lokális operátorok aszimptotikus állapotok közötti mátrixelemét (alaktényezőjét) határozzuk meg azok konzisztencia tulajdonságaiból [61]. A lokális operátorok mátrixelemeinek analitikus szerkezetét a szórásmátrix határozza meg, így annak ismerete lehetővé teszi az alaktényező egyértelmű rögzítését. Végül, harmadik lépésként az alaktényezőket használjuk fel a korrelációs függvények megalkotásához a spektrális reprezentáció segítségével. Ezen adatok, a szórásmátrix, az alaktényezők és a korrelációs függvények az elméletet teljesen egészében leírják végtelen térfogatban.

A véges térfogatú modellek megoldása ennél lényegesen bonyolultabb és máig sem megoldott feladat. Még az energiaszintek térfogatfüggésének meghatározása sem sorolható az egyszerű problémák közé. Az energiaspektrum egy közelítő kiszámítását a részecskék közötti szórás szisztematikus figyelembevételével valósíthatjuk meg. A sokrészecske állapotok energiájának vezető végesméret-korrekciója az impulzusok kvantálódásából fakad, melyet a Bethe-Yang egyenleteken keresztül a szórásmátrix határoz meg [55]. Ez a térfogat inverzében az összes polinomiális korrekciót tartalmazza. Ehhez járulnak még a térfogatban exponenciálisan kicsi korrekciók is, melyek a vákuum polarizációjából erednek és egy álló részecske esetén annak tömeget is módosítják [54]. Kis térfogat esetén a polarizációs folyamatok dominánssá válnak és az egzakt leíráshoz fel kell összegeznünk őket. Erre az alapállapot esetén lehetőségünk is van egy nemlineáris integrálegyenlet formájában [64].

A dolgozat célkitűzései

Célkitűzéseinket két csoportba lehet osztani, úgymint periodikus integrálható rendszerek vizsgálatára és peremmel rendelkező nem feltétlenül integrálható rendszerek analízisére.

A periodikus esetben szeretnénk kiterjeszteni Lüscher, a térfogatban exponenciálisan kicsi egy részecskére vonatkozó végesméret-korrekcióit tetszőleges multi-részecske állapotra és a kapott eredményeket felhasználni az AdS/CFT megfeleltetés alátámasztására. Az integrálható húrelmélet sok-részecske állapotainak energiaszintjei ugyanis a mértékelméleti oldalon mértékinvariáns operátorok anomális dimenzióinak felelnek meg, melyek a Feynman-féle perturbációszámításban közvetlenül számolhatóak [41].

Mivel a gyakorlati alkalmazásokban a fizikai rendszerek peremmel rendelkeznek, így szeretnénk a fent, az integrálható rendszerek megoldására vázolt önmegoldó programot perem jelenlétére kiterjeszteni. Ehhez először a peremes modellek kvantumtérelméleti leírását kell megalapozni. A perturbatív keretet felhasználva szeretnénk tetszőleges tér dimenzió esetén feltárni a kapcsolatot a reflexiós mátrix, a peremállapot és a korrelációs függvények között. A reflexiós mátrix a szórásmátrix peremes megfelelője, míg a peremet az Euklideszi leírásban a peremállapot jellemzi. A korrelációs függvények szingularitásának szerkezete kapcsolatba hozható a reflexiós mátrix szingularitásaival, mely lehetővé teszi annak önmegoldó programmal történő meghatározását. Ezen eredményeket aztán felhasználhatjuk a reflexiós mátrix és a peremre lokalizált kötött állapotok spektrumának meghatározása a legáltalánosabb integrálható peremfeltételű sine-Gordon modellre. Szeretnénk a peremes alaktényező önmegoldó programot megalapozni és egyszerűbb modellekre véghezvinni. Végül célunk a peremes integrálható modellek véges

térfogatú spektrumának vizsgálata különös tekintettel olyan peremek vizsgálatára melyek virtuális részecskéket bocsájthatnak ki vagy nyelhetnek el.

A dolgozat koncepciója és felépítése

A dolgozat elsősorban ismerteti a szerző alábbi, saját hivatkozásokban felsorolt eredményeit és egységes egészbe foglalja azokat. Tekintettel a terület specializált voltára, mely sok háttérismeretet igényel, a fogalmak és módszerek pedagogikus módon vannak bevezetve. A hangsúly többnyire a koncepcionális, elvi összefüggéseken van és a technikai részletek vagy hiányoznak, vagy csak röviden vannak összefoglalva, de mindig az irodalom pontos megjelölésével. A fogalmakat, módszereket és eljárásokat egyszerű modelleken (sine-Gordon, sinh-Gordon, Lee-Yang) vezetjük be és a bonyolultabb (AdS/CFT) esetben csak alkalmazzuk az eredményeket.

A dolgozat két nagyobb részre osztható. Az első rész a kétdimenziós (integrálható) modelleket periodikus peremfeltétellel vizsgálja. Először, az 1. fejezetben a klasszikus sine-Gordon elméletet használjuk fel az olyan intuitív fogalmak bevezetésére, mint az aszimptotikus szórásállapotok, a kölcsönhatás vagy az integrálhatóság. A modellek kvantálása során külön hangsúlyt fektetünk a Lagrange függvényen alapuló perturbatív kvantálásra. Habár ez egy standard anyag mégis nagyon hasznos a fogalmak és módszerek bemutatására, nem beszélve arról, hogy a peremes részben ezen eredményeket fogjuk általánosítani. Ha a Lagrange-i keretben kapott ismereteinket az integrálhatósággal kombináljuk egy axiomatikus keretet kapunk, melyben a modellek definiálhatóak és sok esetben meg is oldhatóak. Ezzel foglalkozik a 2. fejezet. A szórásmátrix meghatározása után a lokális operátorok alaktényezőit számítjuk ki, melyeket a spektrális reprezentáción keresztül felhasználunk a korrelációs függvények meghatározására és a modell teljes megoldására végtelen térben. A véges térfogatú spektrummal a 3. fejezetben foglalkozunk. A sokrészecske állapotok vezető végesméret-korrekciója után a vákuum Lüscher korrekcióját írjuk le. Ezt utána kiterjesztjük a vákuumenergia egzakt meghatározására egy integrálegyenlet segítségével. Az integrál egyenlet analitikus elfolytatásával a gerjesztett állapotokat is leírjuk és az energia kifejezések nagy térfogatú szisztematikus kifejtésével meghatározzuk sokrészecske állapotok vezető végesméret-korrekcióját. Ezen végesméret-korrekciót aztán általánosítjuk és felhasználjuk a 4. fejezetben az AdS/CFT megfeleltetésben annak alátámasztására. Az AdS/CFT megfeleltetés, mint már említettük, egy húrelmélet és egy négy dimenziós mértékelmélet ekvivalenciáját sejti meg. Jelen keretek között sajnos sem a húrelmélet sem pedig a mértékelmélet kimerítő tárgyalása nem lehetséges. Ebből kifolyólag - egy rövid húrelméleti bevezető után - az AdS/CFT kapcsolatot (röviden AdS/CFT-t) mint kétdimenziós integrálható modellt definiáljuk. Az önmegoldó keretben konzisztens módon meghatározzuk szórásmátrixát és kötött állapotait, melyeket aztán felhasználunk sokrészecske állapotok végesméret-korrekcióinak kiszámítására és a mértékelméleti számolásokkal történő összehasonlítására.

A dolgozat második része peremes modellek vizsgálatával foglalkozik. Ismét a klasszikus elméleten keresztül vezetjük be a 5. fejezetben az olyan alapfogalmakat, mint aszimptotikus peremes állapotok és reflexiós mátrix. Az peremes modellek kvantumelmélete a a 6 fejezet tárgya. Ezt a Lagrange-i kvantálással kezdjük, amely lehetőséget ad a nem integrálható modellek vizsgálatára és segítségével a reflexiós mátrixok a korrelációs függvényekkel kifejezhetőek, szingularitásaik vizsgálhatóak. Az itt gyűjtött információkat aztán felhasználjuk a peremes önmegoldó program kifejlesztésében és alkalmazásában a sine-Gordon modell megoldására. A továbbiakban a peremes operátorok alaktényezőinek önmegoldó programját alapozzuk meg és hajtjuk végre egyszerűbb modellek esetére. A reflexiós mát-

rixok, peremes alaktényezők a korrelációs függvények a félvégtelen modellt teljesen leírják. A következő 7. fejezetben azután ezen adatokat használjuk fel a véges térfogatú spektrum először közelítő majd egzakt leírására.

A dolgozatot az eredmények és azok hatásának összefoglalása zárja, kiegészítve a technikai részleteket tartalmazó függelékekkel és az irodalomjegyzékkel.

Hivatkozásokkal kapcsolatban megjegyezzük, hogy ahol lehetséges volt ott nem az eredeti cikkeket, hanem inkább a pedagogikus összefoglalókat hivatkoztuk.

Megjegyzés a magyarításokról. Az angol fogalmak magyarra fordítása során három elvet követtünk. Ha a fogalomnak latin eredete van és már honos a nyelvben (esetleg más szövegkörnyezetben) akkor a latin kifejezést használtuk, pl. szituáció, axióma, spektrum, rapiditás, transzfer (mátrix), fázis, ... Ha a fogalmat már más tudomány területeken lefordították, de mi még nem használtuk akkor próbáltuk a létező magyar szó jelentését kiterjesztve azt használni, pl form factor = alaktényező (áramlástan), bulk = tömb (szilárdtest fizika), trace = nyom (matematika). Ha a szakszónak még nem volt alkalmas magyar fordítása akkor arra javasoltunk egyet, pl. bootstrap = önmegoldó, dressing phase = felöltöztető fázis.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik tudományos pályám során eddig segítettek:

Palla Lászlónak, aki annak idején elvállalta diplomamunkám témavezetését, folyamatosan támogatott, ösztönzött, megtanított kutatni és húsz év közös munkája során sok érdekes problémát oldottunk meg.

Takács Gábornak, volt évfolyamtársamnak a sok eszmecserét és okos gondolatot, melyet a közös munka során kamatoztattunk.

Horváth Zalánnak, hogy a kutatócsoport vezetőjeként stabil hátteret biztosított tudományos pályafutásomhoz.

Az Elméleti Fizikai Tanszék és Kutatócsoport teljes gárdájának az inspiráló légkörért.

Köszönöm még mindazoknak, akikkel az évtizedek során együtt dolgozhattam az értékes segítséget, disszkussziókat és a közös munka élményét. Úgy érzem mindenkitől tanultam valamit. Hadd soroljam fel őket egyenként, kronológiai sorrendben: Palla László, Takács Gábor, Varga Dezső, Wágner Ferenc, Nógrádi Dániel, Böhm Gabriella, Tóth Gábor Zsolt, Clare Dunning, Alain George, Rafael Nepomechie, Changrim Ahn, Chaiho Rim, Alyosha Zamolodchikov (sajnos ő már nincs közöttünk), Ladislav Samaj, Francesco Ravanini, Simon Zsolt, Romuald Janik, Benjamin Basso, Gregorij Korchemsky, Balog János, Tomasz Lukowski és Hegedűs Árpád.

Külön köszönet illeti családomat, a sok kellemes időért, amit velem töltöttek, és azért, hogy ennek ellénére elengedtek hosszabb kutató utakra.

Köszönöm még az OTKA-nak az állandó pályázati támogatást és a Bolyai Ösztöndíj Alapítványnak a kétszeri anyagi és erkölcsi hozzájárulást.

Saját hivatkozások

A dolgozat az alábbi cikkekre támaszkodik.

- Z. Bajnok, L. Palla, G. Takács, G.Zs. Tóth: *The spectrum of boundary states in sine-Gordon model with integrable boundary conditions* Nucl.Phys. **B622** (2002) 548-564.

- Z. Bajnok, G. Böhm, G. Takács: *Boundary reduction formula,* J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 9333-9342.
- Z. Bajnok, G. Böhm, G. Takács, *On perturbative quantum field theory with boundary,* Nucl. Phys. **B682** (2004) 585-617.
- Z. Bajnok, L. Palla, G. Takács, *On the boundary form factor program,* Nucl.Phys. **B750** (2006) 179-212.
- Z. Bajnok, L. Palla, G. Takács, *Boundary one-point function, Casimir energy and boundary state formalism in D+1 dimensional QFT*, Nucl. Phys. **B772** (2007) 290-322
- Z. Bajnok. Chaiho Rim, Al. B. Zamolodchikov, *Sinh-Gordon Boundary TBA and Boundary Liouville Reflection Amplitude,* Nucl. Phys. **B796** (2008) 622-650
- Z. Bajnok, R.A. Janik, *Four-loop perturbative Konishi from strings and finite size effects for multiparticle states*, Nucl. Phys. **B807** (2009) 625-650
- Zoltán Bajnok, Romuald A. Janik, Tomasz Lukowski, *Four loop twist two, BFKL, wrapping and strings*,Nucl.Phys **B816** (2009) 376-398
- Zoltán Bajnok, Árpad Hegedűs, Romuald A. Janik, Tomasz Lukowski, *Five loop Konishi from AdS/CFT,* Nucl. Phys. **B827** (2010) 426-456

II. rész

Integrálható modellek periodikus peremfeltétellel

Ebben a részben az integrálható modellek megoldására kifejlesztett módszereket mutatjuk be a sinh-Gordon és a sine-Gordon modell kapcsán és alkalmazzuk eredményeinket az AdS/CFT megfeleltetésre.

Először a modellek klasszikus verzióit definiáljuk és integrálhatóságukat bizonyítjuk. Utána az egzakt megoldásokat felhasználva meghatározzuk a multi-részecske kezdő és végállapotokat, valamint az őket összekapcsoló időkésés mátrixát. Ez lesz a kvantumelméleti szórásmátrix klasszikus megfelelője. Ezután a modellek kvantumváltozatainak lehetséges definícióit vizsgáljuk. Minden egyes kvantálási módszer ugyanazon kvantumtérelméletet hivatott leírni, csak más nézőpontból kiindulva. A szokásos Lagrange-i perturbációszámítás lehetővé teszi egyrészről az aszimptotikus állapotok és az őket összekötő szórásmátrix definiálását, másrészről a szórásmátrixot összekapcsolja a korrelációs függvényekkel, melyek analitikus szerkezetét szintén megadja. Ez a keret lehetőséget teremt az integrálhatóság vizsgálatára is. A önmegoldó megközelítés egy axiomatikus keretet jelent a modell kvantumos megfelelőjének definiálására, melyhez a bemenő adatokat az előző keretben kapott tulajdonságok szolgáltatják. Kihasználva az integrálhatóságot a Lagrange-i keret segítségével bevezetett szórás mátrixra annak faktorizációja következik: minden sok-részecske szórási folyamat szétesik páronkénti kétrészecske-szórások szorzatára. Kiaknázva még a szórásmátrix analitikus tulajdonságait az sok esetben egzaktul meghatározható. Ezen adatokat aztán fel lehet használni lokális operátorok mátrixelemeinek (alaktényezőinek) meghatározásához, melyekből a korrelációs függvényeket lehet felépíteni. A modell diszperziós relációja (mely a szimmetriából következik), a szórásmátrix, az alaktényezők a korrelációs függvényekkel együtt teljesen leírják a rendszer végtelen térfogati viselkedését.

Integrálható modellek sajátossága, hogy ezen adatok a véges térfogati spektrum teljes leírását is lehetővé teszik. Nagy térfogatok esetén egy közelítő leírást kaphatunk, ha a részecskék impulzusának kvantálásához a szabad modellben szokásos periodicitási feltételt a szórások során elszenvedett fázistolásokkal egészítjük ki (Bethe-Yang egyenletek). Ezek minden polinomiális korrekciót tartalmaznak a térfogat inverzében. Vannak azonban exponenciálisan kicsi (Lüscher) korrekciók is, melyek a véges térfogatú vákuum polarizációjából adódnak. Nagyon kis térfogatok esetén ezen járulékokat mind fel kell összegezni, melyre egy szokásos eljárás a termodinamikai Bethe Ansatz (TBA). Egy alternatív eljárás lehet a modell integrálható rács regularizációjának megtalálása és megoldása, és a kontinuum határeset elvégzése.

Az AdS/CFT megfeleltetést mint kétdimenziós integrálható modellt fogjuk vizsgálni. Először megkeressük a szimmetriával felcserélő és a fizikai követelményeknek (unitaritás, keresztezési szimmetria, maximális analitikusság) eleget tevő szórásmátrixot és a kötött állapotokat. Végül ezeket felhasználva a mértékelméleti számolással közvetlenül összehasonlítható végesméret-korrekciókat számítjuk ki.

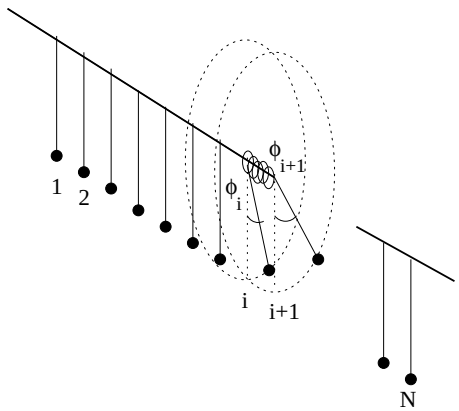
1. fejezet

Integrálható modellek klasszikusan

Ebben a fejezetben a klasszikus sine-Gordon modellt vizsgáljuk. Először egy mechanikai rendszer kontinuum határeseteként állítjuk elő, majd megmutatjuk, hogy a gyenge csatolású limesze a legegyszerűbb relativisztikusan invariáns téregyenlet: a Klein-Gordon egyenlet. Ezután a sztatikus megoldásokat határozzuk meg és részecskeként interpretáljuk őket. A Bäcklund transzformáció felhasználásával többrészecske megoldásokat generálunk és bevezetjük az időkésés fogalmát. Végül megmutatjuk, hogy a modell végtelen sok megmaradó töltéssel rendelkezik [59].

1.1. A klasszikus sine-Gordon modell

Képzeljünk el egy rúdra egyenközűen sorban fellógatott ingákat melyek torziós rugóval vannak a szomszédjaikhoz csatolva.



Legyen az i-edik inga kitérése ϕ_i, hossza l tömege μ. A szomszédos ingák távolsága a, míg a torziós rugóállandó k. A rendszer Lagrange függvénye: [1]

$$L = E_{kin} - E_{pot} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2}\mu l^2 \dot{\phi}_i^2 - \frac{1}{2}k(\phi_i - \phi_{i+1})^2 \right] - \sum_{i=1}^{N} \mu g l (1 - \cos\phi_i)$$

Bevezetve a $\varphi((i-1)a) = \frac{\phi_i}{\beta}$; $\frac{m^2}{\beta^2} = \frac{\mu g l}{a}$ folytonos változókat és elvégezve az $a \to 0$, $N \to \infty$ folytonos határesetet úgy, hogy közben $k \to \infty$, $\mu l^2 \to 0$ míg a $\mu l^2 \beta^{-2}/a = ka\beta^{-2} = 1$

[1] A peremfeltétel a széleken lehet periodikus, rögzített vagy szabad.

kombinációkat fixen tartjuk a következő térelméleti modell Lagrange függvénye adódik:

$$L = \int_0^V \mathcal{L}\, dx = \int_0^V \left[\frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \frac{m^2}{\beta^2}(1-\cos\beta\varphi)\right] dx$$

Ezen elmélet az úgynevezett sine-Gordon elmélet. A fenti formulában β a csatolási állandó, m határozza meg a tömegskálát és a fénysebességet egynek normáltuk. Hadd hangsúlyozzuk, hogy ez egy jól definiált, véges, mechanikai rendszer szinguláris limesze, így ne lepődjünk meg, ha később a folytonos térelméleti modell vizsgálata kapcsán végtelenekkel találkozunk. Ha a felmerülő végteleneket regularizálni szeretnénk a rendszert a határérték előtti véges rendszerrel helyettesíthetjük, majd az értelmes fizikai mennyiség kiszámolása után képezzük a folytonos határértéket. Egy alternatív megközelítés az értelmes fizikai mennyiségek megkeresése és közvetlen meghatározása a közöttük fennálló összefüggések felhasználása által.

1.1.1. A sinh-Gordon elmélet

A sine-Gordon (sG) elmélet Lagrange függvényében elvégezve a $\beta \to ib$ analitikus elfolytatást a sinh-Gordon (shG) elmélet Lagrange függvénye adódik:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \frac{m^2}{b^2}(\cosh b\varphi - 1)$$

A lényeges különbség a két elmélet között, hogy amíg a sG elmélet φ elemi tere a kompakt körön veszi fel az értékeit $\varphi \in [0, \frac{2\pi}{\beta}]$, addig a shG elméleté a nem kompakt valós egyenesen.

1.1.2. A Klein-Gordon egyenlet, mint a gyenge csatolású limesz

Bármely elméletben (sG vagy shG) is vagyunk a gyenge csatolású határesetben ($b \to 0$ vagy $\beta \to 0$) a potenciált sorbafejthetjük. A shG esetben a következőt kapjuk:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{m^2b^2}{4!}\varphi^4 - \dots$$

Ha történetesen $b = 0$ akkor a legegyszerűbb relativisztikus téregyenletet a Klein-Gordon egyenletet kapjuk:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)\varphi = \Box_x\varphi = 0$$

A relativisztikus invarianciája azt jelenti, hogy az elmélet invariáns a Lorentz transzformációra (végtelen térfogatot feltételezve)

$$\Box_x\varphi = \Box_{x'}\varphi \quad ; \qquad x' = (x - vt)\gamma \quad , \quad t' = (t - vx)\gamma \quad , \quad \gamma^{-1} = \sqrt{1-v^2}$$

Érdemes bevezetni a sebesség helyett a rapiditás változót Λ, hiszen a Lorentz transzformáció egy hiperbolikus forgatás Λ szöggel:

$$v = \tanh\Lambda \quad ; \qquad x' = x\,\cosh\Lambda - t\,\sinh\Lambda \quad , \quad t' = t\,\cosh\Lambda - x\,\sinh\Lambda$$

A fénykúp koordináták ezt a transzformációt diagonalizálják:

$$x_\pm = \frac{1}{2}(t \pm x) \qquad ; \qquad x'_\pm = e^{\pm\Lambda}x_\pm$$

1.1.3. A sine-Gordon egyenlet sztatikus megoldásai

A sine-Gordon modell

$$\int_0^L \left[\frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - V(\varphi)\right] dx \qquad ; \quad V(\varphi) = \frac{m^2}{\beta^2}(1-\cos\beta\varphi)$$

(végtelen térfogatban, $L = \infty$) szintén relativisztikusan invariáns. Sőt ez igaz minden $V(\varphi)$ potenciál esetén is. Véges térfogatban az idő és tér irányú eltolásinvarianciából következik, hogy az energia és az impulzus megmaradó mennyiségek[2]

$$E[\varphi] = \int_0^L \left[\frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 + V(\varphi)\right] dx \qquad ; \quad P[\varphi] = \int_0^L \partial_x\varphi\,\partial_t\varphi$$

A továbbiakban a sG egyenlet véges energiás megoldásaira vagyunk kíváncsiak. A vizsgálatot a sztatikus megoldásokkal kezdjük. A téregyenlet ekkor:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\varphi = -\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{m^2}{\beta}\sin\beta\varphi \longrightarrow -\partial_x^2\varphi = -\frac{dV}{d\varphi} = \frac{m^2}{\beta}\sin\beta\varphi$$

Ez egy $-V$ potenciálban mozgó tömegpont Newton egyenlete, így integrálható

$$x = \int \frac{d\varphi}{\pm\sqrt{2(\epsilon + V(\varphi))}} + x_0$$

mely egy elliptikus integrált határoz meg. A végtelen térfogatú határeset jelentősen egyszerűsödik. Az energia végessége ugyanis megköveteli a térbeli végtelenekben ($x \to \pm\infty$) a következő feltételek teljesülését: $\partial\varphi \to 0$, $V(\varphi) \to 0$. Ez a $-V$ potenciálban mozgó részecske energiáját nullával teszi egyenlővé: $\epsilon = 0$, vagyis

$$x - x_0 = \pm\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}} = \pm\int \frac{d\frac{\beta\varphi}{2}}{m\sin\frac{\beta\phi}{2}} = \pm\log(\tan(\frac{\beta\varphi}{4}))$$

A kapott két megoldást szolitonnak és antiszolitonnak hívjuk:

$$\varphi(x) = \pm\frac{4}{\beta}\arctan(e^{-m(x-x_0)})$$

Mindkettőnek az energiája $E = \frac{8m}{\beta^2} = M_0$, impulzusuk $P = 0$, energiasűrűségeik megegyeznek és jól lokalizáltak. Mivel a $\beta \to 0$ gyenge csatolású határesetben szingulárisak így ők nemperturbatív objektumok.

Az elmélet relativisztikus invarianciája lehetővé teszi, hogy az álló megoldásokból mozgót készítsünk:

$$\varphi(x,t) = \pm\frac{4}{\beta}\arctan(e^{-m\gamma(x-vt-x_0)})$$

Ezek v sebességgel mozgó alakjukat megtartó megoldások, melyek energiája $E(v) = M_0\gamma$ és impulzusa $P(v) = M_0\gamma v$. Mivel teljesítik a relativisztikus részecskék diszperziós relációját

$$E = \sqrt{M_0^2 + P^2}$$

[2]Periodikus peremfeltételt feltételezve

továbbá alakjukat megtartják és jól lokalizáltak részecskeként fogunk rájuk gondolni. Kettejük között a különbség a topológiai töltésükben van (± 1), melyet a

$$Q_{top} = \frac{2\pi}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\varphi(x,t)dx = \frac{2\pi}{\beta}\left[\varphi(\infty)-\varphi(-\infty)\right]$$

nem Noether-i megmaradó töltéssel definiálunk. Vizsgáljuk meg most, hogyan hatnak kölcsön ezek a részecskék.

1.1.4. Többrészecskés megoldások, időkésések

Mivel a sine-Gordon téregyenlet nem lineáris így megoldások összege nem megoldás. Van mégis egy módszer, ahogy egy egyrészecskés megoldásból többrészecske megoldást készíthetünk: ez a Bäcklund transzformáció.

Bäcklund transzformáció

Tegyük fel, hogy φ_1 megoldja a sine-Gordon egyenletet. Fénykúp koordinátákban ez azt jelenti, hogy:

$$\partial_+\partial_-\varphi_1 = \frac{m^2}{\beta}\sin\beta\varphi_1 \quad ; \qquad \partial_\pm = \partial_t \pm \partial_x$$

Érdekes módon ha φ_2 kielégíti a

$$\begin{aligned}\partial_+\varphi_2 &= \partial_+\varphi_1 + \frac{2m\sigma}{\beta}\sin\left(\frac{\beta}{2}(\varphi_1+\varphi_2)\right)\\ \partial_-\varphi_2 &= -\partial_-\varphi_1 + \frac{2m}{\beta\sigma}\sin\left(\frac{\beta}{2}(\varphi_1-\varphi_2)\right)\end{aligned}$$

egyenleteket, akkor φ_2 a sine-Gordon egyenletet is megoldja.

Kétrészecske megoldások

Kiindulva egy szoliton vagy antiszoliton megoldásból és alkalmazva az előbbi Bäcklund transzformációt kétrészecske megoldásokat állíthatunk elő. Speciálisan kaphatunk két szoliton

$$\varphi_{ss}(x,t) = \frac{4}{\beta}\arctan\left(\frac{v\sinh mx\gamma}{\cosh mvt\gamma}\right)$$

vagy szoliton-antiszoliton megoldást:

$$\varphi_{s\bar{s}}(x,t) = \frac{4}{\beta}\arctan\left(\frac{\sinh mvt\gamma}{v\cosh mx\gamma}\right)$$

Vegyük észre, hogy aszimptotikusan nagy időkre ezek két nem kölcsönható szoliton és antiszoliton összegébe mennek át

$$\varphi_{s\bar{s}}(x,t) = \frac{4}{\beta}\arctan\left(\frac{e^{mvt\gamma-\log v}-e^{-mvt\gamma-\log v}}{e^{mx\gamma}+e^{-mx\gamma}}\right)$$

A távoli múltban ($t\to-\infty$) például

$$\varphi_{s\bar{s}}(x,t) \approx \varphi_s((x+v(t+\frac{\Delta t}{2}))\gamma) + \varphi_{\bar{s}}((x-v(t-\frac{\Delta t}{2}))\gamma) \quad ; \qquad \Delta t = 2\frac{\log v}{mv\gamma}$$

míg a távoli jövőben ($t \to \infty$)

$$\varphi_{s\bar{s}}(x,t) \approx \varphi_s((x + v(t - \frac{\Delta t}{2}))\gamma) + \varphi_{\bar{s}}((x - v(t + \frac{\Delta t}{2}))\gamma)$$

Összehasonlítva a szoliton szabad időfejlődését az antiszoliton jelenlétében megvalósuló időfejlődéssel a Δt mennyiséget olyan időkésésként interpretálhatjuk, melyet a szoliton szenvedett el miközben keresztülhaladt az antiszoliton által létrehozott potenciálban. Az időkésés előjeléből következtetünk arra, hogy ez a kölcsönhatás vonzó, tehát számíthatunk a szoliton és antiszoliton kötött állapotára is. Valóban, a sebességet elfolytatva ($v \to iu$) egy időben periodikus, helyben lokalizált megoldást kapunk

$$\varphi_b(x,t) = \frac{4}{\beta} \arctan \left(\frac{\sin mut\gamma}{u \cosh mx\gamma} \right)$$

mely a szuszogó nevet viseli.

Többször alkalmazva a Bäcklund transzformációt multi-részecske állapotokat állíthatunk elő. A teljesség kedvéért felírjuk az általános N részecske megoldás alakját:

$$\varphi = \frac{4}{\beta} \arctan \frac{Im(\tau)}{Re(\tau)}$$

ahol

$$\tau = \sum_{\mu_j=0,1} e^{\frac{i\pi}{2}\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j\mu_j} e^{-\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{2}\left\{(k_j+k_j^{-1})x+(k_j-k_j^{-1})t-a_j\right\}+2\sum_{i<j}\mu_i\mu_j \log\frac{k_i-k_j}{k_i+k_j}}$$

továbbá ϵ_j előjelek, melyek meghatározzák, hogy a megoldásban j szoliton vagy antiszoliton, ezek helye a_j és sebességük k_j-nek függvénye. A megoldás a távoli múltban jól szeparált nem kölcsönható szolitonok, antiszolitonok és szuszogók összegeként írható, melyek mind különböző sebességgel mozognak. Sebességük nagysága szerint vannak rendezve: a leggyorsabb van legbalra. A távoli jövőben a részecske-tartalom ugyanaz marad, a sebességek sem változtak, csupán a részecskék sorrendje cserélődött fel, most a leggyorsabb van legelöl. Az egyetlen különbség a szabad mozgáshoz képest, mely a kölcsönhatást tükrözi az összegyűjtött időkésés, mely érdekes módon az egyes kétrészecske időkésések összege. A teljes időkésés ilyen felbomlása a rendszer integrálhatóságának a következménye.

1.1.5. Integrálhatóság, megmaradó töltések

Integrálhatóság véges szabadsági fokú rendszerekben a szabadsági fokokkal megegyező számú, egymással involúcióban álló, funkcionálisan független megmaradó mennyiség létét jelenti. Mivel a sine-Gordon modell végtelen dimenziós ($N \to \infty$ a mechanikai modellben) így integrálhatóságának kimutatásához végtelen sok megmaradó mennyiséget kell keresnünk. Egy szokásos módszer ezek generálására a következő. Definiáljuk az

$$A_x(\lambda) = i \begin{pmatrix} \lambda & \frac{\beta}{2}\partial_+\varphi \\ -\frac{\beta}{2}\partial_+\varphi & -\lambda \end{pmatrix} \quad ; \qquad A_t(\lambda) = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos\beta\varphi & -i\sin\beta\varphi \\ i\sin\beta\varphi & -\cos\beta\varphi \end{pmatrix}$$

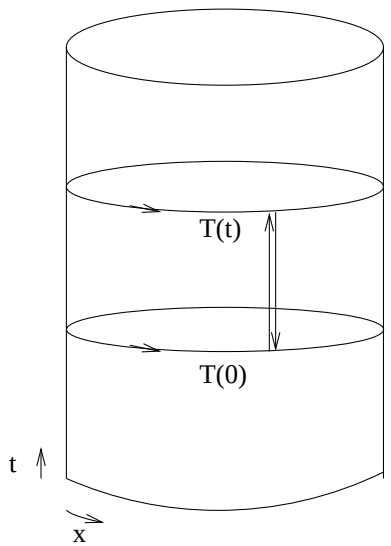
mértékteret, mely eleget tesz az

$$F_{xt} = \partial_x A_t - \partial_t A_x + [A_x, A_t] = 0$$

”lapossági feltételnek”, amennyiben φ kielégíti a sine-Gordon egyenletet. Definiálva a mértéktér útrendezett exponenciálisát

$$T(\lambda, 1, 2) = \mathcal{P} \exp \int_1^2 A(x)_\mu dx^\mu$$

az - a laposság miatt - nem változik a kiválasztott út folytonos deformációira. Az utat a periodikus peremfeltétellel definiált sG modell rögzített $t = 0$ és $t = t$ görbéjére elvégezve a kettő egymásba transzformálható $T(\lambda, t) = GT(\lambda, 0)G^{-1}$, ahol G az ábrán függőleges szakaszhoz tartozó útrendezett exponenciális.



Ez azt jelenti, hogy a fent definiált $T(\lambda)$ transzfer mátrix nyoma időben állandó, így azt a λ spektrális paraméter szerint kifejtve végtelen sok megmaradó mennyiséget kapunk. Megmutatható, hogy ezek involúcióban állnak egymással és függetlenek. Az első néhány megmaradó mennyiség explicit alakja a következő:

$$Q_{\pm 1}[\varphi] = E[\varphi] \pm P[\varphi] = \int \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\pm \varphi)^2 + \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos \beta\varphi) \right\} dx$$

$$Q_{\pm 3}[\varphi] = \int \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\pm^2 \varphi)^2 - \frac{1}{8}(\partial_\pm \varphi)^4 + \frac{m^2}{\beta^2}(\partial_\pm \varphi)^2(1 - \cos \beta\varphi) \right\} dx$$

Az első $Q_{\pm 1}$ pár az eltolásinvarianciából következő energia és impulzus jelen van minden $V(\varphi)$ potenciállal definiált modellben. A második $Q_{\pm 3}$ pár viszont speciális, csak a sine-Gordon elmélet sajátja. Természetesen a shG modellben is megmaradó az analitikus elfolytatással kapott analóg mennyiség.

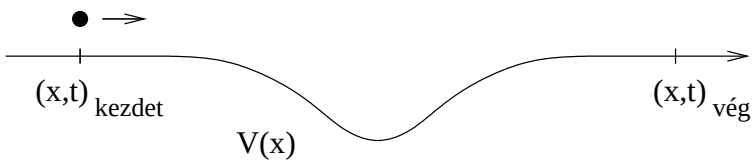
2. fejezet

Integrálható modellek kvantálása

Ezt a fejezetet az időkésés kvantumos megfelelőjének, a szórási fázisnak a bevezetésével kezdjük. Megmutatjuk, hogy a szemiklasszikus közelítésben a két mennyiség kapcsolatban áll egymással, ezáltal összeköthetjük a klasszikus és a kvantumos leírást. Ezután a sinh-Gordon modell kvantálásához kezdünk. Lagrange-i perturbációszámítást használunk: először a szabad Klein-Gordon részt kvantáljuk, majd a kölcsönhatást perturbációként vesszük figyelembe a kölcsönhatási képet használva. Bevezetjük az aszimptotikus állapotokat és az őket összekötő szórásmátrixot. Származtatjuk a redukciós formulát, mely a szórásmátrixot és az alaktényezőket a korrelációs függvényekkel fejezi ki. Ez lehetőséget teremt az unitaritás és a keresztezési szimmetria levezetésére, valamint segít a szórásmátrix és az alaktényezők analitikus szerkezetének megértésében.

2.1. Szemiklasszikus megfontolások: fázistolás

Emlékezzünk vissza, hogy a szolitonokat és antiszolitonokat részecskeként interpretáltuk. Azt is láttuk, hogy a szoliton az antiszoliton vonzó potenciálján való áthaladáskor időkésést szenvedett, melyet sikerült a sebesség függvényeként meghatároznunk. Ez a potenciálról hordoz lényeges információt. Nézzük most meg, hogyan határozza meg a potenciál az időkésést. Képzeljünk el egy részecskét, mely egy véges tartójú potenciálon halad keresztül:



Az időkésést a szabad mozgáshoz képest mérjük:

$$\Delta t = (t_{kezdet} - t_{vég})|_V - (t_{kezdet} - t_{vég})|_{szabad}$$

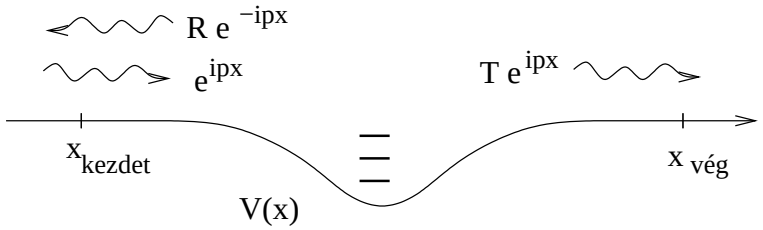
és a $v(x) = \frac{\partial H}{\partial p}(x)$ Hamilton egyenletből a következőképpen számolható:

$$t_v - t_k = \int_{x_k}^{x_v} \frac{dx}{v(x)} = \int_{x_k}^{x_v} \frac{\partial p(x,E)}{\partial E} dx$$

Összegezve az időkésésre a potenciál függvényeként az adódik, hogy:

$$\Delta t(E) = \partial_E \int_{x_k}^{x_v} (p(x,E) - p(E)) dx$$

Vizsgáljuk meg most a probléma kvantummechanikai megfelelőjét: tömegpont Schrödinger egyenlete a fenti potenciálban. Mivel nagy negatív és pozitív x-re a potenciál eltűnik, így ott szabad hullám megoldást kell használnunk és a kvantumos információ a potenciálról a visszavert és továbbhaladó hullám amplitúdójában van, melyeket reflexiós és transzmissziós együtthatóknak hívunk.



Vegyük észre, hogy a kvantumos szinten visszaverődésre is számolnunk kell (R). Sőt a szoliton és antiszoliton kötött állapotaként előálló szuszogó paraméterének kvantálódására is számíthatunk, vagyis csak véges sok szuszogó típusú részecskénk lesz.

Az időkésés kvantumos megfelelője a transzmissziós együttható, melyet a szemiklasszikus közelítésben határozunk meg a továbbiakban ($\hbar \to 0$). Ezen közelítés azt jelenti, hogy a Schrödinger egyenlet megoldásánál

$$\hat{H}(\hat{p}, x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad ; \qquad \Psi(x,t) = A(x,t)e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)}$$

feltételezzük, hogy a hullámfüggvény gyorsan oszcillál: $S(x,t) \gg \hbar$. A továbbiakban $\hbar = 1$ normálással élünk. Könnyen megmutatható, hogy vezető rendben $S(x,t)$ a klasszikus hatás

$$S(x,t) = \int_{x_i}^{x} p(x', E)dx' + const$$

és a transzmisszió fázisa a szabad hullám fázistolása:

$$\delta(E) = \int_{x_i}^{x_f} (p(x,E) - p(E))dx$$

Összehasonlítva a klasszikus időkéséssel láthatjuk a kapcsolatot

$$\partial_E \delta(E) = \Delta t(E)$$

Ezt a kötött állapotok energiájától integrálva

$$\delta(E) = \delta(E_{th}) + \int_{E_{th}}^{E} \Delta t(E')dE' = n_B\pi + \int_{E_{th}}^{E} \Delta t(E')dE' \tag{2.1}$$

alakra hozható, ahol n_B a Bohr-Sommerfeld kvantálásból számolható kötött állapotok száma.

2.2. Kvantálás a Klein-Gordon elméletre alapozva

A kvantummechanika és a kvantumtérelmélet között a leglényegesebb különbség a szabadsági fokok számában van. Az előbbi véges, míg az utóbbi végtelen dimenziós. Ahhoz tehát, hogy egy kvantumtérelmélet egyáltalán definiálni tudjunk óvatosan kell eljárnunk és választanunk kell egy sémát. Jelen esetben a perturbatív sémát választjuk: leválasztjuk a

szabad Klein Gordon elméletet, azt egzaktul kvantáljuk és a kölcsönhatást perturbatíven vesszük figyelembe. Ezzel a megközelítéssel hallgatólagosan feltételezzük, hogy a kölcsönhatás nem változtatja meg a szabad modell spektrumát, így a módszer csak a sinh-Gordon elméletre működhet. (A szoliton és antiszoliton nem perturbatív objektumok).

Válasszuk tehát szét a shG elméletet egy szabad és egy kölcsönható rész összegére:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - b^2U(\varphi) \quad ; \qquad U(\varphi) = \frac{m^2}{4!}\varphi^4 + \dots$$

Ha $b = 0$ akkor csak a szabad Klein-Gordon modell van

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)\varphi_0 = \Box_x\varphi_0 = 0$$

melyet a következő részben kvantálunk és a shG potenciált a kölcsönhatási képben vesszük figyelembe.

2.2.1. A szabad modell kvantálása

A szabad bozonokat leíró kvantumtérelméletet könnyű kvantálni. A téregyenletet kielégítő operátor-megoldás

$$\varphi_0(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi 2\omega(k)}(a(k)e^{-i\omega(k)t+ikx} + a^+(k)e^{i\omega(k)t-ikx})$$

ahol a keltő és eltűntető operátorok kielégítik az alábbi felcserélési törvényeket:

$$[a(k), a^+(k')] = 2\pi 2\omega(k)\delta(k-k') \quad ; \qquad \omega(k) = \sqrt{k^2+m^2}$$

A keltő operátorok építik fel a sokrészecske Hilbert teret:

$$a^+(k_1)\dots a^+(k_n)|0\rangle = |k_1,\dots k_n\rangle \quad ; \qquad a(k)|0\rangle = 0$$

Minden egyes állapot energia és impulzus sajátállapot:

$$H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} : \left[\frac{1}{2}(\partial_t\varphi_0)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi_0)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi_0^2\right] : dx \qquad ; \quad P = \int_{-\infty}^{\infty} : \partial_x\varphi_0\partial_t\varphi_0 :$$

az alábbi sajátértékkel

$$H_0|k_1,\dots,k_n\rangle = \sum_i \omega(k_i)|k_1,\dots,k_n\rangle \qquad ; \qquad P|k_1,\dots,k_n\rangle = \sum_i k_i|k_1,\dots,k_n\rangle$$

Jelen esetben a vákuum energiáját és impulzusát nullának vettük, melyet a :: normálrendezési operációval értünk el (eltűntető operátorok a jobb oldalra). A szabad téroperátorok időrendezett szorzatának vákuum várható értéke, az ún. Feynman propagátor könnyen kiszámolható:

$$\langle 0|T(\varphi_0(x,t)\varphi_0(x',t'))|0\rangle = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-ik_0(t-t')+ik_1(x-x')}$$

2.2.2. Perturbatív definíció

A kölcsönható elméletet a legtermészetesebben a kölcsönhatási képben definiálhatjuk, melyet az alábbiakban vezetünk be. Írjuk a teljes Hamiltont a szabad Hamilton és a kölcsönható Hamilton összegeként, ahol a kölcsönható rész a már kvantált terekkel van kifejezve. Ahhoz, hogy operátorának hatása jól definiált legyen normálrendeznünk kell őket, ez a potenciálban szereplő paramétereket (újra-) re-normálhatja:

$$H = H_0 + H_I = H_0 + b^2 \int dx : U(\varphi_0) :$$

Az operátorok és állapotvektorok időfejlődése a Heisenberg képben a következő:

$$\varphi(x,t) = e^{iHt}\varphi(x,0)e^{-iHt} \qquad ; \qquad |k_1, \dots k_n; t\rangle = |k_1, \dots, k_n; 0\rangle$$

Relativisztikus elméletekben ezt szoktuk használni lévén ez manifeszt Lorentz invariáns. Mivel a szabad időfejlődést a korábbiakban már megértettük leválaszthatjuk azt a teljes időfejlődésből. Ez azt jelenti, hogy az operátorok a szabad időfejlődésnek tesznek eleget, melyet H_0 generál, viszont az állapotvektorokat az evolúciós operátor fejleszti:

$$\varphi_0(x,t) = e^{iH_0t}\varphi_0(x,0)e^{-iH_0t} \qquad ; \qquad |k_1, \dots k_n; t\rangle = U(t,0)|k_1, \dots, k_n; 0\rangle$$

Ezt hívjuk a kölcsönhatási képnek. Nem nehéz megmutatni, hogy $U(t,0) = e^{iH_0t}e^{-iHt}$, mely a szabad terekkel és a kölcsönható Hamiltonnal

$$U(t,0) = T\exp\left\{-i\int_0^t H_I(\varphi_0(t^{'}))dt^{'}\right\} \tag{2.2}$$

módon fejezhető ki. Itt $T\exp$ az időrendezett exponenciálist jelöli.

A konstrukció szerint a Heisenberg és a kölcsönhatási kép egy referencia időben egybeesik. Természetes ezt a távoli múltban választani, hiszen ekkor a kölcsönhatások úgyis eltűnnek: a tömeges többrészecske állapotok jól szeparált lokalizált szabad részecskéket tartalmaznak. A kvantumterekre nem követelhetjük a teljes egyezést azok kanonikus normálása miatt, így csak azt tesszük fel, hogy

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi(x,t) \approx \lim_{t\to-\infty} Z^{\frac{1}{2}}\varphi_0(x,t)$$

ahol $0 < Z < 1$ az úgynevezett hullámfüggvény renormalizációs állandó.

A kvantumtérelméletben a fizikailag releváns mennyiség a Heisenberg operátorok időrendezett szorzatának vákuum várható értéke. A kölcsönhatási képben ezek a következőképpen számolhatóak:

$$\langle 0|T(\varphi(x_1,t_1)\dots\varphi(x_n,t_n)|0\rangle = \frac{\langle 0|T(\varphi_0(x_1,t_1)\dots\varphi_0(x_n,t_n)\exp\left\{i\int d^2x\mathcal{L}_I(\varphi_0(x))\right\})|0\rangle}{\langle 0|T(\exp\left\{i\int d^2x\mathcal{L}_I(\varphi_0(x))\right\})|0\rangle}$$

Az exponenciális függvényeket kifejtve a kölcsönható kvantumtérelmélet perturbációszámítással definiálhatjuk. A Feynman szabályok összefoglalják hogyan számíthatjuk ki rendről rendre a korrelációs függvényeket. Impulzus térben a következő gráfszabályokat kapjuk:

- Rajzoljunk fel minden topológialig különböző gráfot az adott számú külső vonallal

- minden belső vonalhoz tartozzon egy propagátor $\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$
- minden $2n$ lábú vertexhez rendeljünk hozzá egy im^2b^{2n-2} számszorzót és rójuk ki az impulzus megmaradást
- integráljunk minden olyan belső impulzusra, melyet a megmaradási törvények nem rögzítettek
- az eredményt osszuk le a gráf szimmetria faktorával

Ezek a szabályok elvileg definiálják a modellt, így hozzáláthatunk a korrelációs függvények kiszámolásához rendről rendre.

A legegyszerűbb nem triviális mennyiség a propagátor. Az egy hurok számolásnál rögtön egy divergens integrállal találkozunk, melyet impulzus levágással regularizálhatunk és egy ellen tömeg taggal kompenzálhatunk. Érdekes módon magasabb pont függvények számolásakor ugyanaz a divergencia bukkan fel, melyet ellentaggal kompenzálva az ellentag Lagrange függvény az eredetivel azonos alakúnak adódik [59]. Ez azt jelenti, hogy a divergenciák a tömegtag újranormálásába beledefiniálhatóak:

$$:V(\varphi):=:\frac{m^2}{b^2}(\cosh b\varphi-1):=V(\varphi)-V_{CT}(\varphi)=\frac{m^2-\delta m^2}{b^2}(\cosh b\varphi-1)$$

Egy hurok számolás esetén az ellentagra azt kapjuk, hogy

$$\delta m^2=-m^2b^2\int_0^\Lambda\frac{dp}{\sqrt{p^2+m^2}}$$

Az, hogy a Lagrange függvény alakja nem változik meg a kvantálás során csupán az együtthatók renormálódnak azt is jelenti, hogy a mozgásegyenletek alakja sem változik, vagyis a végtelen sok megmaradó mennyiség létére is számíthatunk. Kiszámolva a tömeg paraméter renormálását rendről rendre az elmélet végesnek adódik, így hozzáláthatunk a véges tömeg, vagy a véges hullámfüggvény renormálás kiszámolásához a perturbációszámítás minden rendjében.

2.2.3. Szórásmátrix, redukciós formulák

Emlékezzünk vissza, hogy aszimptotikusan nagy időkre a részecske gerjesztések jól szeparáltak, így lokális elméletünkben nem hatnak kölcsön. Ezért is definiáltuk a Heisenberg és a kölcsönhatási kép egybeesését a távoli múltban. Ez olyan, mintha nagy negatív vagy pozitív időkre a kölcsönhatást adiabatikusan kikapcsolnánk:

$$\lim_{t\to\mp\infty}\varphi(x,t)\approx\lim_{t\to\mp\infty}Z^{\frac{1}{2}}\varphi_0^{be/ki}(x,t)$$

ahol Z a kanonikus normálásért felelős. Ezt az egyenletet csak gyenge értelemben (minden mátrix elemre) követeljük meg. Az aszimptotikus kezdő és végállapotok keltő-eltűntető operátorait definiálhatjuk, mint

$$a^{as}(k)=i\int dx\,e^{i\omega(k)t-ikx}\overleftrightarrow{\partial_t}\varphi_0^{as}(x,t)\qquad;\quad a^{as}(k)^+=-i\int dx\,e^{-i\omega(k)t+ikx}\overleftrightarrow{\partial_t}\varphi_0^{as}(x,t)$$

ahol $A\overleftrightarrow{\partial_t}B=A\partial_tB-B\partial_tA$. Ezen operátorok keltik az aszimptotikus állapotokat

$$|k_1,\dots,k_n\rangle^{as}=a^{as}(k_1)^+\dots a^{as}(k_1)^+|0\rangle$$

melyek az energiának és impulzusnak sajátvektorai. Aszimptotikus teljességet tételezünk fel, vagyis feltesszük, hogy mind az aszimptotikus kezdő, mind pedig a végállapotok a multi-részecske Hilbert tér egy-egy bázisát adják. A kettőt összekapcsoló transzformáció a szórásmátrix, vagy röviden csak S-mátrix:

$$S_{vk} = \langle vég|kezdet\rangle$$

Korábbi (2.2) definíciónk alapján a szórásmátrix nem más, mint az időfejlesztő operátor a $\pm\infty$ időpontok között

$$S = U(\infty, -\infty) = T\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} H_I(\varphi_0(t'))dt'\right\} = T\exp\left\{i\int d^2x\mathcal{L}_I(\varphi_0)\right\} \qquad (2.3)$$

mely nyilván unitér és felcserél a szimmetriákkal.

Az energia és impulzus megmaradásból következik, hogy a legegyszerűbb nem triviális S-mátrix elem a következő:

$${}_{ki}\langle k_3, k_4|k_1, k_2\rangle_{be} = S(k_1, k_2|k_3, k_4)(2\pi)^2 2\omega(k_1)2\omega(k_2)\delta(k_1 - k_3)\delta(k_2 - k_4)$$

Egy relativisztikusan invariáns elméletben az S-mátrix csak a Mandelstam változótól függhet: $s = (k_1+k_2)^2$. Magasabb dimenzióban szokásos még a $t = (k_1-k_3)^2$ és $u = (k_1-k_4)^2$ relativisztikusan invariáns változók használata is, kétdimenzióban azonban ezek nem függetlenek s-től.

Az S-mátrix kifejezhető a korrelációs függvénnyel a redukciós formulák segítségével. Ezeket úgy származtathatjuk [46], hogy az aszimptotikus állapotokat kifejezzük az aszimptotikus keltő és eltűntető operátorok definícióján keresztül az aszimptotikus terekkel. Az aszimptotikus tereket a $-\infty$ időben kicserélhetjük a kölcsönható térre és egy extra idő integrálás becsempészésével ($f(-\infty) = f(\infty) - \int_{-\infty}^{\infty}\partial_t f(t)$) szétbonthatjuk összefüggő és az $f(\infty)$ tagokat tartalmazó széteső járulékokra. Ezután az összefüggő járulékokban az $\omega^2 = k^2 + m^2$ diszperziós reláció kihasználása után parciális integrálunk és a felületi tagokat eldobjuk. Ha ezen eljárást minden részecskére megismételjük a következő eredmény adódik

$${}_{ki}\langle k_3, k_4|k_1, k_2\rangle_{be} = \text{széteső} + Z^{-2}\bar{\mathcal{D}}_4\bar{\mathcal{D}}_3\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\langle 0|T(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4))|0\rangle$$

ahol $\varphi(i)$ a $\varphi(x_i, t_i)$ rövidítése és

$$\mathcal{D}_i = -\int d^2x_i e^{-i\omega(k_i)t_i + ik_ix_i}\Box_i \qquad ; \quad -\Box_i = -\partial_{t_i}^2 + \partial_{x_i}^2 - m^2$$

A $\mathcal{D}_i$ operátor fizikai jelentése a következő. A korrelációs függvény számolása során minden térhez egy külső láb tartozik. A $\mathcal{D}_i$ operátor a $\varphi(i)$-hez tartozó lábat amputálja, és az impulzustérben számolt korrelációs függvényt az impulzus változóba tömeghéjra teszi. Ez onnan látszik, hogy $\Box_i$ impulzustérben éppen a propagátor pólusának reziduumát szedi fel, míg az inverz Fourier transzformáció az $\omega^2 + k^2 = m^2$ tömeghéjra teszi a részecskét. A kezdő állapotoknak a $\bar{\mathcal{D}}_i = -\int d^2x_i e^{i\omega(k_i)t_i - ik_ix_i}\Box_i$ operátor felel meg. Összehasonlítva a kezdő és végállapotok előfordulásának különbségét (ω, k)-ban a szórásmátrix keresztezési szimmetriája leolvasható

$$S(k_1, k_2|k_3, k_4) = S(k_1, \bar{k}_3|\bar{k}_2, k_4)$$

ahol az antirészecske energia-impulzus vektora: $\bar{k} \to (-\omega(k), -k)$). Ezen összefüggések után hozzáfoghatunk a sinh-Gordon modell S-mátrixának rendről rendre történő meghatározásához. Mivel ez egy nehézkes út, ezért a következő fejezetben az integrálhatóságon alapuló alternatív megközelítés mutatunk be. De előtte még szükségünk lesz a szórásmátrix analitikus szerkezetére, így most azt tekintjük át.

2.2.4. A szórásmátrix analitikus szerkezete

Az előző fejezetben bevezetett Feynman szabályok előírják, hogyan számolhatjuk ki a korrelációs függvényeket, melyeket aztán felhasználhatunk a redukciós formulákon keresztül a szórásmátrix kiszámolásához. Most [46] nyomán azt vizsgáljuk meg milyen szingularitásai lehetnek a perturbáció egyes tagjainak és, hogy ezek hogyan összegződnek fel a korrelációs függvény és szórásmátrix szingularitásaivá.

Tekintsünk egy Feynam diagramot N külső lábbal és kettős impulzusokkal $k_1, \ldots, k_N$. Az amplitúdót a perturbáció számításban a következő kifejezés adja

$$A = \prod_{i=1}^{L} \int \frac{d^2 q_i}{(2\pi)^2} \prod_{j=1}^{J} (p_j^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1}$$

ahol q_i jelöli az L hurokintegrál impulzusát, míg p_j a J belső impulzus vonal valamelyikét. Mivel az elmélet Lorentz invariáns így az amplitúdó csak a $k_i \cdot k_j$ Lorentz invariáns kombinációktól függhet, melyet explicitté tehetünk a Feynman parametrizáció bevezetésével

$$A = \int \prod_{i=1}^{L} \frac{d^2 q_i}{(2\pi)^2} \prod_{j=1}^{J} \int_0^1 d\alpha_j \delta\left(\sum \alpha_j - 1\right) \left[\sum_{j=1}^{J} \alpha_j (p_j^2 - m_j^2 + i\epsilon)\right]^{-1}$$

és a q_i hurokimpulzusok kiintegrálásával. Az esetlegesen fellépő UV divergenciákat az ellentagok eltüntetik, így a maradék integrálok végesek amennyiben $\epsilon > 0$. A fizikai $\epsilon \to 0$ határesetben viszont az integrandus szingularitásai keresztezhetik az α hipertérbeli integrációs kontúrt, melyet a kontúr deformációjával kerülhetünk el. A kontúr deformációjának módszere akkor nem működik ha a szingularitások becsípik a kontúrt, vagy ha azok az integrációs tartomány szélén jelentkeznek. Ezen feltételeket a következő módon fogalmazhatjuk meg:

$$\alpha_j = 0 \quad \text{vagy} \qquad p_j^2 - m^2 = 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_{q_i} \sum_{j=1}^{J} \alpha_j (p_j^2 - m_j^2) = 0$$

Ezen egyenletek írják le a Feynman diagrammok szingularitásának feltételét és Landau egyenleteknek nevezzük őket. Szemléletes jelentésük a következő. Először is húzzunk össze minden $\alpha_j = 0$ vonalat egy ponttá. Az így kapott gráf a redukált gráf, melyen most már minden vonal tömeghéjon van.

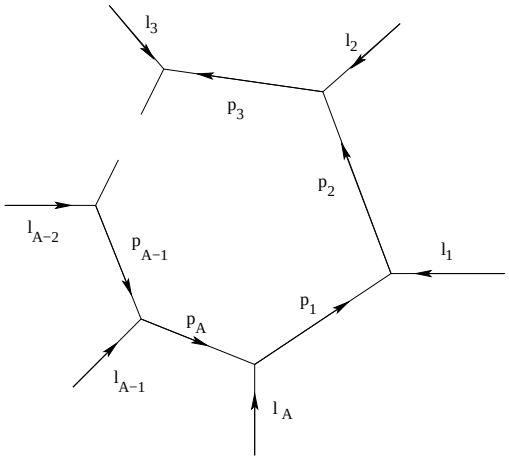
Képzeljünk el egy zárt hurkot a redukált gráfban. A külső impulzusokat jelölje l_i, lásd a (2.1) ábrát. Kihasználva minden csúcsban az impulzus megmaradást minden belső impulzust kifejezhetünk p_1-el és a külső impulzusokkal:

$$p_2 = p_1 + l_1 \; ; \quad p_3 = p_2 + l_2 = p_1 + l_1 + l_2 \; ; \ldots \quad p_A = p_1 + \sum_{j=1}^{A-1} l_j \tag{2.4}$$

A teljes impulzus természetesen megmarad $\sum_i l_i = 0$. A Landau egyenlet most $q_i = p_1$-re a következőt jelenti

$$\sum_{\text{bármely hurok}} \alpha_i p_i = 0 \tag{2.5}$$

Ezen egyenletet Coleman és Norton a következőképpen interpretálta: A korrelációs függvények fizikai tartományba eső szingularitásai ($\alpha_i \geq 0$) olyan téridő diagrammok létezéséhez tartoznak, melyben klasszikus tömeghéjon lévő részecskék haladnak az időben előre és kölcsönhatnak egymással az egyes téridőpontokban, úgy hogy közben az energia és impulzus megmarad.



2.1. ábra. Általános zárt hurok

2.3. Az önmegoldó kvantálás

Most összefoglaljuk mit tanultunk a korábbi vizsgálatainkból. A kvantumelmélet Hilbert tere aszimptotikusan nagy időkre nem kölcsönható szabad részecskéket tartalmaz. A kezdő és a végállapotot a szórásmátrix köti össze, mely unitér és teljesíti a keresztezési szimmetriát. Szingularitásait örökli a korrelációs függvények szingularitásaiból, vagyis minden fizikai tartományba eső pólushoz egy Coleman-Norton típusú téridő diagram kapcsolható[1]. Ezeket a tulajdonságokat kiegészítjük ebben a fejezetben a kvantumos integrálhatósággal és megnézzük milyen extra megszorításokat jelent ez a szórásmátrixra. Feltételezzük tehát, hogy kvantumosan is van végtelen sok megmaradó mennyiségünk. Ezen feltevéseket tartalmazó axiomatizált kvantálási keretet a önmegoldó megközelítésnek hívjuk.

2.3.1. Aszimptotikus állapotok, szórásmátrix

Az elmélet Hilbert tere stabil sokrészecske állapotokból áll. Az egyszerűség kedvéért tételezzük most fel, hogy csak egy fajta részecskénk van (ezt várjuk történetesen a kvantum shG elmélettől). Ha a részecske tömegét m-el jelöljük, impulzusát pedig p-vel akkor a relativisztikus invariancia miatt energiája

$$E(p) = \omega(p) = \sqrt{p^2 + m^2} \quad ; \qquad E(p)^2 - p^2 = m^2$$

Ezt a relativisztikus diszperziós relációt a rapiditás változóval θ egyszerű alakra hozhatjuk,

$$E(\theta) = \omega(\theta) = m\cosh\theta \quad ; \qquad p(\theta) = m\sinh\theta$$

Emlékezzünk vissza, hogy az energia és impulzus csak az első tagjai $Q_{\pm 1}$ egy végtelen sok megmaradó mennyiséget alkotó sorozatnak Q_s. Fénykúp koordinátákban egyszerűen írhatjuk, hogy

$$(E \pm p)(\theta) = Q_{\pm 1}(\theta) = me^{\pm\theta} \qquad ; \qquad Q_s(\theta) = q_s e^{s\theta}$$

Aszimptotikus teljességet feltételezve mind a kezdő mind pedig a végállapotok a Hilbert tér egy-egy bázisát adják. Bevezetve a részecske keltő operátorokat a sokrészecske állapotokat a következőképpen írhatjuk le:

[1] Ezeket szokás még Coleman-Thun diagrammoknak is nevezni

Kezdőállapot: leggyorsabb részecske legbalra

$$A^+_{be}(\theta_1)\dots A^+_{be}(\theta_n)|0\rangle = |\theta_1,\dots\theta_n\rangle_{be} \quad ; \qquad \theta_1 > \dots > \theta_n$$

Végállapot: leggyorsabb részecske legjobbra

$$A^+_{ki}(\theta_1)\dots A^+_{ki}(\theta_m)|0\rangle = |\theta_1,\dots\theta_m\rangle_{ki} \quad ; \qquad \theta_m > \dots > \theta_1$$

Feltételezzük, hogy mindkét állapot sajátállapota a végtelen sok megmaradó töltésnek

$$Q_s|\theta_1,\dots\theta_n\rangle_{be} = \sum_{i=1}^{n} q_s e^{s\theta_i}|\theta_1,\dots\theta_n\rangle_{be}$$

A szórásmátrix kapcsolja össze a kezdeti bejövő és a végállapoti kimenő állapotokat

$$S_{n\to m} =_{ki} \langle\theta_1^{'},\dots\theta_m^{'}|\theta_1,\dots\theta_n\rangle_{be}$$

és az adott mátrix elem abszolút értékének négyzete $|S_{n\to m}|^2$ adja meg annak valószínűségét, hogy a kezdeti állapot a végállapotba fejlődjön, mely szórás kísérletekben közvetlenül mérhető. Foglaljuk össze milyen tulajdonságokkal kell a szórás mátrixnak rendelkeznie.

2.3.2. A szórásmátrix tulajdonságai

A szórásmátrix a Hamilton függvényből állítható elő (2.3), így annak a szimmetriákkal fel kell cserélnie.

Szimmetria

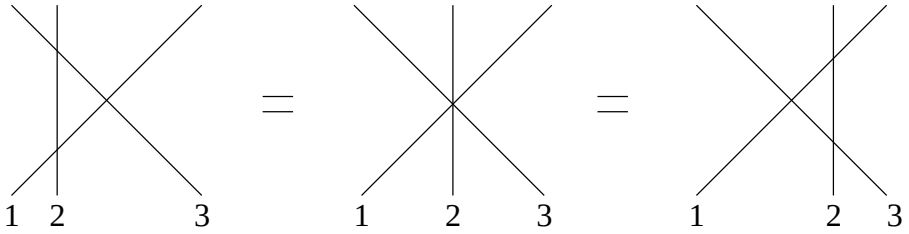
Ez konkrétan azt jelenti, hogy az S-mátrixnak kommutálnia kell az összes megmaradó töltéssel Q_s. Vagyis ha leolvassuk bármely megmaradó töltés értékét a szórás előtt és utána, akkor ugyanazt az eredményt kell kapnunk:

$$\sum_{i=1}^{n} q_s e^{s\theta_i} = \sum_{i=1}^{m} q_s e^{s\theta_i^{'}}$$

Ezek funkcionálisan független egyenletek az s változó végtelen sok értékére, melyek csak úgy teljesülhetnek a véges sok kezdeti $\{\theta_i\}$ és végső $\{\theta_j^{'}\}$ rapiditásokra ha azok egybeesnek $\{\theta_i\} = \{\theta_j^{'}\}$. Ez persze azt is jelenti, hogy a részecskeszámok a szórás elején és a végén megegyeznek $n = m$, vagyis a részecskekeltés a kvantumos integrálható modellekben ki van zárva.

Megmaradó töltések szimmetriákat generálnak: a H energia például egyenletes eltolást generál az idő irányban, míg az impulzus, P, egyenletes eltolást generál a tér változó irányába. Magasabb spinű töltések ezzel szemben a részecskéken impulzusuktól függő eltolást hajtanak végre. Hatva tehát egy sokrészecske szorásfolyamaton egy magasabb spinű megmaradó töltéssel a részecskék trajektóriáit akármennyire szeparálni tudjuk és a szórási folyamatot páronkénti kétrészecske szórási folyamatok szorzatára tudjuk faktorizálni:

$$S_{n\to n}(\theta_1,\dots,\theta_n) = \prod_{i,j} S_{2\to 2}(\theta_i,\theta_j)$$



2.2. ábra. Háromrészecskés szórás faktorizációja és a Yang Baxter egyenlet

A szórásmátrix meghatározása tehát az $S_{2\to 2}(\theta_1, \theta_2)$ két-részecske S-mátrix meghatározására vezethető vissza. Mivel a Lorentz szimmetria a rapiditás változón eltolásként hat $\theta \to \theta + \Lambda$ és ez szimmetriája a szórásnak azt írhatjuk, hogy

$$S_{2\to 2}(\theta_1, \theta_2) = S(\theta_1 - \theta_2)$$

Vagyis az összes szórás leírásához csak az $S(\theta_1 - \theta_2) = S(\theta_{12})$ függvényt kell meghatároznunk. Ettől elvárjuk, hogy teljesítse a Yang Baxter egyenletet, az unitaritást, a keresztezési szimmetriát és a maximális analitikusságot.

Yang-Baxter egyenlet

A multirészecskék szórásának faktorizációja azt is eredményezi, hogy egy háromrészecske szórási folyamatot kétféleképpen is faktorizálhatunk. Tekintve a (2.2) ábrát láthatjuk, hogy a

$$S_{12}(\theta_{12})S_{13}(\theta_{13})S_{23}(\theta_{23}) = S_{23}(\theta_{23})S_{13}(\theta_{13})S_{12}(\theta_{12})$$

Yang-Baxter egyenletnek fenn kell állnia[2], ahol $S_{ij}(\theta_i - \theta_j)$ jelöli az i és j indexszel jellemzett részecske szórásának mátrixát.

Unitaritás

A szórásmátrix unitaritása a kétrészecskés esetben

$$S(\theta)S(-\theta) = 1$$

Keresztezési szimmetria

Mivel a részecske $\leftrightarrow$ anti-részecske transzformáció a rapiditás paraméteren a $(\omega(\theta), p(\theta)) \to (-\omega(\theta), p(\theta)) = (\omega(i\pi - \theta), p(i\pi - \theta))$ módon hat, így a keresztezési szimmetria azt jelenti, hogy

$$S(\theta) = S(i\pi - \theta)$$

Maximális analitikusság:

Az $S(\theta)$ szórás mátrix a rapiditás változó meromorf függvénye a fizikai sávban $0 < \Im m(\theta) < \pi$ esetleges pólusokkal a képzetes tengelyen. A pólusoknak azonban Coleman Norton típusú diagrammokhoz kell tartozniuk. A szórás mátrix fizikai értéke $\lim_{\epsilon\to 0} S(\theta + i\epsilon)$ az eredeti szórás folyamatra $\Re e(\theta) > 0$ és $\lim_{\epsilon\to 0} S(\theta + i(\pi - \epsilon)$ a keresztezett folyamatra $\Re e(\theta) < 0$.

[2]Természetesen egy skalár elmélet esetén ez egy triviálisan teljesülő egyenlet. Nem diagonális szórás esetén (lásd sine-Gordon modell) viszont erős megszorítást jelent.

2.3.3. A Zamolodchikov-Fateev algebra

Az integrálható szórások egyszerűen megfogalmazhatóak a Zamolodchikov-Fateev algebra nyelvén. Olyan absztrakt keltő és eltűntető operátorokat vezetünk be, melyek a

$$A^+(\theta_1)A^+(\theta_2) = S(\theta_1 - \theta_2)A^+(\theta_2)A^+(\theta_1) + 2\pi\delta(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) \qquad ; \quad A(\theta) = A^+(\theta + i\pi)$$

felcserélési törvénynek tesznek eleget. Ekkor az unitaritás és keresztezési relációk automatikusan teljesülnek. Egy kezdő állapot

$$A^+(\theta_1)A^+(\theta_2)\dots A^+(\theta_n)|0\rangle$$

alakba írható, ahol $\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n$, míg a végállapot egyszerűen.

$$A^+(\theta_n)\dots A^+(\theta_2)A^+(\theta_1)|0\rangle$$

Az algebra relációk miatt az egyik a másikkal éppen a sokrészecske szórási mátrix-szal fejezhető ki: $S_{n\to n}$.

2.3.4. Egyszerű modellek az önmegoldó programból

Keressünk a fenti követelményeknek eleget tevő függvényeket és próbáljuk szórásmátrixként interpretálni őket.

A legegyszerűbb megoldás

$$S(\theta) = 1$$

Ez a szabad bozon (Klein-Gordon) elmélet szórás mátrixa.

A következő legegyszerűbb megoldás

$$S(\theta) = \frac{\sinh\theta - i\sin\alpha}{\sinh\theta + i\sin\alpha} \quad ; \qquad \alpha > 0 \tag{2.6}$$

ahol a fellépő tetszőleges állandónál az $\alpha > 0$ feltételezéssel éltünk, hogy elkerüljük a szingularitásokat a $0 < \Im m(\theta) < \pi$ fizikai sávban. Így ez egy konzisztens elméletet definiál, melyben csak egy típusú részecske van. Azt állítjuk, hogy ez a sinh-Gordon elmélet szórás mátrixa ha az alábbi azonosítással élünk:

$$\alpha = \frac{\pi b^2}{8\pi + b^2}$$

Ezt le is ellenőrizhetjük a harmadrendű perturbáció számításban kapott eredménnyel [3] történő összehasonlítással.

Az igazi ellenőrzés, mely nem csak a perturbatív kifejtés véges sok együtthatóját tartalmazza a sine-Gordon elméleten keresztül valósítható meg. Ehhez a csatolási állandót $b \to i\beta$ módon kell elfolytatnunk és ekkor a szórásmátrixnak a szuszogó részecske szórásmátrixává kell válnia. Jelöljük ezen részecskét keltő operátort a ZF algebrában $B_1^+(\theta)$-vel. Mivel ekkor $\alpha < 0$ a szórásmátrixnak pólusa van a fizikai sávban a képzetes tengelyen a $\theta = -i\alpha$ pontban. A pólus fizikai interpretációja egy újabb részecske, mely két B_1 részecske kötött állapotaként jön létre. Hívjuk ezen részecskét a második szuszogónak és az őt keltő ZF operátort jelölje $B_2(\theta)$. Mivel ez két B_1 összetevéséből keletkezett így írhatjuk, hogy

$$f_2^{11} B_1^+(\theta - i\frac{\alpha}{2})B_1^+(\theta + i\frac{\alpha}{2})|0\rangle = B_2^+(\theta)|0\rangle$$

ahol f_2^{11} a szórásmátrix pólusának reziduumával fejezhető ki. Ez lehetőséget teremt a második szuszogó s spinű megmaradó töltésének meghatározására:

$$[Q_s, B_2^+(\theta)] = [Q_s, B_1^+(\theta - i\frac{\alpha}{2})B_1^+(\theta + i\frac{\alpha}{2})] = 2q_s \cos\frac{s\alpha}{2} B_2^+(\theta)$$

Konkrétan $s = 1$ esetén a tömeget kapjuk: $m_{B_2} = 2m_{B_1}\cos\frac{\alpha}{2}$. A ZF algebrából a B_1B_2 szórás mátrixa is meghatározható

$$S_{B_1B_2}(\theta_1 - \theta_2) = S_{B_1B_1}(\theta_1 - \theta_2 + i\frac{\alpha}{2})S_{B_1B_1}(\theta_1 - \theta_2 - i\frac{\alpha}{2})$$

Hasonló módon

$$S_{B_2B_2}(\theta_1 - \theta_2) = S_{B_2B_1}(\theta_1 - \theta_2 + i\frac{\alpha}{2})S_{B_2B_1}(\theta_1 - \theta_2 - i\frac{\alpha}{2})$$

Felmerül a kérdés, hogy ez valóban egy új részecske-e? Ha történetesen $S_{B_1B_2} = S_{B_1B_1}$ akkor semmi szükség egy új B_2 részecske bevezetésére azonosíthatjuk azt B_1-el. Ez az elvi lehetőség meg is valósul az $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ esetben. Ekkor a maximális analitikusság teljesül, hiszen a szórásmátrix összes pólusát megmagyaráztuk kötött állapot bevezetésével. Ezen modellt skálázó Lee-Yang modellnek (vagy röviden csak Lee-Yang modellnek) nevezzük.

Ha a csatolásra $\alpha \neq -\frac{2\pi}{3}$ teljesül, akkor a B_2 részecskét nem azonosíthatjuk B_1-el és B_2-t egy újabb lehetséges aszimptotikus állapotként kell figyelembe vennünk. Ekkor ugyan megmagyaráztuk az eredeti S-mátrix pólus szerkezetét, de bevezetve az újabb részecskét annak $S_{B_1B_2}$ és $S_{B_2B_2}$ szórásmátrixait is meg kell vizsgálnunk. A konstrukciókból kifolyólag az unitaritási és keresztezési egyenletek teljesülnek, viszont a maximális analitikusághoz a fizikai sávbeli pólusokat kell vizsgálnunk és azokat kell megmagyaráznunk. Az derül ki, hogy további részecskék bevezetése szükséges és a végén ellentmondásra jutunk vagyis az önmegoldó program nem járt eredménnyel. Ha mégis sikerülne az összes S mátrix összes pólusát megmagyaráznunk, akkor az S mátrix önmegoldó programot végrehajtottuk volna. Annak oka, hogy a fenti szórás mátrix esetén az önmegoldó program nem járt sikerrel a feltételezett részecske spektrum szűk voltában rejlik. Megfontolásaink során ugyanis csak olyan részecskéket vizsgáltunk, melyek előállnak a B_1 szuszogó kötött állapotaiként. Tudjuk viszont, hogy a sG modellben a szoliton és antiszoliton is benne van, melyek nem szuszogó kötött állapotok. A modell teljes önmegoldó kvantálásához tehát a szoliton és antiszoliton állapotokkal kell kezdenünk.

2.3.5. A sine-Gordon modell S-mátrixa

Most az előző fejezetben vázolt önmegoldó programot próbáljuk végrehajtani a sine-Gordon modellre. A klasszikus modellből megtanultuk, hogy van két részecskénk azonos tömeggel: a szoliton és az anti-szoliton, melyek ellentétes topologikus töltéssel rendelkeznek. A ZF algebrában az őket keltő operátorokat jelölje A_i^+, $i = \pm$. Mivel azonos magasabb spinű megmaradó töltésekkel rendelkeznek ezért a szóródás során összekeveredhetnek, melyet a ZF algebrában a szórásmátrixszal írunk le:

$$A_i^+(\theta_1)A_j^+(\theta_2) = S_{ij}^{lk}(\theta_1-\theta_2)A_k^+(\theta_2)A_l^+(\theta_1)+2\pi\delta_{ij}\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi) \qquad ; \quad A_k(\theta) = A_{\bar{k}}^+(\theta+i\pi)$$

Jelen esetben ez tényleg egy mátrix, mégpedig 4x4-es. A szórásmátrix unitaritása az algebra relációiból következik:

$$S_{ij}^{kl}(\theta_1 - \theta_2)S_{lk}^{mn}(\theta_2 - \theta_1) = \delta_i^m\delta_j^l$$

A keresztezési szimmetria kirovásánál kihasználjuk, hogy az antiszoliton a szoliton antirészecskéje, ahogy ezt a neve is sugallja:

$$S_{ij}^{kl}(\theta_1-\theta_2)=S_{j\bar{l}}^{\bar{i}k}(i\pi-\theta_1+\theta_2)$$

Elvárjuk kvantumos szinten is, hogy a topologikus töltés megmaradjon. Ez azt jelenti, hogy a $Q_{top}|\pm\rangle=\pm|\pm\rangle$ töltés a következőképpen cserél fel a ZF generátorokkal:

$$[Q_{top},A_j^+(\theta)]=jA_j^+(\theta)\quad;\quad j=\pm$$

Ezen összefüggés a ZF algebra definiáló relációival garantálja, hogy a szórásmátrix kommutáljon a megmaradó töltéssel:

$$\begin{aligned}[Q_{top},A_i^+(\theta_1)A_j^+(\theta_2)] &= (i+j)A_i^+(\theta_1)A_j^+(\theta_2)\\ &= S_{ij}^{lk}(\theta_1,\theta_2)[Q_{top},A_k^+(\theta_2)A_l^+(\theta_1)]=(k+l)S_{ij}^{lk}(\theta_1,\theta_2)A_k^+(\theta_2)A_l^+(\theta_1)\\ &= (k+l)A_i^+(\theta_1)A_j^+(\theta_2)\end{aligned}$$

vagyis $(i+j)=(k+l)$. A $|\pm\rangle\leftrightarrow|\mp\rangle$ paritásszimmetriát kihasználva a szórásmátrix

$$S(\theta)=\rho(\theta)\begin{pmatrix} a(\theta) & 0 & 0 & 0\\ 0 & b(\theta) & c(\theta) & 0\\ 0 & c(\theta) & b(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & a(\theta)\end{pmatrix}$$

alakra redukálható. Végül nem nehéz megmutatni a ZF algebra asszociativitása alapján, hogy a $A_i^+(\theta_1)A_j^+(\theta_2)A_k^+(\theta_3)$ kifejezés kétféleképpen is újrarendezhető, melyek azonossága a

$$S_{ij}^{pr}(\theta_1-\theta_2)S_{pk}^{lq}(\theta_1-\theta_3)S_{rq}^{mn}(\theta_2-\theta_3)=S_{jk}^{pr}(\theta_2-\theta_3)S_{ir}^{qn}(\theta_1-\theta_3)S_{qp}^{lm}(\theta_1-\theta_2)$$

úgynevezett Yang-Baxter (YB) egyenletre vezet. Ez egy túlhatározott rendszer, melynek meglepő módon van egy tetszőleges λ paramétert tartalmazó megoldása:

$$a(\theta)=1\quad;\quad b(\theta)=-\frac{\sin(i\lambda\theta)}{\sin\lambda(\pi+i\theta)}\quad;\quad b(\theta)=\frac{\sin(\lambda\pi)}{\sin\lambda(\pi+i\theta)}$$

Nyilván ezen egyenlet csak számszorzó erejéig határozza meg a megoldást, melyet az unitaritási és keresztezési egyenletekből rögzíthetünk [66]:

$$\rho(\theta)=\prod_{l=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(\lambda(2l-2)+\frac{i\lambda\theta}{\pi})\Gamma(1+\lambda 2l+\frac{i\lambda\theta}{\pi})}{\Gamma(\lambda(2l-1)+\frac{i\lambda\theta}{\pi})\Gamma(1+\lambda(2l-1)+\frac{i\lambda\theta}{\pi})}/(\theta\to-\theta)\right]$$

egy ú.n. CDD faktor erejéig. Vagyis a megoldást megszorozhatjuk bármely $f(\theta)f(-\theta)=1$ és $f(i\pi-\theta)=f(\theta)$ egyenleteket kielégítő függvénnyel. Mivel minden ilyen függvény vagy legalább egy pólust vagy egy zérust vezet be a fizikai sávban, így mi most a minimális választással élve ezen faktort egynek választjuk.

A következő fizikai feltételünk a maximális analitikusság, vagyis meg kell vizsgálnunk a szórásmátrix pólusait a fizikai sávban. A szoliton és antiszoliton szórásban ($S_{+-}^{+-}(\theta)=\rho(\theta)b(\theta)$ és $S_{+-}^{-+}(\theta)=\rho(\theta)c(\theta)$) pólusokat találunk a képzetes tengelyen $i\pi(1-\frac{n}{\lambda})$ pontokban. Ezek a fizikai sávba esnek $n=1,\ldots,[\lambda]$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $\lambda>1$

esetén a szoliton és az antiszoliton kötött állapotokat hoz létre. Nyilván a legkönnyebbnek a szuszogóhoz kell tartoznia. Kiszámolva a kötött állapot szórásmátrixát a shG szórás mátrixának elfolytatottja adódik amennyiben

$$\lambda = \frac{8\pi}{\beta^2} - 1$$

További ellenőrzéseket is végezhetünk a sine-Gordon szórásmátrixán a szemiklasszikus határesetben ($\beta \to 0$). Korábbi levezetésünknek megfelelően a szórás szemiklasszikus határesetet a klasszikus időkéséssel hasonlíthatjuk össze. Az konkrét analízisek teljes egyezést adnak [47].

2.4. Korrelációs függvények

Az integrálhatóság kihasználása lehetőséget teremtett az S-mátrix önmegoldására. Ezzel megkerültük a fáradságos utat, melyben a szórásmátrixot a korrelációs függvényeken keresztül határozzuk meg. Felmerül a kérdés, hogy az elmélet teljes megoldását jelentő korrelációs függvényeket nem lehetne-e az integrálhatóság kihasználásával kiszámítani. A válasz részben igen. Ennek szokásos módja a spektrális felbontás, mely a korrelációs függvényeket az operátorok alaktényezőivel fejezi ki. Konkrétan valamely $\mathcal{O}$ operátor kétpontfüggvénye esetén ez a következőt jelenti. Az eltolás invariancia kihasználása után alkalmazzuk az energia és impulzus sajátállapotok egy teljes rendszerét $\{|n\rangle\}$:

$$\langle \mathcal{O}(x,t)\mathcal{O}(0,0)\rangle = \sum_n \langle 0|\mathcal{O}(x,t)|n\rangle\langle n|\mathcal{O}(0,0)|0\rangle = \sum_n |\langle 0|\mathcal{O}(0,0)|n\rangle|^2 e^{iE_n t - iP_n x} \tag{2.7}$$

Itt kihasználtuk, hogy az energia és impulzus az eltolás generátorai

$$e^{iHt}e^{-iPx}\mathcal{O}(0,0)e^{iPx}e^{-iHt} = \mathcal{O}(x,t) \tag{2.8}$$

A korrelációs függvény meghatározását ezzel visszavezettük az operátorok összes mátrixelemének meghatározására. Ezeket az operátor alaktényezőinek nevezzük és a következő fejezetben megmutatjuk, hogyan használhatjuk az integrálhatóságot kiszámításukra.

2.5. Az operátorok alaktényezőinek önmegoldó programja

Ebben a fejezetben lokális operátorok mátrixelemeit számítjuk ki aszimptotikus állapotok között. Az alaktényezők analitikus tulajdonságait először egyszerű modellekben származtatjuk, majd a modellek teljes osztályára azokat axiómaként rögzítjük. Végül az axiómákat kielégítő alaktényezőket írjuk fel a shG és a Lee-Yang modell esetére.

2.5.1. Az alaktényezők definíciója

Definíció szerint az $\mathcal{O}$ operátor alaktényezője aszimptotikus állapotok között vett mátrixeleme, mely kifejezhető a redukciós eljárás segítségével a korrelációs függvénnyel

$$\begin{aligned} {}_{ki}\langle k_{n+1},\dots,k_{n+m}|\mathcal{O}(0,0)|k_1,\dots,k_n\rangle_{be} = \text{széteső járulákok} + \\ Z^{-\frac{n+m}{2}}\bar{\mathcal{D}}_N\dots\bar{\mathcal{D}}_{n+1}\mathcal{D}_n\dots\mathcal{D}_1\langle 0|T(\mathcal{O}(0,0)\varphi(1)\dots\varphi(n+m))|0\rangle \end{aligned}$$

A kvantumtérelmélet perturbatív definícióját felhasználva az alaktényezők rendről rendre számolhatóak. Mivel a korrelációs függvénnyel vannak kifejezve, így a szórásmátrixhoz hasonlóan az alaktényezők is öröklik a korrelációs függvények szingularitás szerkezetét.

Integrálható rendszerek esetén a szórásmátrixra olyan sikeresen alkalmazott önmegoldó módszert általánosíthatjuk az alaktényezők meghatározására is. Integrálható keretben definiálhatjuk az alaktényezőket a ZF algebra segítségével

$$F^{\mathcal{O}}_{n,m}(\theta_m,\dots,\theta_{n+1};\theta_n,\dots,\theta_1) = \langle 0|A(\theta_m)\dots A(\theta_{n+1})\mathcal{O}(0,0)A^+(\theta_n)\dots A^+(\theta_1)|0\rangle$$

A ZF operátorok keresztezési szimmetriája $A(\theta) = A^+(\theta + i\pi)$ és az operátor lokalitása $[\mathcal{O}(0,0), A(\theta)] = 0$ lehetővé teszi, hogy mindenkit kifejezzünk az egy oldali alaktényezőkkel

$$F^{\mathcal{O}}_{n,m}(\theta_m,\dots,\theta_{n+1};\theta_n,\dots,\theta_1) = F^{\mathcal{O}}_{0,n+m}(\theta_m+i\pi,\dots,\theta_{n+1}+i\pi,\theta_n,\dots,\theta_1) \quad ; \qquad F^{\mathcal{O}}_n \equiv F^{\mathcal{O}}_{0,n}$$

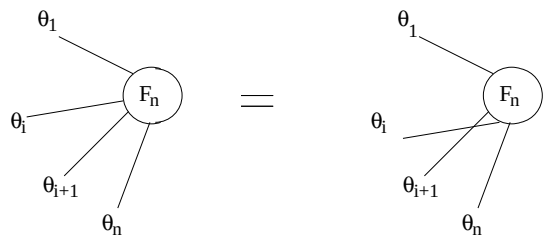
melyet röviden csak F_n-el jelöltünk. Az algebra definiáló relációiból a következő axiómákat vezethetjük le.

2.5.2. Az alaktényező axiómák

Az alaktényezők kielégítik az alábbi axiómákat:

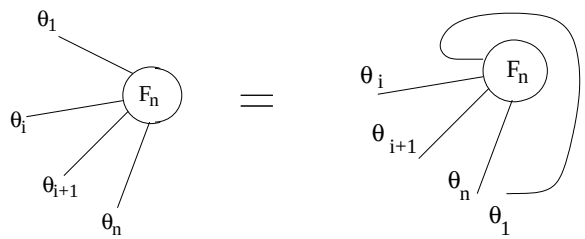
I. Felcserélési axióma:

$$F^{\mathcal{O}}_n(\theta_1,\dots\theta_i,\theta_{i+1},\dots,\theta_n) = S(\theta_i-\theta_{i+1})F^{\mathcal{O}}_n(\theta_1,\dots\theta_{i+1},\theta_i,\dots,\theta_n)$$



II. Periodicitási axióma:

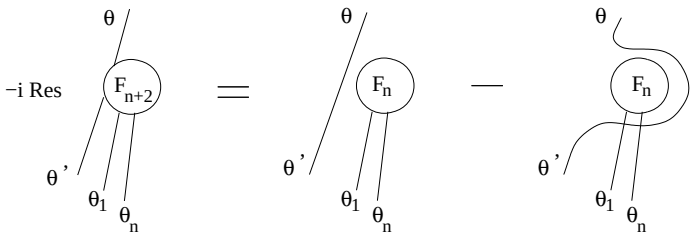
$$F^{\mathcal{O}}_n(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n) = F^{\mathcal{O}}_n(\theta_2,\dots\theta_n,\dots,\theta_1-2i\pi)$$



A szingularitási axiómák

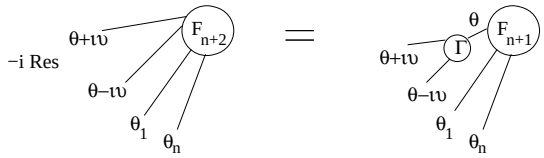
III. Kinematikai szingularitási axióma:

$$-i\mathrm{Res}_{\theta=\theta'}F^{\mathcal{O}}_{n+2}(\theta+i\pi,\theta',\theta_1,...,\theta_n) = \left(1-\prod_{j=1}^{n}S(\theta-\theta_j)\right)F^{\mathcal{O}}_n(\theta_1,...,\theta_n)$$



IV. Dinamikai szingularitási axióma:

$$-i\mathrm{Res}_{\theta'=\theta} F^{\mathcal{O}}_{n+2}(\theta' + \frac{i\pi}{3}, \theta - \frac{i\pi}{3}, \theta_1, \ldots, \theta_n) = \Gamma F^{\mathcal{O}}_{n+1}(\theta, \theta_1, \ldots, \theta_n)$$



ahol Γ a 3 részecske csatolási együttható, mely a szórás mátrix pólusának reziduumával kapcsolatos.

2.5.3. Megoldások alaktényezőkre

A fenti axiómáknak az elmélet összes lokális operátorának alaktényezőire fenn kell állniuk. Az axiómákat kielégítő alaktényezők vizsgálata tehát lehetőséget teremt az elmélet lokális operátorainak osztályozására. A továbbiakban megkeressük a legáltalánosabb megoldásokat, különválasztva a minden operátorra jelenlevő általános faktorokat az operátor specifikus faktoroktól. Tesszük ezt növekvő részecskeszámok esetén. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk skalár (Lorentz invariáns) operátort.

A legegyszerűbb alaktényező az operátor vákuum várható értéke, mely lényegében a normálását definiálja:

$$\langle 0|\mathcal{O}(0,0)|0\rangle = F^{\mathcal{O}}_0 = \langle \mathcal{O} \rangle$$

Az egyrészecske alaktényező a Lorentz invariancia miatt nem függhet a rapiditástól:

$$\langle 0|\mathcal{O}(0,0)|\theta\rangle = F^{\mathcal{O}}_1$$

A kétrészecske alaktényező a Lorentz szimmetria miatt csak a rapiditások különbségétől függhet és a következő alakba írható

$$F^{\mathcal{O}}_2(\theta_1, \theta_2) = f_{min}(\theta_1 - \theta_2) Q^{\mathcal{O}}_2(x_1, x_2)$$

ahol $f_{min}(\theta)$ az úgynevezett minimális kétrészecske alaktényező, mely minden operátor alaktényezőjében jelen van és kielégíti az alábbi egyenleteket:

$$f_{min}(\theta) = S(\theta) f_{min}(-\theta) \quad ; \qquad f_{min}(i\pi - \theta) = f_{min}(i\pi + \theta)$$

Elvárjuk még tőle, hogy pólusa legyen a dinamikai szingularitásnál. Könnyen látható, hogy $Q^{\mathcal{O}}_2$ szimmetrikus függvénye az $x_i = e^{\theta_i}$ változóinak és ez a faktor hordozza az alaktényező operátor függését.

Az n-részecskés alaktényezők általános paraméterezése

$$F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1,\ldots,\theta_n) = H_n \prod_{i<j} \frac{f_{min}(\theta_i-\theta_j)}{x_i+x_j} Q_n^{\mathcal{O}}(x_1,\ldots,x_n)$$

ahol az $x_i + x_j$ nevező a kinematikai szingularitásért felelős, H_n normálási állandó. A felcserélési és periodicitási tulajdonságokat kihasználva látható, hogy $Q_n^{\mathcal{O}}$ az x változóknak szimmetrikus függvénye (többnyire polinomja). A kinematikai és dinamikai szingularitási axióma (operátorfüggetlen módon) rekurzív egyenletekkel kapcsolja össze az alaktényezőket Kin:$Q_{n+2} \to Q_n$ és Din:$Q_{n+1} \to Q_n$, mely lehetőséget teremt a Q függvények szisztematikus meghatározására. Ezt a következő fejezetben konkrétan is megnézzük a sinh-Gordon és Lee-Yang modell esetére.

2.5.4. A sinh-Gordon és Lee-Yang modellek alaktényezői

A sinh-Gordon és a Lee-Yang modell S-mátrixa hasonló alakú (2.6)

$$S(\theta) = \frac{\sinh\theta - i\sin\pi p}{\sinh\theta + i\sin\pi p}$$

A sinh-Gordon modellre $p = \frac{b^2}{8\pi+b^2} > 0$ míg a Lee-Yang modell esetén $p = -\frac{2}{3} < 0$. A legegyszerűbb nemtriviális a kétrészecskés alaktényező, melyet a két modellre egyidejűleg konstruálunk meg. Felhasználjuk a következő matematikai tételt [49]:

Ha az $f(\theta)$ függvény kielégíti az

$$f(\theta) = S(\theta)f(-\theta); \quad f(i\pi-\theta) = f(i\pi+\theta);$$

egyenletet ahol az S-mátrix

$$S(\theta) = \exp\left\{\int_0^\infty dt\, h(t)\sinh\left(\frac{t\theta}{i\pi}\right)\right\}$$

alakba írható, továbbá f meromorf a fizikai sávban $0 \le \Im m(\theta) < \pi$ esetleges pólusokkal $i\alpha_1,\ldots,i\alpha_l$ és nullákkal $i\beta_1,\ldots,i\beta_k$ a képzetes tengelyen és nem nő gyorsabban mint $\exp(|\theta|)$ polinomja a végtelenben, akkor egyértelműen előállítható mint

$$f(\theta) = \frac{\prod_{j=1}^k \sinh\left(\frac{1}{2}(\theta-i\beta_j)\right)\sinh\left(\frac{1}{2}(\theta+i\beta_j)\right)}{\prod_{j=1}^l \sinh\left(\frac{1}{2}(\theta-i\alpha_j)\right)\sinh\left(\frac{1}{2}(\theta+i\alpha_j)\right)} \exp\left\{\int_0^\infty dt\, h(t)\frac{\sin^2\left(\frac{i\pi-\theta}{2\pi}t\right)}{\sinh x}\right\} \tag{2.9}$$

Jelen esetben a szórásmátrix kifejezhető elemi blokkok szorzataként

$$S(\theta) = (p)(1-p)\,; \quad (p) = \frac{\sinh(\frac{\theta}{2}+i\frac{\pi p}{2})}{\sinh(\frac{\theta}{2}-i\frac{\pi p}{2})} = -\exp\left\{2\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{\sinh t(1-x)}{\sinh t}\sinh\left(\frac{t\theta}{i\pi}\right)\right\} \tag{2.10}$$

így a minimális alaktényezők könnyedén megkonstruálhatóak.

A sinh-Gordon modell alaktényezői

A minimális alaktényező az előbbiek alapján

$$f_{min}(\theta) = \exp\left[8\int_0^\infty \frac{dx}{x}\sin^2\left(\frac{x(i\pi-\theta)}{2\pi}\right)\frac{\sinh\frac{xp}{2}\sinh(1-p)\frac{x}{2}\sinh\frac{x}{2}}{\sinh^2 x}\right] \tag{2.11}$$

Mivel az elmélet paritásinvariáns ($\varphi \leftrightarrow -\varphi, \theta \leftrightarrow -\theta$), így az operátorokat is szétválaszthatjuk páros és páratlanokra úgy, hogy a páros operátoroknak csak páros, a páratlanoknak viszont csak páratlan mátrixelemeik legyenek. A normálásaikat is külön megválaszthatjuk

$$H_{2n+1} = H_1 \mu^{2n} \quad ; \qquad H_{2n} = H_2 \mu^{2n-2} \quad ; \qquad \mu = 2\sqrt{\frac{\sin \pi p}{f_{min}(i\pi)}}$$

A Q_n szimmetrikus polinomok sem keverednek a rekurzió által. A kinematikai szingularitási axióma ugyanis a következőképpen kapcsolja össze Q_{n+2}-t Q_n-el:

$$(-1)^n Q_{n+2}(-x, x, x_1, \ldots, x_n) = x D_n(x, x_1, \ldots, x_n) Q_n(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.12}$$

ahol

$$D_n(x, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1,\mathrm{odd}}^{k} (-1)^{k+1} [m] x^{2(n-k)+m} \sigma_k \sigma_{k-m} \quad ; \qquad [m] = \frac{\sin mp}{\sin p}$$

Itt felhasználtuk a szimmetrikus polinomok egy bázisát:

$$\prod_{i=1}^{n} (x + x_i) = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$$

A rekurziós egyenletek megoldása függ attól milyen Q_1 vagy Q_2 polinommal indítjuk a rekurziót. Ez tesz különbséget az operátorok között és lehetőséget ad azok osztályozására. Magasabb hatványú polinomot választva a megoldások $\theta \to \infty$ aszimptotikája megváltozik és a konform térelméleti határesetben magasabb skáladimenzió rendelhető hozzájuk. Ilyen operátorok például egy kiválasztott $\mathcal{O}$ operátor derivált operátorai $\partial_+^n \mathcal{O}$, melyek az operátorok ismert (2.8) helyfüggése miatt csak extra faktorokat kapnak: $F_m^{\partial_+^n \mathcal{O}} = F_m^{\mathcal{O}} \sigma_1^m$. Érdemes tehát az elemi terek alaktényezőire fokuszálnunk. Az ilyen operátorok alaktényezőinek egy általános megoldása egy mátrix determinánsából származtatható

$$Q_n(k) = \det|M_{ij}(k)| \quad ; \qquad M_{ij}(k) = \sigma_{2i-j}[i - j + k]$$

és az $: e^{k\varphi} :$ típusú operátorok mátrixelemeit adja meg [42, 51]. Ezekből a megoldásokból, mind az elemi térnek, mind pedig annak összes derivált operátorának alaktényezője származtatható.

A Lee-Yang modell alaktényezői

A Lee-Yang modellben a paritás szimmetria sérül, így a páros és páratlan alaktényezők nem függetlenek egymástól. Ez a dinamikai szingularitási axiómából is látszik, mely a páros és páratlan alaktényezőket kapcsolja össze. A dinamikai szingularitás az önfúziós pólus eredménye

$$S(\theta + \frac{i\pi}{3}) S(\theta - \frac{i\pi}{3}) = S(\theta) \quad ; \qquad -i \operatorname{Res}_{\theta = i\frac{2\pi}{3}} S(\theta) = \Gamma^2 = -2\sqrt{3}$$

Ennek a pólusnak a minimális két-részecske alaktényezőben is tükröződnie kell:

$$f_{min}(\theta) = \frac{x + x^{-1} - 2}{x + x^{-1} + 1} v(i\pi - \theta) v(-i\pi + \theta)$$

ahol

$$v(\theta) = \exp\left[2\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{\sinh\frac{t}{2}\sinh\frac{t}{3}\sinh\frac{t}{6}}{\sinh^2 t}\, e^{i\theta\frac{t}{\pi}}\right]$$

A normálást célszerű

$$H_n = -\frac{\pi m^2}{4\sqrt{3}}\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}v(0)}\right)^n$$

alakba választani. Ekkor a kinematikai rekurziós egyenlet megegyezik a shG egyenletével (2.12) a nem fizikai $p = -\frac{2}{3}$ pontban, míg a dinamikai szingularitási egyenlet a következőnek adódik.

$$Q_{n+2}(x_1,\ldots,x_n,\omega x,\omega^{-1}x) = \left[x\prod_{j=1}^{n}(x+x_j)\right]Q_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,x) \quad ; \qquad \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

A mindkét rekurziónak eleget tevő legelemibb megoldás ismét csak determináns alakba írható

$$Q_n(x_1,\ldots,x_n) = \sigma_1\sigma_{n-1}\det|M_{ij}| \qquad ; \qquad M_{ij} = \sigma_{3i-2j+1}$$

Ezek a Lee-Yang modell egyetlen fundamentális terének alaktényezői, melyekből a leszármaztatott terek alaktényezői már mind meghatározhatóak [61, 65].

2.5.5. Korrelációs függvények

Az előző fejezetben egzaktul meghatározott alaktényezőket felhasználhatjuk a korrelációs függvények sor alakban történő előállítására. A (2.7) egyenletbe a multi-részecske aszimptotikus bázist helyettesítve az Euklideszi korrelációs függvényére azt kapjuk, hogy

$$\langle 0|\mathcal{O}(x,y)\mathcal{O}(0,0)|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\frac{d\theta_1}{(2\pi)}\cdots\int\frac{d\theta_n}{(2\pi)}F_n(\theta_1,\ldots,\theta_n)F_n(\theta_n,\ldots,\theta_1)e^{-m\sqrt{x^2+y^2}\sum_i\cosh\theta_i}$$

Ez nagy térfogatokra egy nagyon jól konvergáló sor és a gyakorlati alkalmazásokban elég véges sok tagot megtartani.

A szórásmátrixok, alaktényezők és korrelációs függvények meghatározásával az integrálható modelleket végtelen térfogatban egzaktul megoldottuk. A továbbiakban a véges térfogatú spektrummal fogunk foglalkozni.

3. fejezet

Kvantumtérelméletek véges térfogatban

A korábbi fejezetekben meghatároztuk kétdimenziós integrálható modellek részecsketartalmát és azok szórásmátrixát végtelen térfogatban. Jelen fejezetben ezeket a mennyiségeket használjuk a véges térfogatú spektrum meghatározásához. Először a térfogat inverzét polinomiálisan tartalmazó korrekciókat vesszük figyelembe, majd a térfogatban exponenciális kicsi korrekciókat vizsgáljuk, végül mindezeket egy ügyes eljárással, mely a termodinamika Bethe Ansatz (TBA) nevet viseli felösszegezzük.

Vizsgálódásainkat egy csak egy részecsketípust tartalmazó modellel kezdjük. Ez korábbi vizsgálataink szerint lehet a sinh-Gordon vagy a Lee-Yang modell. Végtelen térfogatban az energiaspektrum sokszorosan degenerált és folytonos: egy sokrészecske állapot esetén mely a $\theta_1, \ldots, \theta_n$ rapiditásokkal jellemezhető az energia egyszerűen

$$E(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \sum_i m \cosh \theta_i$$

Mivel a rapiditások/impulzusok tetszőleges értéket vehetnek fel, láthatjuk, hogy m felett folytonos energia eloszlással van dolgunk. Ez a folytonos spektrum válik kvantáltá véges térfogatban és ezt szeretnénk megérteni a következő fejezetben. Először a szabad modellt vizsgáljuk meg, aztán vesszük csak figyelembe a részecskék közötti kölcsönhatás megnyilvánulását.

3.1. Szabad spektrum véges térfogatban

Tegyük fel, hogy egy szabad modell energiaszintjeit vizsgáljuk L véges térfogatban periodikus peremfeltétellel. Ez azt jelenti, hogy minden tér periodikus L periódussal: $\varphi(x+L) = \varphi(x)$. Mivel az eltolás generátora a P impulzus: $e^{-iPL}\varphi(x,t)e^{iPL} = \varphi(x+L,t)$ így P spektrumának kvantáltnak kell lennie $e^{iPL} = 1$. Ez egy p impulzusú egy részecske állapotra a következőt jelenti:

$$e^{ipL} = e^{imL\sinh\theta} = 1 \quad ; \qquad p_n = \frac{2\pi}{L} n$$

Vagyis egy szabad rendszer sokrészecske állapotának energiája a térfogat bármilyen értéke esetén egzaktul

$$E(n_1, \ldots, n_k) = \sum_i \sqrt{m^2 + (\frac{2\pi}{L} n_i)^2}$$

Ez szembeszökően diszkrét spektrumot eredményez. Nyilván, ahogy a térfogattal végtelenbe tartunk, $L \to \infty$ a spektrum egyre sűrűbb lesz és végül előáll a végtelen térfogati

folytonos spektrum. Vizsgáljuk most meg, hogyan vehető figyelembe a részecskék kölcsönhatása.

3.2. Bethe-Yang egyenletek

Ha egy kvantummechanikai rendszer energiaszintjeit vizsgáljuk a körön valamely kompakt tartójú potenciál esetén akkor a hullámfüggvénynek a körön körbemenve nem csak az eltolásból adódó e^{ipL} fázist kell felszednie, hanem még a potenciálon való áthaladáskor fellépő transzmissziós $T(p)$ fázist is. A periodikussági feltevés kölcsönható esetben $e^{ipL}T(p) = 1$ módon változik. Ezt azt észrevételt használjuk fel most a kvantumtérelméletben.

3.2.1. A sinh-Gordon elmélet

Emlékezzünk vissza, hogy a kvantumtér lokalizált gerjesztéseit részecskéknek gondoljuk, de az csak addig elfogadható amíg méretük (m^{-1}) sokkal kisebb mint a térfogat L. Ha a részecskekép helyes, használhatjuk az előbbi kvantummechanikai érvelést. Mivel egy integrálható kvantumtérelméletben nincs részecskekeltés, így a részecskeszám jó kvantumváltozó és a szórás során csak fázist szednek fel a részecskék, mint egy potenciálon történő áthaladáskor.

Az egyrészecske kvantálási feltételek nem változnak, hiszen nincs kin szóródni:

$$e^{im\sinh\theta L} = 1 \leftrightarrow m\sinh\theta_n = \frac{2\pi}{L}n$$

Vagyis az egyrészecske energia:

$$E(n) = m\cosh\theta_n$$

Ezzel szemben a kétrészecskés állapot energiájánál figyelembe kell vennünk a kölcsönhatásukat. Legyen a két részecske impulzusa p_1, p_2. A kölcsönhatást úgy vesszük figyelembe, hogy a körön körbemenve nem csak az eltolásból származó e^{ip_1L} fázist szedjük fel, hanem a másik részecskén történő szóródásból származó fázist is:

$$e^{imL\sinh\theta_1}S(\theta_1-\theta_2) = e^{imL\sinh\theta_1}e^{i\delta(\theta_1-\theta_2)} = 1$$

ahol bevezettük a szórás fázisát

$$S(\theta_1-\theta_2) = e^{i\delta(\theta_1-\theta_2)}$$

Logaritmust véve az adódik, hogy

$$mL\sinh\theta_1 + \delta(\theta_1-\theta_2) = 2\pi n_1$$

Megbecsülhetjük a szabad kvantáláshoz képesti különbséget

$$p_n = p_n^{free} - \frac{\delta(p_1,p_2)}{L}$$

Látjuk, hogy ennek nagyságrendje $O(L^{-1})$, így eltűnik midőn $L \to \infty$. Hasonló módon a másik részecskére is felírhatjuk a kvantálási egyenletet

$$mL\sinh\theta_2 + \delta(\theta_2-\theta_1) = 2\pi n_2$$

Kihasználva az szórásmátrix unitaritását $S(\theta)S(-\theta) = 1$ (a fázisokra $\delta(\theta) + \delta(-\theta) = 0$) a két egyenlet kombinációjából

$$mL(p_1 + p_2) = 2\pi(n_1 + n_2)$$

láthatjuk, hogy a teljes impulzus $2\pi/L$ egységeiben kvantálódik. Ez az elvárásainkkal összhangban van, mivel a megmaradó impulzus generálja a térbeli eltolást, így $e^{iPL} = 1$. A kétrészecske állapot energiája

$$E(n_1, n_2) = m\cosh\theta_1(n_1, n_2) + m\cosh\theta_2(n_1, n_2)$$

Egy N-részecske állapot esetén a kvantálási feltétel ez első részecskére [55]

$$e^{imL\sinh\theta_1} S(\theta_1 - \theta_2)S(\theta_1 - \theta_3)\dots S(\theta_1 - \theta_n) = 1 \tag{3.1}$$

mely természetes módon terjeszthető ki a többire θ_i-re is. Ezen egyenleteket az ún. Bethe-Yang (BY) egyenletek, melyek meghatározzák az impulzusok kvantálását véges térfogatban. Ha az impulzusokat (rapiditásokat) már meghatároztuk az állapot energiája

$$E(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_i m\cosh\theta_i$$

Hadd hangsúlyozzuk még egyszer, hogy a részecskeközelítés csak akkor jogos, ha $m^{-1} \ll L$. A továbbiakban megmutatjuk, hogy a következő rendű korrekció e^{-mL} nagyságrendjébe esik. Mielőtt azonban az ilyen exponenciális kicsi korrekciókat megvizsgálnánk, terjesszük ki a BY egyenleteket nem diagonális szórás esetére.

3.2.2. A sine-Gordon elmélet és kapcsolata az XXZ spinlánccal

A sine-Gordon elméletet a taszító $\lambda < 1$ tartományban fogjuk vizsgálni. Ekkor nincsenek kvantumos szuszogó kötött állapotok csak a szoliton és az antiszoliton, melyet a korábbi módon jelölünk: $|\pm\rangle$. Periodikus peremfeltétel esetén az egyrészecske állapotok nem részei a spektrumnak. Ha az L térfogatú periodikus peremfeltételű modellben az $L \to \infty$ határesetet elvégeznénk, akkor csak a $Q = 0$ topológiai szektor állapotait kapnánk meg. Ha a Q töltésű szektor állapotait szeretnénk véges térfogatban leírni, akkor a $\varphi(x+L, t) = \varphi(x, t) + \frac{2\pi Q}{\beta}$ peremfeltételt kellene megkövetelnünk.

Például a $Q = \pm 1$ állapotokat tartalmazó szektorban léteznek egyrészecske állapotok, melyek a szabad egyrészecske kvantálási feltételnek tesznek eleget:

$$e^{iML\sinh\theta} = 1 \leftrightarrow ML\sinh\theta = \frac{2\pi}{L}n$$

ahol a szoliton és antiszoliton tömegét M-el jelöltük.

Ha a $Q = 2$ szektorban kétrészecske állapotot keresünk, akkor két szolitont kell a körre raknunk. Mivel ezek egymáson diagonálisan szóródnak $S^{++}_{++}(\theta)$-val, így korábbi diagonális BY egyenletünket használhatjuk:

$$e^{iML\sinh\theta_1} S^{++}_{++}(\theta_1 - \theta_2) = 1$$

A paritás szimmetriát kihasználva két antiszolitont ugyanezzel az egyenlettel írhatunk le a $Q = -2$ szektorban. A $Q = 0$ szektor kétrészecske állapota ennél lényegesen bonyolultabb mivel a szórások összekeverik a szolitont az antiszolitonnal. Feladatunk olyan állapot

találása, mely invariáns a szóródásokra. Mivel a paritás véges térfogatban is megmarad használhatjuk sajátfüggvényeit, a páros és a páratlan kombinációkat: $A_+^+(\theta_1)A_-^+(\theta_2) \pm A_-^+(\theta_1)A_+^+(\theta_2)$. Ezek diagonalizálják a szórást $S^{sym/asym}(\theta)$ sajátértékekkel. A hozzájuk tartozó BY egyenletek tehát

$$e^{iML\sinh\theta_1}S^{sym/asym}(\theta_1-\theta_2)=1$$

Ha most olyan modellt vizsgálunk véges térfogatban, mely egyszerre tartalmazza az összes topológiai szektort, akkor a két-részecskés BY egyenleteket a következő módon foglalhatjuk össze:

$$e^{iML\sinh\theta_1}S_{ij}^{kl}(\theta_1-\theta_2)\Psi_{kl}=\Psi_{ij}$$

ahol Ψ_{ij} azon együtthatók mátrixa, melyek diagonalizálják a szórást $\Psi_{ij}A_i^+(\theta_1)A_j^+(\theta_2)$.

Az általános n-részecskés esetben a diagonalizálandó mátrixot úgy kaphatjuk meg, ha az első dublett részecskét körbevisszük a körön, közben nemdiagonálisan szóródva az összes többi részecske dubletten:

$$e^{iML\sinh\theta_1 L}S_{i_1i_2}^{k_1j_2}(\theta_1,\theta_2)S_{k_1i_3}^{k_2j_3}(\theta_1,\theta_3)\dots S_{k_{n-1}i_n}^{j_1j_n}(\theta_1,\theta_n)\Psi_{j_1\dots j_n}=\Psi_{i_1\dots i_n}$$

Vagyis a

$$T_1(\theta_1;\theta_2,\dots,\theta_n)_{i_1i_2\dots i_n}^{j_1j_2\dots j_n}=S_{i_1i_2}^{k_1j_2}(\theta_1,\theta_2)S_{k_1i_3}^{k_2j_3}(\theta_1,\theta_3)\dots S_{k_{n-1}i_n}^{j_1j_n}(\theta_1,\theta_n)$$

mátrixot kell diagonalizálnunk. Ha az l-edik részecskét vittük volna körbe akkor a diagonalizálandó mátrix a

$$T_l(\theta_1,\theta_2,\dots;\theta_l;\dots,\theta_n)_{i_1i_2\dots i_n}^{j_1j_2\dots j_n}=S_{i_li_{l+1}}^{k_lj_{l+1}}(\theta_l,\theta_{l+1})S_{k_li_{l+2}}^{k_{l+1}j_{l+2}}(\theta_l,\theta_{l+2})\dots S_{k_{l-1}i_{l-1}}^{i_lj_{l-1}}(\theta_l,\theta_{l-1})$$

mátrix lenne. Lehet-e vajon egyszerre diagonalizálni ezen mátrixokat? A válasz igen és a következőképpen mutatható meg. Definiáljuk a

$$T(\theta|\theta_1,\dots,\theta_n)_{i_1,i_2,\dots i_n}^{j_1,j_2,\dots j_n}=S_{i\,i_1}^{k_1j_1}(\theta,\theta_1)S_{k_1i_2}^{k_2j_2}(\theta,\theta_2)\dots S_{k_{n-1}i_n}^{i\,j_n}(\theta,\theta_n) \tag{3.2}$$

transzfer mátrixot. Mivel a kétrészecske szórásmátrix zérus rapiditás különbségnél a permutációs mátrixra redukálódik, így nem nehéz látni, hogy $\theta=\theta_l$ esetén éppen a fenti diagonalizálandó mátrixsereget kapjuk. Mivel ezen transzfer mátrixok különböző θ argumentumokra felcserélnek, így a kívánt tulajdonság következik. Itt jegyezzük meg, hogy ezen mátrix megegyezik az inhomogén XXZ Heisenberg spinlánc transzfer mátrixával.

Felhasználva tehát az XXZ spinlánc diagonalizáló egyenleteit a sine-Gordon modell vezető végesméret-korrekcióit meg tudjuk határozni. Jelöljük röviden a transzfer mátrix sajátértékét $T(\theta)=\tilde{T}(\theta)S_0(\theta)$-val, ahol $\tilde{T}(\theta)$ az XXZ lánc transzfer mátrixának sajátértéke, mely a sG szórásmátrixának mátrix részéhez kapcsolható, míg S_0 a skalár részéből jön. A diagonalizálás a Baxter-féle TQ reláció segítségével hajtható végre. Találhatóak ugyanis olyan w_β úgynevezett Bethe gyökök, hogy a

$$Q(\theta)=\prod_\beta\sinh\lambda(\theta-w_\beta)$$

függvény kielégíti a

$$\tilde{T}(\theta)Q(\theta)=Q(\theta+i\pi)T_0(\theta-\frac{i\pi}{2})+Q(\theta-i\pi)T_0(\theta+\frac{i\pi}{2}) \qquad ; \qquad T_0(\theta)=\prod_j\sinh\lambda(\theta+\frac{i\pi}{2}-\theta_j)$$

egyenleteket. A $\tilde{T}(\theta)$ transzfer mátrix reguláris w_β-nál, mely lehetőséget teremt w_β meghatározására. Tekintve ugyanis a transzfer mátrixot, $Q(\theta)$ zérushelyénél az egyenlet jobb oldalának is el kell tűnnie, mely a következő

$$\frac{T_0(w_\beta - \frac{i\pi}{2})Q(w_\alpha + i\pi)}{T_0(w_\beta + \frac{i\pi}{2})Q(w_\alpha - i\pi)} = -1$$

úgynevezett Bethe Ansatz (BA) egyenleteket eredményezi. Az XXZ modell sajátértékeire ezek után $\tilde{T}(\theta_j) = \frac{Q(\theta_j - i\pi)}{Q(\theta_j)} T_0(\theta_j + \frac{i\pi}{2})$ teljesül és a BY egyenleteket a következő alakba írhatjuk:

$$e^{iML\sinh\theta_j L} S_0(\theta_j)\tilde{T}(\theta_j) = 1$$

Vagyis a sine-Gordon modell nagy térfogatú közelítő spektrumát meghatároztuk az XXZ modell megoldásának felhasználásával. Általában is állíthatjuk, hogy egy nemdiagonális elmélet véges térfogatú spektruma vezető rendben a BY egyenleteken keresztül egy inhomogén spinlánc spektrumának meghatározására vezethető vissza.

Ne felejtsük el azonban, hogy az energiaszintek meghatározása a BY egyenleteken keresztül csupán a spinláncban egzakt és nem a kis térfogatú kvantumtérelméletben, amikor a részecskék mérete már a térfogat nagyságrendjébe esik. Ekkor ugyanis a kvantumtérelméletben vákuum polarizációs effektusok lépnek fel, amelyek szisztematikus kiszámolásához a következő fejezetben fogunk hozzá.

3.3. Az alapállapot Lüscher korrekciója

A leglényegesebb különbség egy kvantummechanikai és egy kvantumtérelméleti rendszer véges méretű spektrumában a vákuum polarizációs effektusokban rejlik, melyet megérthetünk a vákuum állapot vizsgálatán keresztül. Egyszerűség kedvéért tekintsünk egy csak egy részecsketípust tartalmazó elméletet, melynek alapállapoti energiáját L térfogatban jelölje $E_0(L)$. Mivel ez az idő generátorának a $H(L)$ Hamilton operátornak a legkisebb sajátértéke, így aszimptotikusan nagy $y = R$ Euklideszi időfejlődésre ($t \to iy$) ez dominálja a rendszer állapotát:

$$E_0(L) = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log e^{-E_0(L)R} = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log(\mathrm{Tr}(e^{-H(L)R})) = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log Z(L,R)$$

A második egyenlőségnél feltételeztük, hogy az első gerjesztett állapot és a vákuum között egy rés van, vagyis az elmélet tömeges. Vegyük észre, hogy az előálló mennyiség a rendszer Euklideszi partíciós függvénye (az Euklideszi idő irányában periodikus peremfeltétellel). Mivel a relativisztikus szimmetria az időelfolytatott Euklideszi rendszerben forgásszimmetriaként jelentkezik az (x, y) térben, így ekvivalens módon tekinthetjük x-et az elfolytatott időnek $x = i\tau$ és y-t a tér koordinátának. Ekkor a korábbi Euklideszi momentum lesz az R térfogatú rendszer $H(R)$, energiája mellyel a partíciós függvény a korábbival analóg módon fejezhető ki. Ezt a rendszert az előző tükörmodelljének is szokás nevezni. Összességében tehát egy hasonló formulánk van $E_0(L)$-ra

$$E_0(L) = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log Z(L,R) = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log(\mathrm{Tr}(e^{-H(R)L}))$$

csak most nem az Euklideszi idővel, hanem a tükörmodell térfogatával kell végtelenhez tartanunk. A tükörmodell teljes állopotrendszerét ($|n\rangle \in \mathcal{H}$) felhasználva

$$\mathrm{Tr}(e^{-H(R)L}) = \sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}} \langle n|e^{-H(R)L}|n\rangle = \sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}} e^{-E_n(R)L}$$

Ha $E_0(L)$-ra csak a térfogatban vezető rendben vagyunk kíváncsiak, akkor feltételezhetjük, hogy L is nagy és megelégedhetünk az egyrészecskés tag megtartásával:

$$\sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}} e^{-E_n(R)L} = 1 + \sum_{p_n(R)} e^{-E(p_n(R))L} + \dots$$

a korrekciók nagyságrendje ekkor e^{-2mL} (ha a részecskék tömege m). Nagy térfogatban a részecske impulzusa

$$p_n(R) = \frac{2\pi}{R} n$$

mely a számunkra fontos $R \to \infty$ határesetben folytonossá válik, így az összegzést integrállá alakíthatjuk

$$\sum_n \to \frac{R}{2\pi} \int dp$$

Az alapállapoti energia $E_0(L)$ formuláját felhasználva[1] a következőt kapjuk

$$E_0(L) = -\int \frac{dp}{2\pi} e^{-E(p)L} + O(e^{-2mL})$$

Mivel a relativisztikus elmélet diszperziós relációja $E(p) = \sqrt{m^2 + p^2} > m$, így a vákuum energia végesméret korrekciója exponenciális kicsi e^{-mL} nagy L térfogatok esetén.

Az eredmény fizikai interpretációja a következő: egy kvantumtérelméletben mindig jelen vannak virtuális részecske-antirészecske párok és ezek keletkezése-eltűnése alakítja ki az alapállapoti energiáját. Véges térfogatban a végtelen térfogatú virtuális folyamatokhoz képest még azzal is számolnunk kell, hogy egy virtuális (tükör) részecske-antirészecske pár keletkezik a vákuumból, aztán a egyikük először körbemegy a világon (L kerületű körön $e^{-E(p)L}$ virtuális propagátorral) és csak aztán, egyesülve tűnnek el a vákuumban.

Természetesen ha n különböző típusú részecskénk van m_n tömeggel, akkor azok bármelyikének virtuális járulékát figyelembe kell vennünk, így egy összeg jelenik meg az általános kifejezésben a részecske típusra. Arra kell csak vigyázni, hogy ha $m_i > 2m_1$ akkor a legkönnyebb részecske mostanáig elhanyagolt két-részecskés korrekciója nagyobb nagyságrendű lesz, mint m_i egy-részecskés korrekciója. A következő alfejezetben egy alkalmas trükkel felösszegezzük az összes magasabb részecskés korrekciót és a vákuum állapot egy egzakt leírását adjuk meg véges térfogatban [64].

3.4. Az alapállapot egzakt leírása

Emlékezzünk vissza, hogy a alapállapoti energiát az Euklideszi partíciós függvényből számoljuk

$$E_0(L) = -\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log Z(L,R)) = -\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log(\mathrm{Tr}(e^{-H(R)L}))$$

aszimptotikusan nagy R (tükör) térfogatokra. Mivel tetszőleges L -re szeretnénk meghatározni az alapállapoti energiát, így a korábbiakhoz képest most figyelembe kell vennünk a több-részecskés tagok járulékát is

$$\mathrm{Tr}(e^{-H(R)L}) = \sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}} \langle n|e^{-H(R)L}|n\rangle = \sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}} e^{-E_n(R)L}$$

[1] Itt igazából a több-részecskés járulékokat is figyelembe vettük. Csak azok egymáson való szórását hanyagoltuk el, melyre a következő alfejezetben térünk ki.

Ahol $|n\rangle$ egy multi-részecske állapotot jelöl. Például egy N részecskés állapot nagy R térfogatokra jellemezhető az $n = (n_1, \ldots, n_N)$ kvantumszámokkal melyek a BY egyenleteken keresztül ((3.1) logaritmusát véve) írják le az állapotokat

$$mR \sinh \theta_j + \sum_{k:k\neq j}^{N} \delta(\theta_j - \theta_k) = 2\pi n_j$$

Ezen multi-részecske állapot energiája

$$E(\theta_{n_1}, \ldots, \theta_{n_N}) = \sum_k m \cosh \theta_k$$

Emlékezzünk vissza, hogy nagy R -ek esetén a lehetséges rapiditások R^{-1} sűrűséggel helyezkednek el. Érdemes tehát a multi-részecske állapotok $|n\rangle = (n_1, \ldots, n_N)$ jellemzése helyett azok $\rho(\theta)$ sűrűségét bevezetni. Ez azért is fontos, mert a partíciós függvényt, ahogy majd látni fogjuk a véges sűrűségű állapotok dominálják. Definíció szerint $\rho(\theta)\delta\theta$ mondja meg a $(\theta, \theta + \delta\theta)$ intervallumban betöltött kvantálási helyek számát. Vagyis a BY egyenlet nagy R térfogatokra

$$mR \sinh \theta_j + \int d\theta \rho(\theta) \delta(\theta_j - \theta) = 2\pi n_j$$

alakba írható, míg az energia

$$E[\rho] = \int d\theta \rho(\theta) \cosh \theta$$

Itt jegyezzük meg, hogy a BY egyenletek nem csak a $\rho(\theta)$-val betöltött $(n_1, \ldots, n_N)$ kvantumszámokra teljesülnek, hanem más végtelen sok kvantumszámra is. Jelölje ezen betöltetlen kvantumszámok sűrűségét $\bar{\rho}(\theta)$. Nyilván $\rho(\theta)$ és $\bar{\rho}(\theta)$ nem függetlenek egymástól hiszen a BY egyenlet mondja meg az összes lehetséges kvantumszám sűrűségének növekedését θ_j rapiditás környékén. Ez azt jelenti, hogy

$$mR \cosh \theta + \int d\theta' \rho(\theta') \phi(\theta - \theta') = 2\pi(\rho(\theta) + \bar{\rho}(\theta)) \qquad ; \qquad \phi(\theta) = -i\partial_\theta \log S(\theta)$$

A partíciós függvényben összegeznünk kell az összes multi-részecske állapotra $\{n_1, \ldots, n_N\}$. A $\rho(\theta)$ részecske sűrűség nem jellemzi magában kielégítően az állapotot, hiszen több $\{n_1, \ldots, n_N\}$ egész halmaz is vezethet ugyanahhoz a sűrűséghez. Ezt a degenerációt a nagy térfogatú határesetben leírhatjuk $\rho(\theta)$ és $\bar{\rho}(\theta)$ segítségével az entrópia faktoron keresztül

$$s[\rho, \bar{\rho}] = \int d\theta \left[(\rho + \bar{\rho}) \log(\rho + \bar{\rho}) - \rho \log \rho - \bar{\rho} \log \bar{\rho} \right]$$

A partíciós függvény tehát a sűrűségekkel kifejezve az alábbi alakot ölti

$$Z(L, R) = \int d[\rho] \exp \left\{ -LE[\rho] + s[\rho, \bar{\rho}] \right\}$$

Ezt nyeregpont közelítéssel számoljuk a ρ sűrűségben. Figyelembe véve, hogy

$$\delta\rho + \delta\bar{\rho} = \phi \star \rho \qquad ; \qquad \phi \star \rho(\theta) = \int \frac{d\theta'}{2\pi} \phi(\theta - \theta') \rho(\theta')$$

a nyeregponti egyenletet a

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = e^{\epsilon}$$

úgynevezett pszeudó energia változóban kapjuk

$$\epsilon = m \cosh \theta L - \phi \star \log(1 + e^{-\epsilon})$$

Ezen nemlineáris integrálegyenlet megoldásával a keresett alapállapoti energia (melyet a nyeregponti helyen vett értékből kapunk)

$$E_0(L) = -\int \frac{d\theta}{2\pi} \cosh \theta \log(1 + e^{-\epsilon}) \tag{3.3}$$

Megjegyezzük, hogy nagy L térfogatok esetén egy szisztematikus iteratív kifejtés adható, melynek vezető rendjében $\epsilon = -mL \cosh \theta$ és így visszakapjuk a korábbi fejezetben levezetett Lüscher korrekciót.

3.5. Gerjesztett állapotok egzakt leírása analitikus elfolytatással

Ebben a fejezetben gerjesztett, sokrészecske állapotok egzakt véges térfogatú spektrumát határozzuk meg az analitikus elfolytatás módszerével [38, 39]. A módszer lényege, hogy a Hamilton operátor különböző sajátértékei a komplex (térfogat) síkon össze vannak kötve, így analitikusan elfolytatva a térfogatban és egy nem triviális ciklus után visszatérve egyik sajátértékről egy másikra érkezhetünk meg. Az elágazási pontok az $(1+e^{-\epsilon})$ függvény nullájánál jelentkeznek. Ha ugyanis egy ilyen szingularitás keresztezi az integrációs kontúrt akkor annak járulékát a reziduummal kell figyelembe vennünk. Legyenek a szingularitások a $\theta_j + \frac{i\pi}{2}$ pontokban

$$e^{-\epsilon(\theta_j + \frac{i\pi}{2})} = -1 \tag{3.4}$$

és tekintsük az (3.3) energia kifejezés parciális integráltját. Mivel $\log(1+e^{-\epsilon})$ gyorsabban tűnik el a végtelenben mint $\cosh \theta$, így írhatjuk:

$$E_0(L) = \int \frac{d\theta}{2\pi} \sinh \theta \partial_\theta \log(1 + e^{-\epsilon})$$

A logaritmus nullái most pólusként jelentkeznek, melynek reziduumait összegyűjtve a gerjesztett állapot energiája

$$E(L) = \sum_{j=1}^{N} \cosh \theta_j - \int \frac{d\theta}{2\pi} \cosh \theta \log(1 + e^{-\epsilon})$$

ahol ϵ az elfolytatott egyenletet elégíti ki

$$\epsilon = m \cosh \theta L + \sum_{j=1}^{N} \log S(\theta - \theta_j - \frac{i\pi}{2}) - \phi \star \log(1 + e^{-\epsilon}) \tag{3.5}$$

A (3.4) egyenlet logaritmusát véve

$$\epsilon(\theta_j + \frac{i\pi}{2}) = imL \sinh \theta_j + \sum_{k \neq j} \log S(\theta_j - \theta_k) - \phi \star \log(1 + e^{-\epsilon})|_{\theta_j + \frac{i\pi}{2}} = 2\pi i n_j$$

a Bethe Yang egyenlet minden térfogaton érvényes kiterjesztését kapjuk. Megjegyezzük, hogy ezen egyenletek csak a sinh-Gordon modellre érvényesek. A Lee Yang modell esetén ugyanis az S-mátrixnak szingularitása van a fizikai sávban, mely az analitikus elfolytatás során előbb keresztezi a kontúrt mint a logaritmus nullája [38].

3.6. Sokrészecskés állapotok Lüscher korrekciója

Az egzakt sok részecskés állapotokat leíró egyenleteket iteratíven megoldva meghatározhatjuk multi-részecske állapotok Lüscher korrekcióját. Csak az $O(e^{-mL})$ nagyságrendű tagokat tartjuk meg (3.5)-ban, így

$$\log(1+e^{-\epsilon(\theta)}) \approx e^{-\epsilon(\theta)} \approx \prod_{j=1}^{N} S(\theta_j + \frac{i\pi}{2} - \theta) e^{-mL\cosh\theta}$$

A j -edik BY egyenlet (BY_j) módosulása

$$imL\sinh\theta_j + \sum_{k\neq j} \log S(\theta_j - \theta_k) - 2\pi i n_j = BY_j = \delta\Phi_j$$

ahol

$$\delta\Phi_j(\theta_1,\ldots,\theta_N) = -i\partial_{\theta_j} \int \frac{d\theta}{2\pi} \prod_{j=1}^{N} S(\theta_j + \frac{i\pi}{2} - \theta) e^{-mL\cosh\theta}$$

Ebből a rapiditások változása vezető rendben

$$\delta\theta_j = \left(\partial_j BY_k\right)^{-1} \delta\Phi_k$$

és az energia korrekciója

$$\Delta E(L) = \sum_{j=1}^{N} \cosh\theta_j \left(\partial_j BY_k\right)^{-1} \delta\Phi_k - \int \frac{d\theta}{2\pi} \cosh\theta \prod_{j=1}^{N} S(\theta + \frac{i\pi}{2} - \theta_j) e^{-mL\cosh\theta}$$

Az első tag a részecskék rapiditás változásából jön, mely a kvantumtérelméleti vákuum polarizáció megnyilvánulása. A BY egyenletben ugyanis a körön körbemenve nem csak a többi részecskén történő szóródás fázisát kell felszednünk, hanem a többi részecske által polarizált tengeren történő szóródást is. A polarizált tenger közvetlenül is járulékot ad az energiához: először virtuális részecske-antirészecske pár keletkezik a vákuumból, majd a virtuális részecske a körön körbehalad és a sokrészecskés állapot minden részecskéjén szóródik, végül a világ másik oldalán találkozva antirészecske párjával eltűnik a vákuumban. Ez a fizikai jelentése a második tagnak az energia formulában. Az itt levezetett formula a kötött állapottal nem rendelkező sinh-Gordon modell egzakt megoldásának nagy térfogatú kifejtésével adódott. Az eredmény helyes minden olyan modellben, ahol a szórásmátrixnak nincsen pólusa a fizikai sávban. Ebből kifolyólag az nem tartalmazza a Lee-Yang modellben fellépő úgynevezett μ tagokat. Lüscher eredeti levezetéséből tudjuk [54], hogy a μ tagok a fenti integrál tagokból az integrációs kontúr eltolásával megkaphatóak. A Lee-Yang modell megsejtett gerjesztett TBA egyenleteinek vizsgálata azt mutatta [38], hogy a végesméret korrekció integrál tagját a fenti formulánk előállította és a kontúr eltolásával belőle a μ tag is megkapható volt [26].

3.6.1. A nemdiagonális modellek sokrészecskés állapotainak Lüscher korrekciója

Vizsgáljunk egy olyan modellt, melyben az m tömegű részecskék a szimmetria egy multiplettjébe rendezhetőek, melyet a szórásmátrix összekever. (Gondolhatunk a sine-Gordon modellre). A modell nagy térfogatú spektrumát a BY egyenletek megoldásával kaphatjuk. Tekintsünk egy N-részecskés állapotot, $\underline{\theta} = \{\theta_1, \ldots, \theta_N\}$ rapiditásokkal. A sorozatos szóródások a sokrészecskés állapot multi-indexét $\underline{a} = \{a_1, \ldots, a_N\}$ megváltoztatják és a BY egyenleteket a sokrészecske szórásmátrix diagonalizálása által kaphatjuk meg. Ezt mint láttuk, a transzfer mátrix segítségével lehet megfogalmazni:

$$e^{imL\sinh\theta_k} T(\theta_k|\underline{\theta})^{\underline{b}}_{\underline{a}} \Psi_{\underline{b}} = e^{imL\sinh\theta_k} e^{i\delta(\theta_k|\underline{\theta})} \Psi_{\underline{a}} = \Psi_{\underline{a}} \qquad \forall k \tag{3.6}$$

ahol a transzfer mátrixra a következő jelölést vezettük be:

$$T(\theta|\underline{\theta})^{\underline{b}}_{\underline{a}} = S^{c_2 b_1}_{c_1 a_1}(\theta, \theta_1) S^{c_3 b_2}_{c_2 a_2}(\theta, \theta_2) \ldots S^{c_1 b_N}_{c_N a_N}(\theta, \theta_N) \tag{3.7}$$

mely $\theta = \theta_k$ esetén az $S^{cd}_{ab}(0) = -\delta^c_a \delta^d_b$ unitaritási egyenlet következményeként a sokrészecske szórásmátrixra redukálódik. A $T(\theta_k|\underline{\theta})^{\underline{b}}_{\underline{a}}$ mátrixok különböző θ_k esetén egymással felcserélnek és egyszerre diagonalizálhatóak. Minden $\Psi_{\underline{a}}$ sajátvektor egy sokrészecske állapotnak felel, melynek rapiditásait a diagonalizált BY egyenletből kaphatjuk

$$2n_k\pi = mL\sinh\theta_k + \delta(\theta_k|\underline{\theta}) = BY_k(\underline{\theta}) \tag{3.8}$$

Ezen egyenletetek szeretnénk most a vezető végesméret-korrekcióját megsejteni. A diagonális modellre kapott levezetésünk alapján a BY egyenlet vezető módosulására azt várjuk, hogy

$$2n_k\pi = BY_k(\underline{\theta}) - \delta\Phi_k \ ; \quad \delta\Phi_k = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\theta}}{2\pi} \frac{d}{d\theta_k} e^{i\delta(\tilde{\theta}|\underline{\theta})} e^{-\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta})L} \tag{3.9}$$

ahol bevezettük a $\tilde{\theta} = \theta + \frac{i\pi}{2}$ tükörrapiditás és $\tilde{\epsilon}(\theta) = -ip(\theta) = -im\sinh(\theta)$ tükörenergia jelölést. A $\delta\Phi_k$ korrekció exponenciálisan kicsi, amely a nagy térfogati impulzusok ugyanilyen rendű $\delta\theta_k = \left(\frac{\delta BY_k}{\delta\theta_j}\right)^{-1} \delta\Phi_j$ módosulását vonja maga után. Vagyis a sokrészecske állapot energiája

$$E^j(L) = \sum_k \epsilon(\theta_k) + \sum_{j,k} \frac{d\epsilon(\theta_k)}{d\theta_k} \left(\frac{\delta BY_k}{\delta\theta_j}\right)^{-1} \delta\Phi_j - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\theta}}{2\pi} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{\theta}} e^{i\delta(\tilde{\theta}|\underline{\theta})} e^{-\tilde{\epsilon}(\tilde{\theta})L} \tag{3.10}$$

ahol bevezettük $\tilde{p} = m\sinh\tilde{\theta}$ tükörimpulzus jelölést. Ha a modellben kötött állapotok is vannak akkor a korrekció μ tagjait az integrációs kontúr eltolásával kaphatjuk meg. Az itt megsejtett végesméret korrekciókat leellenőriztük a sine-Gordon modell egyszerűbb sokrészecske állapotaira, melyeket a rács regularizációból kapott egzakt megoldásból vettünk. A végesméret-korrekció számunkra azért lesz fontos, mert ennek nemrelativisztikus általánosítását fogjuk az AdS/CFT megfelelésben használni sokrészecske állapotok végesméret-korrekcióinak számolására.

4. fejezet

AdS/CFT, mint integrálható modell

Az AdS/CFT megfeleltetés szerint a IIB típusú szuperhúr elmélet az állandó görbületű $AdS_5 \times S^5$ háttéren ekvivalens a maximális $\mathcal{N} = 4$ szuperszimmetriával rendelkező négy dimenziós $SU(N_c)$ mértékelmélettel [56]. A mértékelmélet lokális mértékinvariáns operátorai felelnek meg a húrelmélet állapotainak. A planáris határesetben (N_c színek száma végtelen nagy) a mértékinvariáns operátorok független, csak operátorok szorzatának nyomát tartalmazó kifejezésekre bonthatóak, melyek a húr oldalon nem kölcsönható húroknak felelnek meg. Ebben a határesetben a húrelmélet energiaspektruma egy-egy értelmű kapcsolatban van az operátorok anomális dimenzióival. Ez a megfeleltetés a csatolás minden értékére fennáll. Ha történetesen a csatolás és a kérdéses operátor töltése nagy akkor a húrelmélet klasszikussá, (vagy szemiklasszikussá) válik és a szokásos módszerekkel vizsgálható. Ezzel szemben ha rövid operátorokat vizsgálunk vagy a csatolás kicsi, a szuperhúr elmélet mélyen kvantumos tartományában kell vizsgálódnunk. Ha speciálisan eredményeinket perturbatív mértékelméleti számításokkal kívánjuk összehasonlítani, hogy az AdS/CFT dualitást ellenőrizni tudjuk, vagy csak egy rövid operátort kívánunk leírni minden csatolási értékre, akkor a szuperhúrelméletet egzaktul kell kvantálnunk, mely egy erősen nemlineáris elmélet. Szerencsére az $AdS_5 \times S^5$ háttéren mozgó szuperhúr klasszikusan integrálható és a kvantumos integrálhatóságot feltételezve (melyre most már tengernyi tapasztalat van) felhasználhatjuk a kétdimenziós integrálható modellek elméletét a kvantumos húrelmélet definíciójára. Az AdS/CFT megfeleltetés tehát lehetőséget teremt kétdimenziós integrálható módszerek használatával négy dimenziós $\mathcal{N}$ =4 szuperszimmetrikus mértékelméletek tanulmányozására.

Ebben a részben az AdS/CFT megfeleltetést mint kétdimenziós integrálható modellt tekintjük. A klasszikus integrálhatóságot a sine-Gordon modellhez hasonlóan a monodrómia mátrix megkonstruálásával bizonyíthatjuk. A kvantumos modell Lagrange-i definíciójához fénykúp rögzítést kell használni, mely meghatározza a rendszer szimmetriáját és az aszimptotikus (végtelen térfogatú) gerjesztések diszperziós relációját. Mivel ezen rész pedagogikusan és kimerítően van tárgyalva [7]-ban, így mi csak a számunkra fontos eredményeket fogjuk idézni. A modellre ezután használjuk az önmegoldó módszert, megkeressük a szimmetriával felcserélő és a fizikai követelményeknek (unitaritás, keresztezés, maximális analitikusság) eleget tevő szórásmátrixot és a kötött állapotokat. Végül saját munkáim nyomán [11, 27, 25] a mértékelméleti számolással közvetlenül összehasonlítható végesméret korrekciókat analizáljuk.

4.1. Klasszikus integrálhatóság

Az $AdS_5 \times S^5$ háttéren mozgó húr dinamikáját az általa végigsöpört világlepedő segítségével definiálhatjuk. Ehhez először a hátteret kell paramétereznünk, melyen a húr mozog. Az R sugarú S^5 gömb beágyazható $\mathbb{R}^6$-ba

$$Y_M Y^M = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2 + Y_6^2 = R^2$$

Hasonló módon a $-R$ görbületű AdS_5 teret a hat dimenziós $(2,4)$ szignatúrájú térbe ágyazhatjuk

$$X_M X^M = -X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = -R^2$$

Mivel a planáris határesetben nincsenek húr kölcsönhatások, így a húrelmélet bozonikus részének hatását a végtelen henger $AdS_5 \times S^5$ háttérbe történő $(\sigma, \tau) \to (X_M, Y_M)$ leképezésével definiáljuk. A világlepedő felszíne a következő alakba írható

$$S = g^2 \int d\tau d\sigma (\partial_\mu X^M \partial^\mu X_M + \partial_\mu Y^M \partial^\mu Y_M + \text{fermionok}) \quad ; \qquad g^2 = \frac{R^2}{\alpha'}$$

Itt α' a húrfeszültséget jelöli, a világsíkon a metrika pedig $(-1,1)$. A fermion hatásnak nincs ilyen szép geometriai jelentése. Van viszont egy alternatív leírás, mely egyesíti a fermionokat és a bozonokat. Ez azon az észrevételen alapul, mely szerint mind az S^5 gömb, mind pedig az AdS_5 Anti-de Sitter tér előáll egy-egy hányadostérként:

$$S^5 = \frac{SO(6)}{SO(5)} = \frac{SU(4)}{SO(5)} \qquad ; \qquad AdS_5 = \frac{SO(4,2)}{SO(4,1)} = \frac{SU(2,2)}{SO(4,1)}$$

A fermionok és bozonok közös hányadostérbeli leírása

$$AdS_5 \times S^5 + \text{fermionok} = \frac{PSU(2,2|4)}{SO(4,1) \times SO(5)}$$

ahol $PSU(2,2|4)$ azt a szupercsoportot jelöli, melynek maximális bozonikus részcsoportja $SU(2,2) \times SU(4)$. A húrelmélet hatása ekkor egy nemlineáris szuper szigma modell hatás, melyet a következőképpen konstruálhatunk meg. Vegyük a csoport elemhez tartozó Mauer-Cartan formát és bontsuk fel a hányadosfelbontás szerint:

$$\frac{PSU(2,2|4)}{SO(4,1) \times SO(5)} \ni h \longrightarrow J = h^{-1} dh = J_\parallel + J_\perp$$

A fizikai altér tovább bontható egy Z_4 gradálás segítségével $J_\perp \to J_1, J_2, J_3$, ráadásul a mértéktranszformációt generáló áramok a nulladik komponenshez tartoznak $J_\parallel = J_0$
. A fermionokat is tartalmazó hányadoshatás ezek után

$$\mathcal{L} \propto \mathrm{Str}(J_2 \wedge *J_2) - \mathrm{Str}(J_1 \wedge J_3)$$

mely már csak a fizikai tereket tartalmazza A szupernyom (Str) a fermionikus (páratlan) altereken egy extra -1-es faktort tartalmaz. A modell integrálhatósága egy lapos konnexió létezéséből következik

$$dA - A \wedge A = 0 \qquad ; \qquad A(\mu) = J_0 + \mu^{-1} J_1 + \frac{\mu^2 + \mu^{-2}}{2}(J_2 + *J_2) + \mu J_3$$

Ugyanis ekkor a sine-Gordon modellhez hasonlóan a

$$T(\mu) = \mathcal{P} \exp \oint A_\nu(x) dx^\nu$$

monodrómia mátrix nyomát a μ paraméter szerint sorba fejtve végtelen sok egymással involúcióban álló megmaradó mennyiséget kaphatunk.

4.2. Kvantumelmélet végtelen térfogatban

Először a modellt az $L \to \infty$ határesetben vizsgáljuk. A kvantumelmélet definíciójához először felelevenítjük a Lagrange-i típusú kvantálásban belátható tulajdonságokat [7], majd ezeket feltételezve és kiegészítve az integrálhatóságból jövő megszorításokkal axiomatikus keretek között tárgyaljuk az elméletet.

4.2.1. Lagrange-i kvantálási keret

Az integrálható modellek Lagrange-i kvantálásának megfelelője a következő [7]. A húrelmélet diffeomorfizmus szabadságától fénykúp mérték rögzítésével szabadulhatunk meg. A kétdimenziós szigma modell térfogata ekkor a fénykúp impulzussal azonosítható $L = P^+$, mely csak egész értékeket vehet fel. Továbbá a mértékrögzítés lesérti a teljes $PSU(2,2|4)$ szimmetriát a két centrális töltéssel kiterjesztett $SU(2|2) \otimes SU(2|2)$ szupercsoportra. A modell diszperziós relációja pedig

$$E(p) = \sqrt{1 + 16g^2 \sin^2 \frac{p}{2}}$$

Az aszimptotikus állapotok a szimmetria fundamentális ábrázolása szerint transzformálódnak és az őket összekötő szórásmátrix unitér, és felcserél a szimmetriákkal.

4.2.2. Az önmegoldó keret

A szokásos eljárásunknak megfelelően azokat az általános tulajdonságokat, melyeket a Lagrange-i keretben megkaptunk most posztuláljuk, kiegészítve még a kvantumos integrálhatóság követelményével.

Az aszimptotikus részecskeállapotok a centrálisan kiterjesztett $su(2|2)$ algebra bifundamentális ábrázolása szerint transzformálódnak. Ezért a továbbiakban a szimmetria algebra szerkezetét vizsgáljuk meg.

Az $su(2|2)$ algebra

Az algebra sematikusan

$$J = \begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 & Q_1^{+3} & Q_1^{+4} \\ L_2^1 & L_2^2 & Q_2^{+3} & Q_2^{+4} \\ Q_3^1 & Q_3^2 & R_3^3 & R_3^4 \\ Q_4^1 & Q_4^2 & R_4^3 & R_4^4 \end{pmatrix}$$

alakba rendezhető, ahol $L_1^1 + L_2^2 = 0 = R_1^1 + R_2^2$. A szuperalgebra maximális bozonikus része $su(2) \otimes su(2)$ (melyeket az L és R elemek generálnak). Az algebra a következő csererelációkkal van definiálva

$$[L_a^b, J_c] = \delta_c^b J_a - \frac{1}{2}\delta_a^b J_c \qquad [L_a^b, J^c] = -\delta_a^c J^b + \frac{1}{2}\delta_a^b J^c$$

$$[R_\alpha^\beta, J_\gamma] = \delta_\gamma^\beta J_\alpha - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta J_\gamma \qquad [R_\alpha^\beta, J^\gamma] = -\delta_\alpha^\gamma J^\beta + \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta J^\gamma$$

$$\{Q_\alpha^a, Q_\beta^b\} = \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{ab} C \qquad \{Q_a^{+\alpha}, Q_b^{+\beta}\} = \epsilon_{ab}\epsilon^{\alpha\beta} C^+$$

$$\{Q_\alpha^a, Q_b^{+\beta}\} = \delta_b^a R_\alpha^\beta + \delta_\alpha^\beta L_b^a + \frac{1}{2}\delta_b^a \delta_\alpha^\beta H$$

ahol a centrális töltések az impulzussal, a csatolási állandóval és az ábrázolások jellemző ξ paraméterrel

$$C = ig(e^{iP} - 1)e^{2i\xi} \quad ; \qquad C^{+} = -ig(e^{-iP} - 1)e^{-2i\xi} \tag{4.1}$$

módon vannak kifejezve. A fenti képletekben a latin betűk lehetséges értékei $1, 2$ míg a görögöké $3, 4$.

Az ábrázolásokat legtermészetesebben szuperterekkel írhatjuk le. A fundamentális ábrázolást például a (w_1, w_2) bozonikus és a (θ_3, θ_4) fermionikus (Grassman) koordináták lineáris kifejezései adják. A továbbiakban szükségünk lesz még a teljesen szimmetrikus Q töltésű ábrázolásra, melynek dimenziója $4Q$ és amely a szupertér nyelven a Q hosszúságú polinomokat tartalmazza. Ezen ábrázolás jele $\mathcal{V}^Q(p, \xi)$ és a bozonikus $su(2) \otimes su(2)$ részalgebra szerint

$$\mathcal{V}^Q = V^{\frac{Q}{2}} \otimes V^0 + V^{\frac{Q-2}{2}} \otimes V^0 + V^{\frac{Q-1}{2}} \otimes V^{\frac{1}{2}}$$

módon bomlik fel. A $V^{\frac{Q}{2}}$ ábrázolás dimenziója $Q+1$. A bázist a következőképpen írhatjuk

$$\begin{aligned}
Q+1 \longrightarrow |1+j\rangle &= w_1^{Q-j} w_2^j \quad ; \quad j = 0, 1, \ldots, Q \\
Q-1 \longrightarrow |Q+2+j\rangle &= w_1^{Q-2-j} w_2^j \theta_3 \theta_4 \quad ; \quad j = 0, 1, \ldots, Q-2 \\
Q \longrightarrow |(\alpha-1)Q+1+j\rangle &= w_1^{Q-1-j} w_2^j \theta_\alpha \quad ; \quad j = 0, 1, \ldots, Q-1\,, \quad \alpha = 3, 4
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Természetesen a bozonikus állapotok $Q+1$ és $Q-1$ valamint a fermionikus állapotok összes $2Q$ száma megegyezik. A szimmetria generátorok hatása differenciál operátorokkal definiálhatóak

$$\begin{aligned}
L_a^b &= w_a \frac{\partial}{\partial w_b} - \frac{1}{2}\delta_a^b w_c \frac{\partial}{\partial w_c} & R_\alpha^\beta &= \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\beta} - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta \theta_\gamma \frac{\partial}{\partial \theta_\gamma} \\
Q_\alpha^a &= a\,\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial w_a} + b\epsilon^{ab}\epsilon_{\alpha\beta} w_b \frac{\partial}{\partial \theta_\beta} & Q_a^{+\alpha} &= d\,w_a \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + c\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{ab}\theta_\beta \frac{\partial}{\partial w_b}
\end{aligned}$$

ahol egy nagyon hasznos parametrizáció

$$a = \sqrt{\frac{g}{Q}}\eta \ ; \ b = \sqrt{\frac{g}{Q}}\frac{ie^{i2\xi}}{\eta}\left(\frac{z^+}{z^-} - 1\right) \ ; \ c = -\sqrt{\frac{g}{Q}}\frac{\eta e^{-2i\xi}}{z^+} \ ; \ d = \sqrt{\frac{g}{Q}}\frac{z^+}{i\eta}\left(1 - \frac{z^-}{z^+}\right) \tag{4.3}$$

és a legtermészetesebb választás $\eta = e^{i\xi} e^{\frac{i}{4}p}\sqrt{iz^- - iz^+}$. Az algebra csererelációi ból

$$ab - cd = 1 \longleftrightarrow z^+ + \frac{1}{z^+} - z^- - \frac{1}{z^-} = i\frac{Q}{g}$$

Mivel mind a P impulzus, mind az H energia centrális töltéseként szerepel az algebrában így

$$e^{iP} = \frac{z^+}{z^-} \quad ; \qquad H = Q + \frac{2ig}{z^+} - \frac{2ig}{z^-} \quad ; \qquad H^2 = Q^2 + 16g^2 \sin^2\frac{P}{2} \tag{4.4}$$

Vagyis a diszperziós reláció következik az algebra relációiból. Az algebra egy másik sajátos tulajdonsága, hogy irreducibilis ábrázolások szorzata lehet irreducibilis. Konkrétan ez történik a fundamentális és a Q töltésű ábrázolás szorzata esetén

$$\mathcal{V}^1 \otimes \mathcal{V}^Q = \mathcal{W}^{Q+1} \tag{4.5}$$

A tükörmodell szempontjából fontosak még a teljesen antiszimmetrikus ábrázolások, melyek a $1 \leftrightarrow 3$ és $2 \leftrightarrow 4$ indexcserével kaphatóak meg a teljesen szimmetrikus ábrázolásból. A generátorok differenciál operátoros alakja nem változik.

A szórásmátrix

A szórásmátrixról meg fogjuk követelni, hogy cseréljen fel a szimmetriával. Mivel a szimmetria két $su(2|2)$ direkt szorzata, így a szórásmátrix is tenzor szorzat alakú lesz. Kezdjük vizsgálatainkat egy $su(2|2)$ tényező analízisével. Az integrálhatóság miatt a sokrészecske szórási folyamatok kétrészecske szórások szorzatára bomlanak, így tekintsünk két aszimptotikus részecskét p_1 és p_2 impulzusokkal. A szórásmátrix a következőképpen kapcsolja össze az ábrázolásokat [6]:

$$\hat{S}_{1-1}(p_1,p_2): \quad \mathcal{V}^1(p_1,e^{ip_2})\otimes\mathcal{V}^1(p_2,1) \longrightarrow \quad \mathcal{V}^1(p_1,1)\otimes\mathcal{V}^1(p_2,e^{ip_1}) \tag{4.6}$$

és felcserél a szimmetria töltéseivel (J):

$$\hat{S}_{1-1}(p_1p_2)\left[J(p_1,e^{ip_2})+J(p_2,1)\right] = \left[J(p_1,1)+J(p_2,e^{ip_1})\right]\hat{S}_{1-1}(p_1,p_2) \tag{4.7}$$

Az algebra egy érdekes tulajdonsága, hogy a fundamentális ábrázolás önmagával vett tenzor szorzata irreducibilis $\mathcal{V}^1\otimes\mathcal{V}^1=\mathcal{W}^2$. Ez azt jelenti, hogy az S-mátrix invarianciája normálás erejéig egyértelműen rögzíti értékét. Röviden foglaljuk össze, hogyan számolható ki expliciten az S-mátrix alakja. Dekomponáljuk az ábrázolásokat a bozonikus $su(2)\times su(2)$ részalgebrák szerint

$$(V^{\frac{1}{2}}\times V^0+V^0\times V^{\frac{1}{2}})\otimes(V^{\frac{1}{2}}\times V^0+V^0\times V^{\frac{1}{2}}) = V^1\times V^0+2V^0\times V^0+2V^{\frac{1}{2}}\times V^{\frac{1}{2}}+V^0\times V^1$$

Az egyes alterek bázisa és a rájuk vetítő $su(2)$ kovariáns differenciális operátorok legyenek

$$\begin{aligned}
V^1\times V^0 &\to \quad v_1=\tfrac{1}{2}(w^1_a w^2_b+w^1_b w^2_a) &&; \quad D^1=\frac{\partial^2}{\partial w^1_a\partial w^2_b}\\
V^0\times V^0 &\to \quad v_2=\tfrac{1}{2}(w^1_1 w^2_2-w^1_2 w^2_1) &&; \quad D^2=\frac{\partial^2}{\partial w^1_1\partial w^2_2}-\frac{\partial^2}{\partial w^1_1\partial w^2_2}\\
V^0\times V^0 &\to \quad v_3=\tfrac{1}{2}(\theta^1_3\theta^2_4-\theta^1_4\theta^2_3) &&; \quad D^3=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2_4\partial\theta^1_3}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2_4\partial\theta^1_4}\\
V^{\frac{1}{2}}\times V^{\frac{1}{2}} &\to \quad v_4=w^1_a\theta^2_\alpha &&; \quad D^4=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2_\alpha\partial w^1_a}\\
V^{\frac{1}{2}}\times V^{\frac{1}{2}} &\to \quad v_5=\theta^1_\alpha w^2_a &&; \quad D^5=\frac{\partial^2}{\partial\theta^1_\alpha\partial w^2_a}\\
V^0\times V^1 &\to \quad v_6=\tfrac{1}{2}(\theta^1_\alpha\theta^2_\beta+\theta^1_\beta\theta^2_\alpha) &&; \quad D^6=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2_\beta\partial\theta^1_\alpha}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2_\alpha\partial\theta^1_\beta}
\end{aligned}$$

Ezek segítségével az invariáns projektorok $\Lambda^j_i = v_i D^j$ alakba írhatóak, ahol az azonos indexekre összegzés értendő. A bozonikus részre invariáns S-mátrix alakja tehát

$$\hat{S}=a^i_j\Lambda^j_i = a^1_1\Lambda^1_1+a^2_2\Lambda^2_2+a^3_2\Lambda^2_3+a^2_3\Lambda^3_2+a^3_3\Lambda^3_3+a^4_4\Lambda^4_4+a^5_4\Lambda^4_5+a^4_5\Lambda^5_4+a^5_5\Lambda^5_5+a^6_6\Lambda^6_6$$

A normálást tetszőlegesen választhatjuk: $a^1_1=1$. Megkövetelve a fermionikus töltések (Q,Q^+) által generált szimmetriákra való invarianciát az S-mátrix komponensek értékére azt kapjuk, hogy [9, 6]

$$a^1_1=1 \qquad ; \qquad a^2_2=2\frac{(x^+_1-x^+_2)(1-x^-_1x^+_2)x^-_2}{(x^+_1-x^-_2)(1-x^-_1x^-_2)x^+_2}-1$$

$$a_3^3 = -\left[\frac{(x_1^- - x_2^+)}{(x_1^+ - x_2^-)} - 2\frac{(x_1^+ - x_2^+)(1 - x_1^+ x_2^-)x_1^-}{(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)x_1^+}\right]\frac{\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2}{\eta_1\eta_2}$$

$$a_2^3 = \frac{i(x_1^+ - x_2^+)x_1^- x_2^- \tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2}{(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)x_1^+ x_2^+} \quad ; \quad a_3^2 = -\frac{i(x_1^- - x_2^+)(x_2^- - x_2^+)(x_1^+ - x_2^+)}{(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)\eta_1\eta_2}$$

$$a_4^4 = \frac{(x_1^- - x_2^-)\tilde{\eta}_2}{(x_1^+ - x_2^-)\eta_2} \quad ; \quad a_4^5 = -\frac{(x_1^- - x_1^+)\tilde{\eta}_2}{(x_1^+ - x_2^-)\eta_1} \quad ; \quad a_5^4 = \frac{(x_2^+ - x_2^-)\tilde{\eta}_1}{(x_1^+ - x_2^-)\eta_2}$$

$$a_5^5 = \frac{(x_1^+ - x_2^+)\tilde{\eta}_1}{(x_1^+ - x_2^-)\eta_1} \quad ; \quad a_6^6 = \frac{(x_1^- - x_2^+)\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2}{(x_1^+ - x_2^-)\eta_1\eta_2}$$

ahol a fázisok a következőképpen vannak választva

$$\tilde{\eta}_1 = e^{i\frac{p_1}{4}}\sqrt{i(x_1^- - x_1^+)} \quad ; \quad \eta_1 = e^{i\frac{p_2}{2}}\tilde{\eta}_1 \quad ; \quad \eta_2 = e^{i\frac{p_2}{4}}\sqrt{i(x_2^- - x_2^+)} \quad ; \quad \tilde{\eta}_2 = e^{i\frac{p_1}{2}}\eta_2$$

Az $x^\pm$ paraméterezése expliciten

$$x^\pm(p) = \frac{\left(\cot\frac{p}{2} \pm i\right)}{4g}\left(1 + \sqrt{1 + 16g^2\sin^2\frac{p}{2}}\right) \tag{4.8}$$

A szórásmátrix a szimmetria tulajdonságokon felül kielégíti az unitaritási

$$S(p_1, p_2)S(p_2, p_1) = 1$$

és keresztezési egyenleteket [48]

$$S^{c_1}(p_1, p_2)S(-p_1, p_2) = 1 \quad ; \quad S^{c_2}(p_1, p_2)S(p_1, -p_2) = 1$$

ahol a töltéstükrözés hatása $w_a \to \epsilon_{ab}w_b$, $\theta_\alpha \to i\epsilon_{\alpha\beta}\theta_\beta$.

A teljes szórásmátrixot tenzorszorzat alakba írjuk

$$S(p_1, p_2) = S_0(p_1, p_2)\hat{S}(x_1, x_2) \otimes \hat{S}(x_1, x_2)$$

ahol a skalár tényezőnek ki kell elégítenie az

$$S_0(p_1, p_2)S_0(p_2, p_1) = 1$$

és

$$S_0(p_1, p_2)S_0(-p_1, p_2) = S_0(p_1, p_2)S_0(p_1, -p_2) = \left[\frac{(\frac{1}{x_1^+} - x_2^-)(x_1^+ - x_2^+)}{(\frac{1}{x_1^+} - x_2^-)(x_1^- - x_2^+)}\right]^2$$

egyenleteket. A fizikailag releváns (minimális) megoldás [63]

$$S_0 = \frac{(x_1^+ - x_2^-)(1 - \frac{1}{x_1^+ x_2^-})}{(x_1^- - x_2^+)(1 - \frac{1}{x_1^- x_2^+})}e^{2i\theta(x_1, x_2)}$$

ahol θ az úgynevezett felöltöztető fázis, mely a következő alakba írható

$$\theta(x_1, x_2) = \chi(x_1^+, x_2^+) - \chi(x_1^+, x_2^-) - \chi(x_1^-, x_2^+) + \chi(x_1^-, x_2^-)$$

A gyenge csatolású határesetben ($g \to 0$) az adódik, hogy

$$\chi(x_1, x_2) = -\sum_{r=2}^{\infty}\sum_{s>r}\frac{c_{r,s}(g)}{(r-1)(s-1)}\left[\frac{1}{x_1^{r-1}x_2^{s-1}} - \frac{1}{x_1^{s-1}x_2^{r-1}}\right]$$

ahol egy konvergens előállítás

$$c_{r,s}(g) = 2\cos(\frac{\pi}{2}(s-r-1))(r-1)(s-1)\int_0^\infty dt \frac{J_{r-1}(2gt)J_{s-1}(2gt)}{t(e^t-1)} \tag{4.9}$$

A felöltöztető fázisnak van egy analitikus elfolytatásra alkalmas integrál reprezentációja is [34]

$$\chi(x_1,x_2) = i\oint_{C_1}\frac{dw_1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{dw_2}{2\pi i}\frac{1}{w_1-x_1}\frac{1}{w_2-x_2}\log\frac{\Gamma(1+ig(w_1+w_1^{-1}-w_2-w_2^{-1}))}{\Gamma(1-ig(w_1+w_1^{-1}-w_2-w_2^{-1}))} \tag{4.10}$$

ahol az integrálásokat az egységkörre kell elvégezni.

Kötött állapotok

A szórásmátrixnak pólusa van

$$x_1^- = x_2^+$$

esetén, mely a fizikai sávba esik és a pólus reziduuma egy projektor mely a $Q=2$ szimmetrikus ábrázolásra vetít ($\hat{S}$ mátrix faktornak nullái vannak az antiszimmetrikus ábrázolásnak megfelelő altéren). Ezt a pólust kötött állapotként fogjuk interpretálni [35, 34]. A multiplett dimenziója 8^2 és paraméterei

$$z^+ = x_1^+ \quad , \qquad z^- = x_2^-$$

melyek az (4.4) egyenleteknek tesznek eleget $Q=2$ -re.

Az S-mátrixnak pólusa van még $x_1^- = \frac{1}{x_2^+}$ esetén, mely az előző kötött állapot keresztezett csatornában fellépő pólusának felel meg, tehát a kötött állapot a pólus egy diagrammal magyarázza meg, nincs szükség más kötött állapot bevezetésére.

Az S_0 skalár faktornak egyszeres nullája van az

$$x_1^+ = x_2^-$$

pontban, viszont mindkét $\hat{S}$ mátrix faktornak pólusa van itt az antiszimmetrikus ábrázolásnak megfelelő altéren, így a pólus reziduuma a $Q=2$ antiszimmetrikus ábrázolásra vetít. Ez a pólus viszont nincs az fizikai tartományban így nem tartozik kötött állapot hozzá. Más a helyzet a modell tükör megfelelőjével [5]. Annál ugyanis az antiszimmetrikus ábrázolásban lévő pólus van a fizikai tartományban és a szimmetrikus ábrázolásban lévő nincs. Megjegyezzük még, hogy a felöltöztető fázisnak kettős pólusai vannak, melyek természetesen nem tartoznak kötött állapotokhoz, viszont Coleman-Thun diagrammokkal magyarázhatóak [34].

Most, hogy az S_{1-1} szórásmátrix összes pólusát megmagyaráztuk, meg kell konstruálnunk az S_{1-2} és S_{2-2} szórásmátrixokat és azok összes pólusát is meg kell magyaráznunk. Már az S_{1-1} szórás esetén is láttuk, hogy a kötött állapotoknak megfelelő pólusok az S_0 skalár faktorban jelennek meg, így először azok meghatározására fokuszálunk. Mivel a felöltöztető fázisnak nincsenek egyszerű pólusai, így a kötött állapotok feltérképezésének szempontjából vizsgálhatjuk a redukált skalár faktort

$$\tilde{S}_{11}(p_1,p_2) = \frac{(x_1^+ - x_2^-)(1-\frac{1}{x_1^+x_2^-})}{(x_1^- - x_2^+)(1-\frac{1}{x_1^-x_2^+})} = \frac{u_1-u_2+\frac{i}{g}}{u_1-u_2-\frac{i}{g}}$$

ahol bevezettük a rapiditás változót

$$x^+ + \frac{1}{x^+} = u + \frac{i}{2g} \qquad ; \qquad x^- + \frac{1}{x^-} = u - \frac{i}{2g}$$

A rapiditás változóban a kötött állapoti pólusfeltétel $u_1 = u_2 + \frac{i}{g}$. Álljon elő a $Q = 2$ töltésű és u rapiditású részecske mint két $u \pm \frac{i}{2g}$ rapiditású $Q = 1$ töltésű részecske kötött állapota. Ekkor a fúzióból az $1 - 2$ szórás skalár tényezőjére

$$\tilde{S}_{12}(p_1, p_2) = \frac{u_1 - u_2 + \frac{i}{2g}}{u_1 - u_2 - \frac{3i}{g}} \frac{u_1 - u_2 + \frac{3i}{2g}}{u_1 - u_2 - \frac{i}{2g}}$$

adódik. A kifejezésnek pólusa van $u_1 = u_2 + \frac{i}{2g}$ esetén mely a $Q = 1$ részecskéhez tartozik. Az $u_1 = u_2 + \frac{3i}{2g}$ pólushoz egy új részecskét kell bevezetnünk. Az energia kiszámítása

$$E_1(u - \frac{i}{g}) + E_2(u + \frac{i}{2g}) = E_1(u - \frac{i}{g}) + E_1(u) + E_1(u + \frac{i}{g}) = E_3(u)$$

rávilágít arra, hogy a kötött állapot töltése $Q = 3$. Innen indukcióval látható, hogy minden Q esetén találhatunk kötött állapotokat és, hogy ezek Q darab $(u + \frac{i}{2g}(Q-1), u + \frac{i}{2g}(Q-3), \ldots, u - \frac{i}{2g}(Q-3), u - \frac{i}{2g}(Q-1))$ rapiditású részecske kötött állapotai. Ennek megfelelően a szórásmátrix skalár része

$$\tilde{S}_{1Q}(u_1, u_2) = \prod_{j=1}^{Q} \tilde{S}_{11}(u_1, u_2 + \frac{i}{2g}(Q + 1 - 2j)) = \frac{u_1 - u_2 + \frac{i(Q+1)}{2g}}{u_1 - u_2 - \frac{i(Q+1)}{g}} \frac{u_1 - u_2 + \frac{i(Q-1)}{2g}}{u_1 - u_2 - \frac{i(Q-1)}{2g}}$$

melynek pólusai a $Q + 1$ és $Q - 1$ kötött állapotokhoz tartoznak.

A továbbiakban kiszámoljuk az S_{1Q} szórás $\hat{S}_{1Q}$ mátrix részét. Általában az $\hat{S}_{N-M}$ szórás az alábbi tereket kapcsolja össze

$$\hat{S}_{N-M}(p_1, p_2): \quad \mathcal{V}^N(p_1, e^{ip_2}) \otimes \mathcal{V}^M(p_2, 1) \longrightarrow \quad \mathcal{V}^N(p_1, 1) \otimes \mathcal{V}^M(p_2, e^{ip_1})$$

és felcserél a szimmetria töltéseivel (J):

$$S_{N-M}(p_1 p_2) \left[J(p_1, e^{ip_2}) + J(p_2, 1)\right] = \left[J(p_1, 1) + J(p_2, e^{ip_1})\right] S_{N-M}(p_1, p_2) \tag{4.11}$$

A számunkra érdekes $N = 1$ és $M = Q$ esetben a tenzor szorzat irreducibilis

$$\mathcal{V}^1 \otimes \mathcal{V}^Q = \mathcal{W}^{Q+1} \tag{4.12}$$

Vagyis a szimmetriára történő kovariancia skalár szorzó erejéig rögzíti a szórásmátrixot. Ezt a skalár tényezőt különben már meghatároztuk a fúziós módszerrel. Az S-mátrix konstrukciója követi a fundamentális S-mátrix meghatározásának módját. Először a bozonikus $su(2) \otimes su(2)$ részalgebrák szerint dekomponáljuk az ábrázolásokat

$$\begin{aligned}(V^{\frac{1}{2}} \otimes V^0 + V^0 \otimes V^{\frac{1}{2}})(V^{\frac{Q}{2}} \otimes V^0 + V^{\frac{Q-1}{2}} \otimes V^{\frac{1}{2}} + V^{\frac{Q-2}{2}} \otimes V^0) = \\ = V^{\frac{Q+1}{2}} \otimes V^0 + 3V^{\frac{Q-1}{2}} \otimes V^0 + 2V^{\frac{Q}{2}} \otimes V^{\frac{1}{2}} + 2V^{\frac{Q-2}{2}} \otimes V^{\frac{1}{2}} \\ + V^{\frac{Q-1}{2}} \otimes V^1 + V^{\frac{Q-3}{2}} \otimes V^0\end{aligned}$$

Majd az S-mátrixot invariáns differenciál operátorok segítségével írjuk le

$$\hat{S}_{1-Q} = \tilde{a}_1^1\tilde{\Lambda}_1^1 + \sum_{i,j=2}^{4} \tilde{a}_i^j\tilde{\Lambda}_j^i + \sum_{i,j=5}^{6} \tilde{a}_i^j\tilde{\Lambda}_j^i + \sum_{i,j=7}^{8} \tilde{a}_i^j\tilde{\Lambda}_j^i + \tilde{a}_9^9\tilde{\Lambda}_9^9 + \tilde{a}_{10}^{10}\tilde{\Lambda}_{10}^{10} \tag{4.13}$$

ahol a projektorok konkrét alakja a mellékletben található. A fúzióban meghatározott normálásnak

$$a_1^1 = 1 \tag{4.14}$$

felel meg. Megkövetelve az invarianciát a fermionikus töltésekre is az együtthatók egyértelműen rögzítve vannak. Eredményeinket a mellékletben foglaltuk össze.

Az S mátrix unitaritása összekapcsolja az S_{Q-1} és S_{1-Q} mátrix elemeket. Ez a konkrét együtthatók esetén az $x^+ \leftrightarrow x^-$ és $z^+ \leftrightarrow z^-$ cserét követeli meg, ahol $x^\pm$ a fundamentális míg $z^\pm$ a Q töltésű ábrázolás paraméterei.

Az általános S_{N-M} mátrixelem meghatározása sokkal körülményesebb mivel a $\mathcal{V}^N \otimes \mathcal{V}^M$ tenzorszorzat nem irreducibilis. Ilyenkor a rendszer $su(2|2)$ nél nagyobb Yangian szimmetriáját lehet használni [4]. Mivel a végesméret-effektusoknál ezen általános mátrixelemekre nem lesz szükségünk, így azokat itt nem tárgyaljuk.

Összefoglalva viszont állíthatjuk, hogy a Q töltésű teljesen szimmetrikus ábrázolások a modell teljes spektrumát adják.

Végül megjegyezzük, hogy a tükörmodell szempontjából releváns teljesen antiszimmetrikus ábrázolásbeli Q töltésű részecskék szórásmátrixát a teljesen szimmetrikus szórásmátrixból megkaphatjuk. Mivel a szimmetrikus és az antiszimmetrikus ábrázolás $1 \leftrightarrow 3$ és $2 \leftrightarrow 4$ módon van összekapcsolva, így lényegében a Q és $Q^\dagger$ operátorok hatását kell felcserélnünk. Nem nehéz látni, hogy ez az $x^+ \leftrightarrow x^-$ és $z^+ \leftrightarrow z^-$ cserének felel meg.

4.3. AdS/CFT véges térfogatban

Az előző fejezetben meghatároztuk a modell részecske spektrumát végtelen térfogatban a részecskék szórásmátrixával egyetemben. Ezen információk birtokában most a véges térfogatú spektrumot vizsgáljuk. Először a BY egyenleteket határozzuk meg, melyek a polinomiális korrekciókat tartalmazzák, majd az exponenciálisan kicsi Lüscher típusú korrekciókat vizsgáljuk.

Emlékezzünk vissza, hogy ha egy nemdiagonális szóráselméletben a multi-részecske állapotok vezető korrekcióját akarjuk meghatározni, akkor a transzfer mátrixot kell diagonalizálnunk. Mivel jelen esetben a szórásmátrix tenzor szorzat szerkezetű

$$S(p_1, p_2) = S_0(p_1, p_2)\hat{S}(x_1, x_2) \otimes \hat{S}(x_1, x_2)$$

így a transzfer mátrix is szorzat alakú lesz. Koncentráljuk csak fundamentális részecskéket tartalmazó sokrészecske állapotra L térfogat esetén. Ha kivételesen ezen részecskék csak 11 vagy 33 típusúak akkor szórásaik diagonálisak és ezen állapotok vezető végesméret korrekcióját mint diagonális szoráselméletét kezelhetjük. Ha a részecskék típusa 11 akkor $su(2)$ szektorról beszélünk és BY egyenletünk

$$e^{ip_kL} \prod_{j:j\neq k} S_0(p_k, p_j) = 1$$

alakot ölt. Ha az összes részecske típusa 33 akkor az $sl(2)$ szektorban vagyunk és BY egyenletünk

$$e^{ip_kL}\prod_{j:j\neq k} S_{sl(2)}(p_k,p_j)=1 \quad ; \qquad S_{sl(2)}(p_1,p_2)=\frac{(x_1^+-x_2^-)(1-\frac{1}{x_1^-x_2^+})}{(x_1^--x_2^+)(1-\frac{1}{x_1^+x_2^-})}$$

Általános állapot esetén az egyenlet

$$e^{ip_kL}\prod_{j:j\neq k} S_0(p_k,p_j)\lambda_1(p_k|p_1,\dots,p_n)\lambda_2(p_k|p_1,\dots,p_n)=1$$

ahol $\lambda_{1,2}$ a

$$T(p|p_1,\dots,p_n)^{j_1,j_2,\dots j_n}_{i_1,i_2,\dots i_n}=(-1)^{F_i}\hat{S}^{k_1j_1}_{i\,i_1}(p,p_1)\hat{S}^{k_2j_2}_{k_1i_2}(p,p_2)\dots\hat{S}^{i\,j_n}_{k_{n-1}i_n}(p,p_n)$$

transzfer mátrix egy-egy sajátértéke. Mint már a sine-Gordon modellnél említettük a transzfer mátrix interpretálható, mint egy inhomogén spinlánc transzfer mátrixa. A sine-Gordon modell esetén a spinlánc az XXZ Heisenberg lánc volt, így az ottani ismereteinket felhasználva azt diagonalizálni tudtuk. Jelen esetben a spinlánc az inhomogén Hubbard modell, így a Hubbard modell megoldásait fogjuk felhasználni [8].

A Hubbard lánc az y_α (fermion) és w_β magnonikus gerjesztéseket tartalmazza tetszőleges számban és ezek kielégítik az alábbi BA egyenleteket

$$\begin{aligned}
1 &= \prod_k \frac{y_\alpha-x_k^+}{y_\alpha-x_k^-}\sqrt{\frac{x_k^-}{x_k^+}}\prod_\beta \frac{y_\alpha+\frac{1}{y_\alpha}-w_\beta+\frac{i}{2g}}{y_\alpha+\frac{1}{y_\alpha}-w_\beta-\frac{i}{2g}}\\
1 &= \prod_\alpha \frac{w_\beta-y_\alpha-\frac{1}{y_\alpha}-\frac{i}{2g}}{w_\beta-y_\alpha-\frac{1}{y_\alpha}+\frac{i}{2g}}\prod_{\beta'\neq\beta}\frac{w_\beta-w_{\beta'}+\frac{i}{g}}{w_\beta-w_{\beta'}-\frac{i}{g}}
\end{aligned}$$

Az ezen megoldásoknak eleget tevő $y_\alpha(\{p_i\})$, $w_\beta(\{p_i\})$ gyökök segítségével a transzfer mátrix sajátértéke a következőképpen fejezhető ki

$$\lambda_1(p_k|p_1,\dots,p_n)=\prod_\alpha\frac{x_k^--y_\alpha}{x_k^+-y_\alpha}\sqrt{\frac{x_k^+}{x_k^-}}$$

Ezzel az összes, a térfogatban inverzében polinomiális impulzus korrekciót meghatároztuk. Ha az impulzusok már meg vannak az energia egyszerűen

$$E(p_1,\dots,p_n)=\sum_k E(p_k)=\sum_k\sqrt{1+16g^2\sin^2\frac{p_k}{2}}$$

A következő fejezetben az ezekhez járuló exponenciálisan kicsi, Lüscher típusú korrekciókat vizsgáljuk.

4.3.1. Sokrészecskés állapotok Lüscher korrekciója

Ebben a fejezetben az $sl(2)$ szektorbeli multi-részecske állapotok vezető, BY egyenleten túli korrekcióit fogjuk vizsgálni. A relativisztikus kinematikára megsejtett összefüggésünket fogjuk általánosítani. A leglényegesebb különbségek, hogy a diszperziós reláció

nem relativisztikusan invariáns, valamint, hogy a szórásmátrix nem csak a rapiditások különbségétől függ.

Jelölje az $sl(2)$ szektorbeli 33 részecske indexét a. Mivel ezen gerjesztések egymáson diagonálisan szóródnak így a csak a típusú részecskéket tartalmazó állapot a transzfer mátrix saját vektora

$$e^{i\delta(\tilde{p}|p_1,\ldots,p_N)} = \sum_{a_1,\ldots,a_N} (-1)^F \left[S^{a_2a}_{a_1a}(\tilde{p},p_1)S^{a_3a}_{a_2a}(\tilde{p},p_2)\ldots S^{a_1a}_{a_Na}(\tilde{p},p_N)\right]$$

A fenti kifejezésben minden a_i indexre összegeznünk kell (a-ra nem). Az a_1-re való összegzés egy nyomot definiál. Mivel fermionikus gerjesztéseink is vannak így a szupernyomot kell használnunk ezért vezettük be a $(-1)^F$-t, ahol F a fermionszám operátor. Az elméletünkben minden Q töltésre léteznek kötött állapotok, így a fenti transzfer mátrixot a kötött állapotokra is kiterjeszthetjük. Ez annak felel meg, hogy az a_i indexek a Q töltésű ábrázolás $(4Q)^2$ dimenziós index készletében veszik fel az értékeiket.

A csak a típusú részecskéket tartalmazó állapot BY egyenletének korrekciója

$$2n_k\pi = BY_k(p_1,\ldots p_n) + \delta\Phi_k = p_kL - i\log\left[\prod_{k\neq j} S^{aa}_{aa}(p_k,p_j)\right] + \delta\Phi_k$$

ahol a korrekciós tag sejtésünk szerint

$$\delta\Phi_k = -\sum_{a_1,\ldots,a_N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tilde{p}}{2\pi}(-1)^F\left[S^{a_2a}_{a_1a}(\tilde{p},p_1)\ldots\frac{\partial S^{a_{k+1}a}_{a_ka}(\tilde{p},p_k)}{\partial\tilde{p}}\ldots S^{a_1a}_{a_Na}(\tilde{p},p_N)\right]e^{-\tilde{\epsilon}_{a_1}(\tilde{p})L}$$

ahol $\tilde{\epsilon}_{a_1}(\tilde{p})$ az a_1 típusú (akár kötött állapoti) részecske tükör diszperziós relációja. Ezen egyenletek megoldásával az impulzusok korrekcióját kifejezhetjük $\delta\Phi_k$-val és így a korrigált energia

$$\begin{aligned}E^j(L) = &\sum_k \epsilon(p_k) + \sum_{j,k}\frac{d\epsilon(p_k)}{dp_k}\left(\frac{\delta BY_k}{\delta p_j}\right)^{-1}\delta\Phi_j\\ &-\sum_{a_1,\ldots,a_N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tilde{p}}{2\pi}(-1)^F\left[S^{a_2a}_{a_1a}(\tilde{p},p_1)S^{a_3a}_{a_2a}(\tilde{p},p_2)\ldots S^{a_1a}_{a_Na}(p,p_N)\right]e^{-\epsilon_{\tilde{a}_1}(\tilde{p})L}\end{aligned} \tag{4.15}$$

alakot ölt. Vegyük észre, hogy az energia vákuum polarizációs korrekcióját ki tudjuk fejezni a transzfer mátrix segítségével, de a BY egyenletek módosulását már nem.

A következő alfejezetekben ezen formulákat fogjuk ellenőrizni a vezető rendben először a legegyszerűbb kétrészecske állapotra, majd tetszőleges multi-részecske állapotra. Végül a legegyszerűbb esetben a vezető utáni rendű korrekciót számoljuk ki.

Konishi operátor a BY egyenletből

A legegyszerűbb sokrészecske állapot, melynek nemtriviális végesméret korrekciója van egy két-részecske állapot $(p,-p)$ impulzusokkal. A mértékelméleti leírásban operátorok nyomának anomális dimenzióját írjuk le, melyek így invariánsak az operátorok ciklikus permutációira. A részecskeképben ez a teljes impulzus eltűnését jelenti. Történetesen egy egyrészecske állapotra ez a $p = 0$ feltételt vonja maga után, amely a szuperszimmetria miatt minden térfogat esetén megmarad, így számunkra az állapot nem érdekes.

A két-részecske állapot BY egyenletei az $sl(2)$ szektorban

$$e^{ipL}S_{sl(2)}(p,-p)e^{2i\theta(x(p),x(-p))}=1 \qquad ; \qquad S_{sl(2)}(p_1,p_2)=\frac{(x_1^+-x_2^-)(1-\frac{1}{x_1^-x_2^+})}{(x_1^--x_2^+)(1-\frac{1}{x_1^+x_2^-})}$$

Ezeket a $g=0$ pont körül sorbafejtve rendről rendre határozhatjuk meg a lehetséges momentum értékeket. Tekintsük először a felöltöztető fázis $g=0$ körüli sorfejtését. Ehhez először kifejtjük a Bessel függvényeket

$$J_n(2gt)=\frac{g^nt^n}{n!}(1-\frac{t^2g^2}{n+1}+\dots)$$

és elvégezzük az integrálokat $c_{r,s}(g)$-ben, melynek eredménye

$$\begin{aligned} c_{r,s}(g) &= \frac{2\cos(\frac{\pi}{2}(s-r-1))}{(r-2)!(s-2)!}g^{r+s-2}\Big[(r+s-3)!\zeta(r+s-2)+\dots \\ &\qquad -\frac{g^2}{rs}(r+s)(r+s-1)!\zeta(r+s)+\dots\Big] \end{aligned} \tag{4.16}$$

Mivel $g\to 0$ esetén $x_{1,2}=a_{1,2}g^{-1}+O(g)$ módon viselkedik, így

$$\chi(x_1,x_2)=-2g^6(\zeta(3)-10g^2\zeta(5))\frac{a_1-a_2}{a_1^2a_2^2}+O(g^{10}) \tag{4.17}$$

Vagyis a felöltöztető fázis járuléka harmadrendben jelentkezik először (g^6, mert csak páros hatványok vannak).

Az egyszerűség kedvéért további vizsgálatainkat az $L=2$ térfogat értékre specifikáljuk. Az impulzust $p=\sum_i p^{(i)}g^{2i}$ módon paraméterezve és a BY egyenletet iteratíven megoldva, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p &= \frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}g^2+\frac{9\sqrt{3}}{2}g^4-24\sqrt{3}(1+\zeta(3))g^6 \\ &\qquad +\frac{\sqrt{3}}{4}(671+960(\zeta(3)+\zeta(5)))g^8+O(g^{10}) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ezen impulzus értéket a diszperziós relációba írva a kétrészecske állapot energiája

$$\begin{aligned} \Delta_{BY}(g) &= 2E(p)=4+12g^2-48g^4+336g^6-(2820+288\zeta(3))g^8 \\ &\qquad +(26508+4320\zeta(3)+2880\zeta(5))g^{10}+O(g^{12}) \end{aligned}$$

amely az AdS/CFT megfeleltetés értelmében a Konishi operátor $\mathrm{Tr}(\Phi^2)$ anomális dimenzióját hivatott leírni. Vegyük észre, hogy az impulzusban g^{2n} rendben jelentkező tagok az energiában csak egy renddel később g^{2n+2} rendben adnak járulékot, mely a diszperziós reláció speciális tulajdonsága. Összehasonlítva az eredmény a mértékelméleti számolással [41] állíthatjuk, hogy az már negyed rendben eltér. A továbbiakban megmutatjuk, hogy a két-részecske állapot Lüscher korrekciója éppen helyreteszi ezt a diszkrepanciát.

A Konishi operátor vezető rendű Lüscher korrekciója

A kétrészecske állapot energiájának Lüscher korrekciója két forrásból származik. Egyrészt a BY egyenletet kell módosítanunk

$$2\pi=pL-i\log\left[S_{aa}^{aa}(p,-p)\right]-\sum_{a_1,a_2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tilde{p}}{2\pi}(-1)^F\left[(\partial_{\tilde{p}}S_{a_1a}^{a_2a}(\tilde{p},p))S_{a_2a}^{a_1a}(\tilde{p},-p)\right]e^{-\tilde{E}_{a_1}(\tilde{p})L}$$

majd a módosult $p + \delta p$ impulzus kifejezést kell a vákuum polarizációkat is tartalmazó energia formulába beírni

$$E^j(L) = 2E(p+\delta p) - \sum_{a_1,a_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{p}}{2\pi} (-1)^F \left[S_{a_1 a}^{a_2 a}(\tilde{p},p) S_{a_2 a}^{a_1 a}(\tilde{p},-p) \right] e^{-\tilde{E}_{a_1}(\tilde{p})L}$$

Mint később látni fogjuk mindkét integráltag nagyságrendje azonos (g^8). Korábbi megjegyzésünknek megfelelően ez azt jelenti, hogy az impulzus vezető rendű korrekciója csak a vezető utáni rendben jelenik meg az energiában. Ezért a fejezet hátralevő részében csak az energia vákuum polarizációs korrekciójára koncentrálunk.

Konkretizáljunk a fenti formulát a Konishi operátor esetére. Az eredeti modell diszperziós relációja egy Q töltésű részecskére az Euklideszi propagátor

$$E_E^2 + 16g^2 \sin^2 \frac{p_E}{2} + Q^2 = 0$$

pólusfeltételéből az $E_E \to -iE$ és $p_E \to p$ elfolytatással származtatható. A tükörmodell diszperziós relációja ezzel szemben az $E_E \to \tilde{p}$ és $p_E \to i\tilde{E}$ elfolytatással az alábbinak adódik [5]

$$\tilde{E}_Q(\tilde{p}) = 2\text{arcsinh}\left(\frac{1}{4g} \sqrt{Q^2 + \tilde{p}^2} \right)$$

Mivel az eredeti és a tükörmodell $E \leftrightarrow i\tilde{p}$ és $p \leftrightarrow i\tilde{E}$ kapcsolatban van így

$$e^{-\tilde{E}_Q(\tilde{p})} = \frac{z^-(\tilde{p})}{z^+(\tilde{p})}$$

ahol $z^\pm$ a tükörrészecske paraméterei mint a tükörimpulzus függvényei

$$z^\pm = \frac{(\tilde{p} + iQ)}{4g} \left(\sqrt{1 + \frac{16g^2}{Q^2 + \tilde{p}^2}} \pm 1 \right)$$

A Konishi operátor vezető rendű Lüscher korrekciója ezekkel a paraméterekkel

$$\Delta_8 E = -\sum_{Q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{p}}{2\pi} \left(\frac{z^-}{z^+} \right)^2 \sum_b (-1)^{F_b} \left[S_{Q-1}(z^\pm, x^\pm(p)) S_{Q-1}(z^\pm, x^\pm(-p)) \right]_{b(33)}^{b(33)}$$

ahol a Q -ra történő összegzést a tükör kötött állapotokra, míg a b-re történő összegzést azok szabadsági fokaira kell elvégeznünk. A szórásmátrix a tükör részecskék és az eredeti részecskék szórásmátrixa. Az előreszórás amplitúdója skalár és mátrix részre faktorizálódik. A mátrix részét a mellékletben számoljuk ki. A skalár részt a szimmetrikus ábrázoláshoz hasonlóan a fúziós módszerrel állítjuk elő. A tükör kötött állapot Q darab elemi részecskét tartalmaz melyek a $z_k^- = z_{k-1}^+$ kötési feltételnek tesznek eleget. A kötött állapot paraméterei ezek után $z^- = z_1^-$ és $z^+ = z_Q^+$. Ismert $z^\pm$ esetén z^--ból indulva a komponensek paraméterei a

$$z_k^+ = \frac{1}{2} \left(z_k^- + \frac{1}{z_k^-} + \frac{i}{g} + \sqrt{\left(z_k^- + \frac{1}{z_k^-} + \frac{i}{g} \right)^2 - 4} \right) \tag{4.19}$$

tömeghéj feltételből származtathatóak. A szórás skalár része a fúziós egyenletből kapható

$$S^{sl(2)}_{Q-1}(z^{\pm},x^{\pm}) = \prod_{i=1}^{Q} S^{sl(2)}_{1-1}(z_i^{\pm},x^{\pm}) \quad ; \qquad S^{sl(2)}_{1-1}(z^{\pm},x^{\pm}) = \frac{z^- - x^+}{z^+ - x^-}\frac{1-\frac{1}{z^+x^-}}{1-\frac{1}{z^-x^+}} \tag{4.20}$$

Vezető rendben számolva a skalár részre

$$\begin{aligned} S^{scalar,sl(2)}_{Q-1} =& \frac{3q^2-6iQq+6iq-3Q^2+6Q-4}{3q^2+6iQq-6iq-3Q^2+6Q-4}\cdot \\ & \frac{16}{9q^4+6(3Q(Q+2)+2)q^2+(3Q(Q+2)+4)^2} \end{aligned} \tag{4.21}$$

a mátrix részre pedig

$$S^{matrix,sl(2)}_{Q-1} = \frac{5184Q^2(3q^2+3Q^2-4)^2g^4}{(q^2+Q^2)^2((3q-3iQ+3i)^2-3)^2} \tag{4.22}$$

adódik (lásd a mellékletet, ahol a tükörimpulzus $\tilde{p} = q$ val helyettesítettük tipográfiai okokból). Az exponenciális faktor vezető rendje

$$\left(\frac{z^-}{z^+}\right)^2 = \frac{16g^4}{(Q^2+q^2)^2} + \dots \tag{4.23}$$

az eredményeket összerakva és az integrált reziduum tétellel elvégezve azt kapjuk, hogy

$$-\frac{num(Q)}{\left(9Q^4-3Q^2+1\right)^4\left(27Q^6-27Q^4+36Q^2+16\right)} + \frac{864}{Q^3} - \frac{1440}{Q^5} \tag{4.24}$$

ahol $num(Q)$ egy Q-beli polinom:

$$\begin{aligned} num(Q) =& 7776Q(19683Q^{18}-78732Q^{16}+150903Q^{14}-134865Q^{12}+ \\ & +1458Q^{10}+48357Q^8-13311Q^6-1053Q^4+369Q^2-10) \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ezen kifejezést kell felösszegeznünk a tükör kötött állapotok Q töltésére egytől végtelenig. A két utolsó faktor eredménye $864\zeta(3)-1440\zeta(5)$, míg a maradék egy egésszé összegződik fel. Vagyis a teljes vezető rendű Lüscher korrekció

$$\Delta_8 E = (324+864\zeta(3)-1440\zeta(5))g^8 \tag{4.26}$$

amely már megegyezik a mértékelméleti számításokkal.

4.3.2. Általános állapot vezető Lüscher korrekciója

Ebben a fejezetben az $sl(2)$ szektor általános $2M$ részecske állapotának vezető Lüscher korrekcióját számítjuk ki, kiterjesztve előző fejezetbeli eredményeinket $M = 1$ -ről. Eredetileg csak páros részecske számú állapotokra szorítkozunk, hiszen erre kényszerít minket az teljes impulzus eltűnésének kényszere.

BY egyenletek

A véges térfogatból adódó BY egyenletek

$$2n_k\pi = p_kL - i\log\left[\prod_{k\neq j} S^{aa}_{aa}(p_k,p_j)\right] \quad ; \qquad \sum_{i=1}^{2M} p_k = 0$$

Ezek vezető rendű megoldása a rapiditás paraméterrel írható le a legtermészetesebben

$$u(p) = \frac{1}{2}\cot\frac{p}{2}\sqrt{1+16g^2\sin^2\frac{p}{2}}$$

ugyanis a $g\to 0$ limeszben a BY egyenletek $u_1,\dots,u_{2M}$ megoldásait egy

$$P(u) = \prod_{k=1}^{M}(u-u_k)(u+u_k) = (u-u_1)(u+u_1)\dots(u-u_M)(u+u_M) \tag{4.27}$$

úgynevezett Baxter polinomba rendezhetjük, mely expliciten meghatározható és kifejezhető egy hipergeometrikus függvény segítségével [50]

$$P(u) = \ {}_3F_2(-M, M+1, \frac{1}{2}-iu; 1,1|1)$$

Az összimpulzus eltűnése miatt a részecskék $(u_i, -u_i)$ rapiditás párokba rendeződnek.

Lüscher korrekció

Emlékezzünk rá, hogy az energia végesméret-korrekciójának két forrása van, és hogy a BY egyenletek módosulásából származó korrekció csak a vezető utáni rendben ad járulékot az energiához. Vagyis a vezető rendű korrekció csupán a vákuumpolarizációs hatásokból jön. Ezek a $2M$ részecske esetén

$$\Delta_8 E(L) = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tilde{p}}{2\pi}\mathrm{STr}_{a_1}\left[S^{a_2a}_{a_1a}(\tilde{p},u_1)S^{a_3a}_{a_2a}(\tilde{p},u_2)\dots S^{a_1a}_{a_{2M}a}(\tilde{p},u_{2M})\right]e^{-\tilde{E}_{a_1}(\tilde{p})L} \tag{4.28}$$

Ezen formula a korábbi két-részecskés formulánk általánosítása. Vezető rendben az u_k rapiditásokat a Baxter polinom gyökei adják.

Most egyenként végignézzük a felmerülő tagokat. Az exponenciális faktor vezető rendje, mint korábban

$$e^{-\tilde{E}_Q(\tilde{p})L} = e^{-2L\mathrm{arcsinh}\frac{\sqrt{\tilde{p}^2+Q^2}}{4g}} = \left(\frac{z^-}{z^+}\right)^L = \frac{4^Lg^{2L}}{(\tilde{p}^2+Q^2)^L}+\dots$$

A szórásmátrix számolásánál $x^\pm$ paramétereket a rapiditásokkal fejezzük ki.

$$x^\pm(u) = \frac{2u\pm i}{4g}\left(1+\sqrt{1-\frac{16g^2}{(2u\pm i)^2}}\right)$$

Minden egyes szórásmátrix faktorizálódik egy skalár részre és két kommutáló $su(2|2)$ kovariáns rész szorzatára. A szórás mátrix skalár része a fúzióval számolható. Korábbi számolásaink eredményét a rapiditásban kifejezve

$$S^{sl(2)}_{Q-1}(\tilde{p},u)=\frac{(\tilde{p}-i(Q-1)-2u)(2u+i)^2}{(\tilde{p}-i(Q+1)-2u)(\tilde{p}+i(Q-1)-2u)(\tilde{p}+i(Q+1)-2u)}$$

adódik.

A mátrix rész számolásánál kihasználjuk, hogy a két $su(2|2)$ rész faktorizálódik, így elégséges csak egyet kiszámolni. A Lüscher korrekció számolásához csak a S^{1J}_{1I}, $I,J=1,\dots 4Q$ mátrixelemekre van szükségünk, melyet (mivel a szórásban az 1 index rögzített) $4Q$ dimenziós téren ható mátrixként fogunk interpretálni és $S^{sl(2)}_{Qmatrix}(u,q=\tilde{p})$ -val jelöljük. Ennek bozonikus részét $SB0, SB, SBQ$-val míg fermionikus részét SF-el jelöljük. Nézzük végig szisztematikusan az összes mátrixelemet.

Az $I=1$ bozonikus vektor csak önmagára szóródhat

$$SB0(q,u):=S^{11}_{11}(q,u)=a^1_1(q,u)$$

Az $I=j$, $j=2,\dots,Q$ vektorok vagy önmagukra szóródnak, vagy a másik bozonikus altér $J=j+Q$ vektorára. Hasonló módon a másik bozonikus altér $J=j+Q$ vektora vagy önmagába vagy $I=j$-be szóródik. Vagyis $j=2,\dots,Q$ esetén ezen szórások egy 2×2-es mátrixot adnak

$$\begin{aligned}SB(q,u,j+1) &= \begin{pmatrix} S^{1\,j}_{1\,j}(q,u,j) & S^{1\,j+Q}_{1\,j}(q,u,j)\\ S^{1\,j}_{1\,j+Q}(q,u,j) & S^{1\,j+Q}_{1\,j+Q}(q,u,j)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \frac{Q+1-j}{Q+1}a^1_1(q,u)+\frac{j}{2}a^2_2(q,u) & \frac{j(Q-j)}{Q-1}a^2_4(q,u)\\ \frac{1}{Q-1}a^4_2(q,u) & \frac{2(Q-j)}{(Q-1)^2}a^4_4(q,u)+\frac{j-1}{2}a^{10}_{10}(q,u)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Az $I=Q+1$ indexű bozon csak önmagára szóródhat

$$SBQ(q,u)=S^{1\,Q+1}_{1\,Q+1}(q,u)=\frac{1}{Q+1}a^1_1(q,u)+\frac{Q}{2}a^2_2(q,u)$$

A fermionikus részek egyszerűbbek, csak önmagukra szóródhatnak

$$SF(q,u,j+1)=S^{1\,2Q+j}_{1\,2Q+j}(q,u)=S^{1\,3Q+j}_{1\,3Q+j}(q,u)=\frac{Q-j}{Q^2}a^6_6(q,u)+\frac{j}{2}a^7_7(q,u)$$

Ezen változók bevezetése után a Lüscher korrekció a

$$\Delta E=-\sum_{Q=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{2\pi}\prod_{k=1}^{2M}S^{sl(2)}_{Q-1}(q,u_k)\Big(\mathrm{STr}(\prod_{k=1}^{2M}S^{sl(2)}_{Qmatrix}(q,u_k))\Big)^2\frac{16g^4}{(q^2+Q^2)^2}$$

alakot ölti, ahol a mátrix részt tovább bonthatjuk

$$\begin{aligned}\mathrm{STr}(\prod_{k=1}^{2M}S^{sl(2)}_{Qmatrix}(q,u_k)) &= \prod_{k=1}^{2M}SB0(q,u_k)+\prod_{k=1}^{2M}SBQ(q,u_k)\\ &\quad -2\sum_{j=0}^{Q-1}\prod_{k=1}^{2M}SF(q,u_k,j)+\sum_{j=1}^{Q-1}\mathrm{Tr}\left(\prod_{k=1}^{2M}SB(q,u_k,j)\right)\end{aligned}\tag{4.29}$$

Mivel a teljes Lüscher korrekció csak g^8 nagyságrendben ad járulékot és az exponenciális faktor nagyságrendje g^4, így a mátrix rész vezető rendjének el kell tűnnie. Először ezt

ellenőrizzük, majd minden mennyiséget kifejtünk másodrendig $f(g) = f_0(1+g^2\delta f+O(g^4))$. A kétdimenziós mátrix diagonalizálásánál észrevehetjük, hogy a vezető rend $SB(q, u,_k, j)_0$ diagonalizálása nem függ a rapiditásoktól u_k. Ez lehetővé teszi, hogy a bozonikus járulékot az $\prod_k SB^{\pm}(q, u_k, j)_0$ egyes sajátértékek szorzatának összegeként írjuk. Konkrétan

$$SB^+(q, u_k, j)_0 = \frac{i + 2ij + q - iQ - 2u_k}{i + q - iQ - 2u_k} \quad ; \qquad SB^-(q, u_k, j+1) = SB^+(q, u_k, j)\frac{2u_k + i}{2u_k - i}$$

Mivel a rapiditások párban vannak, így a $\frac{2u_k+i}{2u_k-i}$ faktor kiesik és az összegzések határának eltolásával a két bozonikus sajátérték járuléka azonos alakra hozható. Érdekes módon a két különálló bozonikus rész járuléka kiegészíti az előző összegzéseket oly módon, hogy a teljes járulék

$$\mathrm{STr}\Big(\prod_{k=1}^{2M} S^{sl(2)}_{Qmatrix}(q, u_k)\Big)_0 = -2\sum_{j=0}^{Q-1}\prod_{k=1}^{2M} SF(q, u_k, j)_0 + 2\sum_{j=0}^{Q-1}\prod_{k=1}^{2M} SB^+(q, u_k, j)_0$$

Az is ellenőrizhető, hogy a bozonikus és fermionikus részek járuléka megegyezik minden j-re: $(SF(q, u_k, j)_0 = SB^+(q, u_k, j)\sqrt{\frac{2u_k+i}{2u_k-i}})$, így a vezető rendje a mátrix résznek ténylegesen eltűnik.

A következő rend számolásánál szisztematikus ki kell számolnunk az előző kifejezés minden egyes tagjának sorfejtését és a járulákukat fel kell összegeznünk. Eredményül

$$\mathrm{STr}\Big(\prod_{k=1}^{2M} S^{sl(2)}_{Qmatrix}(q, u_k)\Big) \;=\; g^2\sum_{j=0}^{Q-1}\Big(\prod_{k=1}^{2M} SB^+(q, u_k, j)_0\Big)\sum_{k=1}^{2M}\delta SBF(q, u_k, j)$$

adódik, ahol a vezető utáni korrekció

$$\delta SBF(q, u_k, j) = \frac{16}{1 + 4u_k^2}\left[\frac{1}{2j - iq - Q} - \frac{1}{2(j+1) - iq - Q}\right]$$

Ezen kifejezést k -ra felösszegezve észrevehetjük az $S_1(M)$ harmonikus összeg megjelenését

$$\sum_{k=1}^{2M}\frac{16}{1 + 4u_k^2} = 8S_1(M) = 8\sum_{l=1}^{M}\frac{1}{l}$$

amely a Baxter polinomot definiáló hipergeometrikus függvény sajátossága [50]. A (4.27) Baxter polinomot felhasználhatjuk eredményünk egyszerűsítésére is

$$\prod_{k=1}^{2M} SB^+(q, u_k, j)_0 = \frac{P(\frac{1}{2}(q - i(Q-1) + ij))}{P(\frac{1}{2}(q - i(Q-1)))}$$

Érdekes módon a teljes végeredmény is kifejezhető a Baxter polinommal

$$\Delta E = -64g^8\, S_1^2\int_{\infty}^{\infty}\frac{dq}{2\pi}\frac{T(q,Q)^2}{R(q,Q)}\frac{16}{(q^2+Q^2)^2}$$

ahol

$$R(q,Q) = P(\frac{1}{2}(q - i(Q-1)))P(\frac{1}{2}(q + i(Q-1)))P(\frac{1}{2}(q + i(Q+1)))P(\frac{1}{2}(q - i(Q+1)))$$

és

$$T(q,Q)=\sum_{j=0}^{Q-1}\left[\frac{1}{2j-iq-Q}-\frac{1}{2(j+1)-iq-Q}\right]P\left(\frac{1}{2}(q-i(Q-1))+ij\right)$$

Egy alternatív módja a formula felírásának

$$T(q,Q) \;=\; \frac{iP\left(\frac{1}{2}(q-i(Q-1))\right)}{q-iQ}-\frac{iP\left(\frac{1}{2}(q+i(Q-1))\right)}{q+iQ}+\tilde{T}(q,Q)$$

ahol

$$\tilde{T}(q,Q)=\sum_{j=1}^{Q-1}\frac{P\left(\frac{1}{2}(q-i(Q-1))+ij\right)-P\left(\frac{1}{2}(q-i(Q+1))+ij\right)}{2j-iq-Q}$$

A Baxter egyenletet a hipergeometrikus függvényen keresztül kiterjeszthetjük páratlan részecskeszám esetére is [50]. Ekkor egy kivételével minden részecske párba rendezhető $u_k=-u_{-k}$. A kivételes részecske rapiditása $u_0=0$ és impulzusa $p_0=\pi$, amely nem fizikai az eredeti AdS/CFT modellben. Viszont a modell β deformált változatában már igen, így megkísérelhetjük módosítani formulánkat, hogy ezen állapot Lüscher korrekcióját is leírjuk. Előírva a vezető rend eltűnését az S-mátrixot úgy kellett módosítanunk, hogy a fermionikus részecskék ne adjanak járulékot. Ekkor a páratlan részecskeszámú állapotok csak $T(q,Q)$ -ban különböznek a párosaktól

$$T^{odd}(q,Q)=\sum_{j=0}^{Q-1}\left[\frac{1}{2j-iq-Q}+\frac{1}{2(j+1)-iq-Q}\right]P\left(\frac{1}{2}(q-i(Q-1))+ij\right)$$

A Lüscher korrekció integrálját ezek után úgy számoljuk, hogy a kontúrt a felső fél síkon zárjuk be és a reziduum tételt használjuk. Két féle pólust találhatunk. A $q=iQ$ pólusnak kinematikai eredete van, hiszen az nem függ a szórásmátrixtól. Ezzel szemben a $R(q,Q)$ függvény pólusai u_k-függőek vagyis azok a Lüscher korrekció μ tagjainak felelnek meg, és a részecskék virtuális bomlásaihoz tartoznak. Mivel a gyenge csatolású határesetben a részecskék még virtuálisan sem képesek elbomolni, így ezen pólusok járulékának el kell tűnnie. Az explicit számolás ténylegesen is azt mutatta, hogy habár az egyes pólusok járuléka nem tűnik el, de azokat az összes kötött állapotra felösszegezve a járulék már tényleg nulla. Összefoglalva tehát állíthatjuk, hogy a vezető rendű Lüscher korrekcióhoz elég a $q=iQ$ kinematikai szingularitás pólusának reziduumát venni.

Ha az integrandus reziduumát vesszük $q=iQ$-nál a Baxter polinom deriváltjai jelennek meg a $\pm\frac{i}{2}$ és $\pm\frac{i}{2}+iQ$ helyeken. A formulák rövidítése érdekében bevezetjük a

$$U(\pm Q)=P(\pm\frac{i}{2}+iQ)$$

polinomot, melynek $Q=0$ nál az alábbi kifejtése van:

$$U(Q)=1+2S_1\,Q+2(S_1^2+S_{-2})\,Q^2+\dots$$

A továbbiakban használni fogjuk az egymásba ágyazott harmonikus összegeket

$$S_{n_1,n_2,\dots,n_k}(2M)=\sum_{j=1}^{2M}\frac{(-1)^{sign(n_1)}}{j^{|n_1|}}S_{n_2,\dots,n_k}(j)$$

és az argumentumot ha egyértelmű nem írjuk ki.

A reziduum vétele után a kapott kifejezést racionális törtek összegére bontjuk.

$$\frac{A_5}{Q^5}+\frac{A_4}{Q^4}+\frac{A_3}{Q^3}+\frac{A_2}{Q^2}+\frac{A_1}{Q}+\sum_{i,j=1}^{i+j\leq 5}\frac{A_{ij}(Q)}{U(Q)^iU(-Q)^j}$$

Explicit számolás eredményeképpen [27]

$$A_5=10 \qquad ; \quad A_3=U''(0)-4U'(0)^2+12(\partial_Q\tilde{T}(q,Q))|_{q=iQ=0}$$

adódik, ahol kihasználtuk, hogy $U(0)=1$ és, hogy $A_4=12(\tilde{T}(0,0)+U'(0))=0=A_2=A_1$. Az $A_{ij}(Q)$ kiszámítása nagyon körülményes így azok járulékét máshogyan számoljuk. Kihasználva, hogy $(\partial_Q\tilde{T}(q,Q))|_{q=iQ=0}=S_1^2-S_{-2}$ a vezető Lüscher korrekcióra

$$\Delta E=-128g^8\,S_1^2\,[5\zeta(5)+4S_{-2}\zeta(3)+\dots]$$

adódik, ahol az eddig nem számolt részek nem tartalmaznak ζ függvényeket. Értéküket a maximális transzcendentalitásból rögzíthetjük, amely előírja, hogy csak olyan harmonikus összegek jelenhetnek meg melyek rendje 5 és nem tartalmaznak S_{-1}-et. Mivel ez egy véges dimenziós tér, így egy bázist felvéve és véges sok korrekciót egzaktul kiszámolva az együtthatókat rögzíthetjük. A végső eredményre

$$\Delta_8E=128g^8S_1^2\left[-5\zeta(5)-4S_{-2}\zeta(3)-2S_5+2S_{-5}+4S_{4,1}-4S_{3,-2}+4S_{-2,-3}-8S_{-2,-2,1}\right]$$

adódik. Ezen formula $M=-1+\omega$ nem fizikai helyre történő elfolytatása kapcsolatba hozható a Batalin-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) elmélettel, mely tökéletes egyezést mutatott [27], alátámasztva ezzel mind az AdS/CFT kapcsolatot, mind pedig a hadronszórásokat a Regge kinematikában leíró BFKL elméletet.

4.3.3. Konishi operátor vezető utáni rendű korrekciója

Emlékeztetőül a Konishi operátor végesméret korrekciója két forrásból származik. Egyrészt a BY egyenleteket kell a vákuumpolarizációs effektusokkal módosítanunk

$$\begin{aligned}2\pi &= pL-i\log\left[S_{aa}^{aa}(p,-p)\right]-\\ &\quad-\sum_{Q=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tilde{p}}{2\pi}\left(\frac{z^-}{z^+}\right)^2\sum_b(-1)^{F_b}\left[\left(\partial_{\tilde{p}}S_{Q-1}(z^\pm,x^\pm(p))\right)S_{Q-1}(z^\pm,x^\pm(-p))\right]_{b(33)}^{b(33)}\end{aligned}$$

majd a módosult $p+\delta p$ impulzus kifejezést kell a vákuum polarizációkat is tartalmazó energia formulába beírni

$$\Delta E=2\frac{dE}{dp}\delta p-\sum_{Q=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tilde{p}}{2\pi}\left(\frac{z^-}{z^+}\right)^2\sum_b(-1)^{F_b}\left[S_{Q-1}(z^\pm,x^\pm(p))S_{Q-1}(z^\pm,x^\pm(-p))\right]_{b(33)}^{b(33)}$$

Mivel $\frac{dE}{dp}$ nagyságrendje g^2, így az impulzus módosulása csak egy renddel később jelenik meg. Ez azt jelenti, hogy a BY egyenlet módosulását negyed rendben, míg a vákuumpolarizációs effektusokat ötöd rendben kell számolnunk. Az impulzus módosulása vezető rendben nagyon hasonló az energia korrekció vezető rendű számolásához, csak a korábbi

számolásokban még deriválnunk kell $\tilde{p}$ szerint is. A vákuumpolarizációs számolásnál egy új jelenség, hogy a korábban elhanyagolt felöltöztető fázis a vezető utáni rendben járulékot ad. Számoljuk most ki ennek járulékát. Feltételezzük tehát hogy a $\chi(x_1, x_2)$ fázis számolásánál az első argumentum a tükör kinematikában van $x_1 = a_1^{-1}g + O(g^3)$, míg a másodikat a fizikaiban tartjuk $x_2 = a_2 g^{-1} + O(g)$. Megvizsgálva a $c_{r,s}(g)$ együtthatók skálázási tulajdonságait észrevehetjük, hogy azok vezető rendje g^{r+s-2}. A $x_1^{1-r}x_2^{1-s}$ kifejezés viszont g^{s-r} hatvánnyal kezdődik. Ez azt jelenti, hogy a vezető rész az első összegzés $r = 2$ részéből jön:

$$\chi(x_1, x_2) = \sum_{s>.2} \frac{c_{2,s}(g)}{(s-1)} \frac{1}{x_1^{s-1}x_2} + O(g^4)$$

Ez szöges ellentétben van azzal az esettel, mikor mindkét részecske a fizikai kinematikában volt, hiszen ott csak pár együttható adott járulékot a vezető rendekben. Felhasználva $c_{2,s}$ korábban meghatározott vezető rendű viselkedését azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\chi(x_1, x_2) &= \frac{g^2}{a_2} \sum_{s>2} 2\cos(\frac{\pi}{2}(s-3))a_1^{s-1}\zeta(s) + O(g^4) \\ &= \frac{g^2}{a_2}(S_1(-ia_1) + S_1(ia_1)) + O(g^4)\end{aligned}$$

ahol az $S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ harmonikus összeg analitikus elfolytatása a $\Psi(x) = \frac{d\log\Gamma(x)}{dx}$ digamma függvényen keresztül van definiálva:

$$\begin{aligned}\chi(x_1, x_2) &= \frac{g^2}{a_2}(2\gamma_E + \Psi(1-ia_1) + \Psi(1+ia_1)) + O(g^4) \\ &= \frac{g^2}{a_2}(2\gamma_E + \Psi(-ia_1) + \Psi(ia_1)) + O(g^4)\end{aligned}$$

ahol γ_E az Euler állandó. Ez a számunkra is fontos szórási amplitúdóra azt adja, hogy

$$2i\vartheta(q, Q, u) = -\frac{32}{1+4u^2}\left(\gamma_E + \frac{1}{2}\psi\big(\frac{1}{2}(-iq-Q)\big) + \frac{1}{2}\psi\big(\frac{1}{2}(iq+Q)\big)\right) \tag{4.30}$$

Ezután minden korábbi mennyiségünket kifejthetjük egy renddel tovább. Az integrált reziduum tétellel számoljuk. Természetes módon a dinamikai pólusok járulékát a kötött állapotokra felösszegezve ismét nullát kapunk. A $q = iQ$ kinematikai pólus járulékából jövő tagok felösszegzés után az elegáns

$$\Delta_w^{(10)} = -11340 + 2592\zeta(3) - 5184\zeta(3)^2 - 11520\zeta(5) + 30240\zeta(7) \tag{4.31}$$

alakot öltik. Ezzel meghatároztuk a Konishi operátor vezető utáni rendű korrekcióját is [25]. Sajnos a közvetlen mértékelméleti számolások még nem tartanak ott, hogy az eredmény ellenőrizhető legyen.

III. rész

Peremes integrálható modellek

Ebben a részben a periodikus rendszerek esetén kapott eredményeinket általánosítjuk integrálható peremfeltételek esetére. A modellek tárgyalása teljes párhuzamban történik a periodikus esettel, és most is a sinh-Gordon, sine-Gordon és Lee-Yang modelleket használjuk az eredmények szemléltetésére.

A vizsgálatok során feltételezzük, hogy a modellt már megoldottuk periodikus határfeltétellel. Célunk ezután megkeresni az integrálható peremfeltételeket és a peremes modelleket megoldani. A tárgyalás során a periodikus esethez képesti különbséget hangsúlyozzuk és az új fogalmakat vezetjük be.

Először a klasszikus integrálható peremfeltételeket vizsgáljuk, majd az egzakt megoldások vizsgálata kapcsán bevezetjük az aszimptotikus kezdő és vég állapotokat összekötő reflexiós mátrixot. Ezután a modellek kvantálásához fogunk. A Lagrange-i keretben a reflexiós mátrixot a korrelációs függvényekkel fejezzük ki, melyek analitikus szerkezetét külön analizáljuk. Az önmegoldó keretben az előzőekben kapott általános tulajdonságokat az integrálhatósággal egészítjük ki, melyek a reflexiós mátrix faktorizációját vonják maguk után. Ennek alapján a multi-részecske reflexiós mátrix páronkénti szórásmátrixok és egyenkénti reflexiós mátrixok szorzatára bontható. Az egyrészecske reflexiós mátrix teljesíti az unitaritási, keresztezett unitaritási és maximális analitikussági feltételeket, mely lehetőséget teremt egzakt önmeghatározására. A reflexiós mátrix ismeretében a peremen lokalizált operátorok alaktényezőire axióma rendszert írhatunk fel, melynek megoldásával a peremes korrelátorok elvileg kiszámolhatóak és a modell fél végtelen térfogatban teljesen megoldható.

A véges térfogati megoldáshoz nagy térfogatokra a BY egyenleteket kell a két peremen történő visszaverődéssel kiegészíteni, míg kisebb térfogatok esetén a TBA egyenletek peremes megfelelőjét kell megalkotnunk.

5. fejezet

Peremes integrálható modellek klasszikusan

Ebben a fejezetben azokat a peremfeltételeket vizsgáljuk, melyek megőrzik a sine-Gordon modell integrálhatóságát. Az integrálható peremfeltételek esetén meghatározzuk a klasszikus megoldásokat, vizsgáljuk azok időfejlődését, végül bevezetjük a reflexiós mátrix fogalmát.

5.1. A klasszikus sine-Gordon modell

Vizsgáljuk a sine-Gordon modellt az $x > 0$ fél végtelen térben valamely $U(\varphi)$ peremes potenciál jelenlétében

$$\mathcal{L} = \theta(-x)\left[\frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \frac{m^2}{\beta^2}(1-\cos\beta\varphi)\right] - \delta(x)U(\varphi)$$

A hatás variációjából a $\partial_x(\partial_x\varphi\delta\varphi)$ tag parciális integrálása után a tömbi mozgásegyenlet mellé még peremfeltételt is kapunk

$$\partial_x\varphi = -\frac{dU(\varphi)}{d\varphi}$$

A periodikus peremfeltételnél talált $Q_{\pm s}$ megmaradó mennyiségek a

$$\partial_- T_{s+1} = \partial_+\Theta_{s-1} \qquad ; \qquad \partial_+ T_{-s-1} = \partial_-\Theta_{-s+1}$$

végtelen sok megmaradási törvény következményei, melyek a tömbi potenciál speciális alakjából következnek. Mivel a peremes potenciál lokális, így annak hatása a peremre korlátozódik és a tömbi egyenleteket nem befolyásolja. Hatással van viszont a megmaradó mennyiségekre. Képezve ugyanis a

$$Q_s = \int_{-\infty}^{0}(T_{s+1} - \Theta_{s-1})dx \qquad ; \qquad Q_{-s} = \int_{-\infty}^{0}(T_{-s+1} - \Theta_{-s-1})dx$$

mennyiségeket azok

$$\dot{Q}_{\pm s} = \int_{-\infty}^{0}\partial_t(T_{\pm s+1} - \Theta_{\pm s-1}) = \int_{-\infty}^{0}\partial_x(T_{\pm s+1} + \Theta_{\pm s-1}) = (T_{\pm s+1} + \Theta_{\pm s-1})|_{x=0}$$

idő deriváltja nem tűnik el, mint a végtelen egyenes vagy periodikus peremfeltétel esetén. Természetesen az impulzus típusú $Q_s - Q_{-s}$ mennyiségektől nem is várhatjuk el a peremes esetben, hogy megmaradjanak. Az energia típusú $Q_s + Q_{-s}$ kombinációknál viszont remélhetjük, hogy módosíthatóak legyenek úgy, hogy megmaradjanak. Megkövetelve, hogy

$$\dot{Q}_s + \dot{Q}_{-s} = (T_{s+1} + \Theta_{s-1} + T_{-s+1} + \Theta_{-s-1})|_{x=0} = -\partial_t \theta_s$$

a $Q_s + Q_{-s} + \theta_s$ már megmaradó mennyiség. Konkrétan a sine-Gordon modell esetében

$$T_{\pm 2} = \frac{1}{2}(\partial_\pm \varphi)^2 \qquad ; \qquad \Theta_0 = -V(\varphi) = -\frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos\beta\varphi)$$

Vagyis az $s = 1$ megmaradó mennyiség feltétele

$$(T_2 + T_{-2} + 2\Theta_0)|_{x=0} = -\partial_t \vartheta_2 = \partial_t U(\varphi)$$

ami a peremfeltétel miatt minden $U(\varphi)$ potenciál esetén teljesül. A megmaradó mennyiség természetesen az energia. Hasonló módon megkövetelve az energia típusú megmaradó mennyiség létét $s = 3$ esetén:

$$T_{\pm 4} = \frac{1}{2}(\partial_\pm^2 \varphi)^2 - \frac{1}{8}(\partial_\pm \varphi)^4 \qquad ; \qquad \Theta_{\pm 2} = \frac{m^2}{\beta^2}(\partial_\pm \varphi)^2(1 - \cos\beta\varphi)$$

a peremes potenciálra az $U''(\varphi) = -\frac{\beta^2}{4}U(\varphi)$ egyenlet adódik, melynek legáltalánosabb megoldása

$$U(\varphi) = M_0 \left(1 - \cos\left(\frac{\beta}{2}(\varphi - \varphi_0)\right)\right)$$

mely két tetszőleges paramétert tartalmaz. Két extrém határeset különösen érdekes: $M_0 \to 0$ esetén a $\partial_x \varphi = 0$ Neumann, míg az $M_0 \to \infty$ esetben a $\varphi = \varphi_0$ Dirichlet peremfeltételt kapjuk.

A sinh-Gordon elméletet a $\beta \to ib$ helyettesítéssel kaphatjuk. A gyenge csatolású limeszben ($b \to 0$ vagy $\beta \to 0$) mindkét elmélet a Klein Gordon elméletre redukálódik Neumann peremfeltétellel.

Mivel a perem a tömbi mozgásegyenleteket nem befolyásolja csak a peremfeltételt ír elő az origóban, így a sztatikus megoldásokat is csak a korábban meghatározott szoliton és antiszoliton megoldások között kell keresnünk. Ezen megoldások egy szabad paraméterrel rendelkeztek

$$\varphi(x) = \pm\frac{4}{\beta}\arctan(e^{-m(x-x_0)})$$

nevezetesen a szoliton/antiszoliton helyével. Ezt a paramétert mindkét esetben megválaszthatjuk úgy, hogy a

$$\partial_x \varphi = \frac{M_0 \beta}{2}\sin\left(\frac{\beta}{2}(\varphi - \varphi_0)\right)$$

peremfeltétel teljesüljön. Konkrétan a Dirichlet peremfeltétel esetén

$$\pm\tan\frac{\beta}{4}\varphi_0 = e^{mx_0}$$

A két megoldás közül az egyik a klasszikus alapállapotot adja, míg a másik egy a peremre lokalizált gerjesztésnek tekinthető. A Neumann peremfeltétel esetén a megoldások $\varphi = 0, \frac{2\pi}{\beta}$, amely a szoliton és antiszoliton megoldás speciális határesete.

Az az eljárás, melynek során a tömbi mozgásegyenlet megoldásai közül választjuk ki a peremfeltételeknek eleget tévőket az időfüggő megoldásokra is működik. A kétszoliton megoldás például minden időpontban a $\varphi_0 = 0$ Dirichlet peremfeltételnek tesz eleget

$$\varphi_{ss}(x,t) = \frac{4}{\beta}\arctan\left(\frac{v\sinh mx\gamma}{\cosh mvt\gamma}\right)$$

A szoliton-antiszoliton megoldás viszont a Neumann peremfeltételnek

$$\varphi_{s\bar{s}}(x,t) = \frac{4}{\beta}\arctan\left(\frac{\sinh mvt\gamma}{v\cosh mx\gamma}\right)$$

Ezen megoldások fizikai interpretációja viszont lényegesen különbözik a tömbi esethez képest. A távoli múltban ($t \to -\infty$) például a megoldás

$$\varphi_{s\bar{s}}(x,t) \approx \varphi_s((x + v(t + \frac{\Delta t}{2}))\gamma) + \varphi_{\bar{s}}((x - v(t - \frac{\Delta t}{2}))\gamma) \quad ; \qquad \Delta t = 2\frac{\log v}{mv\gamma}$$

egy szoliton és egy antiszoliton összegére esik szét. Viszont ezek közül csak a szoliton van az $x > 0$ fizikai térben az antiszoliton nincs. Vagyis a megoldás a perem felé haladó v sebességű szolitont ír le. A távoli jövőben ($t \to \infty$) ismét csak szoliton és antiszoliton összege, viszont most az antiszoliton van a fizikai térben és távolodik $-v$ sebességgel a faltól

$$\varphi_{s\bar{s}}(x,t) \approx \varphi_s((x + v(t - \frac{\Delta t}{2}))\gamma) + \varphi_{\bar{s}}((x - v(t + \frac{\Delta t}{2}))\gamma)$$

Összehasonlítva azzal az időfejlődéssel ami torzítatlanul fordította volna vissza a szolitont a következőket vehetjük észre. A visszaverődés közben a szoliton típusa megváltozott, vagyis a topologikus töltést nem őrzi meg a Neumann perem. (Csak a Dirichlet őrzi meg). A visszaverődő antiszoliton sebességének abszolút értéke változatlan csak idő késésben van a torzítatlan szolitonhoz képest. Az időkésés előjele azt mutatja, hogy a perem vonzza a szoliton, vagyis remélhetjük kötött állapot létezését. És valóban, a sebességet $v \to iu$ módon elfolytatva $\varphi_{s\bar{s}}$-ból egy időben periodikus, a peremre lokalizált gerjesztést kapunk

$$\varphi_b(x,t) = \frac{4}{\beta}\arctan\left(\frac{\sin mut\gamma}{u\cosh mx\gamma}\right)$$

mely a peremszuszogó nevet viseli.

A peremes rendszer általános megoldását is előállíthatjuk mint a tömbi megoldások paramétereinek olyan megszorítását, melyben a peremfeltételek teljesülnek. Összességében állíthatjuk, hogy minden megoldás a távoli múltban jól szeparált nem kölcsönható szolitonok, antiszolitonok és szuszogók összegeként írható, melyek mind különböző sebességgel mozognak a perem felé. Sebességük nagysága szerint vannak rendezve: a leggyorsabb van legbalra. A távoli jövőben a részecske tartalom ugyanaz marad, a sebességeknek csak az előjele változik és mindenki távolodik a faltól. A visszaverődés közben a részecskék sorrendje felcserélődött majd szóródtak a falon, majd a sorrendjük megint felcserélődött és megint a leggyorsabb van a peremtől a legtávolabb. A kölcsönhatás az összegyűjtött időkésésben jelentkezik, mely érdekes módon az egyes kétrészecske időkésések és egyrészecskés visszaverődések összege. Ezen érdekes tulajdonságok a rendszer integrálhatóságának a következményei.

6. fejezet

Peremes modellek kvantumelmélete

Ebben a fejezetben a peremes modelleket kvantálásával foglalkozunk. Az első rész a nem feltétlenül integrálható modellek Lagrange függvényen alapuló perturbatív kvantálásával foglalkozik és tetszőleges téridő dimenzióra könnyen kiterjeszthető [13]. A második rész a peremes integrálható modellek esetén fogalmazza meg az önmegoldó programot.

6.1. Lagrange-i kvantálás

A Lagrange-i keretben a modellt szétbontjuk egy megoldható szabad rész és a kölcsönhatásokat tartalmazó rész összegére, melyet perturbatíven veszünk figyelembe. A tömbi megoldáshoz képest a különbség csak a fizikai tartományban van

$$\mathcal{L} = \theta(-x)\left[\frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2\right] - b^2\left[\theta(-x)\tilde{V}(\varphi) + \delta(x)\tilde{U}(\varphi)\right]$$

ahol a szabad rész most a Neumann peremfeltételnek tesz eleget és a perturbációk $\tilde{V}(\varphi) = \frac{m^2}{4!}\varphi^4 + \dots$ a tömbben és a $\tilde{U}(\varphi) = M_0\frac{b^2}{8}\varphi^2 + \dots$ a peremen.

A szabad modell kvantálásánál azon tömbi megoldásokat kell választanunk, melyek a Neumann peremfeltételeknek tesznek eleget

$$\varphi_0(x,t) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi 2\omega(k)}(a(k)e^{-i\omega(k)t} + a^+(k)e^{i\omega(k)t})\cos(kx)$$

ahol a keltő és eltűntető operátorok csak pozitív impulzusokra vannak definiálva, $k > 0$ és kielégítik az alábbi felcserélési törvényeket:

$$[a(k), a^+(k')] = 2\pi 2\omega(k)\delta(k-k') \quad ; \qquad \omega(k) = \sqrt{k^2+m^2}$$

A Hilbert tér csak pozitív k-jú részecskéket tartalmaz :

$$a^+(k_1)\dots a^+(k_n)|0\rangle = |k_1,\dots k_n\rangle \quad ; \qquad a(k)|0\rangle = 0 \quad ; \qquad k_i > 0$$

Ezek energia sajátállapotok $\sum_i \omega(k_i)$ sajátértékkel. A k paramétert a részecske impulzusaként fogjuk interpretálni. Noha az impulzus nem megmaradó mennyiség a $k(\omega)$ összefüggés lehetőséget teremt a paraméter bevezetésére. A Feynman propagátor könnyen kiszámolható:

$$\langle 0|T(\varphi_0(x,t)\varphi_0(x',t'))|0\rangle = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-ik_0(t-t')}\left(e^{ik_1(x-x')} + e^{+k_1(x+x')}\right)$$

Perturbatív definíció

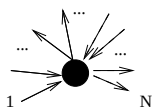
A kölcsönható elméletet most is a kölcsönhatási képben definiáljuk, melyben a korrelációs függvények a

$$\langle 0|T(\varphi(x_1,t_1)\dots\varphi(x_n,t_n)|0\rangle = \frac{\langle 0|T(\varphi_0(x_1,t_1)\dots\varphi_0(x_n,t_n)\exp\left\{i\int d^2x\mathcal{L}_I(\varphi_0(x))\right\})|0\rangle}{\langle 0|T(\exp\left\{i\int d^2x\mathcal{L}_I(\varphi_0(x))\right\})|0\rangle}$$

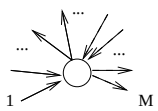
formulából származtathatóak, csak most a gráf szabályok kicsit módosulnak. Két féle vertexünk van, a tömbben lokalizált $\tilde{V}$ vertexei, melyeket teli pontokkal szemléltetünk, és a peremes $\tilde{U}$ kölcsönhatásnak megfelelő üres pontok. Propagátor is kétféle lehet, a direkt (tömbi) egyenes vonalak és a (peremről) visszaverődő szaggatott vonalak. Ezután a gráf szabályok [13, 12]:

- Rajzoljunk fel minden topológialig különböző gráfot az adott számú külső vonallal
- minden belső (egyenes és szaggatott) vonalhoz tartozzon egy propagátor $\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$

- minden N lábú tömbi vertexhez rendeljünk hozzá egy im^2b^{N-2} szám szorzót és rójuk ki az energia-impulzus megmaradást úgy, hogy a szaggatott vonal az impulzus értékét fordítsa meg.



- minden M lábú peremes vertexhez rendeljünk egy $iM_0\frac{b^M}{2^M}$ szorzót és rójuk ki az energia megmaradást



- integráljunk minden olyan belső impulzusra melyet a megmaradási törvények nem rögzítettek
- az eredményt osszuk le a gráf szimmetria faktorával

Ezek a szabályok elvileg definiálják a modellt, hiszen segítségükkel minden korrelációs függvényt rendről rendre kiszámíthatunk.

A tömbben korábban talált divergenciák itt is jelentkeznek és ugyanazokkal az ellentagokkal eltüntethetőek. A peremes elmélet új jellegzetessége, hogy peremes divergenciák is megjelennek, melyeket a peremes potenciál ellentaggal történő renormálásával lehet eltüntetni:

$$:U(\varphi):=:M_0(\cosh\frac{b}{2}(\varphi-\varphi_0)-1):=U(\varphi)-U_{CT}(\varphi)=(M_0-\delta M_0)(\cosh\frac{b}{2}(\varphi-\varphi_0)-1)$$

Az ellentag egy hurok számolás esetén a következőnek adódik [13]:

$$\delta M_0 = -\frac{M_0 b^2}{8\pi} \int_0^\Lambda \frac{dp}{\sqrt{p^2+m^2}}$$

A perturbáló potenciál alakjának megmaradása a renormálás során a peremes modell kvantumos integrálhatóságát sugallja.

A tömbi rendszer szórásmátrixának a peremes rendszerben a sokrészecskés reflexiós mátrix felel meg. Emlékezzünk vissza, hogy aszimptotikusan nagy időkre a részecske gerjesztések jól szeparáltak mind egymástól, mind pedig a peremtől, így szabad rendszerként tekinthetünk rájuk. Ezért is definiáltuk a Heisenberg és a kölcsönhatási kép egybeesését a távoli múltban:

$$\lim_{t\to\mp\infty} \varphi(x,t) \approx \lim_{t\to\mp\infty} Z^{\frac{1}{2}} \varphi_0^{be/ki}(x,t)$$

ahol Z a tömbi hullámfüggvény renormálási állandó és a terek kanonikus normálásért felelős. Az aszimptotikus állapotokat keltő operátorok a terekkel a következőképpen fejezhetőek ki

$$a^{as}(k) = 2i \int_{-\infty}^{0} dx\, \cos(kx) e^{i\omega(k)t} \overleftrightarrow{\partial_t} \varphi_0^{as}(x,t) \qquad ; \quad a^{as}(k)^+ = (a^{as}(k))^+$$

Ezen operátorok keltik az aszimptotikus állapotokat

$$|k_1,\dots,k_n\rangle^{as} = a^{as}(k_1)^+ \dots a^{as}(k_1)^+|0\rangle \quad ; \qquad k_i > 0$$

melyek energia sajátállapotok és melyeket a reflexiós mátrix kapcsol össze:

$$R_{vk} = \langle vég|kezdet\rangle \quad ; \qquad R = U(\infty,-\infty) = T\exp\left\{ i\int d^2x \mathcal{L}_I(\varphi_0)\right\}$$

Definíciójából adódóan a reflexiós mátrix unitér és felcserél a szimmetriákkal.

A legegyszerűbb nemtriviális R-mátrix elem az egyrészecskés visszaverődési együttható:

$${}_{ki}\langle k_2|k_1\rangle_{be} = R(k_1|k_2)(2\pi)2\omega(k_2)\delta(k_1+k_2)$$

ahol az energia megmaradást átírtuk a momentum változóra. Vagyis a kezdeti állapotban a $k_1 = \sqrt{\omega_1^2 - m^2}$ míg a végállapotban a $k_2 = -\sqrt{\omega_2^2 - m^2}$ változó cserét hajtottuk végre.

A redukciós formuláknak levezethetjük a peremes megfelelőjét, csak most a parciális integrálás során a peremes tagot is meg kell tartanunk [12]

$${}_{ki}\langle k_2|k_1\rangle_{be} = \text{széteső} + Z^{-1}\bar{\mathcal{D}}_2\mathcal{D}_1\langle 0|T(\varphi(1)\varphi(2))|0\rangle$$

ahol $\varphi(i)$ a $\varphi(x_i,t_i)$ rövidítése és

$$\mathcal{D}_i = -\int_{-\infty}^{0} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \cos(k_i x_i) e^{-i\omega(k_i)t_i} \Box_i \qquad ; \quad \Box_i = \partial_{t_i}^2 - \partial_{x_i}^2 + m^2 + \delta(x)\partial_x$$

A $\mathcal{D}_i$ operátor fizikai jelentése ugyanaz mint a tömbi esetben: külső láb amputálása és tömeghéjra tevése. A peremes esetben $\Box_i$ tartalmaz egy új tagot a tömbi esethez képest. A régi tag a perturbációszámítás azon tagjait amputálja, melyek tömbi vertexszel kezdődnek, míg $\delta(x)\partial_x$ a peremes vertexszel kezdődőkkel teszi ugyanezt [12]. Végül az inverz Fourier transzformáció tömeghéjra teszi a részecskét. A kezdő állapotoknak a $\bar{\mathcal{D}}_i$ operátora most

is adjungáltja $\mathcal{D}_i$-nek, így a keresztezési összefüggések is azonosak. Ezen definíciók után lehetőségünk van a sinh-Gordon modell minden peremfeltétele esetén az R-mátrixának rendről rendre történő meghatározására.

Vizsgáljuk most meg általánosan, milyen szingularitásai lehetnek a perturbáció egyes tagjainak és, hogy ezek hogyan összegződnek fel a korrelációs függvény és a reflexiós mátrix szingularitásaivá. A perem bevezetése elrontotta a térbeli eltolásokra történő invarianciát, így a kettős impulzusoknál különbséget kell tennünk, impulzus k és energia ω között. Tekintsünk egy általános Feynam diagramot N külső lábbal, melyek energia-impulzusai (ω_i, k_i). Az általános amplitúdó

$$A = \int \prod_{i=1}^{L} \frac{dq_i}{2\pi} \prod_{j=1}^{K} \frac{d\chi_j}{2\pi} \prod_{r=1}^{I} (p_r^2 - \pi_r^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} \tag{6.1}$$

ahol q_i a hurok impulzus, míg χ_j a hurok energiákat jelöli. Ezek száma nem feltétlenül egyezik meg, mivel peremes vertexek jelenléte esetén több energia megmaradásunk van mint ahány impulzus megmaradás. A belső vonalak energia-impulzus vektorát (p_r, π_r)-vel jelöltük. Feynman paraméterezés után az amplitúdó

$$A = \int \prod_{i=1}^{L} \frac{dq_i}{2\pi} \prod_{j=1}^{K} \frac{d\chi_j}{2\pi} \prod_{r=1}^{I} \int_0^1 d\alpha_i \delta\left(\sum \alpha_i - 1\right) \left[\sum_{r=1}^{I} \alpha_r (p_r^2 - \pi_r^2 - m^2 + i\epsilon)\right]^{-I}$$

alakba írható. Mint a tömbi esetben a hurok energiák és impulzusok kiintegrálása során az $\epsilon \to 0$ határesetben szingularitásokat kapunk amennyiben

$$\alpha_r = 0 \quad \text{vagy} \quad p_r^2 - \pi_r^2 - m^2 = 0 \quad , \quad r = 1, \ldots, I$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{r=1}^{I} \alpha_r (p_r^2 - \pi_r^2 - m^2 + i\epsilon)\right) = 0 \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi_i} \left(\sum_{r=1}^{I} \alpha_r (p_r^2 - \pi_r^2 - m^2 + i\epsilon)\right) = -\frac{\partial}{\partial \chi_i} \left(\sum_{r=1}^{I} \alpha_r \pi_r^2\right) = 0 \tag{6.3}$$

A hurok energiákra vonatkozó egyenletek megegyeznek a tömbi egyenletekkel és a hurok impulzusok kifejezése után

$$\sum_{\text{i}\in\text{tetszőleges hurok}} \alpha_i p_i = 0$$

adódik.

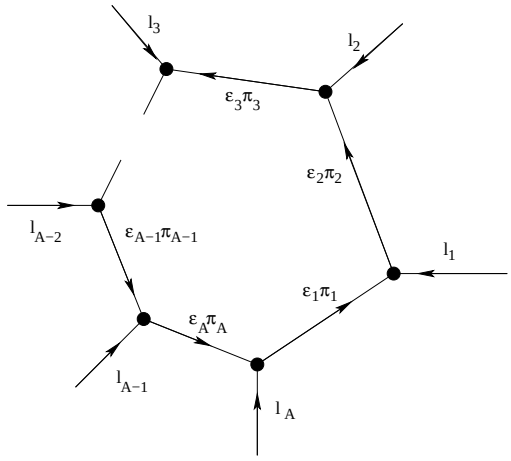
Vizsgáljunk most egy olyan hurkot mely csak tömbi csúcsokat tartalmaz és vizsgáljuk az impulzus integrált. Minden tömbi propagátorhoz rendeljünk $\epsilon = 1$-et a reflektált propagátorokhoz pedig $\epsilon = -1$. Az impulzus megmaradás azt jelenti, hogy

$$\pi_2 = \epsilon_1 \pi_1 + l_1 \; ; \quad \pi_3 = \epsilon_2 \pi_2 + l_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 \pi_1 + \epsilon_2 l_1 + l_2 \; ; \ldots$$

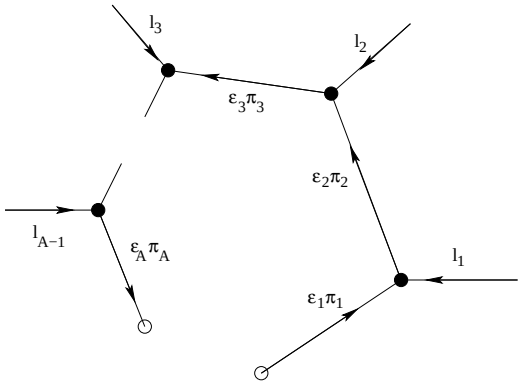
és általában

$$\pi_i = \prod_{j=1}^{i} \epsilon_j \pi_1 + \prod_{j=2}^{i} \epsilon_j l_1 + \cdots + \prod_{j=k+1}^{i} \epsilon_j l_k + \cdots + l_i$$

Az impulzus delta függvény $\delta\left(\epsilon_A \pi_A + l_A - \pi_1\right)$ eredményeként $\pi_1 = \mu_A \pi_1 + \ldots$, ahol $\mu_i = \prod_{j=1}^{i} \epsilon_j$ kódolja az impulzus paritását. Ha körbemenve $\mu_A = -1$, vagyis összességében



6.1. ábra. Általános zárt hurok tömbi vertexekkel



6.2. ábra. Peremes vertexszel kezdődő és végződő út

páratlan visszaverődés történt a delta függvény kifejezi π_1-et l-el és az integrálás után nincs szingularitás. Ha viszont $\mu_A = 1$ összesen páros visszaverődés történt, akkor a $(\pi_1 = \chi_1)$ változóra integrálás marad és hozzá az alábbi Landau egyenletet rendelhetjük

$$\sum_{\text{i}\in\text{tetszőleges hurok}} \mu_i \alpha_i \pi_i = 0 \tag{6.4}$$

Tekintsünk végül egy olyan utat mely peremes csúccsal kezdődik és végződik. Az előző számolást alkalmazva $\pi_A = \mu_{A-1}\pi_1 + \ldots$. Mivel nem zárul a kör, így π_1 hurok impulzusként szolgál melyre integrálni kell. Ez a

$$\sum_{\text{each path}} \mu_i \alpha_i \pi_i = 0 \tag{6.5}$$

Landau egyenletet eredményezi. Ezen egyenletek Coleman-Norton típusú interpretációja a következő. A korrelációs függvényeknek szingularitása van minden olyan esetben mikor rajzolhatunk egy tömeghéjon lévő részecskéket tartalmazó téridő diagrammot a következő szabályokkal. A kölcsönhatási tömbi pontokban mind az impulzus mind pedig az energia megmarad. A tömbi vertexek egyenes vonalak, melyek a perem egy oldalán maradnak, az impulzust fordító vonalak viszont visszaverődnek a peremtől. A peremes pontokban csak az energia marad meg az impulzus nem . Az irodalomban a reflexiós mátrix szingularitásához tartozó diagrammokat Coleman-Thun (CT) diagrammoknak nevezzük.

6.2. Önmegoldó kvantálás

Ebben a fejezetben a peremes integrálható modell önmegoldó kvantálásával foglalkozunk. Feltételezzük, hogy a modellt már megoldottuk a tömbben az önmegoldó keretben és most azt vizsgáljuk, hogyan terjeszthetjük ki a megoldást integrálható peremek esetére.

6.2.1. Aszimptotikus állapotok, reflexiós mátrix

Vizsgáljunk egy integrálható elméletet, melyben csak egy részecsketípus van m tömeggel. A gerjesztések lehetnek peremes vagy tömbi részecske gerjesztések. Az utóbbiak aszimptotikusan nagy időkre távol vannak a faltól és egymástól és, noha a perem jelenléte sérti az eltolásinvarianciát mégis, használhatjuk rájuk a rapiditás paraméterezést. Az energia típusú mennyiségek továbbra is megmaradnak és egy peremtől távoli részecskére értékük

$$E_s = (Q_s + Q_{-s} + \vartheta_s)(\theta) = 2q_s \cosh(s\theta) + e_s$$

ahol e_s a perem járuléka (ϑ_s) a megmaradó töltéshez. Aszimptotikus kezdő állapotban a rapiditások

$$A^+_{be}(\theta_1)\dots A^+_{be}(\theta_n)|0\rangle = |\theta_1,\dots,\theta_n\rangle_{be} \quad ; \qquad \theta_1 > \dots > \theta_n > 0$$

míg a végállapotban mikor minden szóródás és visszaverődés már befejeződött

$$A^+_{ki}(-\theta_1)\dots A^+_{ki}(-\theta_m)|0\rangle = |-\theta_1,\dots,-\theta_m\rangle_{ki} \quad ; \qquad -\theta_m > \dots > -\theta_1 > 0$$

Feltételezzük, hogy mindkét állapot sajátállapota a végtelen sok megmaradó töltésnek

$$E_s|\theta_1,\dots\theta_n\rangle_{be} = (e_s + \sum_{i=1}^{n} 2q_s \cosh(s\theta_i))|\theta_1,\dots\theta_n\rangle_{be}$$

A kezdeti és végső állapotokat a reflexiós mátrix kapcsolja össze

$$R_{n\to m} =_{ki} \langle\theta_1^{'},\dots\theta_m^{'}|\theta_1,\dots\theta_n\rangle_{be}$$

és $|R_{n\to m}|^2$ adja meg annak valószínűségét, hogy a kezdeti állapot a végállapotba fejlődjön. A relfexiós mátrix tulajdonságait a következő alfejezetben foglaljuk össze.

6.2.2. A reflexiós mátrix tulajdonságai

A reflexiós mátrix felcserél a szimmetriákkal:

Szimmetria

Vagyis ha a töltések értékét megnézzük a visszaverődés előtt és után azoknak meg kell egyezniük

$$\sum_{i=1}^{n} q_s \cosh(s\theta_i) = \sum_{i=1}^{m} q_s \cosh(s\theta_i^{'})$$

Ezek a tömbi esethez hasonlóan erős megszorításokat jelentenek az előforduló rapiditásokra. Mivel a rapiditások csak kvadratikusan jelentkeznek az egyenletekben, így korábbi érvelésünk alapján a rapiditás halmazok $\{|\theta_i|\} = \{|\theta_j^{'}|\}$ relációjára következtethetünk, mely a visszaverődést ($\theta_j^{'} < 0$) figyelembe véve a végső $\{\theta_i\} = \{-\theta_j^{'}\}$ megfeleltetést adja.

A végtelen sok megmaradó magasabb spinű mennyiség most is a reflexió faktorizációját vonja maga után

$$R_{n\to n}(\theta_1,\dots,\theta_n)=\prod_{i>j}S_{2\to 2}(\theta_i-\theta_j)\prod_i R_{1\to 1}(\theta_i)\prod_{i>j}S_{2\to 2}(\theta_j+\theta_i)$$

Mivel feltételezésünk szerint a két-részecske szórásmátrixot már meghatároztuk a tömbi esetben, így a peremes modell megoldása az

$$R_{1\to 1}(\theta)=R(\theta)$$

egyrészecske reflexió meghatározására redukálódik. Ennek tulajdonságait a ZF algebra peremes kiterjesztéséből származtatjuk.

Peremes Zamolodchikov-Fateev algebra

A peremes ZF algebrát a

$$A^+(\theta_1)A^+(\theta_2)=S(\theta_1-\theta_2)A^+(\theta_2)A^+(\theta_1)+2\pi\delta(\theta_1-\theta_2-i\pi)\qquad;\quad A(\theta)=A^+(\theta+i\pi)$$

tömbi algebra módosításával kaphatjuk egy B a peremet jellemző operátor bevezetésével, melyre

$$A^+(\theta)B=R(\theta)A^+(-\theta)B$$

Egy kezdeti állapot ezek után

$$A^+(\theta_1)\dots A^+(\theta_n)B|0\rangle\quad;\qquad \theta_1>\dots>\theta_n>0$$

alakba írható, míg a végállapot egyszerűen

$$A^+(-\theta_1)\dots A^+(-\theta_n)B|0\rangle$$

Ezen két állapotot éppen a kívánatos faktorizált multi-részecske reflexiós mátrix kapcsolja össze.

A reflexiós mátrix tulajdonságait az algebra relációiból könnyen származtathatjuk. Például az

$$R(\theta)R(-\theta)=1$$

unitaritási összefüggés egyszerűen adódik a definiáló egyenlet kétszeri alkalmazásából.

$$A^+(\theta)B=R(\theta)A^+(-\theta)B=R(\theta)R(-\theta)A^+(\theta)B$$

Egy érdekes új reláció a keresztezett unitaritási egyenlet nevet viseli:

$$R(\theta)=S(i\pi-2\theta)R(i\pi-\theta)$$

Ezt a reflexiós mátrix definíciójából és a keresztezési összefüggésből származtathatjuk. Tekintsük ugyanis a reflexiós mátrix definícióját

$${}_{ki}\langle\theta'|\theta\rangle_{be}=R(\theta)\,{}_{ki}\langle\theta'|-\theta\rangle_{be}=2\pi R(\theta)\delta(\theta+\theta')$$

és használjuk a keresztezést és a tömbi felcserélési relációkat:

$${}_{ki}\langle\theta'|\theta\rangle_{be}=\langle 0|\theta'+i\pi,\theta\rangle_{be}=S(i\pi+\theta'-\theta)\langle 0|\theta,\theta'+i\pi\rangle_{be}=S(i\pi+\theta'-\theta)_{ki}\langle\theta-i\pi|\theta'+i\pi\rangle_{be}$$

6.2.3. Reflexiós faktorok a sinh-Gordon és Lee-Yang modellre

Vizsgáljuk meg, hogy az unitaritási és a keresztezett unitaritási reláció hogyan szorítja meg a reflexiós faktorokat a tömbben már megoldott diagonális modellek esetén.

A sinh-Gordon elmélet szórásmátrixa emlékeztetőül

$$S(\theta) = -\left(1+p\right)\left(-p\right) =: -\left[-p\right] \qquad ; \quad (x) = \frac{\sinh\left(\frac{\theta}{2}+\frac{i\pi x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\theta}{2}-\frac{i\pi x}{2}\right)}$$

az integrálható peremes potenciál alakja pedig

$$U(\varphi(0,t)) = M_0 \cosh\left(\frac{b}{2}(\varphi(0,t)-\varphi_0)\right) - M_0$$

Az unitaritási és keresztezett unitaritási összefüggés

$$R(\theta)R(-\theta) = 1 \qquad ; \qquad R(\theta) = S(i\pi - 2\theta)R(i\pi-\theta)$$

két (E,F) paramétertől függő minimális megoldása

$$R(\theta) = R_0(\theta)R(E,F,\theta) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)\left(-1-\frac{p}{2}\right)\left[\frac{E-1}{2}\right]\left[\frac{F-1}{2}\right] \tag{6.6}$$

A paramétereket a Lagrange függvény paraméterével kifejezni igen nehéz. Ehhez a modellt véges térfogatban kell megoldani és a kis és nagy térfogatú határesetet kell összehasonlítani. Mivel ez a következő fejezet anyaga, így az eredményt most csak megelőlegezzük:

$$\begin{aligned} \cos\frac{E}{16}(b^2+8\pi)\cos\frac{F}{16}(b^2+8\pi) &= \frac{M_0}{M_{crit}}\cosh\frac{b\varphi_0}{2} \\ \sin\frac{E}{16}(b^2+8\pi)\sin\frac{F}{16}(b^2+8\pi) &= -\frac{M_0}{M_{crit}}\sinh\frac{b\varphi_0}{2} \end{aligned} \tag{6.7}$$

ahol $M_{crit} = m\sqrt{\frac{2}{b^2\sinh(b^2/8)}}$. Vegyük észre, hogy általános ($E \neq 0$, $F \neq 0$) a reflexiós faktornak pólusa van $\theta = \frac{i\pi}{2}$-nél, mely az $\left(\frac{1}{2}\right)$ tényezőből jön. A Dirichlet peremfeltétel esetén csak egy paraméterünk van, így az F-es faktort nem kell a megoldásba beírnunk. Ekkor E az $E = i8b\varphi_0/(b^2+8\pi)$ kapcsolatban áll a perem φ_0 paraméterével. Ez összhangba van azzal a ténnyel is, hogy a Dirichlet peremfeltétel az $M_0 \to \infty$ határesete az általános peremfeltételnek.

A reflexiós mátrix maximális analitikussága megköveteli, hogy annak összes pólusát megmagyarázzuk vagy peremes kötött állapot keltésével, vagy pedig Coleman-Thun diagrammal. Mivel a sinh-Gordon modell a sine-Gordon modellből analitikus elfolytatással kapható azt várjuk, hogy a sine-Gordon modell spektruma tartalmazza a sinh-Gordon modell spektrumát. A tömbi esetben expliciten láttuk, hogy a sG B_1 részecskéje felelt meg a shG részecskéjének. A következő alfejezetben megmutatjuk, hogy ez a peremes változatra is igaz, vagyis minden shG peremes állapotnak van sG megfelelője. Ezért a peremes önmegoldó program bezárásával most nem foglalkozunk, azt részletesen elemezzük a sG modell esetén.

A Lee-Yang elmélet a sinh-Gordon elmélet nem fizikai $B = -\frac{1}{3}$ pontbeli elfolytatásának és egyben a sG modell konzisztens redukciójának tekinthető, melynek szórásmátrixa

$$S(\theta) = -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -\left[\frac{1}{3}\right]$$

A modell Lagrange-i definíciója az $\mathcal{M}_{(2,5)}$ minimális nem unitér konform modell segítségével adható meg

$$\mathcal{A}_{\lambda,\phi(h)} = \mathcal{A}_\phi + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{0} dx \Phi(x,y) + h \int_{-\infty}^{\infty} dy \phi(y),$$

A modellnek két konform invariáns peremfeltétele van $1, \phi$ és a másodikhoz tartozó hatás $\mathcal{A}_\phi$. Ez perturbáltuk meg mind a tömbben (Φ), mind pedig a peremen (ϕ), úgy, hogy az elmélet integrálható maradjon [44, 37]. Az unitaritási és keresztezett unitaritási egyenleteknek eleget tevő egy paraméteres minimális megoldás

$$R(\theta)_\phi = R_0(\theta) R(b,\theta) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left[\frac{b+1}{6}\right]\left[\frac{b-1}{6}\right],$$

ahol a b dimenziótlan paraméter a h-val kifejezve

$$h(b) = \sin\left(\left(b+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{5}\right) m(\lambda)^{6/5} h_{crit}, \qquad h_{crit} = -\pi^{\frac{3}{5}} 2^{\frac{4}{5}} 5^{\frac{1}{4}} \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sqrt{\Gamma(\frac{3}{5})\Gamma(\frac{4}{5})}} \left(\frac{\Gamma(\frac{3}{5})}{\Gamma(\frac{3}{5})}\right)^{\frac{6}{5}},$$

amely a shG és sG modellekből való kapcsolatból adódik. Mivel peremes kötött állapotok is megkaphatóak a sG modell konzisztens redukciójaként, így azokat a jelen dolgozat keretei között nem tárgyaljuk.

6.2.4. A peremes sine-Gordon modell

A peremes sine-Gordon modellt az önmegoldó keretben a ZF algebra segítségével definiáljuk. Legyenek a szoliton és antiszoliton dublettet keltő operátorok $A_i^+ \quad i = \pm$, melyek az alábbi módon cserélnek fel:

$$A_i^+(\theta_1) A_j^+(\theta_2) = S_{ij}^{lk}(\theta_1 - \theta_2) A_k^+(\theta_2) A_l^+(\theta_1) + 2\pi\delta_{ij}(\theta_1 - \theta_2 - i\pi) \qquad ; \quad A_k(\theta) = A_{\bar{k}}^+(\theta + i\pi)$$

ahol $\bar{k}$ a k antirészecskéje. A reflexiós mátrix egy 2x2-es mátrix melyet az algebrában a

$$A_i^+(\theta) B = R_i^j(\theta) A_j^+(-\theta) B$$

relációval írhatunk le. Az algebra relációit használva a következő konzisztencia egyenleteket származtathatjuk le:

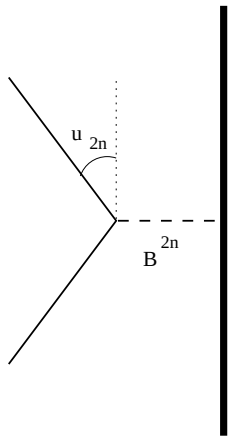
Unitaritás és keresztezett unitaritás

$$R_i^j(\theta) R_j^k(\theta) = \delta_i^k \qquad ; \qquad R_j^k(\theta) = S_{jl}^{kn}(i\pi - 2\theta) R_n^l(i\pi - \theta)$$

valamint az asszociativitásból következő peremes Yang-Baxter egyenlet

$$R_j^k(\theta_2) S_{ik}^{lm}(\theta_1 + \theta_2) R_n^i(\theta_1) S_{ln}^{pq}(\theta_1 - \theta_2) = S_{ij}^{kl}(\theta_1 - \theta_2) R_l^m(\theta_1) S_{km}^{np}(\theta_2 + \theta_1) R_p^q(\theta_2)$$

Ezen egyenleteknek a sine-Gordon szórásmátrixa esetén van egy minimális megoldása, mely pontosan két (η, ϑ) paramétertől függ, mint a peremes potenciál a Lagrange függvényben [44]:



6.3. ábra. Peremfüggetlen Coleman-Thun diagramm. A folytonos vonal szolitont vagy antiszolitont, míg a szaggatott a szuszogót jelöli.

$$
\begin{aligned}
R(\eta,\vartheta,u) &= \begin{pmatrix} P^+(\eta,\vartheta,u) & Q(\eta,\vartheta,u) \\ Q(\eta,\vartheta,u) & P^-(\eta,\vartheta,u) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_0^+(\eta,\vartheta,u) & Q_0(u) \\ Q_0(u) & P_0^-(\eta,\vartheta,u) \end{pmatrix} R_0(u)\frac{\sigma(\eta,u)}{\cos(\eta)}\frac{\sigma(i\vartheta,u)}{\cosh(\vartheta)}
\end{aligned}
$$

ahol a mátrix részben $P_0^{\pm}(\eta,\vartheta,u) = \cos(\lambda u)\cos(\eta)\cosh(\vartheta) \mp \sin(\lambda u)\sin(\eta)\sinh(\vartheta)$ és $Q_0(u) = -\sin(\lambda u)\cos(\lambda u)$ és $u = -i\theta$. A szereplő skalár faktorok közül

$$
R_0(u) = \prod_{l=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(4l\lambda - \frac{2\lambda u}{\pi})\Gamma(4\lambda(l-1)+1-\frac{2\lambda u}{\pi})}{\Gamma((4l-3)\lambda - \frac{2\lambda u}{\pi})\Gamma((4l-1)\lambda+1-\frac{2\lambda u}{\pi})}/(u\to -u)\right]
$$

nem függ a perem paramétereitől, míg a peremfüggő rész

$$
\sigma(x,u) = \frac{\cos x}{\cos(x+\lambda u)}\prod_{l=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(\frac{\pi+2x-2\lambda u+(2l-1)2\lambda\pi}{2\pi})\Gamma(\frac{\pi-2x-2\lambda u+(2l-1)2\lambda\pi}{2\pi})}{\Gamma(\frac{\pi-2x-2\lambda u+(2l-2)2\lambda\pi}{2\pi})\Gamma(\frac{\pi+2x-2\lambda u+4l\lambda\pi}{2\pi})}/(u\to -u)\right]
$$

A szuszogók reflexiós faktorai innen fúzióval előállíthatóak, és az első szuszogó reflexiós faktora éppen a sinh-Gordon modellé [43].

A modell teljes megoldása azt jelenti, hogy a reflexiós faktor ($\Im m(\theta) \in [0, \frac{\pi}{2}]$) fizikai sávon belüli összes pólusát megmagyarázzuk. Gondos vizsgálatok azt mutatják, hogy

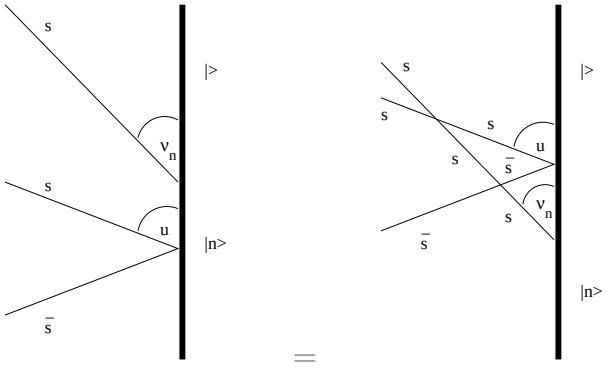
- a perem állapotoktól független pólusai $R_0(u)$-nak az $u_n = \frac{\pi n}{2\lambda}$, $n = 1, 2, \ldots$ helyeken vannak és az (6.3) ábrán lévő Coleman-Thun diagrammal magyarázhatóak. Ezen szingularitások a $Q(\eta,\vartheta,u)$ amplitúdóban nincsenek jelen amelyről a $Q_0(u)$ gondoskodik.

- A peremfüggő pólusok

$$
\nu_n = \frac{\eta}{\lambda} - u_{2n+1} \quad ; \qquad n = 0, 1, \ldots \ ,
$$

helyeken vannak, melyekhez peremes kötött állapotok ($|n\rangle$) tartoznak ha a fizikai sávba esnek. Ezen állapotok energiája a vákuumhoz képest

$$
m_{|n\rangle} - m_{|\,\rangle} = M\cos(\nu_n) \ .
$$



6.4. ábra. Fúziós módszer peremes gerjesztett állapotokra

ahol M a szoliton tömege és $|\,\rangle$ a vákuumot jelöli, hiszen $|n=0\rangle$ egy vákuumtól független gerjesztett állapot.

Az önmegoldó program következő lépése a gerjesztett peremen történő reflexiós együtthatók meghatározása. Ehhez a peremes fúziós egyenleteket használjuk [57] melyet a (6.4) ábrán szemléltettünk.

Eredményül

$$Q_{|n\rangle}(\eta,\vartheta,u) = a(u-\nu_n)Q(\eta,\vartheta,u)b(u+\nu_n) \ . \tag{6.8}$$

adódik, ahol a és b a szoliton szórásban megjelenő együtthatók. Kihasználva a szórási és reflexiós együtthatók között fennálló

$$a(u+\nu_0)a(u-\nu_0) = \frac{\cos(\eta)\cos(\lambda u-\bar\eta)\sigma(\bar\eta,u)}{\cos(\bar\eta)\cos(\lambda u+\eta)\sigma(\eta,u)} \quad ; \qquad \bar\eta = 2\eta_0-\eta$$

összefüggést a gerjesztett állapot reflexiós együtthatóját kifejezhetjük az alapállapotival

$$Q_{|n\rangle}(\eta,\vartheta,u) = Q(\bar\eta,\vartheta,u)a_n(\eta,u) \ , \tag{6.9}$$

és egy nagyon egyszerű függvénnyel:

$$a_n(\eta,u) = \frac{a(u+\nu_n)a(u-\nu_n)}{a(u+\nu_0)a(u-\nu_0)} = \prod_{l=1}^{n}\left\{2\left(\frac{\eta}{\pi}-l\right)\right\} \quad ; \qquad \{x\} = \frac{\left(\frac{x+1}{2\lambda}\right)\left(\frac{x-1}{2\lambda}\right)}{\left(\frac{x+1}{2\lambda}-1\right)\left(\frac{x-1}{2\lambda}+1\right)} \ .$$

A peremes YB egyenlet megoldásából következik, hogy a reflexiós mátrix többi részének is hasonló módon kell előállnia

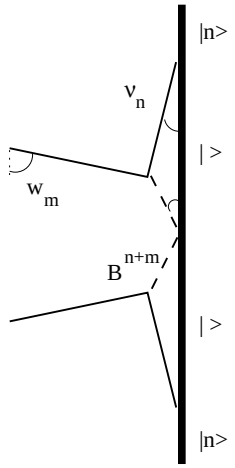
$$P^{\pm}_{|n\rangle}(\eta,\vartheta,u) = P^{\mp}(\bar\eta,\vartheta,u)a_n(\eta,u) \ . \tag{6.10}$$

melyet explicit számolással ellenőrizhetünk [21]. Érdemes észrevenni, hogy a legalacsonyabb energiás gerjesztés $R_{|0\rangle}(\eta,\vartheta,u)$ reflexiós mátrixa az $R(\eta,\vartheta,u)$ alapállapotiból az $\eta\leftrightarrow\bar\eta$, $s\leftrightarrow\bar s$ helyettesítéssel kapható. Ez arra enged következtetni, hogy a két legalacsonyabban fekvő állapot ($|\,\rangle$ és $|0\rangle$) a klasszikus szolitonikus és antiszolitonikus sztatikus alapállapoti megoldásoknak felelnek meg, melyet szemiklasszikus számolással ellenőriztünk [16].

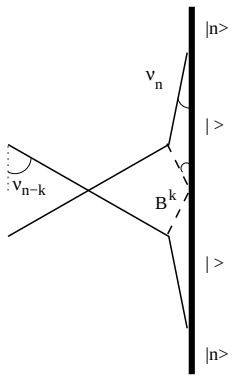
Most, hogy megkonstruáltuk a gerjesztett állapotok reflexiós faktorait, azok analitikus szerkezetét vizsgáljuk. A gerjesztett fal $R_{|n\rangle}(\eta,\vartheta,u)$ reflexiós faktorának

$$w_k = \frac{\bar\eta}{\lambda} - u_{2k+1} = \pi - \frac{\eta}{\lambda} - u_{2k-1} \quad ; \qquad k=0,1,\dots \ ,$$

pólusaihoz $w_m > \nu_n$-re a következő Coleman-Thun diagrammot rendelhetjük



Ha $w_m \leq \nu_n$ akkor a diagramm nem létezik és ekkor újabb kötött állapotot kell bevezetnünk $|n, m\rangle$. A reflexiós mátrix többi pólusa mind megmagyarázható a következő Coleman-Thun diagrammal.



A következő feladat az új $|n, m\rangle$ gerjesztett állapot reflexiós faktorának meghatározása. Ezt megint a fúzió segítségével tehetjük meg és eredményül

$$Q_{|n,m\rangle}(\eta, \vartheta, u) = Q(\eta, \vartheta, u) a_n(\eta, u) a_m(\bar{\eta}, u) \ . \tag{6.11}$$

valamint

$$P^{\pm}_{|n,m\rangle}(\eta, \vartheta, u) = P^{\pm}(\eta, \vartheta, u) a_n(\eta, u) a_m(\bar{\eta}, u) \ . \tag{6.12}$$

adódik. A következő lépésben ennek a reflexiós faktornak a pólusait kell megmagyarázni vagy kötött állapottal vagy pedig CT diagrammal. A folyamatot tovább folytatva a peremes kötött állapotok és reflexiós faktoraik következő mintázata alakul ki.

Kötött állapotot találunk minden olyan egészek sorozatára $|\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ melyben a

$$\frac{\pi}{2} \geq \nu_{n_1} > w_{n_2} > \nu_{n_3} > \cdots \geq 0$$

feltételek teljesülnek. A $|n_1, n_2, \ldots, n_k\rangle$ kötött állapot tömege

$$m_{|n_1,n_2,\ldots,n_k\rangle} = m_{|\,\rangle}(\eta, \theta) + M \sum_{i \text{ odd}} \cos(\nu_{n_i}) + M \sum_{i \text{ even}} \cos(w_{n_i}) \ .$$

A reflexiós faktorok a gerjesztett állapotokon

$$Q_{|n_1,n_2,\ldots,n_k\rangle}(\eta, \vartheta, u) = Q(\eta, \vartheta, u) \prod_{i \text{ odd}} a_{n_i}(\eta, u) \prod_{i \text{ even}} a_{n_i}(\bar{\eta}, u) \ ,$$

$$P^{\pm}_{|n_1,n_2,\ldots,n_k\rangle}(\eta,\vartheta,u) = P^{\pm}(\eta,\vartheta,u)\prod_{i\ \mathrm{odd}} a_{n_i}(\eta,u)\prod_{i\ \mathrm{even}} a_{n_i}(\bar{\eta},u)\ ,$$

A szuszogók reflexiós faktorai a tömbi fúziós egyenletekből származtathatók és összhangban vannak a fenti képpel [21]. A gerjesztett reflexiós faktorok pólusai a következő kötött állapot keltési folyamatokat írják le:

kezdőállapot	részecske	rapiditás	végállapot
$\lvert n_1,\ldots,n_{2k}\rangle$	$s,\bar{s}$	ν_n	$\lvert n_1,\ldots,n_{2k},n\rangle$
$\lvert n_1,\ldots,n_{2k-1}\rangle$	$s,\bar{s}$	w_n	$\lvert n_1,\ldots,n_{2k-1},n\rangle$
$\lvert n_1,...,n_{2k},n_{2k+1},...\rangle$	B^n	$\frac{1}{2}(\nu_l - w_{n-l})$	$\lvert n_1,...,n_{2k},l,n-l,n_{2k+1},...\rangle$
$\lvert n_1,...,n_{2k-1},n_{2k},...\rangle$	B^n	$\frac{1}{2}(w_l - \nu_{n-l})$	$\lvert n_1,...,n_{2k-1},l,n-l,n_{2k},...\rangle$
$\lvert n_1,\ldots,n_{2k},\ldots\rangle$	B^n	$\frac{1}{2}(\nu_{-n_{2k}} - w_{n+n_{2k}})$	$\lvert n_1,\ldots,n_{2k}+n,\ldots\rangle$
$\lvert n_1,\ldots,n_{2k-1},\ldots\rangle$	B^n	$\frac{1}{2}(w_{-n_{2k-1}} - \nu_{n+n_{2k-1}})$	$\lvert n_1,\ldots,n_{2k-1}+n,\ldots\rangle$

A reflexiós faktorok minden más pólusa CT diagrammal magyarázható, melyeket meg is határoztunk [15]. Ezzel a peremes önmegoldó programot a sG modellben véghezvittük. Egyetlen nyitott kérdés a reflexiós faktorok és a Lagrange függvény paraméteri közötti kapcsolat. Mindkét paraméter sereg fundamentális tartományait és szimmetriáit összehasonlítva az alábbi összefüggést írhatjuk fel

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\eta}{\lambda+1}\right)\cosh\left(\frac{\vartheta}{\lambda+1}\right) &= \frac{M_0}{M_{crit}}\cos\left(\frac{\beta\phi_0}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\eta}{\lambda+1}\right)\sinh\left(\frac{\vartheta}{\lambda+1}\right) &= \frac{M_0}{M_{crit}}\sin\left(\frac{\beta\phi_0}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

ahol az M_{crit} együtthatót majd végesméret effektusokból határozzuk meg. Megjegyezzük, hogy ezen reláció a shG modell esetében megmutatott reláció analitikus elfolytatása. Az is igaz, hogy ha csak azokat a kötött állapotokat tartjuk meg, melyek az első szuszogóval kelthetőek az alapállapotból a shG modell peremes kötött állapotait kapjuk [32]. A Lee-Yang modell peremes kötött állapotai is előállnak a sG peremes modell konzisztens redukciójaként [40].

6.3. Korrelációs függvények

Tekintsük valamely $\varphi_i(x_i,t_i)$ operátorok N-pont függvényét $\langle\varphi_1(x_1,y_1)\ldots\varphi_N(x_N,y_N)\rangle$. Folytassuk el az idő koordinátát $y = it$ és vizsgáljuk az Euklideszi korrelátort. Definíció szerint

$$\langle\varphi_1(x_1,y_1)\ldots\varphi_N(x_N,y_N)\rangle = \frac{{}_B\langle 0|T_t(\varphi_1(x_1,y_1)\ldots\varphi_N(x_N,y_N))|0\rangle_B}{{}_B\langle 0|0\rangle_B}$$

ahol a $|0\rangle_B = B|0\rangle$ jelölést vezettük be a peremes elmélet vákuumára, megkülönböztetve őt a tömbi elmélet $|0\rangle$ vákuumától. Az operátorok időfejlődését a peremes elmélet Hamilton operátora generálja

$$\varphi(x,y) = e^{-yH_B}\varphi(x,0)e^{yH_B}$$

Ezt az Euklideszi elméletet tekinthetjük egy másik Minkowski elmélet Wick forgatásának, melyben $x = i\tau$ az Euklideszi idő. Ekkor az egyidejű hipersíkokon definiált modell a tömbi modell és a perem mint $|B\rangle$ kezdő állapot jelentkezik:

$$\langle\varphi_1(x_1,y_1)\ldots\varphi_N(x_N,y_N)\rangle = \frac{\langle 0|T_\tau(\varphi_1(x_1,y_1)\ldots\varphi_N(x_N,y_N))|B\rangle}{\langle 0|B\rangle}$$

ahol T_τ az τ szerinti időrendezést jelöli és az időfejlődést a tömbi elmélet H Hamilton operátora generálja

$$\varphi(x,y) = e^{-xH}\varphi(0,y)e^{xH}$$

A korrelációs függvények kétféle kiszámítási módját összehasonlítva a $|B\rangle$ peremes kezdő állapot egyértelműen meghatározható.

Integrálható modellek esetén a $|B\rangle$ peremes állapotot expliciten is ki tudjuk fejezni a reflexiós faktorral. Vegyük észre először, hogy a tömbi elméletben minden szimmetria megmarad és csupán a peremállapot sértheti bizonyos részüket. A Wick forgatás eredményeként most az impulzus típusú mennyiségeket őrzi meg a perem

$$(Q_s - Q_{-s})|B\rangle = 0$$

Konkrétan $s = 1$ esetén ez az impulzus eltűnését jelenti. A peremes állapotot tehát sokrészecske állapotok szerint kifejtve

$$|B\rangle = (1 + \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} K^{ij}(\theta) A_i^+(-\theta) A_j^+(\theta) + \dots)|0\rangle$$

csak zérus impulzusú kombinációkat tartalmazhat. Mivel $-\theta < \theta$ így a kifejtésben a végállapotok bázisát használtuk. Összehasonlítva a kétpontfüggvényeket a két leírásban összekapcsolhatjuk a peremállapot kifejtési együtthatóját a reflexiós mátrixszal [44, 19]

$$K^{ij}(\theta) = C^{i\bar{i}} R_{\bar{i}}^{j}(\frac{\imath\pi}{2} - \theta)$$

ahol $C^{i\bar{i}}$a töltés tükrözés mátrixa. Megjegyezzük, hogy a perem állapotot a kezdeti állapotok bázisa szerint is kifejthettük volna

$$|B\rangle = (1 + \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} K^{ij}(-\theta) A_i^+(\theta) A_j^+(-\theta) + \dots)|0\rangle$$

A két kifejezést a szórásmátrix kapcsolja össze

$$K^{ij}(\theta) = S_{kl}^{ij}(2\theta) K^{kl}(-\theta)$$

amely a peremes keresztezett unitaritással ekvivalens a reflexiós faktorokra.

A peremes kötött állapotok több részecskét tartalmazó kifejtési együtthatói a sokrészecskés reflexiós mátrixszal hozhatóak kapcsolatba. Integrálható modellekben ezen reflexiós mátrixok faktorizálódnak páronkénti szórásokra és egyrészecskés reflexiókra. Ennek megnyilvánulása az, hogy a peremállapot a következő alakba írható [44]:

$$|B\rangle = \exp\left\{\int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} K^{ij}(\theta) A_i^+(-\theta) A_j^+(\theta)\right\}|0\rangle$$

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogyan lehet használni a peremes állapotot korrelációs függvények kiszámítására. Az egyszerűség kedvéért valamely operátor vákuum várható értékét $\langle\varphi(x,y)\rangle$ számoljuk egy peremes skalár elméletben (pl sinh-Gordon). A tömbi elméletben ez a kifejezés az eltolás invariancia miatt nem függhetne a koordinátáktól és $\langle\varphi\rangle$ konstans lenne. A peremes elméletben viszont csak y irányban van eltolás invariancia, így a keresett vákuum várható érték az x koordinátának nem triviális függvénye lehet. A perem állapoti formalizmusban számolva [36]

$$\langle\varphi(x,0)\rangle = \langle 0|\varphi(x,0)|B\rangle = \sum_{n\in\mathcal{H}} \langle 0|\varphi(0,0)|n\rangle\langle n|B\rangle e^{-E_n x}$$

ahol az összegzést a peremes állapotok sokrészecske Hilbert terére kell elvégezni. Eredményül egy sort kapunk mely a tömbi form faktorokat és a peremes állapot együtthatóit tartalmazzák:

$$\langle\varphi(x,0)\rangle = \langle\varphi\rangle + \int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} F_2^\varphi(\theta,-\theta)K(\theta)e^{-2mx\cosh\theta} + \dots$$

Ezen formula gyakorlati alkalmazása megtalálható a szerző Coulomb folyadékokról írt munkájában [60]. Az előálló sor nagyon gyorsan konvergál a peremtől távol, viszont használhatatlan a peremen lokalizált operátorok mátrixelemeinek kiszámítására, vagyis peremes korrelátorok meghatározására.

6.4. Önmegoldó program a peremes alaktényezőkre

A peremen lokalizált operátorok alaktényezőit legegyszerűbben a ZF algebra segítségével definiálhatjuk

$$_{ki}\langle\theta_1',\theta_2',\dots,\theta_m'|\mathcal{O}(t)|\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n\rangle_{be} = F_{mn}^{\mathcal{O}}(\theta_1',\theta_2',\dots,\theta_m';\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)e^{-imt(\sum\cosh\theta_i-\sum\cosh\theta_j')}$$

ahol az aszimptotikus kezdő és végállapotokat a ZF algebra keltő, eltüntető operátora definiálják. Az algebra keresztezési relációját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$F_{mn}^{\mathcal{O}}(\theta_1',\theta_2',\dots,\theta_m';\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n) = F_{m-1n+1}^{\mathcal{O}}(\theta_2',\dots,\theta_m';\theta_1'+i\pi,\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n) \quad (6.13)$$

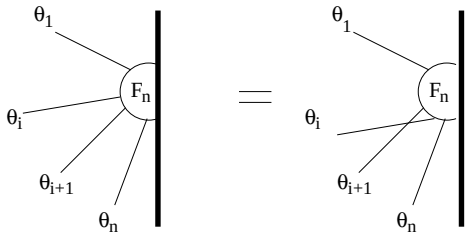
Ez azt jelenti, hogy minden alaktényezőt ki tudunk fejezni az elemi, egyoldali alaktényezőkkel:

$$_{ki}\langle 0|\mathcal{O}(0)|\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n\rangle_{be} = F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$$

A ZF algebra további tulajdonságokat jelent az alaktényezőkre, melyeket most axiómaként rögzítünk [18].

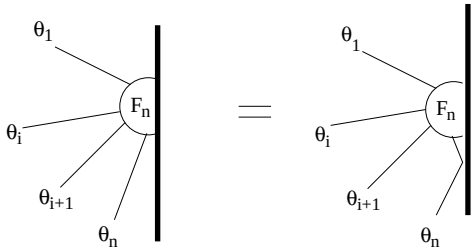
I. Felcserélési axióma:

$$F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1,\dots,\theta_i,\theta_{i+1},\dots,\theta_n) = S(\theta_i-\theta_{i+1})F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1,\dots,\theta_{i+1},\theta_i,\dots,\theta_n)$$



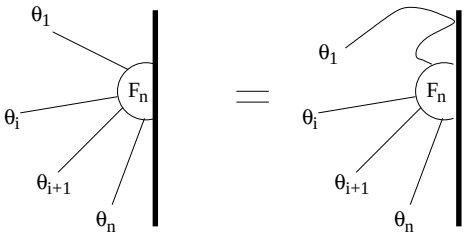
II. Reflexiós axióma:

$$F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1,\dots,\theta_{n-1},\theta_n) = R(\theta_n)F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1,\dots,\theta_{n-1},-\theta_n)$$



III. Keresztezett reflexiós axióma:

$$F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = R(i\pi - \theta_1) F_n^{\mathcal{O}}(2i\pi - \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$$

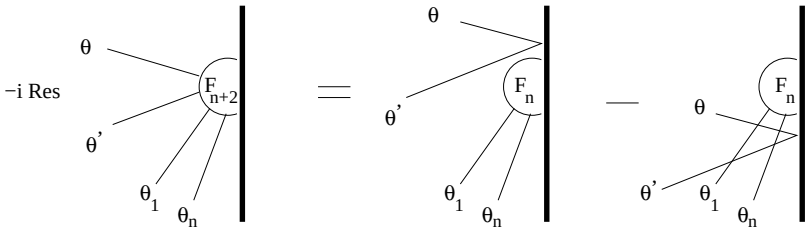


Az alakténye zők szingularitásait is meghatározzák az algebra relációi:
IV. Kinematikai szingularitási axióma:

$$-i \operatorname*{Res}_{\theta=\theta'} F_{n+2}^{\mathcal{O}}(\theta + i\pi, \theta', \theta_1, \ldots, \theta_n) = \left(1 - \prod_{i=1}^{n} S(\theta - \theta_i) S(\theta + \theta_i)\right) F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$$

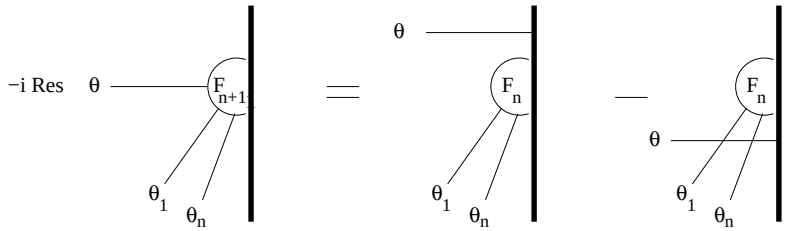
vagy ezzel ekvivalensen

$$-i \operatorname*{Res}_{\theta=\theta'} F_{n+2}^{\mathcal{O}}(-\theta + i\pi, \theta', \theta_1, \ldots, \theta_n) = \left(R(\theta) - \prod_{i=1}^{n} S(\theta - \theta_i) R(\theta) S(\theta + \theta_i)\right) F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$$



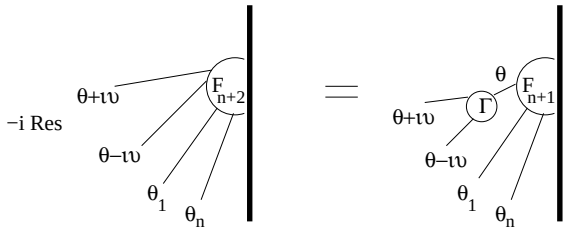
V. Peremes kinematikai szingularitási axióma:

$$-i \operatorname*{Res}_{\theta=0} F_{n+1}^{\mathcal{O}}(\theta + \frac{i\pi}{2}, \theta_1, \ldots, \theta_n) = \frac{g}{2}\Big(1 - \prod_{i=1}^{n} S\big(\frac{i\pi}{2} - \theta_i\big)\Big) F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$$



VI. Tömbi dinamikai szingularitási axióma:

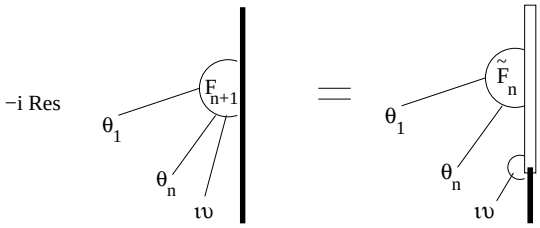
$$-i \operatorname*{Res}_{\theta=\theta'} F_{n+2}^{\mathcal{O}}(\theta + iu, \theta' - iu, \theta_1, \ldots, \theta_n) = \Gamma F_{n+1}^{\mathcal{O}}(\theta, \theta_1, \ldots, \theta_n)$$



VII. Peremes dinamikai szingularitási axióma:

$$-i \operatorname*{Res}_{\theta=iv} F^{\mathcal{O}}_{n+1}(\theta_1, \ldots, \theta_n, \theta) = \tilde{g}\tilde{F}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$$

.



A fentiekben g a reflexiós mátrix $i\pi/2$ -nél lévő pólusából, míg $\tilde{g}$ a kötött állapoti pólusból származtatható.

6.4.1. Az alaktényező axiómák megoldásai

A fenti axiómáknak az elmélet összes peremre lokalizált operátorának alaktényezőire fenn kell állnia. Az axiómákat kielégítő alaktényezők vizsgálata lehetőséget teremt ezen operátorok terének feltérképezésére. Ez azért is fontos, mivel a konform térelméleti határesetben ezen operátorok lesznek egy-egy értelmű kapcsolatban a peremes elmélet Hilbert terével.

A továbbiakban tehát megkeressük a legáltalánosabb megoldásokat, szeparálva a minden operátorra jelenlevő általános faktorokat az operátor specifikus faktoroktól. Tesszük ezt növekvő részecskeszámok esetén. Az egyrészecskés eset lényegesen különbözik a tömbi esettől mivel az sérülő transzlációs szimmetria miatt az alaktényező nem triviálisan függhet a rapiditástól:

$$F^{\mathcal{O}}_1(\theta) = R(\theta)F^{\mathcal{O}}_1(-\theta) \quad ; \quad F^{\mathcal{O}}_1(i\pi + \theta) = R(-\theta)F^{\mathcal{O}}_1(i\pi - \theta), \tag{6.14}$$

Ezen egyenletek megoldását kereshetjük az

$$F^{\mathcal{O}}_1(\theta) = g(\theta)g(i\pi - \theta),$$

alakban. Ennek az az értelme, hogy g-nek ki kell elégítenie a

$$g(\theta) = R(\theta)g(-\theta) \quad ; \quad g(i\pi + \theta) = g(i\pi - \theta), \tag{6.15}$$

egyenleteket, amely teljesen azonos alakú a tömbi kétrészecskés minimális alaktényező egyenlettel az $S \leftrightarrow R$ megfeleltetés által. A tömbi esetben megmutattuk, hogyan kereshetjük meg az egyenlet minimális megoldását. A hozzá tartozó alaktényezőt jelölje $r_{min}(\theta)$. Egy általános operátor egyrészecskés alaktényezője ezek után az

$$F^{\mathcal{O}}_1(\theta) = r_{min}(\theta)Q^{\mathcal{O}}_1(y) \qquad ; \qquad y = 2\cosh\theta$$

alakba írható, ahol az operátortól való függés csak Q-ban van.

Az axiómákból megmutatható, hogy a kétrészecskés alaktényező általános alakja

$$F^{\mathcal{O}}_2(\theta_1, \theta_2) = f_{min}(\theta_1 - \theta_2)f_{min}(\theta_1 + \theta_2)r_{min}(\theta_1)r_{min}(\theta_2)Q^{\mathcal{O}}_2(y_1, y_2)$$

ahol f_{min} a tömbi egyenletek minimális két-részecskés megoldása.

Az általános alaktényező ezek után

$$F_n^{\mathcal{O}}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n) = H_n \prod_{i=1}^{n} \frac{r_{min}(\theta_i)}{y_i} \prod_{i<j} \frac{f_{min}(\theta_i-\theta_j) f_{min}(\theta_i+\theta_j)}{\prod_{i<j}(y_i+y_j)} Q_n^{\mathcal{O}}(y_1,y_2\ldots,y_n), \tag{6.16}$$

ahol a peremes és tömbi kinematikai szingularitásokat expliciten beleírtuk a megoldásba. Ha dinamikai szingularitások is lennének azokat r_{min} illetve f_{min}-be kellene beledefiniálnunk. Az esetek többségében helyes r_{min} és f_{min} választás esetén Q_n már (szimmetrikus) polinom, melyre a dinamikai és kinematikai szingularitási egyenletek rekurziós összefüggéseket határoznak meg.

Ha az alaktényezőket már meghatároztuk segítségükkel a korrelációs függvények a spektrális felbontáson keresztül megkaphatóak

$$\langle 0|\mathcal{O}(t)\mathcal{O}(0)|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\theta_1>\theta_2>\cdots>\theta_n>0} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_n e^{-imt\sum_i \cosh\theta_i} F_n F_n^+ \tag{6.17}$$

ahol

$$F_n^+ = {}_{in}\langle \theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n|\mathcal{O}(0)|0\rangle = F_n^{\mathcal{O}}(i\pi+\theta_n, i\pi+\theta_{n-1},\ldots,i\pi+\theta_1)$$

Vizsgáljuk meg most hogyan kivitelezhető az alaktényező önmegoldó eljárás a sinh-Gordon és Lee-Yang modellek esetére.

A Lee-Yang modell perturbált ϕ peremfeltétellel

Emlékeztetőül a perturbált ϕ perem reflexiós faktora

$$R(\theta) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left[\frac{b+1}{6}\right]\left[\frac{b-1}{6}\right],$$

A hozzá tartozó minimális alaktényező a korábbi tömbi szórásmátrixokra felírt (2.9) összefüggésünkből a következőnek adódik

$$r_{min}(\theta) = \frac{i\sinh\theta}{(\sinh\theta - i\sin\frac{\pi(b+1)}{6})(\sinh\theta - i\sin\frac{\pi(b-1)}{6})} u(\theta),$$

ahol

$$u(\theta) = \exp\left\{\int_0^\infty \frac{dt}{t}\left[\frac{1}{\sinh\frac{t}{2}} - 2\cosh\frac{t}{2}\cos\left[\left(\frac{i\pi}{2}-\theta\right)\frac{t}{\pi}\right]\frac{\sinh\frac{5t}{6}+\sinh\frac{t}{2}-\sinh\frac{t}{3}}{\sinh^2 t}\right]\right\}.$$

Ezen faktor már tartalmazza a peremes dinamikai szingularitásokat. Az alaktényezőkre a

$$H_n = N\left(\frac{i3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}v(0)}\right)^n \qquad \beta_k(b) = 2\cos\frac{\pi}{6}(b+k), \quad k\in \mathrm{Z}, \tag{6.18}$$

normálást fogjuk választani. Ennek előnye, hogy a dinamikai és kinematikai szingularitási egyenletek egyszerű rekurziós összefüggéseket határoznak meg

$$\begin{aligned} Q_2(y_+,y_-) &= (y^2-\beta_{-3}^2)Q_1(y), \\ Q_{n+2}(y_+,y_-,y_1,\ldots,y_n) &= Q_{n+1}(y,y_1,\ldots,y_n)\,(y^2-\beta_{-3}^2)\prod_{i=1}^{n}(y+y_i), \quad n>0, \end{aligned} \tag{6.19}$$

$$Q_{n+2}(-y, y, y_1, \ldots, y_n) = Q_n(y_1, \ldots, y_n)\,(y^2 - \beta_{-1}^2)(y^2 - \beta_1^2)\,P_n, \tag{6.20}$$

ahol

$$P_n = \frac{1}{2(y_+ - y_-)}\left[\prod_{i=1}^{n}(y_i - y_-)(y_i + y_+) - \prod_{i=1}^{n}(y_i + y_-)(y_i - y_+)\right], \tag{6.21}$$

és

$$y_+ = \omega x + \omega^{-1}x^{-1}; \quad y_- = \omega^{-1}x + \omega x^{-1}; \quad x = e^{\theta}; \quad \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad y = x + x^{-1}. \tag{6.22}$$

Ezen egyenleteknek eleget tevő minimális megoldások a harmadik szintig az alábbiak

$$\begin{aligned} Q_1(y_1) &= \sigma_1, & Q_2(y_1, y_2) &= \sigma_1(\sigma_2 + 3 - \beta_{-3}^2), \\ Q_3(y_1, y_2, y_3) &= \sigma_1\left[\sigma_1(\sigma_2 + \beta_{-1}^2)(\sigma_2 + \beta_1^2) - (\sigma_2 + 3)(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)\right]. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Ezek minimálisak abban az értelemben, hogy az aszimptotikájuk a legenyhébb növekedést mutatja nagy rapiditásokra, így azt gondolhatjuk, hogy a legkisebb skáladimenziójú peremes operátorhoz tartoznak. Ezt leellenőrizhetjük a kétpontfüggvény rövid távolságú kifejtésével, ahol is konform viselkedést várunk. A legkisebb dimenziójú operátor kétpontfüggvényének rövidtávú kifejtése [18]

$$\langle 0|m^{\frac{1}{5}}\varphi(t)m^{\frac{1}{5}}\varphi(0)|0\rangle = -(mt)^{\frac{2}{5}} + (mt)^{\frac{1}{5}}C_{\varphi\varphi}^{\varphi}\langle m^{\frac{1}{5}}\varphi\rangle + \ldots$$

ahol megfelelő tömeg hatványokkal dimenziótlanítottuk a kifejezést. A három pont csatolás egzakt értéke [36]

$$C_{\varphi\varphi}^{\varphi} = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{1}{5})\Gamma(\frac{6}{5})}{\Gamma(\frac{3}{5})\Gamma(\frac{4}{5})}}$$

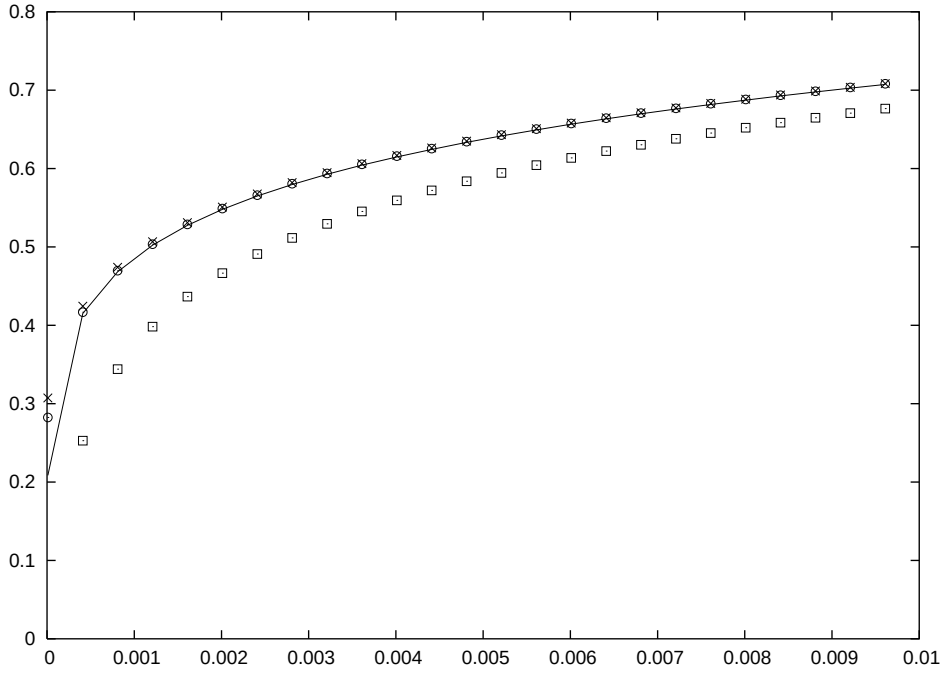
míg a vákuum várható értéké

$$\langle m^{\frac{1}{5}}\varphi\rangle = -\frac{5}{6h_{crit}}\frac{\cos(\frac{\pi b}{6})}{\cos(\frac{\pi}{10}(2b+1))}$$

A tömbi modell mintájára az alaktényezők normálását az $N = \langle m^{\frac{1}{5}}\varphi\rangle$ módon választjuk. A kétpontfüggvény alaktényezőkön alapuló kifejtése ekkor

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathcal{O}(t)\mathcal{O}(0)|0\rangle \;=\; & |F_0^{\mathcal{O}}|^2 - \int_0^{\infty}\frac{d\theta}{2\pi}|F_1^{\mathcal{O}}|^2 e^{-mt\cosh\theta} \\ & + \int_0^{\infty}\frac{d\theta_1 d\theta_2}{2(2\pi)^2}|F_2^{\mathcal{O}}(\theta_1,\theta_2)|^2 e^{-mt(\cosh\theta_1+\cosh\theta_2)} \\ & - \int_0^{\infty}\frac{d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3}{6(2\pi)^3}|F_3^{\mathcal{O}}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)|^2 e^{-mt(\cosh\theta_1+\cosh\theta_2+\cosh\theta_3)} + \ldots \end{aligned}$$

A két kifejtés tökéletes egyezést mutat még kis térfogatok esetén is, ahogy az az alábbi ábrán látszik [18].



6.5. ábra. Kétpont függvény távolságfüggése dimenziótlanított egységekben. A vonal a konform térelméleti kifejezés, □ az egyrészecske, × az első kétrészecske, míg ∘ az első háromrészecske alaktényező tagját tartalmazza.

A Lee-Yang modell perturbált 1 peremfeltétellel

A Lee-Yang modell az 1 konform invariáns perem esetén is megoldható. A minimális egyrészecskés alaktényezőre ekkor

$$r_1(\theta) = i \sinh\theta \; u(\theta),$$

adódik, a rekurziós egyenletek

$$\begin{aligned} Q_2(y_+, y_-) &= Q_1(y), \\ Q_{n+2}(y_+, y_-, y_1, \ldots, y_n) &= Q_{n+1}(y, y_1, \ldots, y_n) \prod_{i=1}^{n} (y + y_i), \quad n > 0; \end{aligned} \tag{6.24}$$

és

$$Q_{n+2}(-y, y, y_1, \ldots, y_n) = Q_n(y_1, \ldots, y_n)\, P_n, \tag{6.25}$$

módon változnak meg, melyek vezető rendű megoldása

$$Q_1(y_1) = \sigma_1, \quad Q_2(y_1, y_2) \sim \sigma_1, \quad Q_3(y_1, y_2, y_3) \sim \sigma_1^2, \quad Q_4(y_1, y_2, y_3, y_4) \sim \sigma_1^2(\sigma_2 + 3).$$

Az I peremfeltétel esetén a legalacsonyabb dimenziós operátor az energia-impulzus tenzorhoz tartozik. Mivel megoldásunk aszimptotikája a legenyhébb, így ezen operátor alaktényezőinek kell lennie. Az operátor korrelációs függvényének rövidtávú kifejtése mutatja, hogy ez valóban az energia-impulzus tenzorhoz tartozik.

Sinh-Gordon modell $\varphi_0 = 0$ Dirichlet peremfeltétellel

Emlékeztetőül a sinh-Gordon modell kérdéses reflexiós faktora

$$R(\theta) = R_0(\theta)R(E,F,\theta) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)\left(-1-\frac{p}{2}\right)\left[\frac{E-1}{2}\right] \qquad ; \qquad E = i\frac{8b\varphi_0}{b^2+8\pi}$$

Az $E = 0$ peremfeltétel azért érdekes, mert ekkor nincs pólus a reflexiós faktorban $\theta = i\pi/2$-nél. A minimális peremes egyrészecske alakténye ző a (2.9) összefüggés alapján

$$r_0(\theta) = \frac{\sinh\theta}{\sinh\theta + i}u(\theta,p),$$

ahol

$$u(\theta,p) = \exp\left[2\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left[1-\cos\frac{(i\pi-2\theta)2x}{2\pi}\right]\frac{\cosh x}{\sinh^2 2x}\left(\sinh xp + \sinh(1-p)x + \sinh x\right)\right]$$

Mivel ilyenkor nincsen pólus $i\frac{\pi}{2}$-nél, így a peremes kinematikai szingularitási axióma sincs. Ekkor az alakténye ző parametrizációja

$$F_n(\theta_1,\ldots,\theta_n) = H_n Q_n(y_1,\ldots,y_n)\prod_i r_0(\theta_i)\prod_{i<j}\frac{f(\theta_i-\theta_j)f(\theta_i+\theta_j)}{y_i+y_j}.$$

A sinh-Gordon modellben nincsen tömbi dinamikai szingularitás, így csak a tömbi kinematikai szingularitás ad rekurziót

$$Q_{n+2}(-y,y,y_1,\ldots,y_n) = -Q_n(y_1,\ldots,y_n)\,P_n,$$

ahol P_n-t már definiáltuk (6.21,6.22)-ban, de most $\omega = e^{i\pi\frac{B}{2}}$. A modell paritásszimmetriája miatt a páros és páratlan alakténye ők faktorizálódnak. A fizikailag releváns megoldás $n = 5$ rendig bezárólag

$$Q_1(y_1) = 1, \qquad Q_3(y_1,y_2,y_3) = -\sigma_1,$$

és

$$Q_5(y_1,\ldots,y_5) = \sigma_1[\sigma_3\sigma_2 - (\omega+\omega^{-1})^2\sigma_5 + (\omega-\omega^{-1})^4\sigma_1 - (\omega-\omega^{-1})^2(\sigma_3+\sigma_1\sigma_2)],$$

A hozzá tartozó operátor a korrelációs függvény viselkedése alapján $\partial_x\varphi$. A páros részecske számú megoldások

$$Q_2(y_1,y_2) = \sigma_1, \qquad Q_4(y_1,\ldots,y_4) = \sigma_1^2(\sigma_2 - (\omega-\omega^{-1})^2),$$

melyhez tartozó operátor $(\partial_x\varphi)^2$.

A Sinh-Gordon modell $\varphi_0 \neq 0$ Dirichlet peremfeltétellel

Ha $E \neq 0$ akkor a reflexiós faktornak pólusa van $\theta = i\pi/2$-nél és a modell többé nem paritás invariáns. A minimális egy-részecskés alakténye ző

$$r_E(\theta) = \frac{\sinh\theta}{\sinh\theta - i\sin\gamma}u(\theta,p) \quad , \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}(E-1),$$

Az n-részecskés alakténye ő re a szokásos Ansatz-ot választva a rekurzióra a következő adódik:

$$Q_{n+2}(-y,y,y_1,\ldots,y_n) = (y^2 - 4\cos^2\gamma)Q_n(y_1,\ldots,y_n)\,P_n, \tag{6.26}$$

ahol P_n ismét (6.21,6.22) és mint előbb $\omega = e^{i\pi\frac{B}{2}}$. Figyelembe véve a peremes kinematikai rekurziós egyenletet a megoldásra

$$Q_2(y_1, y_2) \sim -4\cos^2\gamma\sigma_1, \quad Q_3(y_1, y_2, y_3) = -\sigma_1\sigma_3 - 4\cos^2\gamma\sigma_1^2,$$

és

$$Q_4(y_1, \ldots, y_4) \sim -4\cos^2\gamma(\sigma_1\sigma_3 + 4\cos^2\gamma\sigma_1^2)(\sigma_2 + 4\sin^2\pi p).$$

adódik.

Ezzel a Lee-Yang és a sinh-Gordon modellek szórásmátrixát, reflexiós mátrixait és kis részecske számokhoz tartozó alaktényezőit meghatároztuk és segítségükkel a kétpontfüggvény még kis távolságokra is érvényes leírását megadtuk. A modell tehát a fél végtelen esetben megoldottnak tekinthető és a következő fejezetben a véges térfogatú spektrumot vizsgáljuk.

7. fejezet

Peremes kvantumtérelméletek véges térfogatban

A peremes modelleket fél végtelen térben a reflexiós és szórásmátrix valamint a diszperziós reláció egyértelműen jellemzik. A gyakorlati alkalmazásokban viszont a rendszer nem végtelen, annak két pereme van, mely véges térfogatban tartja a részecskéket. Ebben a fejezetben a tömbi modell mintájára egzaktul leírjuk az integrálható modellek spektrumát a véges intervallumon is a szórási adatok segítségével. Először az impulzus kvantálódását vizsgáljuk, mely a peremes BY egyenleteket fogja eredményezni, majd a tükörmodell és a peremállapot segítségével egzaktul leírjuk a véges térfogati spektrumot.

7.1. Peremes Bethe-Yang egyenletek

A modellek végesméret korrekcióit polinomiális rendben a BY egyenletek szolgáltatják. Ezek peremes változatát tekintjük először át a diagonális modellek kapcsán, és csak utána vizsgáljuk a sokkal bonyolultabb nemdiagonális esetet.

Diagonális szóráselmélet

A leglényegesebb különbség a tömbi esethez képest, hogy a részecskék a peremen szóródnak. Ennek következménye, hogy már az egy-részecskés energiaszintek is eltérnek a szabad esethez képest. Ha ugyanis a periodicitást szeretnénk kiróni akkor a következőképpen kell eljárnunk. Elindulunk egy intervallum közepén lévő pontból, majd a lokális eltolás operátorát használva a jobb falig megyünk el. Ott már sérül az eltolás, így a visszaverődésből a hullámfüggvény a reflexiós mátrix fázisát szedi fel, majd a bal falig megyünk el a lokális eltolással, ahol felszedjük a másik reflexiós fázist és végül visszamegyünk az eredeti pontba. Ha az összes fázist összegyűjtjük megkapjuk az egyrészecskés peremes BY egyenletet:

$$e^{2im\sinh\theta L}R_+(\theta)R_-(-\theta) = 1$$

ahol $R_+(\theta)$ a jobbfali, míg $R_-(\theta)$ a balfali reflexiós együttható. Láthatóan általános peremfeltétel esetén a részecske nem állhat, vagyis a legkisebb rapiditás általában nem nulla. Ezen egyenlet logaritmusát véve

$$2mL\sinh\theta - i\log\left[R_+(\theta)R_-(-\theta)\right] = 2\pi n$$

és θ-ra megoldva a lehetséges egyrészecske energiák:

$$E(n) = m\cosh\theta_n$$

Multi-részecske állapotoknál a közbenső részecskéken való szóródást is figyelembe kell vennünk.

$$e^{2imL\sinh\theta_k}\prod_{j:j\neq k}S(\theta_k-\theta_j)R_+(\theta_k)\prod_{j:j\neq k}S(\theta_j+\theta_k)R_-(-\theta_k)=1$$

Ezen peremes BY egyenletek határozzák meg a sokrészecske állapotok rapiditásait, melyet aztán az

$$E(\theta_1,\ldots,\theta_n)=\sum_i m\cosh\theta_i$$

energia formulába beírva megkaphatjuk az állapot energiáját exponenciálisan kicsi vákuumpolarizációs effektusok erejéig. Ezen effektusokat a következő fejezetben vizsgáljuk, csak előtte még megnézzük, hogyan terjeszthetőek ki a peremes BY egyenletek nemdiagonális szórásra.

Sine-Gordon elmélet, kapcsolat az XXZ spinlánccal

A tömbi esetben láthattuk, hogyan kapcsolódik a BY egyenletek megoldása az XXZ spinlánc diagonalizálási problémájához. A peremes elméletben azt várjuk, hogy a véges térfogatú spektrum a nyílt XXZ spinlánccal legyen kapcsolatban. A diagonalizálandó mátrixot úgy kaphatjuk, hogy valamelyik kiválasztott részecskét elvisszük a peremig, ott szóratjuk, majd átvisszük a másik peremig onnan visszaszóratjuk és végül visszavisszük az eredeti helyére:

$$e^{iML\sinh\theta_k L}\prod_{n:n\neq k}S^{k_{n+1}j_{n+1}}_{k_n i_n}(\theta_{kn})(R_+)^{l_{N+1}}_{k_{N+1}}(\theta_k)\prod_{n:n\neq k}S^{i_n l_n}_{j_n l_{n+1}}(\hat{\theta}_{kn})(R_-)^{k_1}_{l_1}(-\theta_k)\Psi_{l_1\ldots l_n}=\Psi_{i_1\ldots i_n}$$

ahol $\theta_{kn}=\theta_n-\theta_k$ és $\hat{\theta}_{kn}=\theta_k+\theta_n$. Ezen sajátérték egyenleteknek egyszerre kell fennállniuk az összes rapiditásra θ_k. Ez legegyszerűbben a Sklyanin féle duplasoros transzfer mátrix bevezetésével mutatható meg. Definiálva ugyanis a

$$T(\theta|\theta_1,\ldots,\theta_n)^{l_1,l_2,\ldots l_N}_{i_1,i_2,\ldots i_N}=\prod_{n=1}^{N}S^{k_{n+1}j_{n+1}}_{k_n i_n}(\theta-\theta_n)(R_+)^{l_{N+1}}_{k_{N+1}}(\theta)\prod_{n=1}^{N}S^{i_n l_n}_{j_n l_{n+1}}(\theta_n+\theta)(R_-)^{k_1}_{l_1}(-\theta)$$

transzfer mátrixot, megmutatható, hogy különböző rapiditások esetén egy kommutáló sereggel van dolgunk, és hogy kiértékelve $\theta=\theta_k$ helyen éppen a diagonalizálandó mátrixot kapjuk. A tömbi esetben ezután az XXZ modellben meghatározott sajátértéket beírtuk a BY egyenletekbe és úgy számoltuk ki az impulzusok kvantálási feltételét. Sajnos azonban általános peremfeltétel esetén a nyílt XXZ lánc BA megoldása a mai napig várat magára, csak speciális esetekben sikerült előrelépést elérni [10, 1, 2].

7.2. Az alapállapot Lüscher korrekciója

A vákuumpolarizációs effektusok hatását kezdjük a peremes alapállapot vizsgálatával egyfajta részecskét tartalmazó modellekben. A tömbben jól bevált módszert fogjuk alkalmazni, miszerint az alapállapoti energia az időeltolást generáló Hamilton operátor legkisebb sajátértéke. Ha tehát egy R_α, R_β peremfeltételekel jellemzett L térfogatú rendszer $E_{\alpha\beta}(L)$ alapállapoti energiáját szeretnénk meghatározni, akkor aszimptotikus Euklideszi időfejlődést kell vizsgálunk

$$E_0(L)=-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log e^{-E_{\alpha\beta}(L)R}=-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log(\mathrm{Tr}(e^{-H_{\alpha\beta}(L)R}))=-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log Z_{\alpha\beta}(L,R)$$

Az előálló partíciós függvényt kiszámíthatjuk a tükörmodellben is, melyet egy forgatással kapunk. A forgatás eredményeként a térbeli peremfeltétel az Euklideszi időben elhelyezett kezdő és végállapotnak fog megfelelni. Korábban már láttuk, hogy a

$$|B_\alpha\rangle = \exp\left\{\int_0^\infty \frac{d\theta}{2\pi} K_\alpha(\theta) A^+(-\theta) A^+(\theta)\right\}|0\rangle \quad ; \qquad \langle B| = (|B\rangle)^+$$

peremes állapot hogyan fejezhető ki a reflexiós faktorral. Ennek segítségével a partíciós függvény alternatív kiszámítása

$$E_{\alpha\beta}(L) = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log Z_{\alpha\beta}(L,R) = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\log\langle B_\beta|e^{-H(R)L}|B_\alpha\rangle$$

ahol $H(R)$ a perem nélküli, periodikus tükörmodell Hamilton operátora véges R térfogatban, mely térfogat aszimptotikusan nagy. A tükörmodell teljes állopotrendszerét ($|n\rangle \in \mathcal{H}$) felhasználva

$$\langle B_\beta|e^{-H(R)L}|B_\alpha\rangle = \sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}}\langle B_\beta|n\rangle\langle n|e^{-H(R)L}|B_\alpha\rangle = \sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}}\langle B_\beta|n\rangle\langle n|B_\alpha\rangle e^{-E_n(R)L}$$

Vizsgáljuk most csak a vezető rendű végesméret-korrekció, vagyis tartsuk L-et elég nagynak. Ekkor elég megtartani az első nemtriviális kétrészecske tagot

$$\sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}}\langle B_\beta|n\rangle\langle n||B_\alpha\rangle e^{-E_n(R)L} = 1 + \sum_{\theta_n(R)>0}\bar{K}_\beta(\theta_n)K_\alpha(\theta_n)e^{-2E(\theta_n(R))L} + \dots$$

Ha a részecske tömege m akkor az ehhez járuló korrekciók nagyságrendje e^{-4mL}. Nagy térfogatban az kétrészecske impulzusok spektruma

$$\sinh(\theta_n(R)) = \frac{2\pi}{mR}n + \frac{\delta(2\theta_n)}{mR}$$

mely a számunkra fontos $R\to\infty$ határesetben folytonossá válik, így az összegzést integrállá alakíthatjuk

$$\sum_{n>0} \to \frac{R}{2\pi}\int_0^\infty d\theta\cosh\theta$$

Az alapállapoti energia $E_{\alpha\beta}(L)$ formuláját felhasználva[1] a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}(L) &= -\int\frac{d\theta}{2\pi}\bar{K}_\beta(\theta)K_\alpha(\theta)e^{-2m\cosh\theta L} + ... \\ &= -\int\frac{d\theta}{2\pi}R_\beta(\frac{i\pi}{2}+\theta)R_\alpha(\frac{i\pi}{2}-\theta)e^{-2m\cosh\theta L} + ... \end{aligned}$$

Ezen korrekció nagyságrendje e^{-2mL} nagy L térfogatok esetén. Fizikai jelentése a következő: A vákuumból egy virtuális részecske-antirészecske pár keletkezik. Egyikük elmegy az egyik falig, ott visszaverődik, elmegy a másik falig, ott is visszaverődik majd megsemmisül az antirészecskéjével találkozva. Ez a virtuális folyamat természetesen csak az adott csík geometriai szituációban jelenik meg, így korrekciót jelent a fél végtelen térfogati rendszerhez képest.

[1] Itt igazából a többrészecskés járulékokat is figyelembe vettük. Csak azok egymáson való szórását elhanyagoltuk el, melyre a következő alfejezetben térünk ki.

7.3. Az alapállapot egzakt leírása: peremes TBA

Emlékezzünk vissza, hogy az alapállapoti energiát az Euklideszi partíciós függvényből számoljuk és véges L -re a sokrészecskés járulékokat is figyelembe kell vennünk

$$\langle B_\beta|e^{-H(R)L}|B_\alpha\rangle = \sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}} \langle B_\beta|n\rangle\langle n|e^{-H(R)L}|B_\alpha\rangle = \sum_{|n\rangle\in\mathcal{H}} \langle B_\beta|n\rangle\langle n|B_\alpha\rangle e^{-E_n(R)L}$$

ahol $|n\rangle$ egy tömbi multi-részecske állapotot jelöl, mely nagy R térfogatok esetén exponenciálisan kicsi korrekciók erejéig jellemezhető a tömbi BY egyenletek zérus impulzusú megoldásával $n = (n_1, -n_1, \ldots, n_N, -n_N)$

$$mR\sinh\theta_j + \delta(2\theta_j) + \sum_{k:k\neq j}^{N} (\delta(\theta_k - \theta_j) + \delta(\theta_k + \theta_j)) = 2\pi n_j$$

ahol ismét $\delta(\theta) = -i\log S(\theta)$. Ezen multi-részecske állapot energiája

$$E(\theta_{n_1}, \ldots, \theta_{n_N}) = 2\sum_k m\cosh\theta_k$$

A tömbi esethez hasonlóan nagy R -ek esetén most is bevezethetjük a rapiditások és lyukak sűrűségét $\rho, \bar{\rho}$, melyek a

$$mR\cosh\theta + \int d\theta'\rho(\theta')(\phi(\theta-\theta') + \phi(\theta+\theta')) = 2\pi(\rho(\theta) + \bar{\rho}(\theta)) \qquad ; \qquad \phi(\theta) = -i\partial_\theta \log S(\theta)$$

egyenletnek tesznek eleget. Az állapotok entrópia faktora ugyanaz mint a tömbi esetben

$$s[\rho, \bar{\rho}] = \int d\theta\, [(\rho + \bar{\rho})\log(\rho + \bar{\rho}) - \rho\log\rho - \bar{\rho}\log\bar{\rho}]$$

A perem jelenléte csupán egy rapiditás függő fugacitás tagban jelenik meg a partíciós függvényben

$$Z_{\alpha\beta}(L, R) = \int d[\rho]\exp\{-LE[\rho] + \nu[\rho] + s[\rho, \bar{\rho}]\}$$

amely a reflexiós faktorokkal kifejezve

$$\nu[\rho] = \log[\bar{K}_\beta(\theta)K_\alpha(\theta)]$$

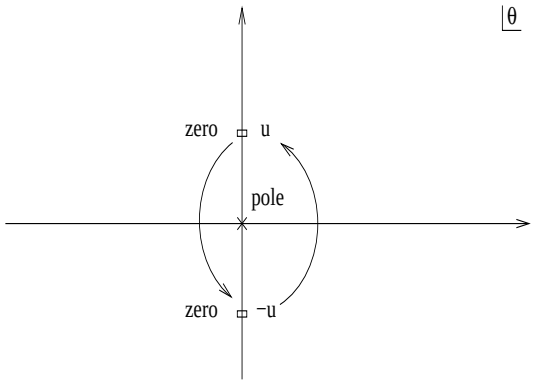
A tömbi esethez hasonlóan nyeregpont közelítéssel számoljuk a partíciós függvényt, mely a pszeudó energiára azt eredményezi, hogy

$$\epsilon = 2mL\cosh\theta + \log[\bar{K}_\beta(\theta)K_\alpha(\theta)] - \phi \star \log(1 + e^{-\epsilon}) \tag{7.1}$$

Ezen nemlineáris integrálegyenlet megoldásával a keresett alapállapoti energia (melyet a nyeregponti helyen vett értékből kapunk)

$$E_{\alpha\beta}(L) = -\int \frac{d\theta}{4\pi}\cosh\theta\log(1 + e^{-\epsilon})$$

Formulánkat nagy L térfogatok esetén összevethetjük a korábban levezetett Lüscher korrekcióval. Ekkor a (7.1)-ban csak az L-el arányos és konstans tagokat tartjuk meg, $\epsilon = -m\cosh\theta L + \log[\bar{K}_\beta(\theta)K_\alpha(\theta)]$ és tényleg visszakapjuk a korábbi fejezetben levezetett peremes Lüscher formulát.

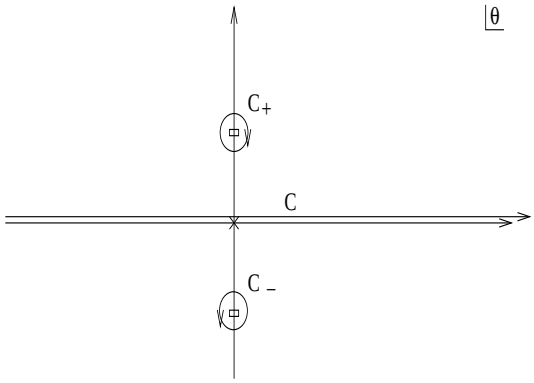


7.1. ábra. A $(1 + e^{-\epsilon(\theta)})$ függvény szingularitásai és azok mozgása a komplex θ síkon.

7.4. Gerjesztett állapotok egzakt leírása analitikus elfolytatással

Ebben az alfejezetben gerjesztett peremes állapotokat írunk le egzaktul az analitikus elfolytatás módszerével. A tömbi esethez hasonlóan az energiában az elágazási pontok most is az $(1 + e^{-\epsilon(iu)})$ függvény nullájánál jelentkeznek, melyek nagy térfogatok esetén a reflexiós faktor pólusának exponenciális közelében vannak. Mi most egy speciális szingularitásra koncentrálunk, mikor a reflexiós faktoroknak pólusai vannak $\frac{i\pi}{2}$-nél: $R(\theta) \approx i\frac{g^2}{2\theta}$. Jelöljük őket g_α és g_β-val. Ismert, hogy ha $g_\alpha g_\beta < 0$ akkor a BTBA egyenletek nem írják le helyesen az alapállapoti energiát [17]. A helyes leírás viszont az analitikus elfolytatás módszerével megkapható. Tételezzük fel ugyanis, hogy $g_\beta > 0$ és folytassuk el $g_\alpha = g > 0$ úgy, hogy a végén $g_\alpha = -g < 0$ teljesüljön. Mivel a reflexiós mátrixban csak g^2 szerepel, így az elfolytatás előtti és utáni reflexiós faktorok megegyeznek. Ha $gg_\beta \neq 0$ akkor $\theta = 0$-nál egy pólusa van $(1 + e^{-\epsilon(0)})$-nak. Nagy térfogatokban ennek exponenciális kicsi környezetében $\pm iu$-nál két nullája is van $(1 + e^{-\epsilon(iu)})$-nek.

Az analitikus elfolytatás során a nullák keresztezik a kontúrt, melyeket követnünk kell



Az elfolytatott energia kifejezés tehát

$$E^0_{\alpha\beta}(L) = m\,\sin u - m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta}{4\pi}\,\cosh\theta\,\log\left(1 + e^{-\epsilon(\theta)}\right) \tag{7.2}$$

ahol $\epsilon(\theta)$ most a következő egyenleteket elégíti ki

$$\epsilon(\theta) = 2mL\cosh\theta + \log[\bar{K}_\beta(\theta)K_\alpha(\theta)] + \log\frac{S(\theta - iu)}{S(\theta + iu)} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\theta'}{2\pi}\varphi(\theta - \theta')\log\left(1 + e^{-\epsilon(\theta')}\right) . \tag{7.3}$$

és u-t a

$$e^{-\epsilon(iu)} = -1$$

kvantálási egyenlet definiálja. Ezen egyenleteket a sinh-Gordon modellben le is ellenőriztük a kistérfogatú határesetben előálló peremes Liouville modellel történő összehasonlításon keresztül [22]. Az analízis részleteire terjedelem hiányában nem térhetünk ki, mégis hangsúlyozzuk, hogy vizsgálataink nem csak az elfolytatott egyenletek, hanem a peremes Liouville modellben fellépő reflexiós faktorok helyességét is alátámasztották. Ezen túlmenően még a peremes paraméterek és reflexiós mátrixok között fennálló (6.7) relációt is le lehetett ellenőrizni.

IV. rész

Összefoglalás, kitekintés

Foglaljuk most össze a dolgozat legfőbb eredményeit:

1. Sikerült multi-részecske állapotok Lüscher korrekciójára egy általános formulát felírni, és azt alkalmazni végesméret-effektusok analízisére az AdS/CFT integrálható modellben [26]. Konkrétan kiszámítottuk a Konishi operátor (egy sl_2 szektorbeli kétrészecske állapot) anomális dimenzióját négy [26], és öt hurok [25] rendben, valamint a vezető négy hurok végesméret-korrekciót kiterjesztettük tetszőleges kettes csavarodású operátor esetére [27]. Ez az sl_2 szektor egy sokrészecske állapotának felelt meg.

2. Kifejlesztettük peremes kvantumtérelméletek Lagrange-i leírását tetszőleges dimenzióban. Kifejeztük a reflexiós mátrixot a korrelációs függvényekkel egy, a peremes rendszerre általánosított redukciós formula segítségével [12]. A korrelációs függvények és reflexiós mátrixok szingularitás szerkezetét leíró Landau egyenletek származtatása után azok Coleman Norton típusú interpretációját is megalkottuk [13].

3. A reflexiós mátrix önmegoldó programot végrehajtottuk a legáltalánosabb integrálható peremfeltételű sine-Gordon modell esetére. Meghatároztuk a peremes kötött állapotok spektrumát. Kiszámítottuk a rajtuk történő reflexiók mátrixát, melyek szingularitásait vagy Coleman-Thun diagrammokkal vagy pedig peremes kötött állapotok keltésével magyaráztuk [21].

4. Kifejlesztettük a peremes alaktényező önmegoldó programot [18]. Axióma rendszert alkottunk meg peremes operátorok mátrixelemeinek meghatározására. Ezek segítségével kiszámítottuk a sinh-Gordon és Lee-Yang modell alacsonyan fekvő peremes alaktényezőit, melyeket a belőlük felépített korrelációs függvény rövidtávú kifejtésén keresztül ellenőriztük.

5. A peremállapot kifejtési együtthatóit kapcsolatba hoztuk a reflexiós faktorokkal [19] és integrál egyenletet származtattunk az ellentétes egyrészecske csatolással rendelkező peremes rendszerek véges térfogatú alapállapotára. Ezt a sinh-Gordon modellben ellenőriztük a kis térfogatokon előálló konform elmélettel való összehasonlítással [22].

Ezen eredményeknek számos alkalmazása valósult meg. A sokrészecske állapotok Lüscher korrekcióját felhasználták gerjesztett állapoti integrálegyenletek ellenőrzésére [28]. A Konishi operátor anomális dimenziójának szórásmátrixon alapuló kiszámítása lelkes fogadtatásra talált mind az integrálható modelleken, mind pedig az AdS/CFT megfeleltetésen munkálkodó közösségek körében. Az eredmény ugyanis teljes egyezést mutatott a mértékelméleteken alapuló perturbatív számolással [41], és ez az egyezés egyrészről az AdS/CFT megfeleltetést, másrészről annak integrálhatóságát támasztotta alá. Az általunk kifejlesztett végesméret-technikákat aztán sikerrel alkalmazták más modellek véges térfogatú spektrumának meghatározására is[53]. A kettes csavarodású állapotok anomális dimenziójának vizsgálatával a hadron szórásokat a Regge kinematikában leíró BFKL elméletet lehetett ellenőrizni [52].

A peremes modellekben levezetett Coleman-Thun diagrammokat azóta is használják a reflexiós önmegoldó program végrehajtása során [62]. Az általunk kezdeményezett peremes önmegoldó programot sikeresen alkalmazták számos modellben a peremen lokalizált operátorok mátrixelemeinek kiszámítására, és peremes korrelációs függvények meghatározására [30]. Ezeknek a peremen gerjesztett szilárdtest fizikai rendszerek mérhető válaszainál van jelentősége. A peremállapot és a reflexiós mátrix kapcsolata lehetővé tette a

peremes végesméret-korrekciók vizsgálatát, melynek következményeként sikerült a planáris Casimir effektust a vákuum állapot Lüscher korrekciójaként leírnunk tetszőleges téridő dimenzió esetén [20].

Érdekes probléma még a kifejlesztett peremes módszerek használata az AdS/CFT kapcsolatban. A húrelméletben ugyanis nem csak a zárt húrok, hanem nyílt húrok spektrumát is lehet vizsgálni. A mértékelmélet oldalon determináns alakú operátorok anomális dimenziója tartozik hozzájuk [45]. Ebben a keretben a reflexiós mátrixokat már meghatározták [45] a peremállapottal együtt [58] és fel is használták ezeket végesméret effektusok analízisére [31].

Van még egy érdekes fizikai szituáció, mikor integrálható leírással próbálkozhatunk. Ez akkor valósul meg, ha az integrálható modellben szennyezések, vagy más néven defektek vannak jelen. Ahogy azt megmutattuk ilyen rendszerek mindig beágyazhatóak peremes rendszerekbe [14]. Ez lehetőséget teremt konzisztencia egyenletek származtatására a defekt transzmissziós faktorára. A transzmissziós mátrix önmegoldó programja olyannyira megszorító, hogy vagy csak tiszta transzmissziót, vagy csak tiszta reflexiót enged meg [33]. A tisztán áteresztő szennyezések önmegoldó programját a Lee-Yang és sinh-Gordon modellek esetén végrehajtottuk, meghatározva a defektre lokalizált gerjesztések teljes spektrumát és az azokon történő transzmissziós tényezőket [23]. A szennyezéses modellekben is megfogalmaztuk az alaktényezők önmegoldó programját, mind a tömbben, mind pedig a szennyezésen lokalizált operátor esetére [24].

Függelék

S-mátrix projektorok és együtthatók

Ebben a mellékletben az S_{1-Q} szórás projektorait és együtthatóit írjuk fel részletesen.

S-mátrix együtthatók

A fermionikus töltésekre való invarianciát megkövetelve az S-mátrix együtthatóira az alábbi adódik

$$\tilde{a}_5^5 = \frac{x_1^+ - x_2^+}{x_1^+ - x_2^-}\frac{\tilde{\eta}_1}{\eta_1}$$

$$\tilde{a}_5^6 = \sqrt{Q}\frac{(x_1^+ - x_1^-)}{(x_1^+ - x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_2}{\eta_1} \quad ; \quad \tilde{a}_6^5 = \sqrt{Q}\frac{(x_2^+ - x_2^-)}{(x_1^+ - x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_1}{\eta_2}$$

$$\tilde{a}_6^6 = Q\frac{x_1^- - x_2^-}{x_1^+ - x_2^-}\frac{\tilde{\eta}_2}{\eta_2}$$

$$\tilde{a}_9^9 = \frac{x_1^- - x_2^+}{x_1^+ - x_2^-}\frac{\tilde{\eta}_1}{\eta_1}\frac{\tilde{\eta}_2}{\eta_2}$$

$$\tilde{a}_7^7 = \frac{2}{Q}\frac{x_2^-(x_1^- - x_2^+)(1 - x_1^- x_2^+)}{x_2^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_2}{\eta_2}$$

$$\tilde{a}_8^8 = \frac{1}{2}\frac{x_1^-(x_1^- - x_2^+)(1 - x_1^+ x_2^-)}{x_1^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_1}{\eta_1}\frac{\tilde{\eta}_2^2}{\eta_2^2}$$

$$\tilde{a}_{10}^{10} = \frac{2}{Q-1}\frac{x_1^- x_2^-(x_1^- - x_2^+)(1 - x_1^+ x_2^+)}{x_1^+ x_2^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_2^2}{\eta_2^2}$$

$$\tilde{a}_7^8 = -\frac{i}{\sqrt{Q}}\frac{x_1^- x_2^-(x_1^- - x_2^+)}{x_1^+ x_2^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2^2}{\eta_2}$$

$$\tilde{a}_8^7 = \frac{i}{\sqrt{Q}}\frac{(x_1^- - x_1^+)(x_1^- - x_2^+)(x_2^- - x_2^+)}{(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_2}{\eta_1\eta_2^2}$$

$$\tilde{a}_2^3 = \frac{2i}{\sqrt{Q}}\frac{x_1^- x_2^-(x_1^+ - x_2^+)\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2}{x_1^+ x_2^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)} \quad ; \quad \tilde{a}_3^2 = -\frac{2i}{\sqrt{Q}}\frac{(x_1^- - x_1^+)(x_2^- - x_2^+)(x_1^+ - x_2^+)}{(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)\eta_1\eta_2}$$

$$\tilde{a}_2^4 = -i\frac{Q-1}{Q}\frac{x_1^- x_2^-(x_1^- - x_1^+)\tilde{\eta}_2^2}{x_1^+ x_2^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)} \quad ; \quad \tilde{a}_4^2 = i\frac{Q-1}{Q}\frac{(x_2^- - x_2^+)^2(x_1^- - x_1^+)}{(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)\eta_2^2}$$

$$\tilde{a}_3^4 = \frac{Q-1}{\sqrt{Q}}\frac{x_1^-(x_1^+ - x_1^-)(1 - x_1^+ x_2^-)}{x_1^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_2^2}{\eta_1\eta_2} \quad ; \quad \tilde{a}_4^3 = \frac{Q-1}{\sqrt{Q}}\frac{x_1^-(x_2^+ - x_2^-)(1 - x_1^+ x_2^-)}{x_1^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2}{\eta_2^2}$$

$$\tilde{a}_2^2 = -\frac{2}{Q(1+Q)}\frac{2x_2^- x_2^+(Q + x_1^- x_2^- - (1+Q)x_1^- x_2^+) + 2x_1^+(x_2^+ + x_2^-(-1 + Q(-1 + x_1^- x_2^+)))}{x_2^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}$$

$$\tilde{a}_3^3 = -\frac{(-x_1^- x_1^+(1 + x_1^- x_2^- - 2x_1^+ x_2^-) - (x_1^+ + x_1^-(-2 + x_1^+ x_2^-))x_2^+)}{x_1^+(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}\frac{\tilde{\eta}_1}{\eta_1}\frac{\tilde{\eta}_2}{\eta_2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_4^4 \;=\; -\frac{Q-1}{2Q}\frac{\tilde{\eta}_2^2}{\eta_2^2}\Bigg[&\frac{x_1^-(Q((x_1^-)^2 x_1^+ x_2^- - x_1^-(x_1^+ + x_2^-) + x_1^+ x_2^-(2 - x_1^+ x_2^-))}{(x_1^+)^2(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)} \\ &- \frac{(x_1^- - x_1^+)x_1^+ x_2^-(x_2^- - x_2^+))}{(x_1^+)^2(x_1^+ - x_2^-)(1 - x_1^- x_2^-)}\Bigg]\end{aligned}$$

Projektorok és bázisvektorok

Az alábbi bázis választásunk szimmetrikus szórásmátrixot fog eredményezni, mivel $v_i^\dagger \leftrightarrow \tilde{D}^i$:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= v^{Q+1}_{(aa_1\dots a_Q)} = \frac{1}{Q+1}(w^1_a w^2_{a_1}\dots w^2_{a_Q} + w^2_a w^1_{a_1}\dots w^2_{a_Q} + \dots + w^2_a w^2_{a_1}\dots w^1_{a_Q})\\
\tilde{D}^1 &= D^{(aa_1\dots a_Q)}_{Q+1} = \frac{1}{Q!}\frac{\partial^{Q+1}}{\partial w^1_a \partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_Q}}\\
v_2 &= v_{[12]}v^{Q-1}_{(a_1\dots a_{Q-1})} = \frac{1}{2}(w^1_1 w^2_2 - w^1_2 w^2_1)w^2_{a_1}\dots w^2_{a_{Q-1}}\\
\tilde{D}^2 &= D^{[12]}D^{(a_1\dots a_{Q-1})}_{Q-1} = \left[\frac{\partial^2}{\partial w^1_1\partial w^2_2} - \frac{\partial^2}{\partial w^1_2\partial w^2_1}\right]\frac{1}{(Q-1)!}\frac{\partial^{Q-1}}{\partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_{Q-1}}}\\
v_3 &= v_{[34]}v^{Q-1}_{a_1\dots a_{Q-1}} = \frac{1}{2}(\theta^1_3\theta^2_4 - \theta^1_4\theta^2_3)w^2_{a_1}\dots w^2_{a_{Q-1}}\\
\tilde{D}^3 &= D^{[34]}D^{(a_1\dots a_{Q-1})}_{Q-1} = \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2_4\partial\theta^1_3} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2_3\partial\theta^1_4}\right]\frac{1}{(Q-1)!}\frac{\partial^{Q-1}}{\partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_{Q-1}}}\\
v_4 &= v^{Q-1}_{(aa_1\dots a_{Q-2})}v_{34} = \frac{1}{Q-1}(w^1_a w^2_{a_1}\dots w^2_{a_{Q-2}} + \dots + w^2_a w^2_{a_1}\dots w^1_{a_{Q-2}})\theta^2_3\theta^2_4\\
\tilde{D}^4 &== \tfrac{2}{Q-1}D^{(aa_1\dots a_{Q-2})}_{Q-1}D^{34} = \frac{2}{(Q-1)!}\frac{\partial^{Q-1}}{\partial w^1_a\partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_{Q-2}}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2_4\partial\theta^2_3}\\
v_5 &= v_\alpha v^Q_{(a_1\dots a_Q)} = \theta^1_\alpha w^2_{a_1}\dots w^2_{a_Q}\\
\tilde{D}^5 &= D^\alpha D^{(a_1\dots a_Q)}_Q = \frac{\partial}{\partial\theta^1_\alpha}\frac{1}{Q!}\frac{\partial^Q}{\partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_Q}}\\
v_6 &= v^Q_{(aa_1\dots a_{Q-1})}v_{\alpha_1} = \frac{1}{Q}(w^1_a w^2_{a_1}\dots w^2_{a_{Q-1}} + \dots + w^2_a w^2_{a_1}\dots w^1_{a_{Q-1}})\theta^2_{\alpha_1}\\
\tilde{D}^6 &= \tfrac{1}{Q}D^{(aa_1\dots a_{Q-1})}_Q D^{\alpha_1} = \frac{1}{Q!}\frac{\partial^Q}{\partial w^1_a\partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_{Q-1}}}\frac{\partial}{\partial\theta^2_{\alpha_1}}\\
v_7 &= v_{[12]}v^{Q-2}_{(a_1\dots a_{Q-2})}v_{\alpha_1} = \frac{1}{2}(w^1_1 w^2_2 - w^1_2 w^2_1)w^2_{a_1}\dots w^2_{a_{Q-2}}\theta^2_{\alpha_1}\\
\tilde{D}^7 &= D^{[12]}D^{(a_1\dots a_{Q-2})}_{Q-2}D^{\alpha_1} = \left[\frac{\partial^2}{\partial w^1_1\partial w^2_2} - \frac{\partial^2}{\partial w^1_2\partial w^2_1}\right]\frac{1}{(Q-2)!}\frac{\partial^{Q-2}}{\partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_{Q-2}}}\frac{\partial}{\partial\theta^2_{\alpha_1}}\\
v_8 &= v_\alpha v^{Q-2}_{(a_1\dots a_{Q-2})}v_{34} = \theta^1_\alpha w^2_{a_1}\dots w^2_{a_{Q-2}}\theta^2_3\theta^2_4\\
\tilde{D}^8 &= 2D^\alpha D^{(a_1\dots a_{Q-2})}_{Q-2}D^{34} = \frac{\partial}{\partial\theta^1_\alpha}\frac{2}{(Q-2)!}\frac{\partial^{Q-2}}{\partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_{Q-2}}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2_4\partial\theta^2_3}\\
v_9 &= v_{(\alpha\alpha_1)}v^{Q-1}_{(a_1\dots a_{Q-1})} = \frac{1}{2}(\theta^1_\alpha\theta^2_{\alpha_1} + \theta^1_{\alpha_1}\theta^2_\alpha)w^2_{a_1}\dots w^2_{a_{Q-1}}\\
\tilde{D}^9 &= D^{(\alpha\alpha_1)}D^{(a_1\dots a_{Q-1})}_{Q-1} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2_{\alpha_1}\partial\theta^1_\alpha}\frac{1}{(Q-1)!}\frac{\partial^{Q-1}}{\partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_{Q-1}}}\\
v_{10} &= v_{[12]}v^{Q-3}_{(a_1\dots a_{Q-3})}v_{34} = \frac{1}{2}(w^1_1 w^2_2 - w^1_2 w^2_1)w^2_{a_1}\dots w^2_{a_{Q-3}}\theta^2_3\theta^2_4\\
\tilde{D}^{10} &= D^{[12]}D^{(a_1\dots a_{Q-3})}_{Q-3}D^{34} = \left[\frac{\partial^2}{\partial w^1_1\partial w^2_2} - \frac{\partial^2}{\partial w^1_2\partial w^2_1}\right]\frac{1}{(Q-3)!}\frac{\partial^{Q-3}}{\partial w^2_{a_1}\dots\partial w^2_{a_{Q-3}}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2_4\partial\theta^2_3}
\end{aligned}
$$

Előreszórási mátrix elemek

Ebben a mellékletben az előre szórási mátrixelemeket a korábban kiszámított együtthatókkal fejezzük ki. Emlékeztetőül a keresett amplitúdó

$$\sum_b (-1)^{F_b} \left[S_{Q-1}(z^\pm, x^\pm(p)) S_{Q-1}(z^\pm, x^\pm(-p)) \right]_{b(33)}^{b(33)} \tag{4}$$

Mivel az egyes szórásmátrixok faktorizálódnak

$$S_{Q-1}(z^\pm, x^\pm)_{(a\dot{a})(33)}^{(b\dot{b})(33)} = S_{1-Q}^{sl(2)}(x^\pm, z^\pm) \hat{S}_{Q-1}(z^\pm, x^\pm)_{a3}^{b3} \hat{S}_{Q-1}(z^\pm, x^\pm)_{\dot{a}3}^{\dot{b}3} \tag{5}$$

így a teljes előreszórási amplitúdó

$$\sum_b (-1)^{F_b} \left[S_{Q-1}(z^\pm, x^\pm(p)) S_{Q-1}(z^\pm, x^\pm(-p)) \right]_{b(33)}^{b(33)} = S_{Q-1}^{skalár} S_{Q-1}^{mátrix} = \tag{6}$$

$$S_{Q-1}^{sl(2)}(z^\pm, x^\pm(p)) S_{Q-1}^{sl(2)}(z^\pm, x^\pm(p)) \left(\sum_{a,b=1}^{4Q} (-1)^F S_{1-Q}^{sym}(x^\pm(p), z^\pm)_{1a}^{1b} S_{1-Q}^{sym}(x^\pm(-p), z^\pm)_{1b}^{1a} \right)^2$$

ahol a mátrix résznél kihasználtuk a szimmetrikus és antiszimmetrikus ábrázolások közötti S-mátrix összefüggéseket. Koncentráljunk most a mátrix részre. A $4Q$ dimenziós kötött állapot bázisát a (4.2)-ben definiáltuk. Ekkor a bozonikus altér diagonális mátrix elemei

$$S_{1-Q}^{sym}(x^\pm, z^\pm)_{1i}^{1i} = \frac{Q+2-i}{Q+1} \tilde{a}_1^1(x^\pm, z^\pm) + \frac{i-1}{2} \tilde{a}_2^2(x^\pm, z^\pm) \quad ; \quad i = 1, \ldots, Q+1 \tag{7}$$

$$S_{1-Q}^{sym}(x^\pm, z^\pm)_{1i+Q+1}^{1i+Q+1} = \frac{2(Q-i)}{(Q-1)^2} \tilde{a}_4^4(x^\pm, z^\pm) + \frac{i-1}{2} \tilde{a}_{10}^{10}(x^\pm, z^\pm) \quad ; \quad i = 1, \ldots, Q-1 \tag{8}$$

A nemdiagonális elemek pedig

$$S_{1-Q}^{sym}(x^\pm, z^\pm)_{1i}^{1i+Q} = \frac{(i-1)(Q+1-i)}{(Q-1)} \tilde{a}_2^4(x^\pm, z^\pm) \quad ; \quad i = 2, \ldots, Q \tag{9}$$

$$S_{1-Q}^{sym}(x^\pm, z^\pm)_{1i+Q+1}^{1i+1} = \frac{1}{Q-1} \tilde{a}_4^2(x^\pm, z^\pm) \quad ; \quad i = 1, \ldots, Q-1 \tag{10}$$

A fermionikus altérnek csak diagonális elemei vannak

$$S_{1-Q}^{sym}(x^\pm, z^\pm)_{1i+2Q}^{1i+2Q} = \frac{Q+1-i}{Q^2} \tilde{a}_6^6(x^\pm, z^\pm) + \frac{i-1}{2} \tilde{a}_7^7(x^\pm, z^\pm) \quad ; \quad i = 1, \ldots, Q \tag{11}$$

és teljesen azonosan a másik fermionikus altérre.

$$S_{1-Q}^{sym}(x^\pm, z^\pm)_{1i+3Q}^{1i+3Q} = S_{1-Q}^{sym}(x^\pm, z^\pm)_{1i+2Q}^{1i+2Q} \quad ; \quad i = 1, \ldots, Q \tag{12}$$

Irodalomjegyzék

[1] Changrim Ahn, Zoltan Bajnok, Rafael I. Nepomechie, Laszlo Palla, and Gabor Takacs. NLIE for hole excited states in the sine-Gordon model with two boundaries. *Nucl. Phys.*, B714:307–335, 2005.

[2] Changrim Ahn, Zoltan Bajnok, Laszlo Palla, and Francesco Ravanini. NLIE of Dirichlet sine-Gordon Model for Boundary Bound States. *Nucl. Phys.*, B799:379–402, 2008.

[3] Irina Arefeva and Vladimir Korepin. Scattering in two-dimensional model with Lagrangian $L = 1/\gamma(1/2(\partial_m uu)^2 + m^2(cosu - 1))$. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 20:680, 1974.

[4] Gleb Arutyunov, Marius de Leeuw, and Alessandro Torrielli. Universal blocks of the AdS/CFT Scattering Matrix. *JHEP*, 05:086, 2009.

[5] Gleb Arutyunov and Sergey Frolov. On String S-matrix, Bound States and TBA. *JHEP*, 12:024, 2007.

[6] Gleb Arutyunov and Sergey Frolov. The S-matrix of String Bound States. *Nucl. Phys.*, B804:90–143, 2008.

[7] Gleb Arutyunov and Sergey Frolov. Foundations of the AdS5 x S5 Superstring. Part I. *J. Phys.*, A42:254003, 2009.

[8] Gleb Arutyunov and Sergey Frolov. String hypothesis for the AdS5 x 5S mirror. *JHEP*, 03:152, 2009.

[9] Gleb Arutyunov, Sergey Frolov, and Marija Zamaklar. The Zamolodchikov-Faddeev algebra for AdS(5) x S**5 superstring. *JHEP*, 04:002, 2007.

[10] Z. Bajnok. Equivalences between spin models induced by defects. *J. Stat. Mech.*, 0606:P010, 2006.

[11] Z. Bajnok, J. Balog, B. Basso, G. P. Korchemsky, and L. Palla. Scaling function in AdS/CFT from the O(6) sigma model. *Nucl. Phys.*, B811:438–462, 2009.

[12] Z. Bajnok, G. Bohm, and G. Takacs. Boundary reduction formula. *J. Phys.*, A35:9333–9342, 2002.

[13] Z. Bajnok, G. Bohm, and G. Takacs. On perturbative quantum field theory with boundary. *Nucl. Phys.*, B682:585–617, 2004.

[14] Z. Bajnok and A. George. From defects to boundaries. *Int. J. Mod. Phys.*, A21:1063–1078, 2006.

[15] Z. Bajnok, L. Palla, and G. Takacs. Boundary states and finite size effects in sine-Gordon model with Neumann boundary condition. *Nucl. Phys.*, B614:405–448, 2001.

[16] Z. Bajnok, L. Palla, and G. Takacs. (Semi)classical analysis of sine-Gordon theory on a strip. *Nucl. Phys.*, B702:448–480, 2004.

[17] Z. Bajnok, L. Palla, and G. Takacs. Finite size effects in quantum field theories with boundary from scattering data. *Nucl. Phys.*, B716:519–542, 2005.

[18] Z. Bajnok, L. Palla, and G. Takacs. On the boundary form factor program. *Nucl. Phys.*, B750:179–212, 2006.

[19] Z. Bajnok, L. Palla, and G. Takacs. Boundary one-point function, Casimir energy and boundary state formalism in D+1 dimensional QFT. *Nucl. Phys.*, B772:290–322, 2007.

[20] Z. Bajnok, L. Palla, and G. Takacs. Casimir effect in the boundary state formalism. *J. Phys.*, A41:164011, 2008.

[21] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs, and G. Z. Toth. The spectrum of boundary states in sine-Gordon model with integrable boundary conditions. *Nucl. Phys.*, B622:548–564, 2002.

[22] Z. Bajnok, Chaiho Rim, and Al. Zamolodchikov. Sinh-Gordon Boundary TBA and Boundary Liouville Reflection Amplitude. *Nucl. Phys.*, B796:622–650, 2008.

[23] Z. Bajnok and Zs. Simon. Solving topological defects via fusion. *Nucl. Phys.*, B802:307–329, 2008.

[24] Zoltan Bajnok and Omar el Deeb. Form factors in the presence of integrable defects. 2009.

[25] Zoltan Bajnok, Arpad Hegedus, Romuald A. Janik, and Tomasz Lukowski. Five loop Konishi from AdS/CFT. 2009.

[26] Zoltan Bajnok and Romuald A. Janik. Four-loop perturbative Konishi from strings and finite size effects for multiparticle states. *Nucl. Phys.*, B807:625–650, 2009.

[27] Zoltan Bajnok, Romuald A. Janik, and Tomasz Lukowski. Four loop twist two, BFKL, wrapping and strings. *Nucl. Phys.*, B816:376–398, 2009.

[28] Janos Balog and Arpad Hegedus. The finite size spectrum of the 2-dimensional O(3) nonlinear sigma-model. 2009.

[29] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B241:333–380, 1984.

[30] Olalla A. Castro-Alvaredo. Boundary form factors of the sinh-Gordon model with Dirichlet boundary conditions at the self-dual point. *J. Phys.*, A39:11901–11914, 2006.

[31] D. H. Correa and C. A. S. Young. Finite size corrections for open strings/open chains in planar AdS/CFT. *JHEP*, 08:097, 2009.

[32] E. Corrigan and G. W. Delius. Boundary breathers in the sinh-Gordon model. *J. Phys.*, A32:8601–8614, 1999.

[33] G. Delfino, G. Mussardo, and P. Simonetti. Statistical models with a line of defect. *Phys. Lett.*, B328:123–129, 1994.

[34] Nick Dorey, Diego M. Hofman, and Juan Martin Maldacena. On the singularities of the magnon S-matrix. *Phys. Rev.*, D76:025011, 2007.

[35] Nick Dorey and Keisuke Okamura. Singularities of the Magnon Boundstate S-Matrix. *JHEP*, 03:037, 2008.

[36] P. Dorey, M. Pillin, R. Tateo, and G. M. T. Watts. One-point functions in perturbed boundary conformal field theories. *Nucl. Phys.*, B594:625–659, 2001.

[37] Patrick Dorey, Andrew Pocklington, Roberto Tateo, and Gerard Watts. TBA and TCSA with boundaries and excited states. *Nucl. Phys.*, B525:641–663, 1998.

[38] Patrick Dorey and Roberto Tateo. Excited states by analytic continuation of TBA equations. *Nucl. Phys.*, B482:639–659, 1996.

[39] Patrick Dorey and Roberto Tateo. Excited states in some simple perturbed conformal field theories. *Nucl. Phys.*, B515:575–623, 1998.

[40] Patrick Dorey, Roberto Tateo, and Gerard Watts. Generalisations of the Coleman-Thun mechanism and boundary reflection factors. *Phys. Lett.*, B448:249–256, 1999.

[41] F. Fiamberti, A. Santambrogio, C. Sieg, and D. Zanon. Anomalous dimension with wrapping at four loops in N=4 SYM. *Nucl. Phys.*, B805:231–266, 2008.

[42] A. Fring, G. Mussardo, and P. Simonetti. Form-factors for integrable Lagrangian field theories, the sinh-Gordon theory. *Nucl. Phys.*, B393:413–441, 1993.

[43] Subir Ghoshal. Bound state boundary S matrix of the Sine-Gordon model. *Int. J. Mod. Phys.*, A9:4801–4810, 1994.

[44] Subir Ghoshal and Alexander B. Zamolodchikov. Boundary S matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory. *Int. J. Mod. Phys.*, A9:3841–3886, 1994.

[45] Diego M. Hofman and Juan Martin Maldacena. Reflecting magnons. *JHEP*, 11:063, 2007.

[46] C. Itzykson and J. B. Zuber. QUANTUM FIELD THEORY. New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics).

[47] R. Jackiw and G. Woo. Semiclassical Scattering of Quantized Nonlinear Waves. *Phys. Rev.*, D12:1643, 1975.

[48] Romuald A. Janik. The AdS(5) x S**5 superstring worldsheet S-matrix and crossing symmetry. *Phys. Rev.*, D73:086006, 2006.

[49] M. Karowski and P. Weisz. Exact Form-Factors in (1+1)-Dimensional Field Theoretic Models with Soliton Behavior. *Nucl. Phys.*, B139:455, 1978.

[50] A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. Rej, M. Staudacher, and V. N. Velizhanin. Dressing and Wrapping. *J. Stat. Mech.*, 0710:P10003, 2007.

[51] A. Koubek and G. Mussardo. On the operator content of the sinh-Gordon model. *Phys. Lett.*, B311:193–201, 1993.

[52] T. Lukowski, A. Rej, and V. N. Velizhanin. Five-Loop Anomalous Dimension of Twist-Two Operators. 2009.

[53] Tomasz Lukowski and Olof Ohlsson Sax. Finite size giant magnons in the SU(2) x SU(2) sector of AdS4 x CP3. *JHEP*, 12:073, 2008.

[54] M. Luscher. Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 1. Stable Particle States. *Commun. Math. Phys.*, 104:177, 1986.

[55] M. Luscher. Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 2. Scattering States. *Commun. Math. Phys.*, 105:153–188, 1986.

[56] Juan Martin Maldacena. The large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:231–252, 1998.

[57] Peter Mattsson and Patrick Dorey. Boundary spectrum in the sine-Gordon model with Dirichlet boundary conditions. *J. Phys.*, A33:9065–9094, 2000.

[58] L. Palla. Issues on magnon reflection. *Nucl. Phys.*, B808:205–223, 2009.

[59] R. Rajaraman. SOLITONS AND INSTANTONS. AN INTRODUCTION TO SOLITONS AND INSTANTONS IN QUANTUM FIELD THEORY. Amsterdam, Netherlands: North-holland (1982) 409p.

[60] L. Samaj and Z. Bajnok. Exactly solvable model of the 2D electrical double layer. *Phys. Rev.*, E72:061503, 2005.

[61] F. A. Smirnov. Form-factors in completely integrable models of quantum field theory. *Adv. Ser. Math. Phys.*, 14:1–208, 1992.

[62] Gabor Zsolt Toth. N = 1 supersymmetric boundary bootstrap. *Nucl. Phys.*, B676:497–536, 2004.

[63] Dmytro Volin. Minimal solution of the AdS/CFT crossing equation. *J. Phys.*, A42:372001, 2009.

[64] A. B. Zamolodchikov. Thermodynamic Bethe Ansatz in relativistic models. Scaling three state Potts and Lee-Yang models. *Nucl. Phys.*, B342:695–720, 1990.

[65] A. B. Zamolodchikov. Two point correlation function in scaling Lee-Yang model. *Nucl. Phys.*, B348:619–641, 1991.

[66] Alexander B. Zamolodchikov and Alexei B. Zamolodchikov. Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models. *Annals Phys.*, 120:253–291, 1979.