

## **Opponensi vélemény Szolnoki Attila Együttműködés térbeli koevolúciós modellekben című doktori értekezéséről**

Noha az elmúlt huszonnyolc évben írásztalom főként fizikusok között volt, bevallom, kémikusként kissé szorongva fogok fizikus doktori értekezések bírálatához. Bár a Szolnoki Attila által választott témakör nem tartozik a fizika tradicionális ágaihoz, kívülállóként úgy tudom, fizikusok körében népszerű felfogás szerint fizika mindaz, amit a fizikusok csinálnak. Miután az első két mondatban hatszor hivatkoztam fizikára (hét), persze az értekezés az újabban népszerű evolúciós játékelmélet tárgykörébe tartozik. Világos, hogy a statisztikus fizikának a kollektív jelenségek tanulmányozásában szerzett tapasztalatai és módszerei alkalmasak a koeoperáció kialakulásával kapcsolatos biológiai és társadalmi szempontból is nagyjelentőségű problémakör vizsgálatában. Az alapvető kérdés az, hogy vajon a természetes kiválasztódás, azaz egy spontán mechanizmus, elegendő-e ahhoz, hogy önző, saját nyerességet maximalizáló egyedek kölcsönhatása kooperációhoz, vagy még nagyobb szavakat használva, erkölcsi szabályok kialakulásához vezessen. Vannak szociális szempontból biztató eredmények, amelyek szerint a hosszútávú kooperáció evolúciósan előnyösebb, mint a rövidlátó önző stratégia.

Már itt kijelentem, hogy Szolnoki Attila munkássága és disszertációja minden kétséget kizáróan meggyőzött arról, hogy érett és érdemes az Akadémia doktora cím elnyerésére. Mindazonáltal, ha nem is temetni jöttem Jelöltet, kérdéseim azért lesznek.

A hetvenes és nyolcvanas évek vizsgálatai jól kevert populációk kölcsönhatásaira szorítkoztak, és matematikai modellként differenciálegyenleteket, közlebről a replikátor egyenletek változatait használták. Martin Nowak és Robert May 1992-ben megjelent cikke "Evolutionary games and spatial chaos" a játékosok elhelyezkedésének térbeli struktúráját is figyelembe vette, pontosabban szólva őket négyzetrácsra helyezte. Ebben a modellkeretben újtipusú viselkedéseket láttak. (Jelölt azt hangsúlyozza, hogy az "együttműködő stratégia képes fennmaradni akkor is, ha a nyereménymátrix alapján az nem történhetne meg". Ha jól olvastam a cikket, abban nem volt ilyen éles szimmetriasértés, és az élősködők is fennmaradhatnak ("cooperators and defectors both persist indefinitely"). A hálózatok nagy divattá vált elméletének eredményei megszabták, hogy milyen rácsokra is érdemes rátenni a játékosokat, a heterogén kapcsolattal rendelkező gráfok különösen előnyösnek látszanak lenni.

A kitűzött munkaterv világos. Jelölt először a kapcsolatok topológiájának a kialakuló mintázatokra való hatását vizsgálta, majd áttért a játékosok egyedi különbségeiből eredő

hatások tanulmányozására. A következő logikus lépés a stratégiák és egyedi tulajdonságok dinamikus kölcsönhatásait is figyelembe vevő koevolúciós modellek kiépítése és vizsgálata volt. A stratégia átadásának képletében szerepel egy zajparaméter, így nyilvánvaló, hogy annak a hatását is vizsgálni kellett. Ezen vizsgálatok eredményéről szól a negyedik fejezet,

A vizsgálatok legfontosabb módszere a Monte Carlo szimuláció. Van itt egy naiv kérdésem. A Fermi függvény motiválta 1.3 egyenlet a nyeremény átadásának átmenetvalószínűségét megadó formula, aminek két változója a két játékos nyereménye, és egyetlen paramétere a zaj paramétere. Ennek az egyenletnek a használata általánosan elterjedt, Jelölt a méltán híres Szabó György és Tőke Csaba 1998-as cikket adja meg a formula játékelméleti alkalmazásának forrásaként. Szeretnék arra a kérdésre választ kapni, el tudna-e képzelni Jelölt másként definiált függvényformákat az átmenetvalószínűségekre? Ha igen, mennyire robusztusak a jelen formulával kapott eredmények? Ha nem, mi tünteti ki az éppen használt formulát a végtelen más lehetőség közül? Van az értekezésben ugyan egy paragrafus arról, hogy más dinamikai szabályok is használhatóak... Örölnék, ha a válaszában Jelölt meggyőzne (nagyjából azért most is elhiszem), hogy a vizsgált problémákra az alkalmazott modellkeret a legjobb, és a kapott eredmények robusztusak.

A második fejezet az inhomogenitások szerepét tanulmányozza az együttműködés fennmaradásában. Kicsit az érzésem, hogy itt a kutatás valamelyest kockázatmentes volt, minden eredmény eredmény. Persze értem, mi mást lehet tenni, mint amit Jelölt tett. Vett különféle topológiákat, négyzetrácsot, kagemé rácsot, kis-világ és skálamentes gráfot. Majd a stratégiaátadás (tanítási képesség) hatékonyságát csökkentette egy nulla és egy közötti szorzó figyelembe vételével. Valamelyest persze igazságtalan voltam az előbb, hiszen azok az eredmények az érdekesek, amikor a játékosok diverzitása növelte a kooperáció szintjét. Látom, hogy a diverzitás sokszor, de nem mindig előnyös, és a további, a visszacsatolás erősségével kapcsolatos feltételek szabatos megfogalmazása nem könnyű. Örölnék, ha ezeket a feltételeket mégis tételesebben megfogalmazná válaszában.

A modellkeret általánosítására tett lépés volt a stratégiák átvételi valószínűségének bevezetése. Általában látom, és szép eredménynek tekintem, hogy az egyirányú stratégiaáramlás az együttműködést előnnyé alakíthatja. Tetszett a 2.3 alfejezet, amelyben a játékosok diverzitását (sokszínűségét) jellemezte és elemezte. Az egyenletes, exponenciális és hatványfüggvény eloszlások összehasonlító vizsgálata érdekes, az eredmények intuitíven hihetők. A kooperáció legmagasabb szintje hatványfüggvény eloszlással jellemzett diverzitásra vezetett. Mit várunk, ha a diverzitást bimodális eloszlásból vennénk, és lát-e értelmes interpretációt erre a feltevésre?

Az értekezés harmadik fejezete koevolúciós modellekről szól. A tanítási képesség inhomogenitása előnyösnek bizonyult a kooperáció szempontjából, jogos tehát a kérdés, hogy miként alakulhat ki homogén (közel zéró) térbeli eloszlásból. Itt megjegyzem, hogy a neuronhálózatok kialakulásával kapcsolatosan volt egy hasonló probléma, a szinaptikus súlyok rendezett struktúrákat jellemző inhomogenitásának kialakulása. Ott azt is elvártuk, hogy a súlyok dinamikáját előíró tanulási algoritmus a homogén eloszláson kívül véletlen kezdeti elrendeződésekből is eljusson a kívánt térbeli struktúrákhoz. Azt hiszem, hogy a tekintély spontán kialakulási mechanizmusáról szóló 3.1 fejezetet erősíteni legalább egy ilyen szimuláció. Tisztában vagyok vele, hogy nem könnyű numerikusan is kellemes tulajdonságú, ugyanakkor jól interpretálható koevolúciós dinamikai szabályokat konstruálni. Bár a konstans növekedésű, a fejlődést egy előre megadott küszöbnél leállító algoritmus nem különösebben szép, de nulladik közelítésnek elfogadható. Látom, hogy normálással kicsit "szebb" szabályt is lehet kapni. Azt is látom és elfogadom, hogy ezekhez a vizsgálatokhoz a legegyszerűbb térbeli elrendezést, tehát négyzetrácsot választani. (Most, hogy leírtam, mi is az, hogy "legegyszerűbb"? Szoktak evolúciós játékot például körön játszani? Ahogy nézegetem, néha igen.) Elfogadom, hogy ezen megszorítások mellett érdekes a kérdés, hogy a tanítási képesség milyen rögzített értékére lesz maximális a kooperáció. Ügyes eredménynek látom, hogy sikerült KÉT olyan játékot találni (a fogolydilemma mellett a héja-galamb játékot), amelyek ugyanazon növekmény (0.07) mutatnak maximumot. Alig titkolja Jelölt, hogy ehhez az eredményhez (3.1. ábra) kicsit trükközni kellett a paraméterekkel (de ki nem csinált már ilyet). Az adott paraméterrel végzett szimulációk érdekes eredményként ismerem el, hogy a koevolúciós modellek a tanítási képességek eloszlására közel exponenciális eloszlást adnak, két játékra is. Logikus kiterjesztésnek ismerem el a növekvő befolyási kör (3.2), az életkorhoz kötődő tekintély (3.3) és a változó kapcsolati rendszer (3.4) hatásának vizsgálatát.

A kapcsolatok számának növelése, mint bónusz a sikeres stratégiaátadás mellé értehető. Kissé talányosnak látom a maximális kapcsolati számot előíró paraméter szerepét. Kis rosszindulattal úgyis tudom olvasni 3.8. ábrát, hogy minden eredmény lehetséges. Általánosabban úgy mondanám, hogy az ilyen modellek betekintést adnak lehetséges működési mechanizmusok teljesítőképességéről, de a konkrét számok, adott esetben görbéket nem kell feltétlenül különösebben, képzavart használva, szó szerint venni. Ami az életkor és tekintély közötti összfüggést illeti, nem tudom pontosan miről beszél a nálam sokkal fiatalabb Jelölt, de azért elolvastam ezt a alfejezetet is. A modell itt is minimalista, a megállapításom egyszerre jelent dicséretet és kritikát. Két paraméter van, a maximális életkor. és egy, a kor és a tanítási képességet kifejező mennyiség. Ez utóbbit ésszerűen rögzítette, lehet a kor hatását vizsgálni. Bevallom, nem fogtam, hogyan kell a B modellt interpretálni. Ebben a modellben a stratégiát átvevő játékos kore nullázódik. Mit akar ez a feltevés kifejezni?

A változó kapcsolati rendszerekről szóló 3.4 alfejezetet is tudom rosszindulatúan olvasni. E szerint Jelölt megnézte, hogy miként tudja kicsit bonyolítani a modellkeretet úgy, hogy érdekes és kiszámítható eredmények legyenek, és azután felöltözetű úgy, mintha nemcsak a modell tulajdonságai, hanem a biológiai és társadalmi jelenségek is érdekelnék. Adott esetben a modellben fel kell tenni valamit, ami a kapcsolatok elvesztéséhez vezet, és valami mást, ami új kapcsolatok kialakításához vezet. A konstrukciót dicsérnem kell. Ha jól sejtem, itt is sikerült egy olyan paramétert, itt a véletlenszerűen kialakított kapcsolatok frekvenciáját, pontosabban annak reciprokát, beépíteni a modellbe, amelynek változtatásával remekül lehet a rendszert különböző végállapotokba vinni. A finom részletekbeni különbségek figyelembe vételével itt rengeteg modell lehet definiálni, ezt látni vélem. Érdekesnek látom azokat az eredményeket, amelyek tiszta állapotokhoz (mindeki kooperál, mindenki élősködő) vezetett. A héja-galamb játékban való oszcillációk fellépése is szép. Lehet, hogy valamit elnéztem, de nem látom, hogy a 3.22 ábra  $r$  paramétere hol lett bevezetve.

Van itt egy mondat: "Oszcillációkat más játékelméleti modellekben is megfigyelhetünk", és mellette két 2004-es referenciát. Jelölt természetesen tudja, hogy a replikátordinamikai kontextusban az oszcilláció (sőt, káosz) sokkal hamarabb előjött, megadok két 1983-as referenciát:

Bomze, I.M. (1983) Lotka-Volterra equations and replicator dynamics: A two dimensional classification. Biol. Cybern. 48:201-11

Schuster, P. Sigmund, K (1983) Replicator dynamics. Journal of Theoretical Biology 100:533-538.

Nagyra becsülésem jelöl eltekintek az utolsó fejezet (A zaj, mint koevolúciós paraméter) részletes elemzésétől. Az eredmények sokszínűségét elismerem, látom, hogy módszerként a dinamikus átlagtér közelítést is sikerrel használta. A problémám sem új. Ahogy Jelölt írja, a zajparaméter "jelentése, értelmezése meglehetősen széleskörű lehet." Ez részben érdem, hiszen jól vizsgálható modellhez vezet, másrészt persze az interpretáció szempontjából kisebb aggodalomra ad okot, hogy túlsok hatás van egyetlen paraméterrel figyelembe véve.

Összefoglalva: noha az akadémiai szereposztás szerint Opponens hivatalból többet kellene tudnia a témáról, mint Jelöltnek, bevallom, hogy itt szó sincs ilyesmiről, az értekezést az érdeklődő laikus szemével olvastam, és azt hiszem, hogy sokat tanultam. Az értekezés nagyon jól olvasható volt (érdemes lenne tananyagként átdolgozni, bár ez azonban alapos munkát kívánna). Jelölt példamutató következetességgel fejlesztette az evolúciós játékelmélet modellkeretét, rengeteg érdekes eredményt kapott, azokat kitűnő helyeken publikálta. Így azután teljes szívemből javaslom a nyilvános védés kitűzését. A szabályok alapján nyilatkozom arról is, hogy a mű elfogadását is javaslom.

Személyes utószó az idősebb pályatárs jogán. A dolgozat egyvonalúsága egyszerre irigylésreméltó, de nem tagadom, kicsit irritáló. Vitan felüli, hogy az adott modellkeret tovább fejleszthető, és számos új tulajdonsága felderíthető. Azt sem vitatom, hogy az eredményeknek van fontos biológiai és társadalmi relevanciája. Azt tanácsolom azonban kéretlenül is, ha a sikeres védésen túl esik (szemernyi kétségem sincs, hogy így lesz), gondolkozzon el, hogy merre tovább. Persze tudom Orbán (Ottó) tanítását: "A féligazság éles sarló, gyorsan kell aratni vele"

Érdi Péter

az MTA doktora

Kalamazoo, Michigan

2011 március 23.