

Együttműködés térbeli koevolúciós modellekben

MTA doktori értekezés

Szolnoki Attila

MTA
Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Kutatóintézet

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. Társadalmi dilemma helyzetek	9
1.1. Evolúciós játékelméleti megközelítés	12
2. Inhomogenitások szerepe az együttműködés fennmaradásában	17
2.1. Egyenlőtlen tanítási képesség	18
2.2. Kapcsolat a különféle inhomogenitások között	23
2.2.1. Az információáramlás iránya skálamentes gráfon	23
2.2.2. Eltérő aktivitású játékosok komplex gráfokon	28
2.3. Játékosok különbözőségének mértéke	32
2.4. Mesterek közötti kapcsolata szerepe	36
3. Koevolúciós modellek	45
3.1. A tekintély spontán kialakulása	46
3.1.1. Stratégia-specifikus tekintély	51
3.2. Növekvő befolyási kör	55
3.3. Az életkorhoz kötődő tekintély hatása	60
3.4. Változó kapcsolati rendszer	67
3.4.1. Oszcilláció a héja-galamb játékban	74
4. A zaj, mint koevolúciós paraméter	79
4.1. A homogén zaj hatása térbeli rendszereknél	80
4.1.1. A dinamikus átlagtér közelítés	82
4.1.2. Átfedő csoportok hatása egydimenzióban	85
4.2. A tanulási mód Darwini kiválasztódása	88

5. Összefoglalás	99
Köszönetnyilvánítás	103
Irodalomjegyzék	103

Bevezetés

David Barash könyvében [4] Molière Úrhatnám polgárát idézi, amikor a játékelmélet mindennapi életünkben betöltött szerepét kívánja jellemezni: Jourdan, a darab hőse megdöbbenve értesül arról, hogy egész életében prózában beszélt anélkül, hogy tudta volna. Hasonló reakciókkal találkozhatunk, amikor a témával nem foglalkozóknak a játékelmélet által tárgyalt helyzetekről számolunk be. Talán éppen ez magyarázza azt a népszerűséget, ami az elmélet különböző tudományterületeken való széleskörű alkalmazásában érhető tetten.

A játékelmélet megalapozását eredetileg a közgazdaságtan és a politikai döntéshozók érdeklődésére számot tartó szereplők lehetséges döntéseinek analízise motiválta [79], de manapság már az elméleti biológia, a szociológia, vagy a viselkedéskutatás sem nélkülözheti az ilyen típusú megközelítést. Az még viszonylag könnyen elfogadható, hogy a közteherviselésben [5] való részvételünk vagy a hímszarvasok vetélkedése [35] leírható a fenti elmélet keretei között, de az már érdekesebb, hogy például bizonyos baktériumok [6, 25, 54, 29, 61, 8] vagy vírusok [78] közötti kölcsönhatás értelmezésénél is felbukkan ugyanez a megközelítés. A skála másik végén az országok közötti kapcsolatok helyezhető el, amelyek esetlegesen eltérő politikája, mint lehetséges stratégiák, meghatározhatják környezetünk állapotának az alakulását [18, 7, 36]. Talán ez a néhány példa is jelzi, hogy mennyire szerteágazó területeken és nagy gyakorlati jelentőségű problémák tárgyalását teszi lehetővé a fenti megközelítés.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából is legfontosabb kérdés annak a megértése, hogy milyen módon tud kialakulni és fennmaradni az együttműködés olyan helyzetekben, amikor egyénileg az élısködés a nagyobb nyereményt jelentő és ezért racionálisabb stratégia. Az egyéni és a közösségi érdekek konfliktusát a szociális dilemma játékok ragadják meg és ezen belül legélesebb formája az ún. fogolydilemma játék. Ebben az említett két stratégia közül a játékos számára mindig az élısködés eredményez nagyobb nyereményt, függetlenül a partner választásától. Az eredményül adódó

élősködő-élősködő stratégiapár viszont kisebb nyeresényt nyújt, mintha mindkét játékos együttműködne. Fontos megemlíteni, hogy a kérdés megválaszolása a gyakorlati haszonnal kecsegtető alkalmazásokon túl a körülöttünk lévő világ általános megértését is segíti, hiszen az együttműködés számtalan formában jelen van, nem csupán az emberek között, hanem például az állatvilágban is.

A fizikusok számára vonzó fordulat akkor következett be, amikor a 90-es években rámutattak arra, hogy az élősködők végső győzelme elkerülhető ha figyelembe vesszük azt, hogy nem minden játékos áll minden másikkal kapcsolatban, hanem azok között korlátos kapcsolati rendszer, egyfajta térbeliség van. Ha arra gondolunk, hogy a játékosok véges számú különböző stratégiával (állapottal) rendelkeznek és az egyéni nyeresényük a saját állapotukon túl a szomszédok állapotától is függ, akkor látszik bizonyos hasonlóság a kondenzált anyagok fizikája által gyakran vizsgált Ising- vagy Potts-modellekhez. Sőt, speciális esetekben, szimmetrikus nyeresénymátrix esetén a kapcsolat még szorosabbá tehető. Ezért joggal várhatjuk, hogy a statisztikus fizika munkamódszere, tehát a makroszkopikusan érzékelhető jelenségek mikroszintről építkező modellek révén történő megértése itt is használható, és a fizikusok érdemben tudnak hozzátenni a terület fejlődéséhez. Természetesen sok esetben nem teljesülnek azok az alapvető feltételek, amelyek például az egyensúlyi statisztikus fizikánál fennállnak, de éppen ettől várhatunk gazdagabb és kevésbé jósolható, ezért érdekesebb viselkedést.

Ebben az értelemben a fizikusoknak a témában történt szerepvállalása abba az utóbbi 20 évben megfigyelhető tendenciába sorolható, ami a statisztikus fizikának a kondenzált anyagok vizsgálatán túlmutató, interdiszciplináris területeken való alkalmazását jelenti. Ehhez a kutatási irányhoz csatlakoztam körülbelül 10 éve egykori mentorom, majd munkatársam Szabó György ösztönzésére. Az ide tartozó és a dolgozatban ismertetett eredmények különböző nézőpontból, de lényegében ugyanarra, az együttműködés feltételeit firtató kérdésre keresik a választ.

Mivel a játékelmélet is meglehetősen szerteágazó, ezért az első fejezetben röviden összefoglaljuk azokat a játékokat és dinamikákat, amelyeket a dolgozatban vizsgálni fogunk. A második rész olyan, ún. statikus modellek eredményeit ismerteti, amik kedvező körülményeket biztosítanak az együttműködő stratégiáknak. Ezeknek a látszólag lényegesen különböző modelleknek az összehasonlítása segített feltárni azt a közös okot, ami alapvető a pozitív hatás működéséhez. A harmadik részben ismertetett modellek vizsgálatát eredetileg az motiválta, hogy választ kerestünk arra, miként tudnak

spontán módon kialakulni az előzőekben előnyösnek talált feltételek. Később kiderült, hogy ezek az ún. koevolúciós modellek sokkal gazdagabb viselkedést, illetve korábban nem tapasztalt mechanizmusok működését is lehetővé teszik. Utalva az interdiszciplináris jellegből fakadó bizonyos nehézségekre, egy-egy terület képviselői nem mindig pontosan ugyanazt értik egy-egy kifejezésen. Például az előbb említett koevolúció olyan modellek jellemzésére szolgál, ahol az elemek (játékosok) állapotán túl még további egyedi tulajdonságuk, vagy a környezetüket jellemző paraméterük is változhat. A kifejezés használatával vélhetően nem minden biológus értene egyet. A negyedik rész logikailag a harmadik fejezethez tartozik, de a külön fejezetben történő tárgyalását az indokolja, hogy a stratégiaátvételt jellemző bizonytalanság (zaj) önmagában is egy érdekes kérdés. Ezen túlmenően, az itt kapott eredmények rámutattak a koevolúciós modellek egy másik, a korábbiaktól eltérő fontos üzenetére, ami a modellt leíró paraméterek esetleges spontán fejlődésében, azok fixálódásában figyelhető meg.

Záró gondolatként érdemes hangsúlyozni, hogy mindig törekedtünk a lehető legegyszerűbb és éppen ezért a lehető legnagyobb érvényességű modellek vizsgálatára. A fizikát a modellalkotás évszázadok óta jellemzi, ahol természetesen a vizsgált jelenség megértése a fő motiváló erő. Ugyanakkor egy-egy modellből következő eredmények határainak a feltérképezése révén lehetőség nyílik esetleg korábban különbözőnek vélt rendszerek és jelenségek közös tárgyalására. Általánosságban éppen ezért törekszünk egy modell adta lehetőségek teljes feltárására, még ha az látszólag túlmutat egy konkrétan megérteni kívánt jelenségen.

A modellvizsgálatok igazi értékét egy-egy konkrét kísérleti eredménnyel történő összevetés jelenti. Mivel a társadalmi folyamatokat szigorúan kvantitatív formában vizsgáló kísérletek csak a kezdeti, korai fázisukban tartanak, ezért a dolgozatban bemutatott eredmények úgy tekinthetők, mint bizonyos általános folyamatok megragadására tett kezdeményezések, illetve a későbbi, igényesebb kísérletek tervezését segítő, inspiráló gondolatok.

1. fejezet

Társadalmi dilemma helyzetek

A rendszert alkotó játékosok általában véges sok különböző állapotot vehetnek fel, vagy másképpen mondva véges sok stratégiájuk lehet. Tiszta stratégiákról beszélünk, ha a játékos ezek közül feltétel nélkül az egyiket, illetve kevert stratégiákról, amikor bizonyos valószínűséggel ezek bármelyikét választhatja. n lehetséges stratégia esetén a játékos döntését egy n komponensű vektorral lehet reprezentálni, amelynek az i -ik komponense az i -ik stratégia választásának a valószínűségét adja meg. Ismételt játék esetén további, lényegesen bonyolultabb stratégiák is lehetnek, amelyek például feltételezik a játékosok memóriáját [2], vagy más összetett, például adaptív szabályozást alkalmaznak [82]. A játékos a játék során a saját nyereményét szeretné maximalizálni, ami a saját, és a vele kapcsolatban álló játékos állapotától (stratégiájától) függ. Egyenértékű játékosokat feltételezve (azaz szimmetrikus játékoknál), a lehetséges nyereményértékek egy $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrixba rendezhetők, ahol A_{ij} az első játékos nyereménye, ha ő az i -ik, míg partnere a j -ik stratégiát választja. Formálisan az $\mathbf{s}_x$ stratégiával jellemzett x játékosnak az $\mathbf{s}_y$ stratégiával rendelkező y játékosal történő játékából $\Pi_x = \mathbf{s}_x^T \mathbf{A} \mathbf{s}_y$ nyereménye származik.

A több játékosal való kölcsönhatást úgy fogjuk figyelembe venni, hogy a játékos több kétszereplős játékból, azaz lényegében pár-kölcsönhatásból származó nyereményét összegezzük, tehát az előbbi jelölést használva

$$\Pi_x = \sum_{y \in \Omega_x} \mathbf{s}_x^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_y, \quad (1.1)$$

ahol az x játékos Ω_x környezetében lévő összes y játékos állapotát figyelembe vesszük. Ettől eltérően, maga az elemi játék is lehet többszereplős, például az ún. közlegelő játékban, ahol a kölcsönhatásban lévő játékosok szimultán döntései határozzák meg

a játékos nyereményét. Bár erre a dolgot nem tér ki, de érdemes megemlíteni, hogy az utóbbi játék esetén olyan, más típusú korrelációk is felléphetnek, ami a pár-kölcsönhatásból származótól eltérő viselkedést is eredményezhetnek [70].

A dolgozatban kizárólag pár-kölcsönhatásra és szimmetrikus (de nem szimmetrikus nyeremenymátrixú) játékokra szorítkozunk, ahol a játékosok csupán két lehetséges tiszta stratégia, a feltétel nélkül együttműködő $((1, 0) \equiv C)$ és élősködő $((0, 1) \equiv D)$ állapot közül választhatnak. (Ilyenkor a stratégia megadása tovább egyszerűsíthető, és akár egy 0, 1 skalárral is helyettesíthető.) A stratégiák viszonyát, tehát az állapotok közötti kölcsönhatást meghatározó 2×2 -es nyeremenymátrix elemeit hagyományosan az angol elnevezések kezdőbetűi alapján jelöljük:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Ennek megfelelően a kölcsönös együttműködés esetén a játékosok nyereménye az R jutalom (reward), a kölcsönös élősködés esetén a kapott érték a P büntetés (punishment). Eltérő stratégiák esetén az élősködő a T csábítás (temptation) értékét realizálja, míg az együttműködő a balek sorsára jut, nyereménye S (sucker's payoff).

Tovább szűkítve a lehetséges játékok körét, a vizsgált játék nem zéróösszegű $(\Pi_x + \Pi_y \neq 0)$, illetve a játékosok egymástól függetlenül, nem kooperatív módon választanak stratégiát. Természetesen a mátrixelemek egymáshoz képesti viszonya határozza meg, hogy van-e olyan stratégia, amely kevesebb nyereményt biztosít (szigorúan dominált) és amely elhagyásával a játékosok végül egy olyan Nash-egyensúlynak nevezett állapotba kerülnek, amelyet a nyeremény csökkenése miatt egyoldalúan egyik félnek sem éri meg elhagyni.

Amint már a bevezetőben is utaltunk rá, a legérdekesebbnek azokat az ún. szociális dilemmának nevezett játékokat tartjuk, ahol a játékos egyéni nyereménye konfliktusban áll a közösség számára előnyösebb választással [32]. Ez az említett mátrixelemek három sorrendje esetén lehetséges, amelyekhez tartozó játékokat röviden összefoglaljuk.

Az ellentét a legélesebb formában a $T > R > P > S$ sorrend esetén áll fenn, amit fogolydilemma játéknak neveznek. (A közismert játék elnevezése két, egymással kapcsolatban nem álló, ugyanazon bűncselekmény miatt előzetes letartóztatásban lévő ember kihallgatás során követhető viselkedésére utal.) Ilyenkor egyénileg a másik játékos stratégiájától függetlenül az élősködés eredményez nagyobb nyereményt,

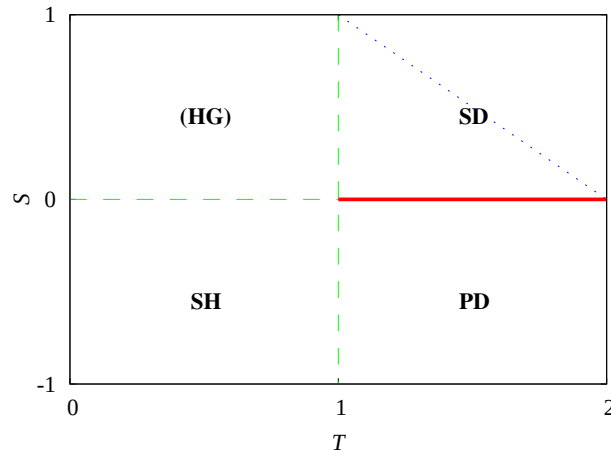
tehát a klasszikus játékelmélet által ajánlott megoldás (Nash-egyensúly) az élőködő-élőködő stratégiapár, amit általánosabb esetekre is alkalmazva a közösség tragédiájának is szoktak nevezni [18]. Ugyanakkor a nyeremények rangsorából az is látszik, hogy ennek a bekövetkezésekor a játékosok által kapott nyeremény kisebb, mintha mindkét játékos az együttműködést választaná. A legfontosabb kérdés, amelyre a dolgozat is keresi a választ az, hogy miként válhat az utóbbi instabil pont mégis stabilá, illetve miként kerülhető el a racionális megfontolások alapján stabilnak látszó másik egyensúly.

A másik ún. szarvasvadász játékban az elemek sorrendje $R > T > P > S$. (Az elnevezés arra utal, hogy pl. vadászat során a vadászok csak együttes erőfeszítés révén ejthetik el a „nagyvadat”, de a közben felbukkanó nyúl olyan biztos, bár kisebb nyereményt jelent, ami miatt esetleg megéri a többieket cserbenhagyni.) A dilemma azért nem annyira éles, mint az előbbi játék esetén, mert létezik egy másik, együttműködő-együttműködő stratégiaprofil is, ami szintén Nash-egyensúly.

A harmadik dilemma játékot a $T > R > S > P$ sorrend jellemzi, ami függően attól, hogy milyen diszciplínában merült fel, a héja-galamb, a gyáva nyúl, vagy a hólapátolás nevet is viseli. Ez szintén nem olyan éles helyzet, mint a fogolydilemma, hiszen egyénileg is a legkisebb nyereményt (legnagyobb kárt) a kölcsönös élőködés jelenti, viszont a másik együttműködése esetén az élőködő a legnagyobb nyereményt éri el (a héja konfliktus nélkül győz a kitérő galambbal szemben, vagy a lusta ember is használhatja a lapátoló által megtisztított utat). Ez utóbbi esetben a tiszta stratégiák tekintetében az együttműködés-élőködés stratégiaprofil kielégíti a Nash-egyensúly kritériumát.

A továbbiakban használt jelölések szempontjából érdemes megemlíteni, hogy a felsorolt játékok egységesen tárgyalhatóak két nyereményelem, az $R = 1$ és a $P = 0$ rögzítésével. Amennyiben a másik két nyeremény a $0 < T < 2$ és $-1 < S < 1$ tartományban változik, akkor mindhárom dilemma elérhető úgy, ahogy azt a 1.1. ábra mutatja. Ismételt játékoknál a közösség számára előnyös kölcsönös együttműködés csak akkor előnyös, ha $R + R > T + S$, ezért az utánzáson alapuló evolúciós játékelméleti modelleknél ez utóbbi feltételt is figyelembe vesszük.

További, gyakran használt egyszerűsítés lehet, ha $S = 0$ -t rögzítjük és csak a $1 \leq T = b \leq 2$ élőködés nyereménye függvényében vizsgáljuk a rendszer viselkedését [40]. Amint azt a 1.1. ábra is mutatja, ez a paraméterezés a fogolydilemma



1.1. ábra. Kétstratégias dilemma játékok elhelyezkedése a $T - S$ paramétersíkon. A rövidítések a fogoly-dilemma (PD), a szarvasvadász (SH), illetve a héja-galamb (SD) játékra utalnak. A nyereménymátrix másik két tagja rögzített ($R = 1, P = 0$). A nem említett negyed az ún. harmónia játék, ami nem jelent dilemma helyzetet, hiszen az együttműködés mindig előnyösebb. A vastag piros vonal az egy paraméterrel leírható gyenge fogolydilemma játékot, míg a pontozott kék vonal a héja-galamb játékban használt szintén egyparaméteres modellt jelöli.

tartomány határát jelenti, ezért is hívják gyenge fogolydilemma esetnek. Ugyanakkor a tapasztalatok szerint minden olyan jelenség, együttműködést segítő mechanizmus megfigyelhető ebben a paraméter tartományban is, ami fontos lehet a szociális dilemmák vizsgálatakor. A paraméterek számának csökkenése viszont olyan könnyebbé lehet, amit érdemes kihasználni különösen olyankor, amikor több, egyéb paramétert is számításba kell venni. A továbbiakban a fenti paraméterezésre gyenge fogolydilemma játékként fogunk hivatkozni.

A másik, az irodalomban szintén gyakran előforduló egyszerűsítés a héja-galamb játék egyparaméteres vizsgálata. Ilyenkor a $T = 1 + r$ és $S = 1 - r$ feltételezésével az $r \in [0, 1]$ paraméter [50, 83] lényegében a költség/nyereség hányados jellemzését adja. Ekkor a héja-galamb tartományt a $T + S = R + R = 2$ egyenes mentén szeljük át. Láthatóan az r növelése, a b növeléséhez hasonlóan, egyre nagyobb kihívást jelent az együttműködő stratégia számára.

1.1. Evolúciós játékelméleti megközelítés

A játékosok az ismételt játék révén, a stratégia esetleges változtatásával folyamatosan az egyéni nyereményüket igyekeznek növelni. Az alapvető kérdés az, hogy ez a

teljes rendszer szempontjából milyen állapothoz vezet. A feladat érdekességét éppen az adja, hogy az egyéni és a közösségi haszon maximumának egybeesése csak a szimmetrikus nyereménymátrixú, ún. potenciáljátékoknál teljesül. A stratégiák változására vonatkozó általános szabályok hiányában azokat önkényesen választhatjuk meg, ami esetlegesen a különböző eredmények összehasonlítását is megnehezíti. Ugyanakkor általános szabályként feltehetjük, hogy Darwini kiválasztódás analógiájára a gyengébb, kisebb nyereményt elérő stratégiát felváltja az erősebb, nagyobb nyereményt biztosító állapot, vagyis a stratégiák változását (fejlődését) a Darwini evolúció vezérli. A leggyakrabban használt, stratégiaváltozást meghatározó dinamikában a véletlenszerűen kiválasztott játékos átveszi (utánozza) a környezetében megtalálható sikeresebb stratégiát. Ezt még akkor is indokolt feltenni, amikor racionális játékosokat feltételezünk, hiszen számos pszichológiai munka hangsúlyozza az emberi gondolkodásban a sémák és a minták használatának a gyakoriságát. (Valószínűleg ennek evolúciós előnyei is vannak.) Bár más jelentéssel, de a stratégia átvételén alapuló dinamika kognitív képességet nem feltételező, elsősorban alacsony rendű biológiai rendszerekben is használható, ahogy arra később még kitérünk.

További választási lehetőség az, hogy a játékosok egyszerre, a sejtautomatáknál megszokott módon vagy egymás után, a Monte Carlo szimulációknál jobban elterjedt protokoll szerint változtatják-e stratégiájukat. Mi kizárólag az utóbbi frissítési módot fogjuk használni, mert az előbbi dinamika számtalan mesterkélt térbeli és időbeli mintázat forrása lehet [23]. A leggyakrabban használt dinamikában a véletlenszerűen kiválasztott s_x stratégiával rendelkező x játékos, amely Π_x nyereményt gyűjtött a szomszédokkal történt játékból, átveheti a Π_y nyereményt elérő y szomszédja s_y stratégiáját az alábbi valószínűséggel [59]:

$$W(s_x \rightarrow s_y) = \frac{1}{1 + \exp[(\Pi_x - \Pi_y)/K]}, \quad (1.3)$$

ahol K a stratégiaátadás bizonytalanságát jellemző zajparaméter. (A K lehetséges értelmezésére a 4. fejezetben részletesen kitérünk.) Ennek a stratégiaátadási valószínűség használatának számtalan előnye van. Egyrészt kis valószínűséggel, de lehetővé teszi az esetlegesen előnytelenebb stratégia átvételét is, így a rendszer fejlődése semmiképpen nem ragad le egy lokális optimumnál, ahova az esetlegesen választott kezdeti állapot miatt kerül. Másrészt a stratégiaátadás bizonytalanságát egy független zajparaméterrel lehet jellemezni, ezért az ebből eredő sztochasztikus hatások is kontrollálhatóak.

Ettől a stratégiaátadási valószínűségtől csak akkor térünk el, ha a játékosok nyerebénye az eltérő kapcsolati számból adódóan lényegesen eltérhet (pl. $\Pi_y \gg \Pi_x$ a lényegesen eltérő $k_y \gg k_x$ foksámok miatt). Ekkor ugyanis a rögzített K érték hatása játékosonként lényegesen különböző lehet, ami egy további, nem kontrollált hatást eredményezhet. Ilyenkor az általánosan elfogadott dinamika [50] szerint csak $\Pi_y > \Pi_x$ esetén lesz stratégiaátadás, az alábbi valószínűséggel:

$$W(s_x \rightarrow s_y) = (\Pi_y - \Pi_x) / (\Delta \cdot k_q) , \quad (1.4)$$

ahol k_q a k_x és k_y foksámok közül a nagyobb és Δ a legnagyobb nyerebénykülönbség, azaz $\Delta = T - S$ a fogolydilemma, $\Delta = T - P$ a héja-galamb játék, illetve $\Delta = R - S$ a szarvasvadász játék esetén. (A Δ az eltérő játékok esetén fennálló eltérő nyerebénymátrix elem rangsorhoz illeszkedve biztosítja a pozitív W értéket.)

Amint már utaltunk rá, a fentiektől eltérő dinamikai szabályok használata is elképzelhető [55]. Egy további lehetőség szerint például, az utánzás mindig a legsikeresebb szomszéd követését jelenti determinisztikus módon [1, 22], vagy a stratégiaváltás csak akkor következik be, ha a játékos nyerebénye nem ér el egy előre megszabott szintet, a „győztes csapaton ne változtass” elv alapján [47]. Ez utóbbi esetben a szomszédokról csak korlátozott információ szükséges, mert nem kell tudni azok nyerebényét, csak a stratégiájukat. Hasonlóan, csak korlátozott információ szükséges egy „Glaber-dinamika”-szerű stratégiaváltáshoz. Ekkor a játékos a két lehetséges stratégiájából származó nyerebényt hasonlítja össze úgy, hogy a környezet állapotát rögzítettnek feltételezi [53, 48].

Az evolúciós játékelméleti munkák többségéhez hasonlóan, a dolgozatban vizsgált modellek potenciális alkalmazásainál mindig visszatérő utalást teszünk az esetleges biológiai rendszerekre. Amint arra John Maynard Smith rámutatott, a fajok vetélkedését úgy is lehet tekinteni, mint a stratégiák harcát, csak az előbbi esetben a hasznot meghatározó függvényt (a nyerebényt) a fajok utódlétrehozó alkalmasságával (fitnessével) azonosítjuk [34]. Ennek megfelelően az adott helyen történő stratégiaátadás helyett az egyik faj kihalásáról illetve a másik szaporodásáról beszélhetünk.

A továbbiakban elsősorban a fogolydilemma játékra fogunk koncentrálni, hiszen ennél a játéknál jelenik meg a legnagyobb kihívásként az együttműködés fennmaradása, ezért az itt talált pozitív eredmények jellemzően alkalmazhatóak a másik két dilemma esetén is. Ahol érdekes további megfigyelés is tehető, ott a többi szociális dilemmát is külön tárgyaljuk.

A vizsgálati módszereket tekintve, a játékok bonyolultságát figyelembe véve az elsődleges használható eszköz a Monte Carlo szimuláció volt. Itt kihasználva a hagyományos statisztikus fizika művelésénél szerzett tapasztalatainkat, igyekeztünk az említett területnél megszokott gondossággal és igényességgel eljárni, olyan numerikus állításokat tenni, amik nem csupán egy adott méretű rendszerre érvényesek. A bevezetőben említett fizikusi hagyományokból eredő előny itt számtalan formában tetten érhető, mert gyakran olyan viselkedésre bukkantunk, ami a statisztikus fizika számára már feltárt területnek tekinthető. A rendszer állapotát általában az együttműködők ρ_c gyakoriságával jellemezzük, amivel monoton növekszik a közösség átlagos nyereménye. A stratégiaátvételt jelentő dinamikai szabály következménye, hogy ha a rendszer olyan állapotba kerül, amelyben csak kizárólag az egyik stratégia van jelen, akkor azt az állapotot már nem tudja elhagyni (abszorváló állapot). Az ilyen állapotot jelentő tiszta C és tiszta D fázisok határának a kellő pontosságú meghatározása időnként igen nagy rendszerméretek, akár 10^6 játékost tartalmazó gráf alkalmazását is igényelte. A dolgozatban közölt fázisdiagramokban jelölt fázishatárok pontossága általában a vonalvastagsággal összemérhető, az ettől való esetleges eltérést külön jelezzük.

A szimulációk mellett, ahol a kapcsolati gráf topológiája lehetővé tette, használtuk az ún. dinamikus átlagtér elméletet is, ami korábban a nem-egyensúlyi rendszerek fázisdiagramjainak a vizsgálatánál is hasznosnak bizonyult. (A módszer rövid összefoglalását a 4.1.1. fejezetben adjuk meg.) A két módszer egyezése illetve esetleges eltéréseinek a megértése szintén az adott probléma mélyebb megértését szolgálta.

2. fejezet

Inhomogenitások szerepe az együttműködés fennmaradásában

A térbeliségből adódó korlátos kapcsolatok jótékony hatását az együttműködésre már Martin Nowak és Robert May felismerték a 90-es évek elején, amikor rámutattak arra, hogy ha jól kevert populáció helyett a játékosok egy négyzetrácson vannak elhelyezkedve, akkor az együttműködő stratégia képes fennmaradni akkor is, ha a nyereménymátrix alapján az nem történhetne meg [39]. Már ez a nagyon egyszerű, bár sok szempontból vitatható [23] modell rámutatott arra a többletre, amivel a térbeli modellek rendelkeznek a struktúra nélküli, kevert rendszerekhez képest. A jelenség háttérében az a rendkívül egyszerű mechanizmus áll, amelyet térbeliség okozta kölcsönösségnek (spatial reciprocity, network reciprocity) neveztek el [38]. Eszerint olyan állapotból kiindulva, ahol mindkét stratégia egyforma gyakorisággal van jelen, az élősködők kezdetben hatékonyan tudják az együttműködő szomszédok jelenlétéből származó, nagyobb nyereményt biztosító stratégiájukat terjeszteni. Ennek következtében egyre több játékos válik élősködővé és az együttműködő szomszédok eltűnésével az élősködő játékos nyereménye is lecsökken. Ezzel szemben az együttműködő stratégia átadása ellentétes hatást fejt ki, így ha néhány együttműködőnek sikerül találkoznia és egy kis homogén szigetet alkotnia, akkor az együttműködésből fakadó nagyobb együttes nyeremény már védetté teheti őket egy külső, élősködő stratégiát követő játékkal szemben. Természetesen az, hogy a gyenge fogolydilemmára utalva, milyen nagy b paraméternél sikerül még az együttműködőknek fennmaradnia, függhet a játékosok kölcsönhatását leíró rács topológiájától, de az együttműködés túlélése szempontjából a $b > 1$ kritikus érték már önmagában is eredmény.

Lényeges előrelépést jelentett két portugál fizikus, Francisco Santos és Jorge Pacheco megfigyelése, akik azt találták, hogy ha a játékosok skálamentes gráfon helyezkednek el, akkor az együttműködők aránya drámai módon megnő [50]. A modell legfontosabb tulajdonsága az volt, hogy - a skálamentes gráf kölcsönhatási topológia következtében - néhány játékos nagyon sok kapcsolattal rendelkezett, ezért a nyereményét is sok kapcsolatból gyűjthette. Természetesen rögtön sorolhatunk ellenérveket, hogy a modell a valóságoshoz közelítő kapcsolati gráf ellenére sem reális, hiszen a kapcsolatoknak költsége van, amit az említett alapmodell nem vesz figyelembe. Mégis fontos előrelépésként értékelhetjük az említett megfigyelést, mert rámutatott arra, hogy a topológiai inhomogenitásoknak, tehát a játékosok közötti különbözőségnek fontos szerepe lehet az együttműködés fennmaradásában. Közleményük egy sor további munkát motivált, ahol elsősorban a különböző topológiájú kapcsolati gráfok hatását tanulmányozták. Ezzel párhuzamosan ugyanakkor egy másik kutatási irány is elindult, ahol a játékosok különbözőségének más, nem a kapcsolati rendszerből fakadó lehetőségét vizsgálták meg. Ebbe az irányzatba sorolható a következő modell is.

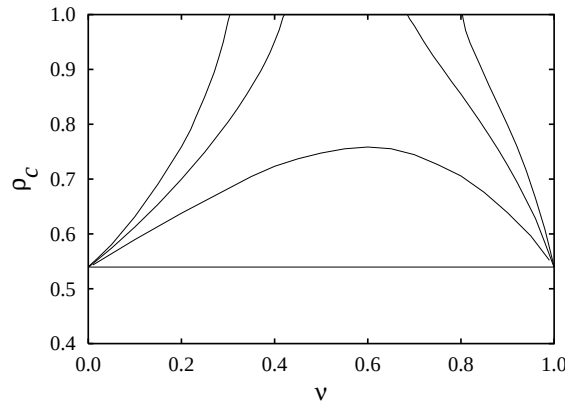
2.1. Egyenlőtlen tanítási képesség

A játékosok sok tekintetben különbözhetnek, de ha figyelembe vesszük azt, hogy az evolúciós játékelméleti modelleket a nyereséymátrixon túl a stratégiaátadás dinamikája jellemzi, akkor az egyik legegyszerűbb lehetőség a játékosok közötti különbség bevezetésére az, ha feltesszük, hogy nem egyforma mértékben képesek a stratégiájukat átadni. Hiába van jó ötlete (sikeres stratégiája) egy alacsony beosztású vállalati alkalmazottnak, az nem feltétlen válik általánosan elfogadottá. Természetesen számtalan egyéb, a szociológia számára érdekes példát is sorolhatnánk (eltérő tekintély egy közösségben), de vélhetően a biológiai rendszerekben is található olyan eset, amikor az egyedek eltérő reprodukciós képességgel bírnak.

Maradva a gyenge fogolydilemma játéknál, a bevezetőben körülírt hatást úgy lehet egyszerűen figyelembe venni, ha feltételezünk egy, a játékosokra jellemző $0 \leq w \leq 1$ paramétert, ami egy szorzó faktorként befolyásolja az (1.3) egyenlettel megadott stratégiaátadási valószínűséget [73]. A vizsgált modellben kétféle, véletlenszerűen elhelyezkedő játékost feltételezünk $w = 1$ illetve $w_r < 1$ paraméter értékkel, akik egy rácson helyezkednek el. A csökkentett tanítási képességű játékosok koncentrációját

ν -vel jelöljük. Az eredmények ismertetése előtt érdemes megjegyezni, hogy tudatosan választottuk a legegyszerűbb, kétféle tanítási képességet lehetővé tevő paraméter eloszlást. A további w értékeket is megengedő modell vélhetően valóságosabb lenne (amire lesz is példa a későbbi fejezetekben), de ezzel az egyszerűsítéssel éppen az volt a célunk, hogy önmagában az inhomogenitás lehetőségének a következményeit vizsgáljuk, minden további hatás fellépte nélkül. Hasonló célt szolgált az is, hogy reguláris (rács) topológiát használtuk, kizárva az inhomogén topológia már ismert (és a mi szempontunkból most zavaró) hatását. A későbbiekben természetesen heterogén kapcsolati gráfokkal is foglalkozunk.

A rácsok választásánál figyelembe vettük azt a korábbi eredményt, hogy a stratégiaátvételt befolyásoló zaj lényegében kétféleképpen befolyásolhatja az együttműködési szintet [60]. Eszerint, ha a rács tartalmaz érintkező háromszögeket, akkor az együttműködő stratégia életben tud maradni a $b > 1$ tartományban is, ennek hiányában az élőködő stratégia kizárólagossá válik a determinisztikus határesetben. (Ezt a topológiai hatást a 4.1. fejezetben részletesen tárgyaljuk.) Ennek megfelelően a választott rácsok, amik a kétféle viselkedést reprezentálják a négyzetrács és a kagomé struktúra volt.

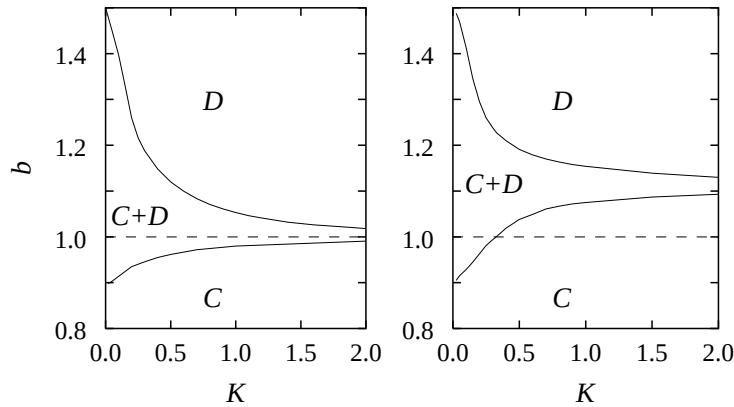


2.1. ábra. Az együttműködők aránya a csökkentett tanítási képességű játékosok koncentrációjának a függvényében. A vonalak a különböző ($w_r = 1; 0.2; 0.1; 0.05$ lentől felfelé) redukált tanítási képesség használatával elért MC eredményeket jelölik. A $w_r = 1$ formálisan a homogén modell, egyforma játékosokkal. Láthatóan nagy eltérésnél (azaz kis w_r -nél) az együttműködés akár kizárólagossá is válhat.

A kagomé rácsra vonatkozó eredményekkel kezdve, az első észrevételünk az volt, hogy csökkentett tanítási képességű játékosok hozzáadásával, azaz lehetővé téve a játékosok különbözőségét, az együttműködés jelentős mértékben növekedhet. Ezt a hatást

illusztrálja a 2.1. ábra, ahol a szimulációk eredményét ábrázoltuk rögzített $b = 1.03$ és $K = 0.5$ értékeknél, a csökkentett képességű játékosok koncentrációjának a függvényében, különböző w_r értékek esetén. A $\nu = 0$ és a $\nu = 1$ esetek lényegében ekvivalensek, hiszen mindkét határesetben csak egyforma játékosok (mindenki maximális vagy mindenki csökkentett tanítási képességű) vannak jelen, visszaadva a homogén modellnél kapott együttműködési szintet. Az ábráról az is leolvasható, hogy a hatás akkor a nagyobb, ha lényeges eltérés van a kétfajta játékos tanítási képességében.

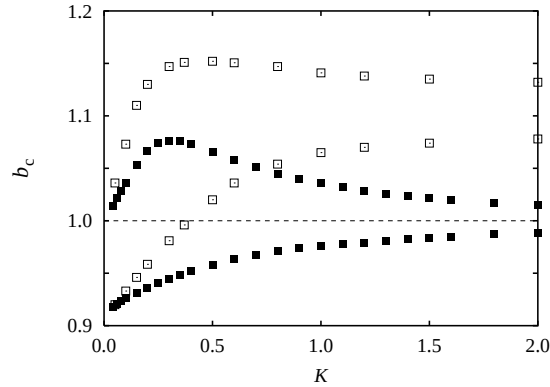
Teljesebb kép kapható, ha a $b - K$ paramétersíkon mutatjuk a különbözőség hatását, amihez a w_r és ν értékeit le kell rögzítenünk. A homogén és heterogén modell szimulációval kapott fázisdiagramjainak az összehasonlítása látható a 2.2. ábrán. Az utóbbi modellnél a rögzített paraméter értékek $w_r = 0.1$ és $\nu = 0.5$. Mindkét esetben háromféle megoldás lehetséges. Kis b értékek esetén az együttműködés kizárólagossá válik (C -vel jelölt tartomány). Elég nagy b esetén pedig a rendszer a közösség tragédiájaként jellemzett [18] állapotba kerül, ahol csak az élőködés van jelen (D tartomány). A közbenső ($C + D$) tartományban mindkét stratégia jelen van, itt az együttműködők aránya folyamatosan nő vagy csökken attól függően, hogy a b nyereménymátrix elem értékét csökkentjük vagy növeljük.



2.2. ábra. A teljes $b - K$ fázisdiagram a kagomé rács topológiánál egyforma játékosok esetén (bal oldal), illetve kétféle tanítási képességű játékosok jelenlétében (jobb oldal). A C és D a kizárólagosan együttműködő illetve élőködő tartományt mutatja. A szaggatott vonalak a két fázis határa a homogén rendszerben a $K \rightarrow \infty$ határesetben.

A fázisdiagramok összehasonlításából kitűnik, hogy a játékosok különbözőségének a hatása a nagyobb zajt megengedő tartományban jelentős, illetve ez a hatás a

determinisztikus $K \rightarrow 0$ határesetben eltűnik. Ugyanakkor lényeges változás az, hogy a tiszta együttműködő fázis meg tud jelenni a $b > 1$ fogolydilemma tartományban. Az itt nem részletezett dinamikus átlagtér közelítés 3 játékost egzaktul kezelő ($n = 3$ -pontos) változata megerősítette az említett tulajdonságot.

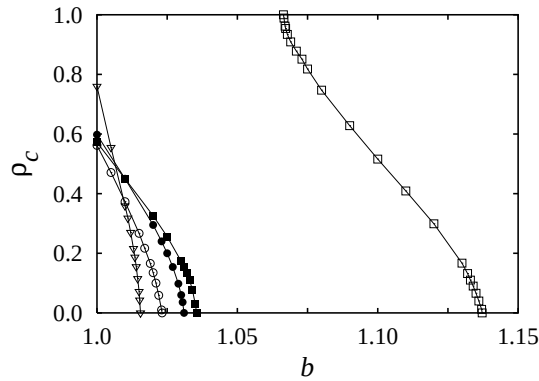


2.3. ábra. A fázishatárok a K paraméter függvényében négyzetrács topológia esetén. Tömött (üres) négyzetek jelzik a homogén (heterogén) tanítási képességű játékosokat feltételező esetet.

A négyzetrács topológiát használó modell vizsgálata jellegében hasonló eredményt hozott a kagomé rácsra vonatkozó általános megfigyelésekkel. A szimulációk alapján kapott fázisdiagramok összevetését a 2.3. ábra mutatja. Itt is a homogén modell, illetve a $w_r = 0.1$ és $\nu = 0.5$ paraméter értékekkel jellemzett heterogén modell fázishatárait jelző pontok összevetése látható. A heterogén játékosok jelenléte itt is segíti az együttműködést és ez a hatás a nagy K tartományban jelentős, ahol a tiszta együttműködő fázis ismét meg tud jelenni $b > 1$ esetén. Érdeemes megemlíteni, hogy már ebben a vizsgálatban megfigyeltük azt, hogy a nagyobb tanítási képességű játékosok körében nagyobb az együttműködő stratégia aránya, mint az egész rendszerre számolt átlag, de ennek az eredménynek a jelentőségével a későbbi fejezetekben foglalkozunk részletesebben.

Már utaltunk rá, hogy könnyen definiálható más típusú különbözőség is a játékosok között. Például előírhatjuk, hogy nem a stratégia átadását, hanem annak átvételét jellemezzük egy játékoshoz kötődő paraméterrel. Másképpen mondva nem a tanítási, hanem a tanulási képességben különböznek a játékosok. További, könnyen ellenőrizhető lehetőség, ha azt feltételezzük, hogy a játékosok közötti kapcsolatok nem egyformák. A legegyszerűbb lehetőség esetén kétféle kötéstípus létezik, az egyik mentén

(mindkét irányban!) a stratégiaátadást az (1.3) függvény határozza meg, míg a másiknál ez egy konstans $w < 1$ szorzófaktorral csökkentett, szintén mindkét irányú stratégiaátadás esetén. A különféle inhomogén modellek eredményeként adódott együttműködési szintek b függését a 2.4. ábra mutatja, ahol az összehasonlíthatóság kedvéért ugyanazokat a rögzített paramétereket használtuk ($w = 0.1, \nu = 0.5$) $K = 1$ értéknél. A zajparaméter viszonylag magas értéke tette lehetővé azt, hogy az inhomogenitások okozta hatás még szembetűnőbb legyen. Az ábra világosan mutatja, hogy az eltérő tanítási képességet feltételező modell kivételével a többi inhomogén modell kifejezetten rontja az együttműködők helyzetét.



2.4. ábra. Az együttműködők aránya a b paraméter függvényében a különböző inhomogén modellek esetén. A topológia minden esetben négyzetrács volt. Az ábrázolt esetek: homogén modell (tömör négyzet), heterogén tanítási képesség (üres négyzet), heterogén tanulási képesség (üres kör), heterogén aktivitású kötések (tömött kör), sakktábla-szerűen elhelyezkedő heterogén tanítási képességű játékosok (háromszögek).

A 2.4. ábrán egy ötödik, eddig nem említett görbe is szerepel. Ez annak a modellnek az eredménye, amelyben szintén fele-fele arányban eltérő tanítási képességű játékosok vannak, de az azonos tanítási képességű játékos szigorúan a sakktábla azonos színű mezőjén, tehát ugyanabban az antiferromágneses alrácsban helyezkednek el. Annak ellenére, hogy itt is a tanítási képességben különböznek a játékosok, ráadásul a csökkentett tanítási képességű játékosok aránya megegyezik a korábban kedvezőnek talált ν értékkel, mégis a lehető legrosszabb eredményt kaptuk. Az összes vizsgált modellhez képest ebben az esetben fog az élősködés a legkisebb b értéknél kizárólagossá válni. Ma már, a későbbi munkáink alapján az első pillanatra meglepő különbségek okai érthetővé váltak, aminek diszkussziójára a 2.4. fejezetben visszatérünk.

Fontos kiemelni, hogy ezzel a munkával közel egy időben, mások, pl. kínai kutatók is felvetették a kapcsolati rendszeren kívüli, egyéb inhomogenitások lehetőségét [88], de a most tárgyalt munka mutatott rá arra, hogy milyen jellegű különbözőség képes hatékonyan befolyásolni az együttműködést. A következő fejezet arra a kérdésre keresi a választ, hogy van-e az általunk talált hatékonyan bizonyult inhomogenitás és a játékosok fokszámeloszlásából származó inhomogenitás között mélyebb kapcsolat.

2.2. Kapcsolat a különféle inhomogenitások között

Az előző fejezetben ismertetett munkánk egyik fontos tanulsága az az első pillantásra talán meglepő eredmény volt, hogy az együttműködés szempontjából nem mindegy, hogy a stratégiaátadást vagy a stratégiaátvételt befolyásoljuk. Éppen ezért lehet hasznos a fenti mennyiségek közvetlen mérése egy olyan modellben, ahol az együttműködés mértéke hangolható anélkül, hogy változtatnánk a modellt jelentősen befolyásoló kölcsönhatási topológiát vagy az együttműködést alapvetően meghatározó b mátrixelem értékét. Ezeknek a kritériumoknak kiválóan megfelel a skálamentes gráf, ugyanis a már említett Santos-Pacheco modell után nem sokkal több csoport egymástól függetlenül rámutatott arra, hogy a skálamentes gráf együttműködést jelentősen segítő tulajdonsága szertefoszlik, ha a játékosok nyereményét normáljuk az általuk fenntartott kapcsolatok számával [51, 77, 87]. Ezért ha egy paraméter segítségével folytonosan változtathatjuk a rendszert a két határeset (abszolút, illetve normált nyereség) között, akkor feltárhatjuk, hogy az említett folyamatok miként módosulnak az együttműködési szint változásával.

2.2.1. Az információáramlás iránya skálamentes gráfon

A továbbiakban is a gyenge fogolydilemma játékot fogjuk vizsgálni úgy, hogy a játékosok egy skálamentes gráfon helyezkednek el. A kapcsolati rendszert megadó gráfot a szokásos Barabási-Albert eljárás szerint generáljuk [3]. Az i -edik játékos, amely k_i szomszédal rendelkezik, nyereményét az alábbi formula segítségével számolhatjuk ki:

$$\tilde{\Pi}_i = \alpha \Pi_i + (1 - \alpha) \frac{\Pi_i}{k_i}, \quad (2.1)$$

ahol Π_i a k_i szomszédal játszott fogolydilemma játék nyereményének az összege. A $0 \leq \alpha \leq 1$ paraméter változtatása folyamatos átmenetet tesz lehetővé a szerényebb

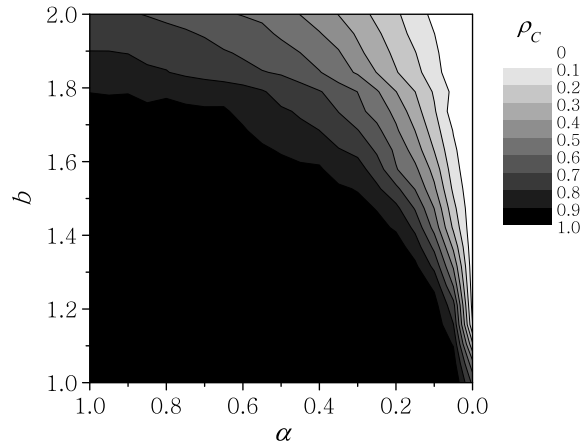
együttműködést eredményező normált ($\alpha = 0$) esetből a magas együttműködést biztosító, abszolút nyereséggel számoló ($\alpha = 1$) esetben [68].

Kezdetben minden játékos véletlenszerűen együttműködő vagy élősködő stratégiát választ. Egy elemi Monte Carlo lépés során a véletlenszerűen választott x játékos, amelynek a (2.1) egyenlet alapján számolt nyeresége $\tilde{\Pi}_x$ átveheti a $\tilde{\Pi}_y$ nyereséggel rendelkező y szomszédja stratégiáját, ha $\tilde{\Pi}_y > \tilde{\Pi}_x$. A stratégiaátadás valószínűsége:

$$W(s_x \rightarrow s_y) = \frac{\tilde{\Pi}_y - \tilde{\Pi}_x}{(1 - \alpha)b + \alpha b k_m}, \quad (2.2)$$

ahol k_m a k_x és k_y értékek közül a nagyobb. A fenti formula lényegében a (1.4) stratégiaátadási valószínűség módosított változata, figyelembe véve az α paraméter szerepét.

Elsőként feltérképeztük azt, hogy az α paraméter révén hangolt átmenet a különböző b értékeknél miként befolyásolta az együttműködés szintjét. Erről jó áttekintést ad a 2.5. ábra. Eszerint a nyeresény részben normálása alig csökkenti a magas együttműködése szintet, az majdnem minden nemzérus α értéknél fennmarad, és csak a legnehezebb körülmények között ($b \geq 1.6$) csökken látható mértékben.

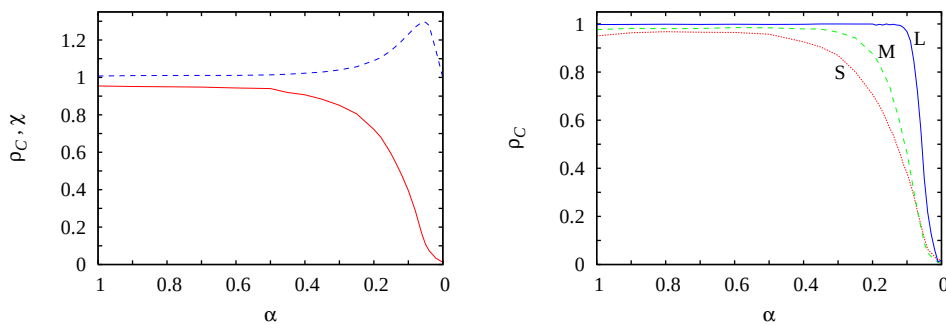


2.5. ábra. Az együttműködők aránya a skálamentes gráfon a b és α paraméterek függvényében.

Annak megértésére, hogy milyen mechanizmus révén csökken le az együttműködési szint a reguláris gráfokat jellemző viszonylag alacsony szintre $\alpha = 0$ -nál, bevezettünk egy olyan mennyiséget, ami az eltérő fokszámú játékosok állapotára ad információt. Ha a játékosok közötti kapcsolatot két, irányított kötésnek tekintjük, akkor

ρ_{cl} jelöli az együttműködő játékosok felé mutató kötések arányát. Ha ezt az értéket az együttműködő játékosok arányát megadó ρ_c mennyiséghez viszonyítjuk, akkor egy könnyen mérhető, az együttműködő játékosok általános elhelyezkedéséről informáló $\chi = \rho_{cl}/\rho_c$ mennyiséget kapunk. Ha $\rho_{cl} > \rho_c$, akkor azt mondhatjuk, hogy az együttműködők aránya jelentősebb a nagyobb fokszámú helyeken. Ugyanakkor $\chi < 1$ azt jelentené, hogy a több kapcsolattal rendelkező centrumokban az átlagostól nagyobb az élőködők aránya. A $\chi \approx 1$ érték jelentése az, hogy nincs lényeges eltérés az együttműködők térbeli eloszlásában, ilyenkor a stratégia választásában a fokszám nem lényeges szempont. A hányados 1-hez közeli értéke akkor is megvalósulhat, ha a rendszer lényegében teljesen együttműködő vagy élőködő állapotban van.

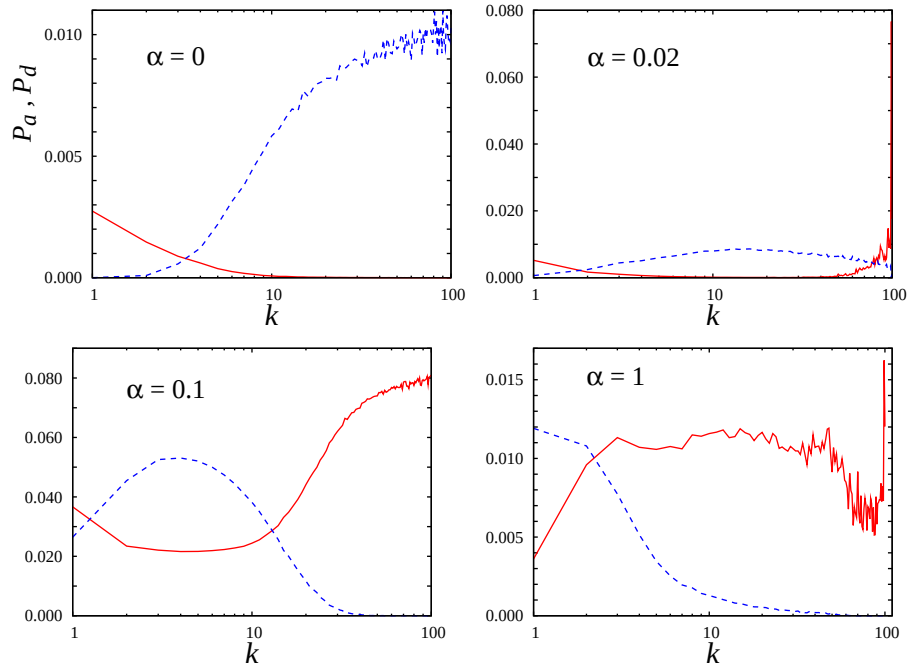
A 2.6. ábra bal oldali részén az említett mennyiséget (szaggatott kék vonal) ábrázoltuk az α függvényében, rögzített b értéknél. Viszonyításként az átlagos együttműködési szintet is ábrázoltuk (folytonos piros görbe). Nagy α értékeknél a játékosok lényegében mindenhol az együttműködést választották, ezért az említett stratégia egyaránt elfoglalja a kis és nagy fokszámmal rendelkező helyeket is. Az α értékét tovább csökkentve az együttműködési szint csökken, viszont a χ értéke emelkedik, mutatva, hogy a nagy fokszámú helyeken az együttműködők aránya nagyobb, mint ahogy az egész rendszerre jellemző átlagból az következne. Az $\alpha = 0$ értékhez közeledve a χ értéke újra közelít az 1-hez, de ennek hátterében az áll, hogy a rendszer ismét homogén, kizárólagosan élőködő állapotba kerül.



2.6. ábra. Az együttműködők aránya és a χ paraméter értéke (bal oldal, szaggatott kék vonal), valamint a különböző fokszámmal jellemezhető csoportokra mért együttműködési arány (jobb oldal) az α függvényében, rögzített $b = 1.5$ értéknél. S, M és L rendre a kis, közepes és nagy fokszámmal rendelkező játékosok körében mért együttműködési szintet jelenti.

Az eddigi megfigyelések további pontosítása érdekében a különböző fokszámmal rendelkező csoportokra közvetlenül is megmérhetjük az együttműködők arányát. Ehhez a játékosokat a kapcsolataik számát tekintve három csoportra osztottuk, függően attól, hogy kevés (S), közepesen sok (M), vagy sok kapcsolattal (L) rendelkeznek. Figyelembe véve azt, hogy a fokszám eloszlás skálamentes, a kapcsolatokat logaritmikus skálán osztottuk fel három egyenlő osztályra. A külön ezekre a csoportokra átlagolt együttműködési szinteket mutatja a 2.6. ábra jobb oldala, a bal oldalival meg-egyező $b = 1.5$ -es értéknél. Az előbbi tapasztalatainkkal összhangban, ez a vizsgálat is azt jelzi, hogy a nagy fokszámmal rendelkező játékosok (centrumok) körében mindig nagyobb az együttműködési szint, mint az egész rendszerre tekintve. Mivel az $\alpha = 0$ a homogén gráfoknál (pl. rácsonál) megfigyelhető együttműködési szintet eredményezi, ezért a fenti megfigyeléseinket úgy is összegezhethetjük, a nemzérus α -nál megfigyelt, megnövekedett együttműködési készség mindig együtt jár a centrumok „példamutatásával”, azoknak az átlagot lényegesen felülmúló együttműködési készségével.

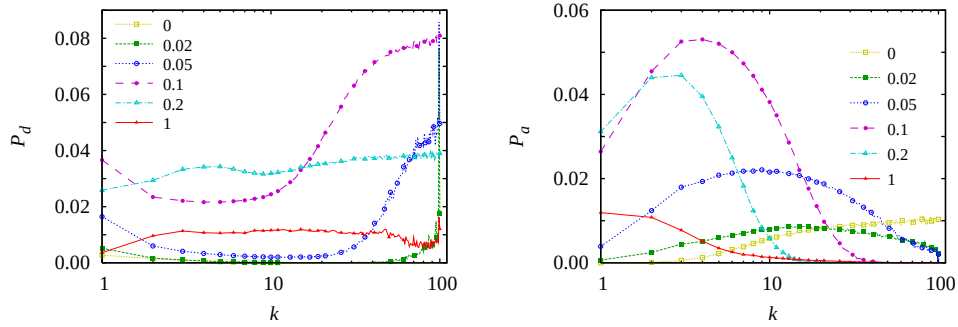
A tapasztalt különbségek mélyebb megértésére érdekében a továbbiakban mértük a bevezetőben már említett stratégiaátadási és átvételi valószínűségeket. Az egyes fokszámú játékosokra bontva, $P_a(k)$ annak a valószínűségét mutatja, hogy egy k fokszámmal rendelkező játékos stratégiát vesz át egy szomszédjától a stacionárius állapotban. Hasonlóan, $P_d(k)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy egy k kapcsolattal rendelkező játékos stratégiát ad át egy szomszédjának. Ennek a két valószínűségnek az összehasonlítását mutatja a 2.7. ábra különböző α értékeknél. Szembetűnő, hogy normált nyereménynél ($\alpha = 0$) a nagy számban jelenlévő, kis fokszámú játékosok a stratégia invázió forrásai, míg a lényegesen kevesebb számú, de több kapcsolattal rendelkező játékosok csupán a stratégia átvételére képesek. A teljesen normált esettől kicsit is eltérve ($\alpha = 0.02$) a stratégiaátadás iránya drámai módon megváltozik és a kis létszámú, de nagy fokszámmal rendelkező játékosok lesznek a stratégiaátadás elsődleges forrásai. Az α értékét növelve egyre inkább kialakulnak az egyenlőtlen szerepet feltételező csoportok és ilyenkor a stratégia átvétele kizárólagosan a nagy számban jelenlévő, de elsősorban a centrumokkal kapcsolatot fenntartó játékosokra lesz jellemző, amit az utolsó panel a 2.7. ábrán is jól illusztrál. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy a skálamentes gráf együttműködést segítő hatásának a háttérében lényegében ugyanaz a mechanizmus áll, amit homogén kapcsolati gráfon (rácson), de eltérő tanítási képességű játékosok alkalmazásával már megfigyeltünk.



2.7. ábra. A stratégiaátadási (piros folytonos) és átvételi (kék szaggatott) valószínűségek a játékosok kapcsolatainak (fokszámának) a függvényében különböző α értékeknél.

Az erősen aszimmetrikussá, egyirányúvá váló stratégiaáramlást támasztja alá az átvételt illetve átadást megadó függvények összehasonlító ábrázolása is különböző α -nál a 2.8. ábrán. Jól látható, hogy amint az α -t zérusról növeljük, a nagy fokszámú centrumok stratégiaátvevő képessége gyorsan csökken és már $\alpha = 0.1$ -nél is elhanyagolható mértékűvé válik. Ezzel szemben a stratégia átadásában már $\alpha = 0.02$ -től kezdve folyamatosan kiemelkedő szerepük van. Az, hogy az ábrázolt valószínűségek $\alpha = 0.1$ és 0.2 -nél nagyobb abszolút értékűek, mint a legnagyobb együttműködést eredményező $\alpha = 1$ -nél, azzal magyarázható, hogy ezeknél az α értékeknél nagyobb mértékű a stratégiák keveredése, tehát kevésbé homogén a rendszer, ami csökkenti a stratégiaátadás gyakoriságát a stacionárius állapotban.

Összefoglalva, ez a munka rámutatott arra, hogy az egyirányú stratégiaáramlás teszi lehetővé annak a mechanizmusnak a működését, ami révén az együttműködés közösen élvezhető előnye kialakul. Ezt elérhetjük a játékosok egyenlőségének a megszüntetésével vagy egy alkalmasan választott heterogén kölcsönhatási topológia választásával. A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen szerepe van a kapcs-



2.8. ábra. A stratégiaátadási (átvételi) valószínűségek foksám-függésének összehasonlítása különböző α értékeknél a bal (jobb) oldali ábrán.

lati rendszer topológiájának akkor, ha feltételezzük a játékosok eltérő stratégiaátadó képességét.

2.2.2. Eltérő aktivitású játékosok komplex gráfokon

Az eltérő tanítási képességű játékosok direkt hatását természetesen nem csupán rácsan, hanem más, komplexebb kapcsolati topológián, például kis-világ tulajdonságú, vagy skálamentes hálózatokon is érdemes megvizsgálni, hiszen az utóbbi kölcsönhatási topológiák közelebb állnak a valóságban is megfigyelhető ún. szociális hálózatokhoz.

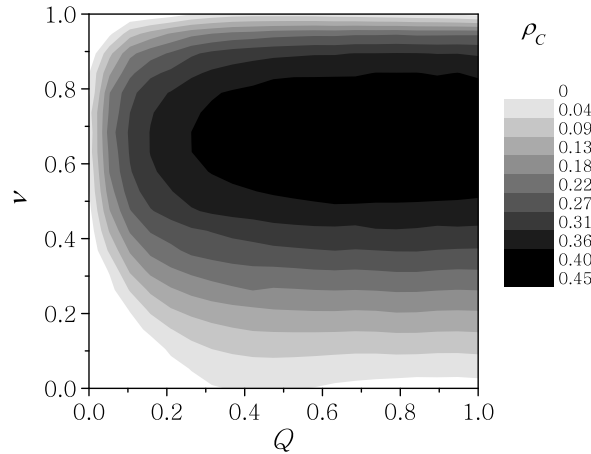
A korábbi négyzetrácson kapott eredményekkel való összehasonlíthatóság érdekében a kis-világ tulajdonságú topológiát nem további kötések hozzáadásával [84], hanem a kezdeti négyzetrácson meglévő kötések átkötésével értük el [57]. Ebben az eljárásban a meglévő kötések Q -ad részét felbontjuk és azokat véletlenszerűen választott partnerekhez kötjük úgy, hogy a játékosok fokszáma ne módosuljon. Természetesen $Q = 0$ esetén a négyzetrács, míg $Q = 1$ határesetben véletlen reguláris gráfot kapunk. Hasonlóan az eredeti Watts-Strogatz modellhez, a távoli véletlen kötések bevezetésével lecsökkent a játékosok átlagos távolsága, azaz a „kis-világ” tulajdonság már nagyon kis Q értéknél megjelenik. A játékosok foksámának rögzített értéke azt is lehetővé tette, hogy a foksám növekedésből, illetve annak különbözőségéből származó hatásokat is ki tudtuk szűrni. Hasonló megfontolásból választottunk olyan skálamentes gráfot, ahol az átlagos kapcsolatok száma $z = 4$ volt. Azért, hogy szét tudjuk választani a skálamentes gráf korábban megfigyelt együttműködést segítő hatását a jelenleg vizsgált hatástól, a továbbiakban normált nyereményt fogunk használni.

Ilyen módon lehetővé válik a reguláris és a heterogén fokszámoszlással jellemzett kapcsolati struktúrákon talált eredmények összevetése is.

Illeszkedve a 2.1. fejezetben tárgyalt modellhez, azt feltételeztük, hogy kétféle rögzített tanítási képességű játékos van $w_y = 1$ illetve csökkentett $w_y = w_r < 1$ paraméterrel, ahol az utóbbi játékosokat véletlenszerűen elosztva, ν koncentrációban találjuk a rendszerben [69]. A játékosok továbbra is a gyenge fogolydilemma játékot játsszák, az y játékos a stratégiáját az x játékosnak a módosított Fermi-függvénynek megfelelő valószínűséggel adja át:

$$W(s_x \rightarrow s_y) = w_y \frac{1}{1 + \exp[(\Pi_x - \Pi_y)/K]} . \quad (2.3)$$

Ennek használatát az inhomogén skálamentes gráfon az tette lehetővé, hogy a játékosok nyeresége normált, így azok között nem lehet olyan mértékű különbség, ami az egységes K zajparaméter használatát megkérdőjelezné.

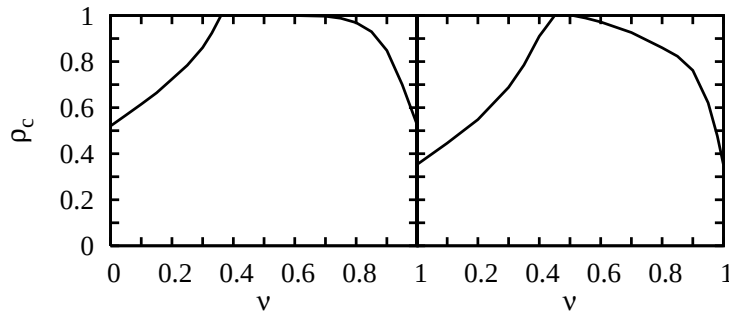


2.9. ábra. Az együttműködési szint a kis-világ paraméter és a csökkentett tanítási képességű játékosok koncentrációjának a függvényében rögzített $b = 1.14$, $w_r = 0.01$ és $K = 0.08$ értékeknél.

Elsőként a kis-világ tulajdonságú gráfot vizsgálva, rögzített b értéknél a Q és ν paraméterek hatását vizsgáltuk, aminek az eredményét a 2.9. ábra foglalja össze. Általánosan elmondható, hogy az együttműködési szint a Q paraméter értékével monoton nő, illetve telítésbe megy egy bizonyos Q érték felett. A csökkentett tanítási képességű játékosok koncentrációjának a változtatása hasonló hatást eredményez, mint amit korábban a négyzetrácson tapasztaltunk. Érdekes módon az említett játékosok optimális

koncentrációja gyakorlatilag független a Q paraméter értékétől és $\nu_{opt} \approx 0.6$ értéknél található.

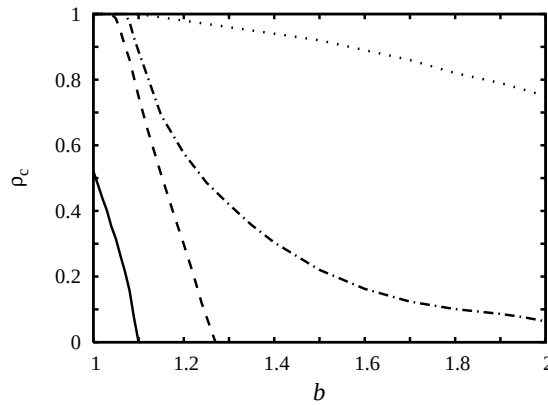
A különböző tanítási képességű játékosok hatása az erősen heterogén skálamentes gráfon nagyon hasonló. Ezt illusztrálja a 2.10. ábra, amin a kis-világ-szerű (bal oldal) és a normált nyereményű skálamentes gráfon (jobb oldal) hasonlítjuk össze az együttműködési szintet a csökkentett tanítási képességű játékosok koncentrációjának a függvényében. Láthatóan, a skálamentes gráfon a normált nyeremény ellenére is vissza lehet állítani a magasabb szintű együttműködést, ha bevezetjük a játékosok különbségét. Ez a növekedés ismételten erősíti az előző fejezetben már felvetett képet, hogy a skálamentes gráfon is az aszimmetrikus stratégiainvázió a legfontosabb jellemző a térbeli kölcsönösség pozitív hatásának a felerősödésében.



2.10. ábra. Az együttműködők aránya a csökkentett tanítási képességű játékosok koncentrációjának a függvényében reguláris kis-világ (bal oldal) és skálamentes gráfon (jobb oldal).

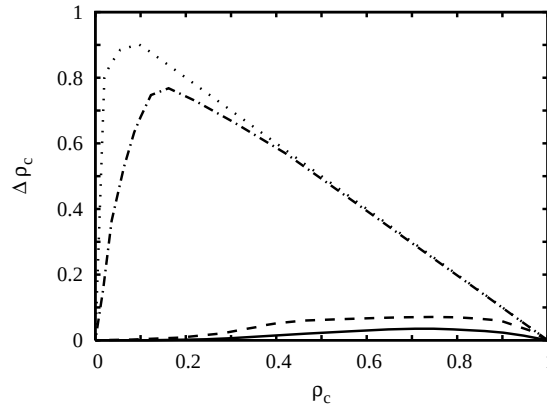
Ez a megfigyelés azt a lehetőséget is felveti, hogy valamilyen optimális módon próbáljuk meg a játékosok tanítási képességét befolyásolni. A foksám eloszlás inhomogenitása természetes választásként nyújtja azt a lehetőséget, hogy válasszuk a játékosok egyéni tanítási képességét a foksámukkal arányosan, tehát a k_y kapcsolattal rendelkező y játékos tanítási képessége $w_y = k_y/k_{max}$, ahol k_{max} a rendszerben előforduló legnagyobb foksám. Ennek a módosításnak a következményét összehasonlítottuk a skálamentes gráfon eddig tárgyalt lehetőségekkel. A 2.11. ábrán az együttműködők koncentrációját ábrázoltuk a b paraméter függvényében a különböző esetekre. Amint az várható volt, a legszerényebb együttműködési szintet az az eset eredményezi, amikor a normált nyereménynél egyformák a játékosok. Ahogy már korábban is említettük, a normálással lényegében eltűnik a gráf inhomogenitásából származó előnye.

Ehhez képest már az is lényeges javulást okoz, ha csupán kétfajta tanítási képességű játékost különböztetünk meg, ahol a játékosok tanítási képessége független a fokszám eloszlásuktól. Az együttműködés szempontjából még kedvezőbb, ha játékosok tanítási képessége és azok kapcsolatainak a száma egymással szoros kapcsolatban van. Ez utóbbi modell már képes a teljes b tartományban életben tartani az együttműködést. Összehasonlításként ábrázoltuk az abszolút nyereménnyel számoló eset eredményét is.



2.11. ábra. Az együttműködők aránya a b paraméter függvényében a skálamentes gráfon a vizsgált modellekben. Egyforma játékosok normált nyereménnyel (folytonos vonal), kétféle tanítási képesség véletlenszerű térbeli eloszlásban (szaggatott), fokszámmal arányos tanítási képesség (pontosított szaggatott) és egyforma játékosok abszolút nyereménnyel (pontosított).

Bár a 2.11. ábra ismételten erősíti azt a megállapításunkat, hogy a Santos-Pacheco modell sikerét is lényegében az egyirányú stratégiaáramlás biztosítja, további párhuzam vonható a kétféle modellben működő mechanizmusok között. Ennek illusztrálására a különböző esetekben megmértük az együttműködők arányát a befolyásos játékosokra szűkítve. A befolyásos játékosok definíciója a kétféle tanítási képességű modell esetén kézenfekvő ($w_y = 1$). Abban az esetben, amikor w_r többértékű lehet, ugyanazt az eljárást követtük, mint az előző fejezetben: azt tekintjük befolyásos játékosnak, akinek a tanítási képessége a logaritmikus skálán a felső harmadba esik. Mivel $w_y \sim k_y$, ezért ez praktikusán ugyanazokat a játékosokat jelenti, mint amelyeket nagy fokszámmal rendelkezőknek tekintettünk a 2.2.1. fejezetben. Az egyes modellekben nagyon eltérő az együttműködési szint, ezért az összehasonlíthatóság kedvéért azt a mennyiséget ábrázoltuk, amennyivel eltér a befolyásos játékosok körében az együttműködési szint az egész rendszerre átlagolt mértékhez képest.



2.12. ábra. Az együttműködők átlaghoz képesti nagyobb előfordulása a kiemelt játékosok körében a rendszer átlagos együttműködési szintjének a függvényében. A jelölés megegyezik a 2.11. ábrán használtakkal.

A 2.12. ábra első tanulsága az, hogy $\Delta\rho_c$ mindig pozitív, tehát az elősködés nem tud tartósan fennmaradni a kiemelt játékosok körében, mutatva azt, hogy különböző mértékben, de minden esetben működik a környezetre gyakorolt hatás visszacsatolódása. A szembetűnő hasonlóság a normált nyereményű, de fokszámmal arányos tanítási képesség és az abszolút nyereményű modell között pedig tovább erősíti a két modellben működő mechanizmusok hasonlóságára tett korábbi megállapításunkat.

Ennek a munkának a korábbi sejtések igazolásán túl érdekes megfigyelése volt a lokálisan (játékosonként változó) tanítási képesség együttműködést jelentősen befolyásoló hatása. A következő fejezetben azt fogjuk vizsgálni, hogy reguláris topológián milyen hatása van annak, ha a játékosok különbözősége nem két csoportra korlátozódik.

2.3. Játékosok különbözőségének mértéke

Láttuk, hogy a kapcsolati gráf topológiájának megfelelő inhomogenitás a játékosok között jelentősen befolyásolhatja az együttműködést. Ismét megengedve, hogy a játékosok egymástól különbözőek legyenek, megvizsgálhatjuk azt, hogy a sokszínűséget jellemző eloszlás jellege és mértéke milyen módon befolyásolja az együttműködést. Azért, hogy más forrású hatások ne zavarjanak, a továbbiakban célszerű rács topológiát használunk.

A vizsgált modellben a játékosok négyzetrácson helyezkednek el periodikus határfeltétel mellett és a már többször használt gyenge fogolydilemma játék határozza meg a kölcsönhatásukat. A játékosok sokszínűségét úgy érzük el, hogy minden egyes x játékoshoz hozzárendelünk egy véletlen ξ_x változót, amely skálázza a játékos nyereménymátrix elemeinek az értékét [44]. Két szomszédos i és j játékos esetén a mátrixelemek skálázódása $X' = X(1 + \xi)$, ahol X a lehetséges T, R, P, S nyeremények és $\xi = \min(\xi_i, \xi_j)$, azaz a vizsgált játékosokhoz rendelt véletlen értékek közül a kisebbik. Ilyen módon a nyereménymátrix elemek viszonya (érték szerinti sorrendje) fenntartható, tehát a kölcsönhatást továbbra is a fogolydilemma játék határozza meg. Megjegyezzük, hogy a maximális érték választása ugyanilyen hatást eredményezne. A játékosok sokszínűségét leíró valószínűségi változó eloszlására három reprezentatív eloszlást fogunk összehasonlítani. Ezek az eloszlások az egyenletes, exponenciális, illetve a hatványfüggvénnyel leírható, azaz:

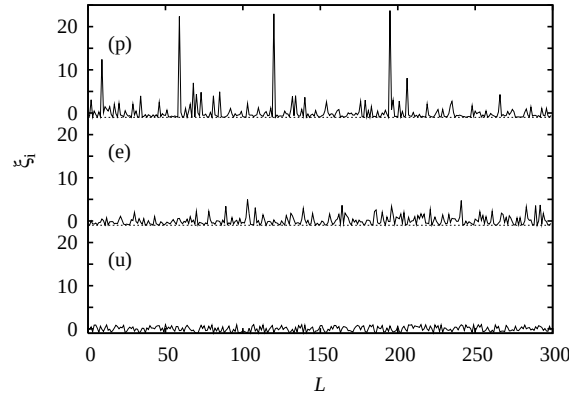
$$\xi = a(-2\chi + 1) \quad (2.4)$$

$$\xi = a(-\log \chi - 1) \quad (2.5)$$

$$\xi = a(\chi^{-1/n} - \frac{n}{n-1}) \quad \text{ahol } 2 \leq n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

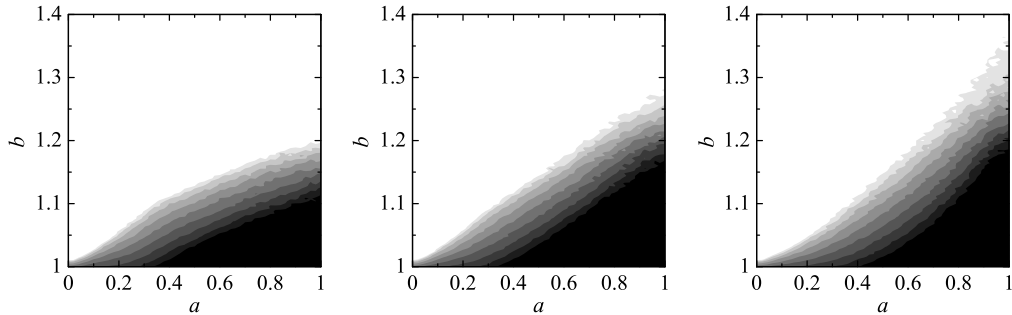
Itt χ egy, a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású véletlen változó. Mivel az eloszlásokra fennáll, hogy $\int_0^1 \xi(\chi) d\chi = 0$, ezért a sokszínűséget definiáló ξ paraméter összességében a teljes rendszerre nem fogja a nyeremények értékét befolyásolni. Az eloszlások előtt szereplő a amplitúdó értéke 0 és 1 közötti értékeket vehet fel, ahol $a = 0$ természetesen a „mindenki egyforma” esetnek felel meg. A hatványfüggvény és az exponenciális eloszlás közötti legnagyobb eltérés érdekében a továbbiakban a (2.6) eloszlásnál az $n = 2$ értéket fogjuk használni. A különböző eloszlásokból származó játékosokat egyénileg jellemző, nyereményértékeket skálázó ξ faktor térbeli eloszlását illusztrálja a 2.13. ábra, ami négyzetrács egy adott szeleténél ábrázolja az említett változót. Az ábrák összehasonlításából szembetűnik, hogy a legnagyobb egyéni különbségek, vagyis a játékosok közötti legnagyobb mértékű szétválás a (2.6) egyenlet szerinti hatványfüggvény eloszlásnál tapasztalhatóak, míg a legkisebb eltérések az egyenletes eloszlás esetén vannak.

Az említett eloszlásokat alkalmazó ξ skálafaktorokat használva azt tapasztaltuk, hogy az együttműködési szint mindhárom esetben meghaladta az egyforma játékosokat feltételező térbeli modellre kapott együttműködés mértékét. Az eloszlások eltérő



2.13. ábra. A játékosok sokszínűségét jellemző paraméter térbeli eloszlása a három vizsgált eloszlás esetén: hatványfüggvény (felső), exponenciális (középső) és egyenletes (alsó görbe).

mértékű hatását mutatja a 2.14. összehasonlító ábra. Mindhárom ábra közös jellemzője, hogy az a amplitúdó értékének a növelésével kiterjeszthető az a kritikus b_c érték, amíg az együttműködés valamilyen mértékben fenntartható. Sőt, a kizárólagosan együttműködő állapot ($\rho_c = 1$) is elérhető még a $b > 1$ tartományban is, ha a elegendően nagy.



2.14. ábra. Az együttműködési szint a $b - a$ paramétertérben, a vizsgált eloszlások esetén. A fehértől feketéig a szürke árnyalatai jelzik az együttműködők arányát 0 és 1 között. A bal oldali, középső és jobb oldali ábra rendre az egyenletes, exponenciális és hatványfüggvény eloszláshoz tartozó értékek.

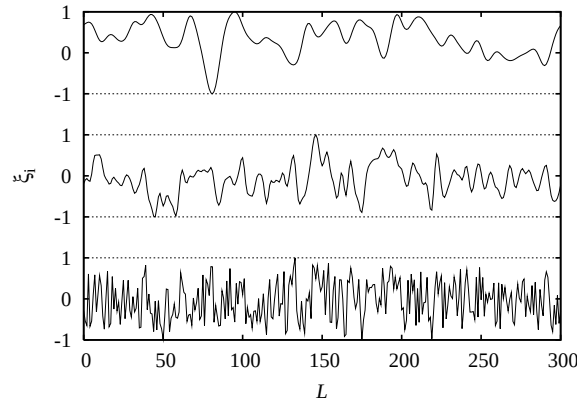
Az ábrák összevetéséből az is látszik, hogy a legmagasabb szintű együttműködést a hatványfüggvény eloszlással jellemezhető sokszínűség eredményezi. Ennek hátterében az áll, hogy ebben az esetben jön létre leghatékonyabban az a hierarchia, ami

révén a kiemelt befolyású játékos stratégiáját a környezetére kényszerítve egy kölcsönösen előnyös, vagy egymáson elősködő és ezért alacsony átlagos sikerességű állapotot hoz létre. A létrejött állapot élettartama természetesen összefügg a befolyásos játékos hosszútávú sikerességével.

A hierarchia fontosságát más formában is meg lehet mutatni a fenti modell keretei között. A továbbiakban egyenletes valószínűségi eloszlást feltételezve olyan ξ eloszlást fogunk használni, aminek a térbeli korrelációjára fennáll:

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle \propto \exp(-|i - j| / \lambda), \quad (2.7)$$

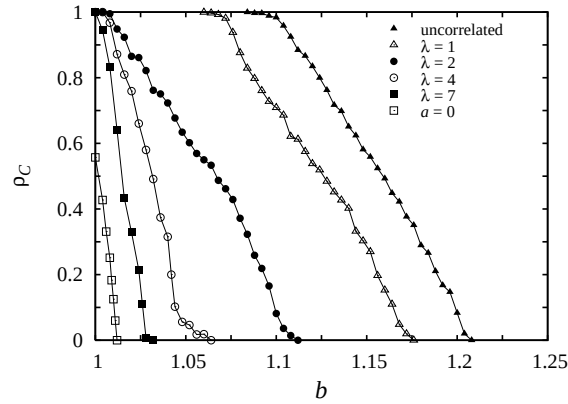
ahol $|i - j|$ a két játékos távolsága és λ a korrelációs hossz. A λ növelésével lokálisan egyre inkább hasonló játékosokból fog állni a rendszer, ami a hierarchia kialakulását nehezíti. Illusztrációként a 2.15. ábrán a fenti, (2.7)-nek megfelelő ξ eloszlások térbeli metszetét ábrázoltuk három reprezentatív λ értéknél. A hierarchia fontosságát hang-



2.15. ábra. A játékosok sokszínűségét jellemző paraméter térbeli eloszlása egyenletes eloszlás mellett különböző mértékű térbeli korreláció esetén. $\lambda = 1$ (alsó), 3 (középső) és 7 (felső ábra).

súlyozó érvelés alapján azt várjuk, hogy a λ növelésével folyamatosan csökken az átlagos együttműködés, és annak értéke egyre inkább közelíti az egyforma játékosok feltételezésével kapott eredményt. Ezt a várakozásunkat alátámasztja a 2.16. ábra, ahol a különböző λ értékek esetén kapott eredményeket hasonlítottuk össze.

Az eddigi eredmények összefoglalásaként elmondhatjuk, hogy a Nowak és May által felismert térbeli kölcsönösségen alapuló, együttműködést segítő mechanizmus lényegesen felerősíthető, ha a játékosok valamilyen hierarchia szerint szerveződtek. Ez



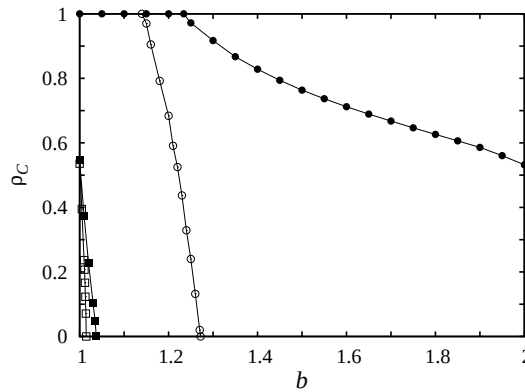
2.16. ábra. Az együttműködési szint b függése különböző mértékű térbeli korrelációknál. $a = 0$ az egyforma játékosokat feltételező modell eredménye.

a hatás drámai módon felerősödhet a skálamentes gráfon, de tapasztalható homogén, ráccsal jellemezhető kapcsolati rendszer esetén is, ha megengedjük a játékosok különbözőségét. Az utóbbi megnyilvánulhat a stratégiaátadó képességükben vagy más, pl. a nyereményt meghatározó elemek skálázódásában is. Ugyanakkor nem szabad elfelednünk, hogy a rács topológia még akkor is szerényebb együttműködési szintet tudott produkálni, ha a játékosok között lényeges különbség van. Ennek hátterében az állhat, hogy a lokálisan felerősödő együttműködő vagy elősködő hatások csak indirekt módon, a csoportok érintkezései mentén tudnak egymással vetélkedni. Így ha biztosítani tudnánk a csoportok közötti hatékonyabb információáramlást, akkor vélhetően nagyobb mértékű együttműködés lenne elérhető. Ezt a gondolatmenetet ellenőrizzük a következő fejezetben.

2.4. Mesterek közötti kapcsolata szerepe

Továbbra is a gyenge fogoly dilemma játékot vizsgáljuk úgy, hogy a játékosok négyzetrácson helyezkednek el, ahol a nyereményüket az elsőszomszéd kölcsönhatás határozza meg. A játékosok stratégiaátvételét a korábban bevezetett (2.3) egyenlet határozza meg. Az egyszerűség kedvéért, illetve a korábbi eredményekkel való összehasonlíthatóság érdekében kétfajta játékot feltételezünk, $w_y = 1$ teljes és $w_y = 0.01$ korlátozott tanítási képességgel. Az előbbi, lényegében kiemelt képességű játékosok μ koncentrációban vannak jelen [45]. Eddig a pontig a modell megegyezik a 2.1. fejezetben ismertetett modellel, azzal a különbséggel, hogy a korábbi munkában a korlátozott

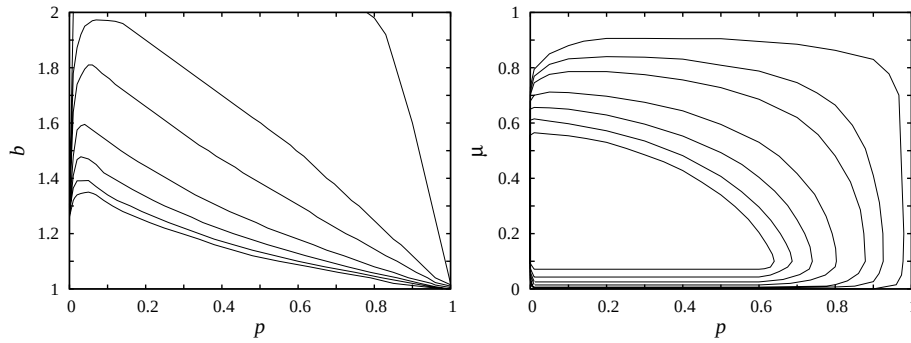
tanítási képességű játékosok koncentrációját jelöltük ν -vel. Nyilván $\nu = 1 - \mu$, az újabb jelölést azért vezettük be mégis, mert a kiemelt játékosok fontosságát kívántuk ilyen módon is hangsúlyozni. (Ez az első munkánál még nem volt ilyen nyilvánvaló.) Az eddigi modell módosításaként p valószínűséggel megengedjük, hogy a kiemelt játékosok stratégiaátadás szintjén ideiglenesen kapcsolatba kerüljenek egy másik, véletlenszerűen választott, szintén kiemelt képességű játékosal. Nyilván $p = 0$ esetén visszakapjuk a 2.1. fejezetben tárgyalt modellt, míg a másik, $p = 1$ határesetben egy olyan rendszert kapunk, amikor a kiemelt játékosok csak egymásnak képesek stratégiát átadni. A modell definíciójából az is következik, hogy a kapott eredmények normált nyeremény esetén is érvényesek, bár a homogén kapcsolatok miatt a normálásra nem volt szükség. Az eredményeket viszonylag magas zajszint ($K = 2$) esetén mutatjuk, ahol a korábbi tapasztalatok alapján az eltérő tanítási képesség hatása markánsabb, de ettől eltérő K értéket is vizsgáltunk, amit külön jelezni fogunk.



2.17. ábra. Az együttműködők a b paraméter függvényében. $\mu = 1$ és $p = 0$ (üres négyzet), $\mu = 1$ és $p = 0.03$ (tömör négyzet), $\mu = 0.12$ és $p = 0$ (üres kör), $\mu = 0.12$ és $p = 0.03$ (tömör kör).

A korábbi modellek eredményeivel történő összehasonlítás révén, elsőként azt mutatjuk meg, hogy ez a kis módosítás milyen jelentős mértékben képes az együttműködő stratégiát támogatni. A 2.17. ábra négy paraméter kombináció és így négy különböző modell eredményét mutatja. A $\mu = 1$ és $p = 0$ kombináció megfelel az egyforma képességű játékosok esetének, akik csak lokálisan érintkezhetnek. A Nowak-May-féle modell szerint, a kapcsolatok korlátossága már képes olyan hatást előidézni, hogy az

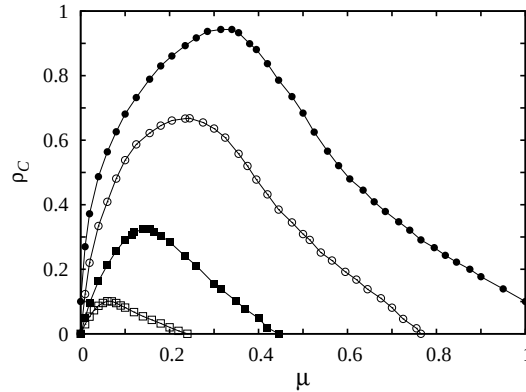
együttműködés fennmaradjon $b > 1$ esetén is, még akkor is, ha a szinkronizált stratégiaátvétel helyett stochasztikus utánzással fejlődik a rendszer. De ez csupán egy szerény mértékű javulást jelent. A $\mu = 1$ és $p = 0.03$ paraméterek esetén továbbra is homogén játékosok vannak, de közöttük már a kis-világ-szerű kapcsolat áll fenn. Az ábrán jól látszik, hogy önmagában ez a hatás sem képes lényeges változást eredményezni. Jelentősebb javulást a 2.1. fejezet modellje hoz, amit pl. a $\mu = 0.12$ és $p = 0$ paraméterek révén érhetünk el. A legnagyobb együttműködést a kiemelt játékosok kapcsolatát lehetővé tevő esetben (nemzérus $\mu = 0.12$ és $p = 0.03$ paraméterek) kapunk, ahol az együttműködési szint már egyenrangú a skálamentes gráfon kapott eredménnyel. Ugyanakkor a jelenlegi esetben mindezt a nyeresmények *normálása* révén is el tudjuk érni. Láthatóan a két hatás (egyenlőtlen játékosok, illetve direkt kapcsolat a vezetők között) együttes kombinációja képes a legmarkánsabb hatást elérni.



2.18. ábra. Az együttműködés mértéke a különböző paraméterek függvényében. Mindkét ábrán azokat a „szintvonalakat” mutatjuk, ahol az együttműködők aránya rendre 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1 és 0 (bal alsó saroktól a jobb felső sarok irányában). A bal oldalon $\mu = 0.3$, illetve a jobb oldalon $b = 1.1$ a rögzített paraméter értéke.

Annak érdekében, hogy felmérjük a különböző hatások mértékét és befolyásának a jellegét, azokat külön-külön változtatva mértük az együttműködés szintjét. A 2.18. ábrák két jellegzetes példát mutatnak. A bal oldalin a b és p paraméterek függvényében ábrázoltuk az együttműködés mértékét rögzített $\mu = 0.3$ mellett. A modell első szembevető eredménye az, hogy az együttműködő stratégia a teljes b tartományban képes életben maradni, sőt, egy jelentős $b > 1$ tartományban teljesen kiszorítja az élősködést. Az utóbbi stratégia a számára kedvező magas b értékek ellenére csak a nagyon nagy, illetve a nagyon kicsi p értékek esetén tud kizárólagossá válni. Az ábra azt is sejteti, hogy az együttműködés szempontjából van egy optimális p érték, amitől mindkét

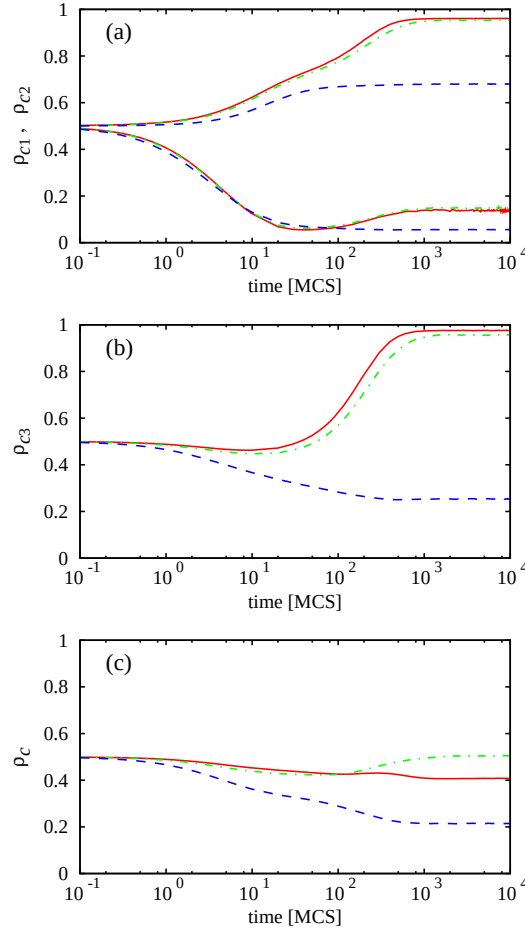
irányban eltérve csökken az együttműködés mértéke. A jobb oldali ábrán, ahol rögzített $b = 1.1$ -nél rajzoltuk fel a szintvonalakat, szintén látható, hogy elsősorban a kisebb p értékek a kedvezőbbek az együttműködés szempontjából. A kétféle játékost tartalmazó korábbi modellnél megfigyelt nem monoton függés a μ paramétertől itt is megfigyelhető, de annak a változása a viszonylag kis b érték miatt itt nem észlelhető.



2.19. ábra. Az együttműködők aránya a befolyásos játékosok koncentrációjának a függvényében rögzített $p = 0.4$ és $K = 0.4$ értékeknél, különböző $b = 1.1$ (tömör kör), 1.2 (üres kör), 1.5 (tömör négyzet) és 2 (üres négyzet) értékek esetén.

Az együttműködési szint μ függése jobban érzékelhetővé válik, ha azt különböző b értékek esetén ábrázoljuk rögzített $p = 0.4$ és $K = 0.4$ értékek esetén. A 2.19. ábrán mutatott, a korábbiaktól eltérő viszonylag kis K érték választására azért volt szükség, mert az eddig használt $K = 2$ olyan magas együttműködési szintet eredményezne, ami nem tenné lehetővé a μ paraméter optimális helyzetének a meghatározását. A legérdekesebb észrevétel az, hogy az optimális μ (a kiemelt játékosok aránya) csökken a b növelésével és egy nagyon alacsony $\mu \approx 0.1$ értékhez tart $b = 2$ -nél.

A kis μ értéknél lévő optimum hasonló mechanizmus alapján érthető meg, mint amit korábban, a skálamentes gráf esetében megfigyeltünk. Az utóbbi esetben a nagyobb nyereség miatt, míg a most vizsgált modellben a nagyobb tanítási képesség révén a kiemelt játékosok rákényszerítik a stratégiájukat a környezetükre. Ez a hatás akkor tud igazán homogén környezetet létrehozni és ilyen módon az irányító játékos számára „visszacsatolást” biztosítani, ha az irányító játékosok térben kellően elkülönülnek egymástól ahhoz, hogy az általuk befolyásolt játékosok ne ugyanazok legyenek. Azzal a problémával, hogy miként tudunk egy adott tartományra véletlenszerűen elemeket elhelyezni úgy, hogy bizonyos átfedési tilalmaknak megfeleljenek, a fizikai



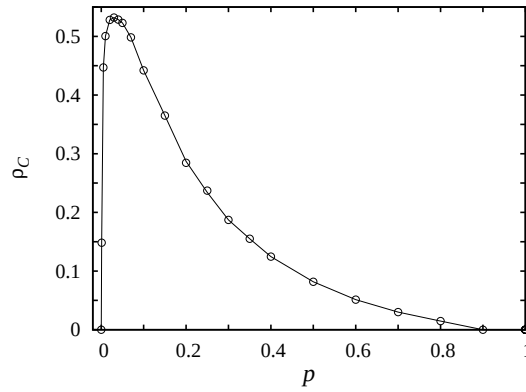
2.20. ábra. Az együttműködés mértékének időbeli változása különböző csoportokra számolva. Felső ábra: a befolyásos élősködők (ρ_{c1}), illetve a befolyásos együttműködők környezetében (ρ_{c2}). Középső ábra: az együttműködés a befolyásos játékosok között (ρ_{c3}). Alsó ábra: a teljes rendszerre átlagolt érték. A rögzített paraméterek $p = 0.03$ és $b = 2$, a befolyásos játékosok koncentrációja $\mu = 0.07$ (szaggatott-pontozott zöld), 0.1 (folytonos piros) és 0.25 (szaggatott kék vonal).

kémiában a véletlen folytatólagos adszorpció (random sequential adsorption) keretein belül már foglalkoztak [86] és pl. négyzetrácsra másodsomszéd kapcsolatok kizárásával $\theta_s = 0.1869(1)$ -nek adódott a maximálisan elérhető betöltöttség [12]. A jelenlegi esetre, tehát amikor a játékosoknak nem lehet közös elsőszomszéd kapcsolatuk sem, a maximális betöltöttségre a $\mu_c = 0.13965(5)$ numerikus eredményt kaptuk. Ez tehát egy felső korlát arra a koncentrációra, aminél a kiemelt játékosok még nem zavarják közvetlenül a másik befolyási körébe eső játékosokat.

A kiemelt játékosok koncentrációjának a hatását az együttműködés időbeli fejlődésére három jellemző értéknél mutatjuk be, ahol $\mu = 0.07$ kisebb, $\mu = 0.25$ nagyobb, és $\mu = 0.1$ pedig közel van az 2.19. ábrán mutatott optimális koncentrációhoz. Az együttműködés időbeli változásának a megértéséhez, amit 2.20.c ábra mutat, nem csupán a teljes rendszerre átlagolt együttműködési arányt (ρ_c) és nem csupán a kiemelt játékosokra vonatkozó átlagot (ρ_{c3}) mértük, hanem meghatároztuk az élősködő (együttműködő) kiemelt játékosok közvetlen elsőszomszédai által definiált környezetében is az együttműködők arányát, amit ρ_{c1} -vel (ρ_{c2} -vel) jelöltünk. A 2.20.a ábrán jól látszik, hogy az első, kb. 100 MC lépésig tartó szakaszban mindhárom μ koncentrációnál a kiemelt játékosok sikeresen befolyásolják a környezetüket, az említett játékosok körében hatékonyan nő az élősködés illetve az együttműködés. (Ez alól csak a $\mu = 0.25$ eset kivétel, ahol éppen a hatókörök átfedése miatt a kiemelt élősködők befolyásolni tudják a kiemelt együttműködők környezetét.) Amint az együttműködési szint teljesen lecsökkent a kiemelt élősködők körében (tehát ρ_{c1} elérte a minimumát), az utóbbi játékosok sebezhetővé válnak az együttműködő stratégiájú befolyásos játékosokkal szemben, akikkel a kommunikációt a véletlen kapcsolatok teszik lehetővé. (A 2.20.a ábra arra is rámutat, hogy a hatókörök átfedése nem a befolyásos élősködőket gátolja meg elsősorban a környezetük pusztításában, hanem az együttműködőket a "jó" stratégia feltétlen elterjesztésében.) Az előbbieket miatt a $\mu = 0.07$ és $\mu = 0.1$ -nél egyértelművé vált harc eredményeképpen a befolyásos játékosok körében sikeresen el tud terjedni az együttműködés (2.20.b ábra), akik végül a környezetükben is növelni tudják az együttműködési szintet (2.20.c ábra). A (b) és (c) ábrák összevetéséből az is látszik, hogy a $\mu = 0.07$ és a $\mu = 0.1$ esetek között nincs kvalitatív különbség, itt csak arról van szó, hogy a ritkábban elhelyezkedő befolyásos játékosok nem tudnak közvetlenül hatással lenni a teljes rendszerre. Minőségi különbség csak akkor van, amikor a hatókörök átfedése miatt a környezetre gyakorolt hatás nem tud hatékonyan működni, ezért a befolyásos játékosok körében sem nőhet meg az együttműködési szint (2.20.b ábra). A fent leírt mechanizmus a legélesebben nagy b értéknél jelentkezik, hiszen itt a leginkább eltérő a két stratégia hatása.

Az előbbiekből láttuk, hogy milyen fontos szerepe lehet az együttműködők sűrűségének, hiszen azok nagy sűrűsége megakadályozhatja az előbbi mechanizmus működését. Hasonlóan gátló hatást érhetünk el úgy is, ha a kívánatosnál intenzívebb kapcsolatot létesítünk a befolyásos játékosok között, mert az megakadályozza az élősködőket

abban, hogy szembesüljenek a stratégiájuk következményével. Ez utóbbit illusztrálja a 2.21. ábra is, ahol az együttműködési szint egy éles maximumot mutat $p \approx 0.03$ -nál. Érdeemes megjegyezni, hogy a finoman hangolt információcsere képes a kizárólagosan élősködő állapotból elmozdítani a rendszert egy olyan állapotba, ahol az együttműködők már többségben vannak. Ugyanakkor a túl intenzív információcsere ellenkező hatást vált ki és újra a „közösség tragédiájának” nevezett állapotba juttatja a rendszert.



2.21. ábra. Az együttműködők aránya a p függvényében $\mu = 0.12$ és $b = 2$ rögzített értékeknél.

Az általunk megfigyeltekkel hasonló következtetésre jutottak kínai kutatók is, akik a skálamentes topológiát úgy módosították, hogy a kötések számának állandó értéken tartása mellett a nagyobb foksámú játékosok közötti kapcsolatok számát növelték (assortative mixing) [49]. Az előbbieket alapján érthető, hogy ez a módosítás szintén csökkentette az együttműködés szintjét, hiszen a nagy foksámú játékosok közötti intenzívebb kapcsolat nem engedte meg, hogy az együttműködők kellő mértékben meg erősödjenek az élősködő centrumok legyőzéséhez.

Egy adósságot törlesztve, a 2.1. fejezetben ismertetett megfigyeléseink az eddig vizsgált modellek alapján érthetővé váltak. A különböző típusú inhomogenitások (tanítási-, tanulási-képesség, nem egyforma erősségű információáramlást biztosító kapcsolatok) közül csak a tanítási képesség különbözőségét feltételező eset képes arra, hogy a Nowak-May-féle alapmodellnél talált térbeli kölcsönösség (spatial reciprocity) hatást tovább erősítse. A nagyobb tanítási képességű játékosok rákényszerítik a környezetükre a stratégiájukat, aminek következtében vagy erősödnek (együttműködő), vagy gyengülnek (élősködő stratégia esetén), ami meghatározza a hosszútávú esélyeiket. Hasonlóan ahhoz, amit a skálamentes gráfot használó modellből tanultunk.

Ezek alapján az is érthető, hogy miért produkált gyenge eredményt az eltérő tanítási képességű modell, ha a befolyásos játékosok sakktábla-szerűen voltak elhelyezkedve: az elsőszomszéd kapcsolat miatt két, egyébként közvetlen kölcsönhatásban nem lévő befolyásos játékos részben ugyanazokat a szomszédokat „használta”, ezért a térbeli kölcsönösség, másképpen a környezetre gyakorolt hatás visszacsatolódnak nem tudott működni. Ha egy élőködő befolyásos játékosal másodszomszéd kapcsolatban egy együttműködő volt, akkor a utóbbi mindig együttműködést sugallt a közös, nem befolyásos szomszédokra, amit az előbbi élőködő folyamatosan magas szinten tartott nyereségben használt ki.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a kapcsolati rendszer heterogenitása illetve játékosok eltérő tanítási képessége végső soron nagyon hasonló mechanizmus működését teszi lehetővé: mindkét esetben az információs centrumok, tehát a többiek számára példát mutató játékosok jelenléte felerősíti a környezetre gyakorolt hatás visszacsatolódását. Ha egy centrum a kölcsönösen előnyös együttműködést szorgalmazza a környezetével, akkor ez őt fokozatosan erősíteni fogja, egyre nagyobb nyereség összegyűjtése révén. Ugyanakkor egy olyan centrum, amely élőködik a környezetén, a nagy nyereség vagy az egyirányú stratégiainvázio révén ragadós példaként szolgál a környezetében. Ez viszont a példakép számára egyre kisebb nyereséget jelent, aki így egy másik centrummal történő játék esetén könnyen veszít. A fentiek működéséhez nélkülözhetetlen feltétel még az, hogy a centrumok egymástól zavartalanul fejthessék ki a hatásukat, viszont az se jó, ha közöttük egyáltalán nincs kapcsolat, hiszen mind a túl sok, mind a túl kevés vezető közötti információcsere meggátolja a hosszútávon kívánatos folyamat bekövetkezését.

3. fejezet

Koevolúciós modellek

Az eddig tárgyalt modellekben mindig feltételeztük, hogy bizonyos jellegű inhomogenitás definíció szerint jelen volt a rendszerben és azt vizsgáltuk, hogy annak milyen következménye volt a két stratégia arányának a fejlődésére. Az ilyen típusú modellek reálisak lehetnek akkor, ha valamilyen külső körülmény hatásaként áll fenn az említett különbözőség és az közvetlenül befolyásolható. Ekkor valóban indokolt lehet az a kérdés, hogy miként változtassunk ezeken a körülményeken a minél nagyobb mértékű együttműködés érdekében.

Ugyanakkor könnyen elképzelhetők olyan helyzetek, amikor nem tudjuk a játékosok korábban vizsgált tulajdonságait kívülről befolyásolni, illetve azok kezdetben nem különböznek lényegesen. Elvileg ilyenkor előfordulhat az, hogy ezek az egyéni tulajdonságok az időben változnak és a változás összefüggésben áll a játékosok állapotát kifejező stratégia változásával. Így tehát az említett két mennyiség egymással kölcsönhatva fejlődik és az együttes fejlődésük eredményeként fog kialakulni a rendszert jellemző együttműködési szint. Az ilyen, két mennyiség egymással kölcsönható változásával is számoló rendszereket koevolúciós modelleknek nevezzük. Bár a terminológia a biológiából ered és előfordul, hogy egyes biológusok nem pontosan ilyen folyamatokat értenek alatta, de a fizikában ez általában nem okoz problémát, mert használatakor a szerzők mindig meghatározzák, hogy milyen tulajdonságok vagy állapotok szimultán változását értik alatta. Ebből következően nem csupán a játékelméleti munkákban találkozhatunk a kifejezéssel, hanem más, pl. vélemény formálódást leíró modellekben is [21, 24].

A dolgozat hátralevő részében olyan térbeli játékelméleti modelleket vizsgálunk, ahol a játékosok szomszédoktól történő stratégia átvételét továbbra is a nyeremény különbség fogja meghatározni, de ezen túlmenően a játékosoknak más, egyéni jellemzője

is változhat, ami befolyásolhatja a nyereményeloszlást és a stratégiaátadás folyamatát. Az egyik fontos kérdés annak a tisztázása, hogy milyen elemi folyamatok révén alakulhat ki olyan fajta inhomogenitás, amit a dolgozat első részében az együttműködés szempontjából előnyösnek találtunk. A koevolúciós modellek nyilván bonyolultabban, mint az ún. sztatikus modellek, ahol csupán a játékosok stratégiája változhat. Ez az új típusú bonyolultság elvileg lehetővé teszi azt, hogy olyan új mechanizmusokat is megfigyeljünk, amelyeket a korábbi egyszerűbb modellek nem tettek lehetővé. A modellek bonyolultabbá válása nem feltétlen jó hír, hiszen az egyre több paraméter szimultán kezelését igényli, ami esetleg csökkentheti a modellekből levonható tanulságok érvényességi körét. De éppen a koevolúciós modellek használata arra is példát mutathat, hogy az ilyen bonyolultabb dinamikák alapján olyan önszerveződés mehet végbe, ami lényegesen csökkentheti a vizsgálatra érdemes szabadsági fokokat (paramétereket), így egyszerűsítve a kezdetben túlságosan is bonyolultnak tűnő modellt.

3.1. A tekintély spontán kialakulása

Mivel a tanítási képesség vagy másképpen mondva a játékosok tekintélyének az inhomogenitása a kapcsolati gráf topológiájától függetlenül hatékonyan segítette az együttműködést, ezért érdemes ennek a mennyiségnek az esetleges fejlődését vizsgálni. A legfontosabb kérdés tehát az, hogy ki tud-e alakulni a játékosok tekintélyében megfigyelhető inhomogenitás valamilyen elemi folyamat következtében. Annak érdekében, hogy az új lehetőség hatását minél könnyebben azonosítani tudjuk, érdemes a legegyszerűbb ráccstopológiát használni.

A továbbiakban vizsgált modellben a játékosok egy négyzetrácson helyezkednek el és a stratégiájuk (együttműködő vagy élősködő) mellett a stratégiaátadó képességük is egyénileg változhat [63]. A szomszéd játékosnak történő stratégiaátadás valószínűségét a korábban már használt (2.3) összefüggés határozza meg, ami tehát a játékosok nyeremény különbségén és a K zajparaméteren túl, tartalmazza a stratégiát átadó játékost jellemző tanítási képességet is. Kezdetben minden játékosnak egyformán egy minimális tanítási képessége van $w_y = w_{min} \ll 1$. Azért, hogy elkerüljük a befagyott állapotot, egy nemzérus $w_{min} = 0.01$ értéket használtunk. Ha egy játékos sikeresen ad át stratégiát egy szomszédjának, akkor a tanítási képességét megnöveljük: $w_y \rightarrow w_y + \Delta w$. Végül a játékosok tanítási képességének a változását megállítjuk, ha valamelyik w_y érték eléri az 1-et.

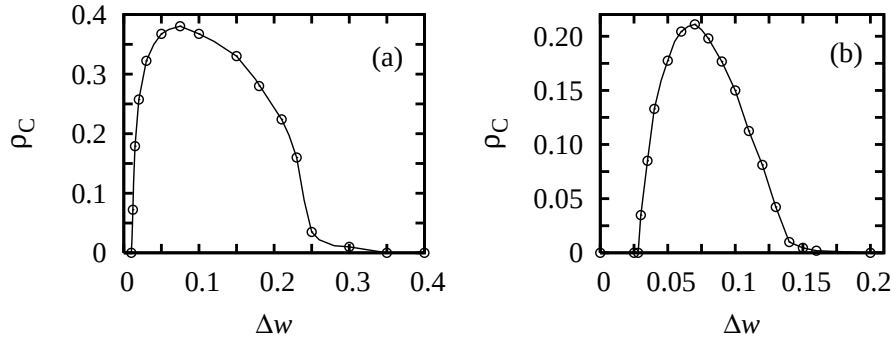
Anélkül, hogy különösebben indokolnánk, számtalan életből vett helyzetet idézhetünk, ami alátámasztja a definiált koevolúciós dinamika létjogosultságát. Például könnyen elképzelhető az a helyzet, hogy valakinek attól nő a tekintélye, hogy az a hír járja, hogy gyakran szokott tanácsokat adni. Emiatt még többen fordulnak hozzá, ami tovább erősíti az említett hírt, így az illető tekintélyét is. De említhetnénk azt is, hogy ha a környezetünkben tanácsért (követhető mintáért) fordulunk valakihez, akkor könnyen előfordul, hogy egy másik alkalommal is inkább hozzá fordulunk. Természetesen az említett példákat a vizsgált absztrakt, és rendkívül egyszerű modell szempontjából nem szabad túl komolyan venni, de a modell mindenképpen alkalmas arra, hogy feltárja egy ilyen típusú dinamikával jellemezhető rendszer lehetőségeit.

Bár a tanítási képességek fejlődésének a megállítása önkényesnek tűnhet, de az pusztán a technikai kivitelezést könnyíti meg. Ennek alátámasztására, kipróbáltunk egy alternatív fejlődési szabályt is, ahol a játékosok tanítási képességének a növekedése nem állt meg, csupán figyelembe vettük, hogy ez a (2.3) összefüggésben egy prefaktor, így azt normáltuk ($w'_y = \frac{w_y}{w_{max}}$), amint a w_{max} maximális érték meghaladta az 1-et. Sőt, további, látszólag más típusú szabály használatára is lehetőség van, amelyben a w fejlődését nem kell mesterségesen megállítani, de w_{max} mégsem éri el az 1 határértéket. Ekkor természetesen Δw időben nem állandó, hanem az aktuális maximális tanítási képesség függvénye: $\Delta w = (1 - w_{max})/N$, ahol N egy rögzített konstans. Ez utóbbi szabály szintén indokolható életszerű helyzetekkel, például könnyen elképzelhető, hogy egy tevékenység „elismerése” időben csökken. Gondoljunk csak arra, hogy egy területet megnyitó, úttörő publikáció elismertsége lényegesen nagyobb, mint egy későbbi, azt követő munkáé. A látszólagos különbségek ellenére az említett tanítási képességet befolyásoló dinamikai szabályok nagyon hasonló eredményt adtak és a végső konklúziót érdemben nem befolyásolták.

A modell minél szélesebb körű feltérképezése érdekében nem csupán az eddig használt gyenge ($T = b, R = 1, P = S = 0$) fogolydilemma játékot, hanem a héja-galamb játék definiálta kölcsönhatást is vizsgáltuk. A könnyebb kezelhetőség érdekében az utóbbi esetben is az egy paraméterrel leírható módon adjuk meg a nyereménymátrix elemeit. Ennek megfelelően $T = 1 + r > R = 1 > S = 1 - r > P = 0$, ahol $r \in [0, 1]$ esetén a 1.1. ábrán pontozott kék vonallal jelölt egyenes mentén szelhetjük át a héja-galamb paraméter tartományt.

Maradva az elsőként említett, rögzített Δw értéket használó szabálynál, azt vizsgáltuk, hogy miként befolyásolja az együttműködést a Δw paraméter értéke rögzített

b és r értékek esetén. Két jellemző példát mutatunk a 3.1. ábrán a vizsgált játékok esetén. A bal oldali a fogolydilemma játék eredménye $b = 1.05$ és $K = 0.1$, míg a jobb oldali ábra a héja-galamb esete $r = 0.6$ és $K = 2$ rögzített paraméterek esetén.

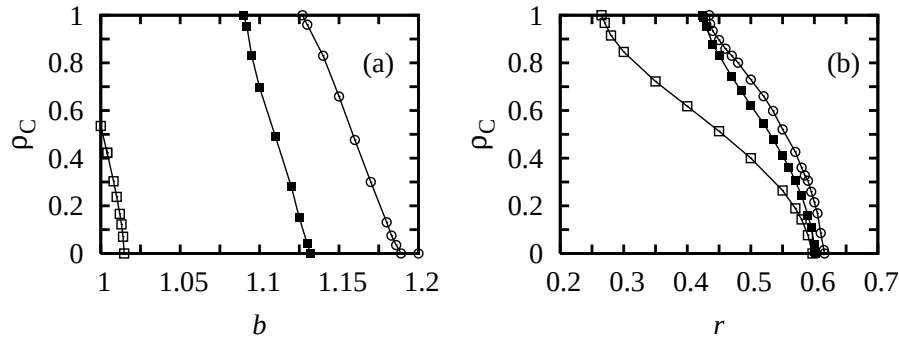


3.1. ábra. Az együttműködő stratégia gyakorisága a Δw paraméter függvényében a fogolydilemma (a), illetve a héja-galamb játékokra (b). Mindkét esetben az optimális hatást a $\Delta w \approx 0.07$ estén érhetjük el.

Nyilvánvalóan a $\Delta w = 0$ eset megfelel az egyforma játékosokat feltételező esetnek, amikor az együttműködés mértéke csak kis b vagy r értékek esetén különbözik zérustól. Kis Δw paraméter érték esetén a helyzet csak kissé változik, hiszen a hatására létrejövő tanítási képességben jelentkező inhomogenitás továbbra sem jelentős. (A játékosok tekintélye lényegében együtt nő.) A Δw értékének további növelésével az együttműködés átlagos szintje jelentősen emelhető. Ha viszont túl nagyra választjuk a tekintély változását meghatározó Δw konstans, akkor az újra az együttműködési szint csökkenését vonja maga után. Ezt azzal magyarázhatjuk, hogy néhány kezdetben sikeres játékos esetén olyan gyorsan növekszik a stratégiaátadó képesség, ami a játékosoknak a tekintély szempontjából csupán két csoportra történő szétválását teszi lehetővé. Az ilyen szintű különbözőség ismételten csak mérsékelt együttműködést eredményez.

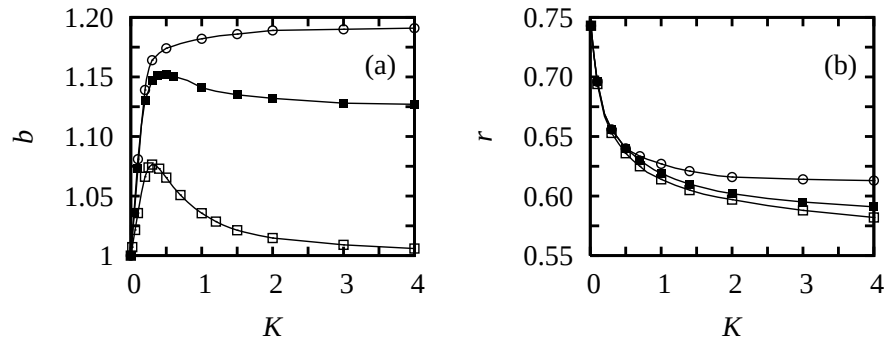
A továbbiakban mindkét modellre a $\Delta w = 0.07$ paraméter értéket használjuk, ami közel optimális körülményt fog biztosítani. Annak érzékeltetésére, hogy a koevolúciós modell milyen mértékben biztosít kedvezőbb körülményt az együttműködésre, az összehasonlítás érdekében a 3.2. ábrán felrajzoltuk két, korábban már vizsgált modell eredményét is, azonos paraméter értékek esetén. Mint már említettük, a legszerényebb mértékű együttműködést a Nowak-May-féle egyforma játékosokat feltételező modell nyújtja. Ehhez képest már lényeges javulást jelent az, ha kétféle ($w_y = 1$ és

$w_y = 0.1$) tanítású képességű játékos van egyenlő arányban, ahogy arra a 2.1. fejezetben már utaltunk. További javulást eredményez a koevolúciós modell használata, elsősorban az együttműködés szempontjából nagyobb kihívást jelentő fogolydilemma játék esetén. Ez az eredmény is alátámasztja azt a korábbi megfigyelésünket, hogy az együttműködés szempontjából előnyösebb, ha a tanítási képességek sokszínűbbek és nem korlátozódnak a csupán kétféle, mester-tanítvány lehetőségre.



3.2. ábra. Az együttműködés mértéke a nyereménymátrixot meghatározó paraméter függvényében a fogolydilemma (bal oldal) és a héja-galamb játék esetére (jobb oldal). Mindkét ábrán üres négyzet jelöli a homogén játékosokat feltételező, tömör négyzet a kétféle tanítási képességű, míg üres kör a koevolúciós modell eredményét.

A teljesebb áttekintés érdekében az említett modellekhez tartozó nyereménymátrix-zajparaméter fázisdiagramokat is összehasonlítjuk a 3.3. ábrán.

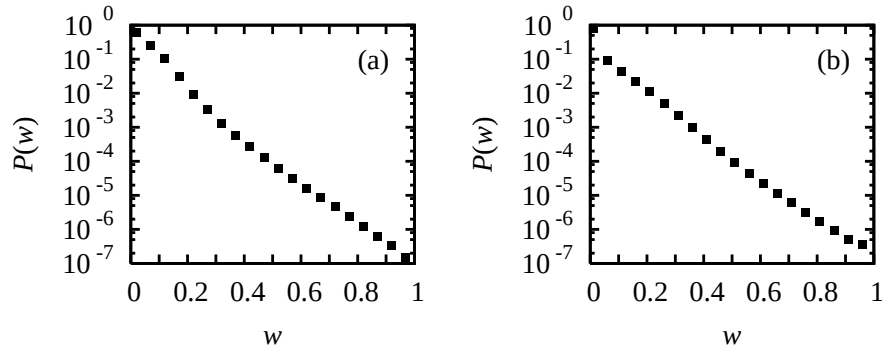


3.3. ábra. A nagyobb b illetve r értékekre jellemző tiszta élőködő (D) és a vegyes, mindkét stratégiát tartalmazó ($C + D$) fázisok határa mindkét játékra, az előző ábrán említett modellek esetén.

Itt csupán azokat a fázishatárokat rajzoljuk fel, ami a kizárólagosan élőködőket tartalmazó D állapotot választja el attól a $C + D$ fázistól, ahol mindkét stratégia tartósan fenn tud maradni. Másképpen mondva, az ábrázolt vonalak azokat a maximális

b illetve r értékeket mutatják, ahol rögzített K paraméter értéknél az együttműködő stratégia még életben tud maradni.

A fázisdiagramok összehasonlítása megerősíti az előző ábra következtetéseit, világosan mutatva, hogy a koevolúciós modell révén végbemenő tanítási képesség fejlődése mindkét modell esetén nagyobb mértékű együttműködést képes eredményezni, különösen a nagyobb zajt feltételező tartományokban. Természetesen merül fel a kérdés, hogy vajon a koevolúciós folyamat eredményeképpen kialakult tanítási képesség eloszlás mennyiben tér el a korábban vizsgált kétértékű, mester-tanítvány szerepeket feltételező modelltől. A választ a 3.4. ábra mutatja, ahol két jellegzetes eloszlást ábrázoltunk $\Delta w = 0.07$ esetén, a használt paraméterek $b = 1.05$, $K = 0.1$ (fogolydilemma) és $r = 0.6$, $K = 2$ (héja-galamb) játékra.



3.4. ábra. A koevolúciós modellek eredményeként adódó tanítási képességek eloszlása a fogolydilemma (a) és a héja-galamb (b) játék esetén.

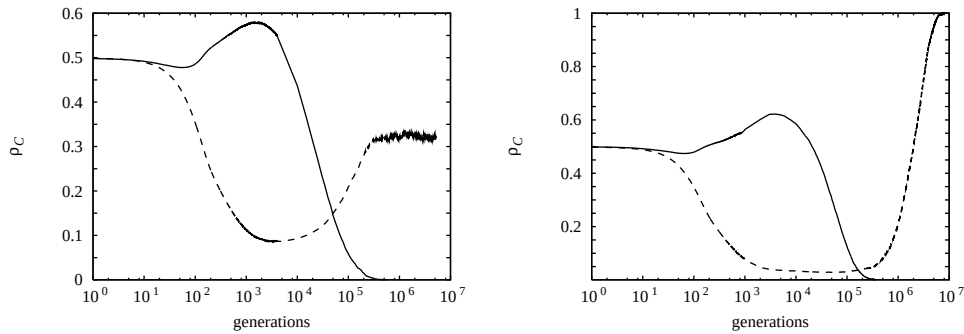
Az ábrák világosan mutatják az erősen inhomogén (exponenciális eloszláshoz közeli) tanítási képesség eloszlás spontán kialakulását, amiről a modell egyszerűsége ellenére képes volt számot adni. A spontán módon kialakuló különbségek fejlődése szoros kapcsolatban volt a nyereményt meghatározó stratégiák változásával és az együttes fejlődés eredményeképpen olyan mértékű együttműködést tesznek lehetővé, ami meghaladja a korábbi, szintén különböző játékosokat feltételező modell eredményét. Fontos hangsúlyozni, hogy az általunk javasolt dinamika „stratégia semleges”, tehát nem támogatja közvetlen módon az együttműködő stratégiát. Másképpen fogalmazva, az elősködő stratégia terjesztése ugyanúgy növelheti a tekintélyt. Ezt azért fontos hangsúlyozni, mert az irodalomban léteznek olyan munkák, ahol a tekintély és az ezzel járó előnyök az együttműködő stratégiát terjesztő játékosok kiváltsága [15, 16]. Annak illusztrálására, hogy elsődlegesen a játékosok hierarchiája teremti meg az együttműködés szempontjából kedvező körülményt, a következő fejezetben a modell egy olyan

módosítását vizsgáljuk, ami az átadott stratégia jellegétől teszi függővé a stratégiaátadó tekintélyének a növekedését.

3.1.1. Stratégia-specifikus tekintély

Az említett módosítással éppen azt kívánjuk bemutatni, hogy nem elsősorban a együttműködő stratégia direkt támogatása eredményezi a kívánt hatást, hanem a korábbi fejezetekben már felismert játékosok közötti inhomogenitás, azok hierarchikus szervezettsége jelenti azt a lényeges tulajdonságot, ami igazán támogathatja az együttműködés fennmaradását. Ehhez az előző fejezetben vizsgált modellt úgy módosítjuk, hogy a stratégiaátadás révén sikeresebb játékos csak akkor növelheti a stratégiaátadó képességét, ha együttműködő stratégiát ad át (A-modell), illetve egy másik modellben csak akkor, ha kizárólagosan élőködő stratégiával rendelkezik (B-modell) [65]. Az eddigi eredmények alapján azt várhatjuk, hogy lényegében mindkét koevolúciós szabály támogathatja az együttműködő stratégiát, hiszen mindkét esetben megszűnik a játékosok egyenlősége, ami a térbeli kölcsönösségen alapuló hatás felerősödését fogja maga után vonni. Természetesen az együttműködő stratégiát közvetlenül támogató dinamikától jobb eredményt, magasabb általános együttműködési szintet várunk. Annak érdekében, hogy a kérdéses hatást minél szélesebb körben feltárjuk, a vizsgálandó játékokat kiterjesztjük az összes társadalmi dilemmára, beleértve az eddig nem vizsgált szarvasvadász játékot is. Bár a kapott eredmények jellegükben mindhárom játékra hasonlóak, az egyszerűbb szemléltetés érdekében az ábrákat a fogolydilemma és a szarvasvadász játék paraméterezésére mutatjuk. Az egyes stratégiaátadást kísérő tanítási képesség növelésére egységesen a $\Delta w = 0.1$ értéket választottuk, ami közel az optimális értékhez, jó kompromisszumnak tűnt mindkét típusú modellre, illetve mindhárom vizsgált dilemma játékra.

Az 3.5. ábra az együttműködési szint időbeli változását mutatja a két modellre, az említett két játék esetén. Szokásos módon a fejlődés véletlen kezdőállapotból indult, tehát az együttműködő és élőködő stratégia fele-fele arányban, térben korrelálatlan módon helyezkedett el. A folytonos vonal esetén a stratégiaátadó játékos tanítási képessége csak akkor nő, ha együttműködő stratégiát ad át (A-modell). Ennek megfelelően kezdetben az együttműködési szint nő, hiszen a támogatott együttműködők hatékonyabban tudják átadni a stratégiájukat. Később az átlagos együttműködési szint csökken, mert a koevolúciós dinamika eredményeképpen nem tud létrejönni olyan

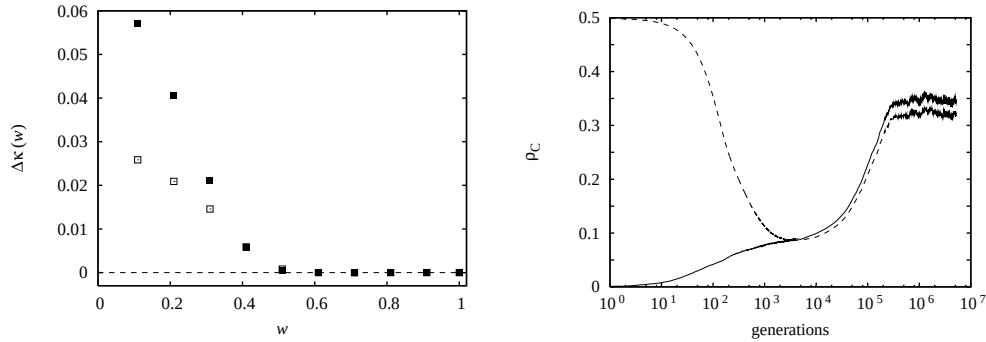


3.5. ábra. Az együttműködési szint időbeli fejlődése az A-modell (folytonos) és a B-modell (szaggatott vonal) esetén. Bal oldali ábrán a fogolydilemma ($T = 1.2, S = 0, K = 2$), a jobb oldalin a szarvasvadász játék ($T = 0.9, S = -0.33, K = 2$) eredményét ábrázoltuk.

mértékű hierarchia, ami képes lenne az együttműködést a választott nyereménymátrix elemnél fenntartani.

Az előzetes várakozásokkal teljesen ellentétes módon, a szaggatott vonallal jelölt B-modell esetén az együttműködő stratégia életben tud maradni *ugyanannál* a nyereménymátrix értéknél is. Kezdetben az együttműködők aránya csökken (az élősködőké nő), ami a véletlen állapotból indított fejlődés általános kísérő jelensége. Az élősködőknek a modell diktálta közvetlen támogatása csak rásegít erre a folyamatra. Az élősködők olyan sikeresen terjesztik a stratégiájukat, hogy az általuk elérhető nyeremény lényegesen csökken. Éppen ezért a csoportokba szerveződött együttműködőknek lehetőségük van a stratégiájuk terjesztésére. Ha sikerül egy nagy tekintélyre szert tett élősködő játékos stratégiáját megváltoztatni, akkor az a környezetében is tartósan ezt az állapotot tudja képviselni. Mindezt az együttműködési szint éles növekedésében figyelhetjük meg. Az a tény, hogy mindez az A-modellhez képest sikeresebben történik, azt sugallja, hogy az élősködők támogatása révén olyan mértékű inhomogenitás épül ki a játékosok között, ami képes fenntartani az együttműködést az előbb még túlságosan nagy kihívást jelentő nyereménymátrix értéknél is.

A fenti érvelést támasztja alá az is, ha összehasonlítjuk a kétféle modell eredményezte tanítási képesség eloszlásokat. Mivel mindkét esetben erősen inhomogén lesz a végső eloszlás, ezért az eltérés jobban érzékelhető, ha azok különbségét ábrázoljuk. A 3.6. ábra bal oldalán a B és az A modellnél mért tanítási képesség eloszlások különbségét, a $\Delta\kappa(w) = \kappa_B(w) - \kappa_A(w)$ függvényt ábrázoltuk a w tanítási képesség



3.6. ábra. Bal oldali ábra: A tanítási képességek gyakoriságának a különbsége az A és B modell esetén $K = 0.1$ (tömör négyzet) és $K = 2$ (üres négyzet) esetén. Az ábrán csak az aktív játékosok ($w_y > w_{min}$) gyakoriságából számolt értékek vannak feltüntetve. Jobb oldali ábra: Az együttműködési szint tipikus fejlődése a teljes populációra (szaggatott) és az aktív játékosokra (folytonos vonal) vonatkoztatva.

lehetséges értékeinek a függvényében. Fontos hangsúlyozni, hogy csak az aktív, a minimálisnál nagyobb tanítási képességű ($w_y > w_{min}$) játékosok különbségét ábrázoltuk az eloszlásoknál, hiszen w_{min} olyan kicsi, hogy az ezzel a paraméter értékkel rendelkező játékosok gyakorlatilag képtelenek a stratégia átadására, csupán annak passzív átvételére. Az ábráról az is leolvasható, hogy az eloszlásokban fellelhető inhomogenitások közötti különbség hangsúlyosabb az alacsonyabb zajt jelentő, determinisztikus-hoz közeli esetben, illetve magasabb zajnál a különbség az eloszlások között kevésbé érzékelhető. Az ábra a fogolydilemma esetét mutatja, de hasonló viszonyt mutathatnánk a többi játékra is. A tanítási képesség eloszlások különbségében megfigyelhető zajfüggés teljes mértékben összhangban van az együttműködési szintek viszonyának a zaj mértékétől függő változásával. Bár a nagy K tartományban, ahol általánosan nagyobb abszolút mértékű hatást fejt ki az együttműködési szintre a játékosok inhomogenitásából származó mechanizmus, az A és B-modell eredményezte együttműködési szint relatív különbsége kisebb, mint ha azt kis K értéknél vetjük össze.

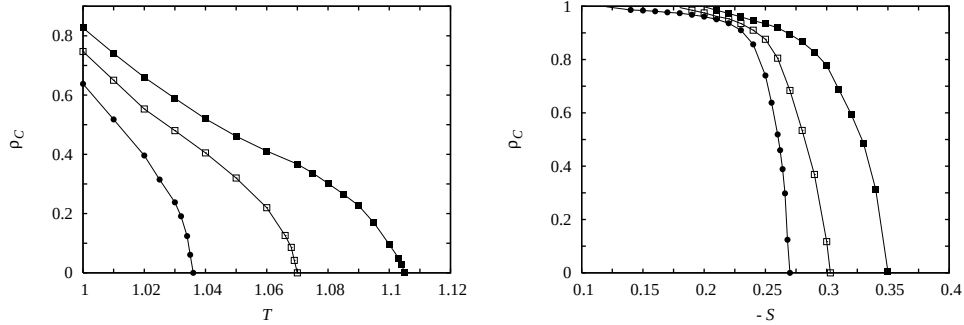
Annak illusztrálására, hogy lényegében a korábban már többször megfigyelt, környezetre kifejtett hatás visszacsatolódása az a kulcsmechanizmus, ami révén az együttműködés tartósan fenn tud maradni, az együttműködők arányát nem csupán a teljes populációra mértük, hanem külön az aktív játékosok körében is. Amint már utaltunk rá, lényegében csak az utóbbi csoport képes a stratégia átadására. A két mennyiség fejlődésének az összehasonlítása látható a 3.6. ábra jobb oldalán, szintén a fogolydilemma játéknál, a B-modell esetén. Mivel ebben a modellben a tanítási képesség

növekedése csak az élőködők kiváltsága, a korai időszakban az aktív játékosok körében elhanyagolható az együttműködők aránya. A tanítási képesség fejlődése rendkívül gyors, néhány száz iteráció után már kialakul (rögzül) azon játékosok köre, akik aktív játékosnak számítanak. Ezt követően, éppen a visszacsatolás miatt, egyre többen válnak közülük együttműködővé. A két görbe együttes emelkedése világosan mutatja, hogy az aktív játékosok pozitív példája révén terjed el az együttműködés, hasonlóan a skálamentes gráfon tapasztaltakhoz. Az analógia abban az értelemben is helytálló, hogy a skálamentes gráf centrumaihoz hasonlóan, az állandósult állapotban most is magasabb az együttműködési szint az aktív, irányító játékosok körében, mint az egész rendszerben.

A tekintély gyors fejlődését „lassíthatjuk”, ha azt írjuk elő, hogy a sikeres stratégiaátadás eredményeképpen csak q valószínűséggel növeljük az átadó játékos tanítási képességét. Itt nyilván $q = 1$ felel meg az eddig tárgyalt modellnek, míg $q = 0$ esetén visszkapjuk a referenciaként sokat emlegetett, egyforma játékosokat feltételező modellt. A koevolúciós modellek esetén az időskálák szétválasztásának általában fontos következményei lehetnek, amire további példát a későbbiekben is mutatunk. A jelenlegi modellben a várakozásnak megfelelően a legnagyobb mértékű növekedést a nagy q tartományban kaptuk, hiszen a kis q érték használata hasonló hatású, mint amit kis Δw használatakor tapasztaltunk: a játékosok között nem tud kialakulni olyan mértékű inhomogenitás, ami az együttműködés szempontjából hasznos lenne.

Visszatérve az A és B-modellek definiálta koevolúciós dinamikák eredményének az összehasonlítására, az utóbbi előnye mindig fennáll, amint azt a különböző nyeresymátrix elemek esetén a 3.7. ábra mutatja. Itt ismét a fogolydilemma (bal oldal) és a szarvasvadász (jobb oldal) játék esetét mutatjuk. Függetlenül attól, hogy az élőködők nyeresiméértét változtatjuk, vagy az együttműködők „hátrányát” növeljük, mindkét esetben a B-modell meghatározta koevolúciós dinamika képes a még nagyobb kihívást jelentő nyeresiméértékeknél is az együttműködést fenntartani. Viszonyításként a homogén játékosokat feltételező modell eredményét is ábrázoltuk. Összhangban a bevezetőben említett várakozásainkkal, mindkét koevolúciós dinamika jobb eredményt mutatott, mint a homogén eset.

A most ismertetett eredmények is azt az állítást erősítették, hogy az együttműködés szempontjából a játékosok közötti kellő mértékű inhomogenitás, a hierarchia az elsődleges fontosságú az együttműködés szempontjából. Fontosabb, mint az, ha



3.7. ábra. Az együttműködők aránya a nyereménymátrix értékének a függvényében a homogén játékosok modell (tömör kör), az A modell (üres négyzet) és a B modell (tömör négyzet) esetén. A bal oldali ábra a fogolydilemma játék ($S = 0, K = 0.1$), a jobb oldali a szarvasvadász játék ($T = 0.9, K = 0.1$) esetén.

esetleg közvetlen módon támogatjuk az együttműködő stratégiát, mert bár az utóbbi esetleg rövidtávon segíthet, de a hatékonyabban kiépült inhomogenitás hosszútávon kedvezőbb körülményeket teremt. Ez a megfigyelés, illetve az alapjául szolgáló mechanizmus működése a szociális dilemma választásától függetlenül tapasztalható.

3.2. Növekvő befolyási kör

Az előző fejezetekben ismertetett eredmények alapján természetes feltételezés az, hogy a tanítási képességtől eltérő jellegű inhomogenitások is kialakulhatnak spontán módon, ha azt a koevolúciós szabályok lehetővé teszik. Példaként egy olyan rendszert fogunk vizsgálni, ahol a játékosok kapcsolati rendszere is fejlődhet a stratégia változása mellett.

Az egyszerűség kedvéért, a leggyakrabban vizsgált gyenge fogolydilemma játékot fogjuk vizsgálni úgy, hogy kezdetben minden játékos csupán a 4 szomszédjával áll kapcsolatban, a négyzetrács topológiának megfelelően. Véletlen stratégia eloszlásból indulva, az elemi Monte Carlo lépés részeként egy véletlenszerűen kiválasztott x játékos, aki a k_x kapcsolatából π_x nyereményre tett szert átadhatja az s_x stratégiáját a vele kapcsolatban álló s_y stratégiával rendelkező y játékosnak, aki a k_y kapcsolatából π_y nyereményt gyűjtött. A stratégiaátadás valószínűsége:

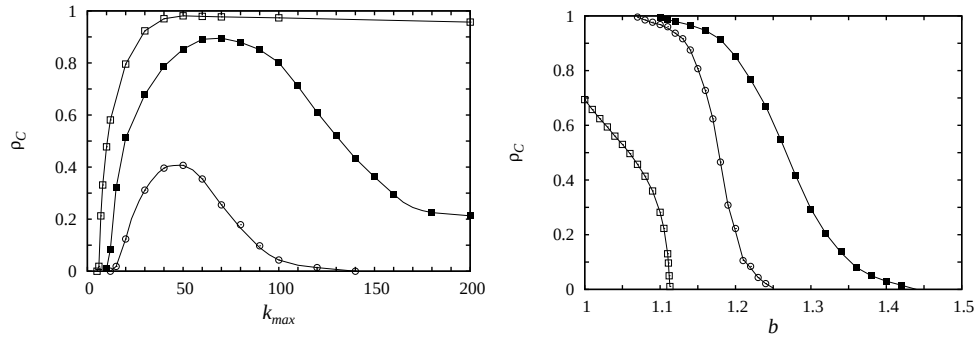
$$W(s_x \rightarrow s_y) = (\pi_x - \pi_y)/bk_q, \quad (3.1)$$

ahol k_q a k_x és a k_y közül a nagyobbik. Amint már a 1.1. fejezetben is utaltunk rá, a korábban használt Fermi-függvény definiálta valószínűség helyett azért választottuk ezt, az inhomogén gráfoknál gyakran használt valószínűséget, mert a koevolúciós dinamika következtében a játékosok eltérő számú kapcsolatra tehetnek szert és így lényegesen eltérő lehet a nyereményük is. Amennyiben a stratégiaátadás sikeres, az x játékos lehetőséget kap arra, hogy egy új, eddig tőle független szomszédjával is kapcsolatot teremtsen, amely révén tovább növekedhet a nyereménye, illetve akinek potenciálisan szintén átadhatja a stratégiáját egy későbbi alkalommal. (A stratégiaátadás szempontjából ez egyirányú kapcsolatot jelent.) A játékosok a kapcsolataikat mindig a hozzájuk legközelebbi olyan játékoskal bővítik, akivel még korábban nem volt közvetlen kapcsolatuk [67].

Nyilvánvalóan könnyen lehetne valós helyzeteket sorolni, aminek fontos elemét ragadja meg ez az egyszerű modell. Gondoljunk csak például arra, hogy egy kutató is elsősorban akkor kap lehetőséget a kapcsolatai bővítésére, ha környezetében sikeressé válik. Folytatva a modell definícióját, könnyű belátni, hogy rögzített játékoszám mellett a kapcsolatok folyamatos bővítése egy teljesen összekapcsolt topológiát eredményezne, amit a kapcsolatok maximumának bevezetésével kerülünk el. A kapcsolatok maximalizálása egyébként is kézenfekvő intézkedés, hiszen könnyű belátni, hogy még a leginkább szociális ember se tud egy bizonyos számú kapcsolatnál többet hatékonyan fenntartani, ápolni. Ezért, ha egy játékos eléri ezt a k_{max} kapcsolati számot, akkor a kapcsolatok bővítését leállítjuk és a stratégia fejlődése az így kapott kölcsönhatási topológián folytatódik tovább. Formálisan a $k_{max} = 4$ paraméterérték esetén lényegében visszakapjuk az eredeti Nowak-May-féle homogén térbeli modellt.

Mint látni fogjuk, a k_{max} egy fontos paramétere a modellnek, ezért az eredményeket 10^4 és $1.6 \cdot 10^5$ játékost tartalmazó rendszerméret között is teszteltük, hogy kizárjuk a véges méretből adódó esetleges, nem valós hatásokat. A különböző nagyságú maximális kapcsolat hatását az együttműködési szintre a 3.8. ábra bal oldala mutatja három különböző b értéknél. Azért, hogy a hatás minél szembetűnőbb legyen, olyan b értékeket választottunk, ahol a homogén kapcsolati hálózatot jelentő esetben az együttműködés már nem képes fennmaradni.

Amint az várható volt, kis k_{max} esetén az együttműködés mértéke nem tud jelentősen javulni, hiszen a rendszerben nem tud lényeges inhomogenitás kialakulni. Hasonlóan, a nagy k_{max} határesetben a rendszerben olyan sok kapcsolat épül ki,

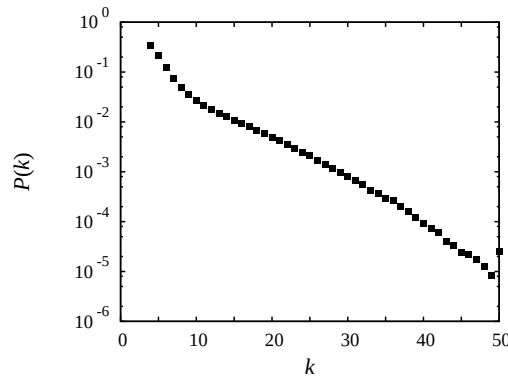


3.8. ábra. Bal oldali ábra: az együttműködők aránya különböző mértékű maximális kapcsolatot feltételezve. A görbék eltérő élősködő nyeremény érték esetén készültek: $b = 1.15$ (üres négyzet), $b = 1.2$ (tömör négyzet), $b = 1.28$ (üres kör). Jobb oldali ábra: az együttműködés szint az élősködők nyereményének függvényében különböző k_{max} értékek esetén. A kiindulási térbeli modell $k_{max} = 4$ (üres négyzet), $k_{max} = 50$ (tömör négyzet), $k_{max} = 200$ (üres kör).

ami a struktúra nélküli, jól kevert rendszer körülményeit valósítja meg. Ezért várható, hogy ez ismét előnytelen lesz az együttműködés szempontjából. Ugyanakkor fontos hangsúlyozni, hogy ez az érv nem okozhatja az együttműködési szintnek a 3.8. ábrán látható csökkenését, hiszen a fenti érvelés olyankor válik érvényessé, amikor a maximális kapcsolatok száma összemérhető a rendszermérettel. A korábban már említett nagy rendszerméret választásával éppen az ilyen hatások kiszűrése volt a célunk. Az együttműködés csökkenésének az okára a későbbiekben még visszatérünk. Az ábra ugyanakkor szemléletesen mutatja, hogy egy közbenső $40 \leq k_{max} \leq 70$ értéknél a koevolúciós modell lényegesen képes emelni az együttműködés szintjét. Ez olvasható le az 3.8. ábra jobb oldali paneljéről is, ahol referenciaként feltüntettük a homogén játékosokat feltételező, kapcsolati rendszert nem változtató alapmodell eredményét is. Ez utóbbi ábra jól mutatja, hogy az optimális $k_{max} = 50$ használata esetén az együttműködés lényegesen nagyobb b értékek esetén is tartósan fenn tud maradni.

Hasonlóan a korábban tárgyalt koevolúciós modellekhez, a jelenlegi modell sikere mögött is az a spontán módon kialakuló játékosok közötti inhomogenitás áll, ami korábban is általánosan kedvezőnek bizonyult az együttműködés szempontjából. Az erősen inhomogén kapcsolati rendszer kialakulásában lényegében hasonló mechanizmus játszik közre, mint a Barabási László és Albert Réka által javasolt, „a gazdag még jobban gazdagszik” elv, ami a jól ismert skálamentes struktúrát eredményezi [3]. A jelenlegi modellben is a sikeres játékos a stratégiaátadás révén tovább növelheti a

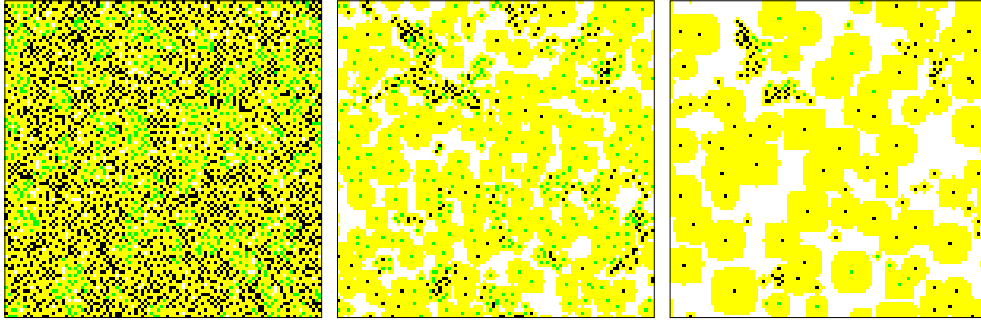
kapcsolatai számát, és így a teljes nyeresményét, ami további sikeres stratégiaátadás lehetőségét teremti meg. A mi modellünkben ugyanakkor rögzített játékosszám mellett történik a kapcsolatok számának egy bizonyos pontig történő növekedése, ami erősen inhomogén, de nem skálamentes kapcsolati rendszer eloszlást eredményez. Ezt illusztrálja a 3.9. ábra, ahol a koevolúció eredményeként kialakult tipikus fokszámeloszlást ábrázoltunk. Hasonló viselkedés figyelhető meg más b értékeknél és a k_{max} egy széles tartományában is.



3.9. ábra. A koevolúciós dinamika eredményeként kialakuló fokszám eloszlás $k_{max} = 50$ és $b = 1.26$ értékeknél.

A 3.8. ábra bal oldali paneljével kapcsolatban természetesen vetődik fel az az érv, hogy nagy, de a rendszermérettel még nem összemérhető k_{max} értéknél ugyanúgy létrejön a játékosok közötti inhomogenitás, de az mégis az együttműködési szint csökkenését vonja maga után. Mindez az bizonyítja, hogy önmagában az inhomogén hálózat nem elégséges feltétel a magas szintű együttműködés kialakulásához. Már a 2. fejezetben is láttuk, hogy az együttműködés sikeres elterjedésében nagy szerepe volt a stratégiaváltásban mintául szolgáló „vezetőknek”, ezért a most tapasztalt jelenség megértéséhez is bevezetjük, az ún. befolyásos játékosok fogalmát. A jelenlegi modellben azokat a játékosokat tekintjük befolyásosnak, aki a stratégiaátadás révén kapcsolatban álló játékosok közül a legnagyobb fokszámmal rendelkeznek.

A k_{max} paraméter három reprezentatív értékénél mutatja a befolyásos játékosok elhelyezkedését a 3.10. ábra, amikor ugyanazt a $b = 1.2$ élősködő nyeresményt használtuk. Fekete illetve zöld szín mutatja az élősködő, illetve az együttműködő befolyásos játékosokat. Az értelmezés szempontjából fontos még megkülönböztetni azokat a játékosokat, akik egy befolyásos által elérhetőek, tehát a befolyási körébe tartoznak. Őket



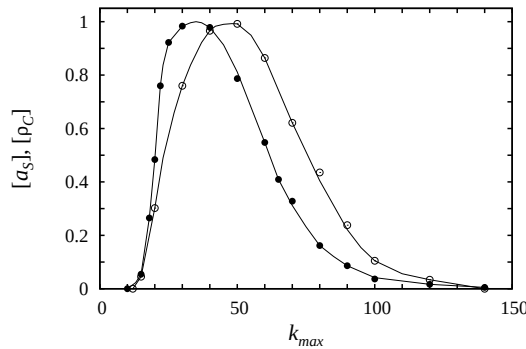
3.10. ábra. Tipikus konfigurációk egy 100×100 -as rendszer méreténél kis, $k_{max} = 14$ (bal), optimális, $k_{max} = 50$ (középső) és túlságosan nagy, $k_{max} = 200$ (jobb oldali) maximális hatósugaraknál. A befolyásos együttműködő játékosokat zöld, a befolyásos élősködő játékosokat fekete szín jelzi. Sárga illetve fehér szín jelzi azokat a játékosokat, akik egy befolyásos játékos hatósugarában vagy azokon kívül vannak, függetlenül a stratégiájuktól.

sárga színnel jelöltük, függetlenül a stratégiájuktól, míg fehér szín jelzi a hatókörön kívül elhelyezkedő játékosokat.

Amikor a kapcsolatok fejlődése gyorsan leállt ($k_{max} = 14$), a rendszer meglehetősen homogén, sok befolyásos játékoskal és nagyon kis hatókörökkel jellemezhető. Engedve, hogy a rendszerben nagyobb mértékű inhomogenitás fejlődjön ki ($k_{max} = 50$ -nél), a befolyásos játékosok száma lényegesen csökken, de a megnövekedett hatósugaruk még részben átfedi egymást. Még későbbi szinten leállítva a kapcsolati rendszer fejlődését ($k_{max} = 200$), a befolyásos játékosok tovább erősödnek és ezzel egyidőben a számuk is tovább csökken. A lényeges változás az előző állapothoz képest az, hogy a befolyásos játékosok hatóköre már jellemzően nem fed át, azok egymástól függetlenül fejtik ki a hatásukat.

A statikus modellek tanulsága az volt, hogy fontos a befolyásos játékosok között egy finoman hangolt, nem túl intenzív információcsere, amely révén az idővel megerősödő együttműködő mestereknek lehetősége nyílik meggyőzni az időközben legyengült élősködő mestert. Ennek hiányában az utóbbi a környezetéhez viszonyított nagyobb befolyása révén fenn tudja tartani lokálisan az általa hirdetett stratégiát, mert nem derül ki, hogy „a király meztelen”.

A fent leírt érvelés alátámasztására mértük a befolyásos játékosok közötti információcsere erősségét, pontosabban annak a gyakoriságát, hogy stratégiaátadás történik két befolyásos játékos között, amit a_S -sel jelöltünk. Ez a mennyiség különböző



3.11. ábra. Az együttműködési szint (ρ_C) és a befolyásos játékosok közötti stratégiaátadás gyakorisága (a_S) különböző értékű maximális kapcsolatok esetén $b = 1.28$ -nál. Az összehasonlíthatóság érdekében mindkét mennyiséget a maximális értékével normáltuk, erre utal a szögletes zárójel.

k_{max} értékeknél mérve megnyugtatóan hasonló módon viselkedik, mint az átlagos együttműködési szint (3.11. ábra). Kis k_{max} értékeknél csak kis hatósugár és csak kis befolyási szint (a kezdetihez képest nem túl sok kapcsolatot) épülhetett ki. Nagyobb (optimális) mértékű befolyási kör kiépülésénél már működhet az a mechanizmus, amit a skálamentes gráfon megfigyelt viselkedésből tanultunk. Még nagyobb k_{max} érték esetén a kezdetben nyertes játékosok erősödése olyan nagy mértékű lesz, hogy csak néhányan maradnak, egymástól jól elkülönülő hatósugarakkal, így esély sincs arra, hogy a stratégiájukat egymásnak átadhassák. Mivel a kezdeti véletlen környezetben az élőködő magatartás a sikeresebb, ezért az ilyen stratégiát képviselő játékosok lesznek többségben a nagy befolyású játékosok között, mint ahogy azt a 3.10. ábra harmadik konfigurációja is mutatja. Ennek következményeként a teljes rendszerben az általános együttműködési szint is alacsony értéken marad.

3.3. Az életkorhoz kötődő tekintély hatása

Az eddig tárgyalt koevolúciós modellek közös jellemzője az volt, hogy a stratégia mellett változó másik, a játékosokat egyénileg jellemző mennyiség fejlődése egy olyan inhomogén környezet kialakulását eredményezte, ami lehetővé tette a térbeli kölcsönösségen alapuló mechanizmus felerősödését. A koevolúciós dinamika nyújtotta nagyobb mértékű komplexitás elvileg más, az előbbi mechanizmustól lényegesen különböző folyamat felbukkanását is eredményezheti, ami szintén az együttműködés

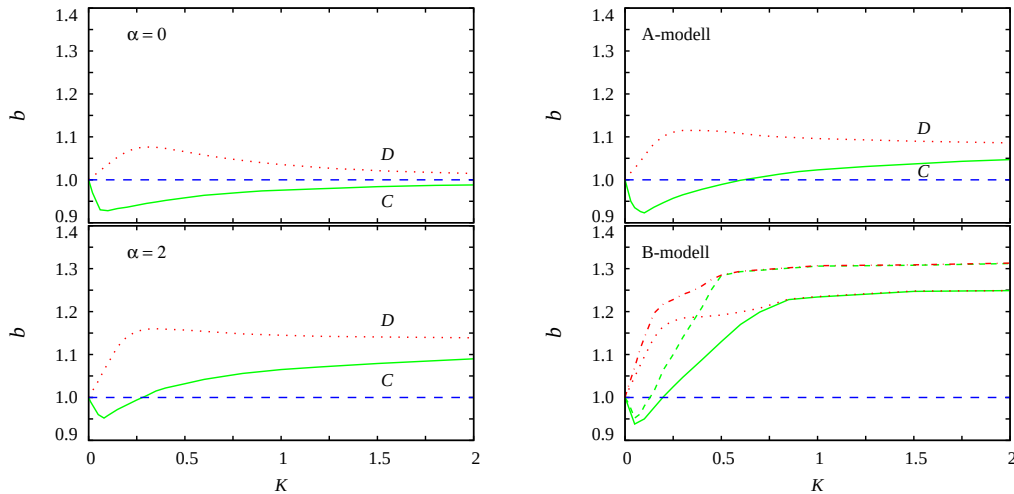
erősödéséhez vezethet. Egy ilyen új, korábban nem vizsgált mechanizmus lehetőségét veti fel a továbbiakban tárgyalt modell.

Talán nem kell különösebben indokolni azt a feltevést, hogy a játékosok kora, pontosabban a vele együtt járó tapasztalat bizonyos fajta bölcsesség és ilyen módon tekintély forrása lehet, ami a korábbiakhoz hasonlóan a tanítási képesség mértékében is megnyilvánulhat. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a játékosok kora és a tanítási képességük között függvényyszerű kapcsolat van és arra a kérdésre keressük a választ, hogy milyen befolyása lehet az együttműködés mértékére annak, ha a játékosok kora és emiatt a tanítási képességük is változhat [71].

Mint korábban, most is törekszünk a lehető legegyszerűbb modellre annak érdekében, hogy az egyéb hatások ne fedjék el a vizsgálni kívánt jelenséget. Ennek megfelelően a játékosok egy négyzetláncra helyezkednek el és a négy elsőszomszédjukkal játszik a gyenge fogolydilemma játékot. Az időegységnek tekintett 1 Monte Carlo lépés során minden játékos átlagosan egyszer lehetőséget kap a stratégiája átadására. A játékosok közötti stratégiaátadás W valószínűségét a korábban is használt (2.3) egyenlet határozza meg, ami tehát feltételezi a játékosok egyéni w_y tanítási képességét. Minden játékos korát egy $e_y \in [0, e_{max}]$ egész szám jellemzi, e_{max} maximális életkorral, ahol a kor egyben meghatározza a játékos tanítási képességét is: $w_y = (e_y/e_{max})^\alpha$. Az α paraméter fejezi ki azt, hogy milyen mértékű eltérés van a kor és tanítási képesség között. $\alpha = 0$ esetén visszakapjuk a már sokat említett Nowak-May modellt, hiszen ilyenkor a játékosok a stratégia átadása szempontjából egyformák. Az $\alpha = 1$ választása esetén ugyanolyan tanítási képesség eloszlást kapnánk, mint a játékosok kor eloszlása, míg $\alpha \geq 2$ esetén a stratégiaeloszlás hatványfüggvénnyel írható le. Mivel nagy α választásánál a játékosok tanítási képességében olyan nagymértékű szétválás lenne, ami a játékosok jelentős részénél elhanyagolható tanítási képességet és így befagyott állapotot vagy túlságosan hosszú relaxációkat okozna, ezért a továbbiakban az $\alpha = 2$ rögzített értéket fogjuk használni. A másik paramétert jelentő maximális életkornak $e_{max} = 99$ értéket választottuk.

Ha a játékosok életkora egyenletesen oszlik el a $[0, e_{max}]$ tartományban, de az rögzített és így a tanítási képességük sem változik, akkor lényegében visszakapjuk a 2.1. fejezetben tárgyalt modell általánosabb változatát. Ilyenkor a játékosok különbözőségéből származó hatás eredményeképpen javulni fog az együttműködés mértéke. A 3.12. ábra bal oldala mutatja az egyforma tanítási képességű játékosokat feltételező

($\alpha = 0$) és a hatványfüggvény eloszlású tanítási képesség ($\alpha = 2$) következtében kapott eredmények összehasonlítását. A stratégiaátadást meghatározó két paraméter, az élősködő nyereménye (b) és a zaj mértékét kifejező K függvényében rajzoltuk fel a különböző fázisokat elválasztó görbéket. A korábbi jelöléssel összhangban, itt is D illetve C jelöli azokat a fázisokat, ahol kizárólagosan az élősködő, illetve az együttműködő stratégia képes hosszútávon életben maradni. A két görbe között helyezkedik el az a tartomány, ahol az együttműködők és az élősködők tartósan együtt élnek. A diagramok összevetéséből látható, hogy a hatványfüggvény eloszlással jellemezhető heterogén tanítási képesség eredményeként nagyobb b értékek esetén is képes az együttműködő stratégia fennmaradni, sőt elég nagy K értéknél van olyan $b > 1$ élősködő nyeremény, ahol az együttműködők kizárólagos jelenléte jellemzi a rendszert.



3.12. ábra. Fázis diagramok a különböző paraméterezésű modellek esetén. Bal oldal: egyenletes eloszlású, de rögzített korú játékosok, ahol a tanítási képesség kortól függetlenségét az $\alpha = 0$, illetve $\alpha = 2$ paraméterérték határozza meg. Jobb oldal: változó korú játékosok ($\alpha = 2$ esetén). Az A-modellben a stratégia átadásánál az átvevő kora nem változik, míg a B-modellben ez nullázódik. Ha a B-modellben az öregedés és a stratégia fejlődését szétválasztjuk (átlagosan lassabban öregednek a játékosok), akkor még nagyobb együttműködési szint érhető el. (Szaggatott és pontozott-szaggatott vonalak.) Minden diagramon kék szaggatott vonal jelzi az együttműködő stratégia fennmaradásának a határát a jól kevert rendszerben.

Az eddig ismertetett eredmény természetesen csak viszonyításként szolgáló előtanulmány volt, hiszen a fő kérdésünk az, hogy milyen hatása van annak, ha a játékosok kora és emiatt a tanítási képessége időben változik? Szintén a $[0, e_{max}]$ tartományon

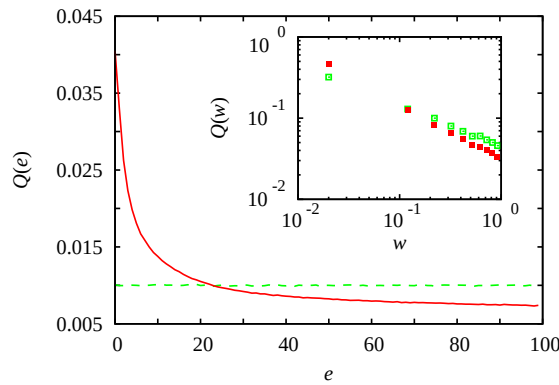
egyenletes koreloszlásból kiindulva feltesszük, hogy egy Monte Carlo lépés után minden játékos kora egységnyivel nő. Ez természetesen azt is jelenti, hogy a maximális életkorú játékosokat egy ugyanolyan stratégiájú, de zérus életkorú „újszülött” váltja fel. Másként mondva, az adott játékos tanítási képessége $w_y = 1$ -ről $w_y = 0$ -ra változik. Az így definiált „öregedő” modellnek kétféle változatát fogjuk vizsgálni. Az első esetben (A-modell) a stratégia átvételét nem követi a kor változása, tehát a két mennyiség lényegében egymástól függetlenül változik, míg a második esetben (B-modell) ha egy játékos stratégiát vesz át a szomszédjától, akkor ezzel együtt a kora is „nullázódik”, függetlenül az eddigi korától, és az újra zérusról kezd el növekedni.

Az A-modellt tekinthetjük úgy, mint a korábban bevezetett inhomogén tanítási képességű modellnek azt a változatát, amelyben a játékosoknak időben egyenletesen változik az a képessége, ami befolyásolja a stratégia átadását. A B-modell bevezetését is számos körülmény indokolhatja. Már utaltunk rá, hogy biológiai rendszerekben a sikeres stratégiaátadást tekinthetjük úgy, mint az életrevalóbb, nagyobb fitnessszel rendelkező egyed kap lehetőséget egy utód „kihelyezésére”, ahol az utód koránál fogva kezdetben korlátozott reprodukciós képességgel rendelkezik. De gondolhatunk egy szociológiai helyzetre is, ahol az a játékos, aki már hosszú ideje fenn tudta tartani a stratégiáját, sikeresnek tekinthető, így nagyobb tekintéllyel rendelkezik, míg az, aki éppen most váltott, vélhetően nem volt sikeres, így nem is méltó a követésre. Ez utóbbi esetben tehát a „kor” csak egy a tekintélyt meghatározó segédmenyiség, a stratégiát váltók nem ténylegesen halnak meg.

A változó életkor hatását szintén a 3.12. ábra jobb oldalán láthatjuk, ahol a korábbi modellekkel való összehasonlíthatóság érdekében ugyanazokat a $b - K$ paraméter tartományokat ábrázoltuk. Bár az A-modell a játékosok inhomogenitása miatt jobb eredményt produkált, mint a homogén modell, de a rögzített életkorú és tanítási képességű játékosokat feltételező modellhez képest az együttműködés mértéke csökkent. Ezt a változást azzal lehet magyarázni, hogy amikor egy nagy tekintéllyel rendelkező együttműködő játékos „meghal”, a helyére kerülő újszülött nem képes a környezetében az együttműködést sikeresen fenntartani, terjeszteni, így egy ilyen vezető nélküli együttműködő folt könnyen az élősködő stratégia áldozatává válhat. Az A-modell és a rögzített életkorral (befolyással) számoló modell összehasonlítása arra is figyelmeztet, hogy önmagában a játékosok különbözőségét leíró paraméter nem egyértelműen határozza meg az együttműködés mértékét, hiszen a kor (és ebből fakadóan a tanítási

képesség) eloszlás az A-modellben sem változik, azt mindkét modell esetén továbbra is az $[0, e_{max}]$ intervallumon egyenletes eloszlás jellemzi.

A fázisdiagramok összehasonlítása ugyanakkor lényeges javulást mutat a B-modell esetén. Sőt, további javulás érhető el, ha figyelembe vesszük azt, hogy a B-modell esetén a két mennyiség (kor és stratégia) fejlődése nem független. Ezért a két fejlődés időskálájának a szétválasztása tovább módosíthatja az együttműködési szintet. Például a 3.12. ábrán azt az esetet is feltüntettük, ahol a stratégia átadását jelentő teljes Monte Carlo lépést követően nem az összes, hanem csupán a játékosok 10%-ának változik a kora.

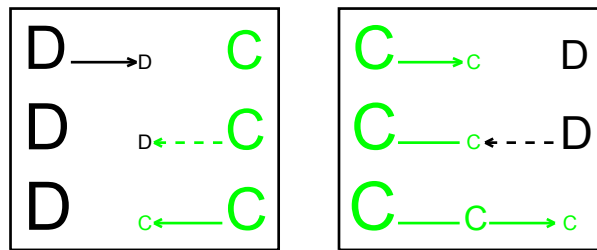


3.13. ábra. A $Q(e)$ koreloszlások a rögzített korú (zöld szaggatott vonal) és a B-modell dinamikájának a következményeként (piros folytonos). A kisebb ábra a megfelelő tanítási képesség eloszlásokat mutatja $\alpha = 2$ esetén. A tanítási képesség exponense az egyenletes koreloszlás esetén -0.5 , míg a B-modell esetén -0.7 .

Annak megértéséhez, hogy milyen ok van a B-modellben megfigyelhető javulás hátterében, a 3.13. ábrán felrajzoltuk a koevolúciós dinamika eredményeként előálló koreloszlást, illetve a kisebb ábra az ennek megfelelő tanítási képesség eloszlását mutatja. Látható, hogy a stratégiaátadással együtt járó életkor „nullázás” markánsan befolyásolja a koreloszlást, hiszen a kis életkorral rendelkező játékosok lényegesen többen vannak, mint azok, akik nagy életkort élnek meg. Ugyanakkor ez a kor-eloszlásban megmutatkozó különbség a nemlineáris $w(e)$ kapcsolat miatt nem fog lényegesen eltérő tanítási képesség eloszlást eredményezni. Ahogy a 3.13. ábra inzertje mutatja, mindkét modell esetén hatványfüggvénnyel írható le a tanítási képesség eloszlása és a két függvény meredeksége között is csak minimális eltérés van. Ez semmiképpen

nem okozhatja az együttműködési szint olyan mértékű eltérését, amit a fázisdiagramok összevetése mutat.

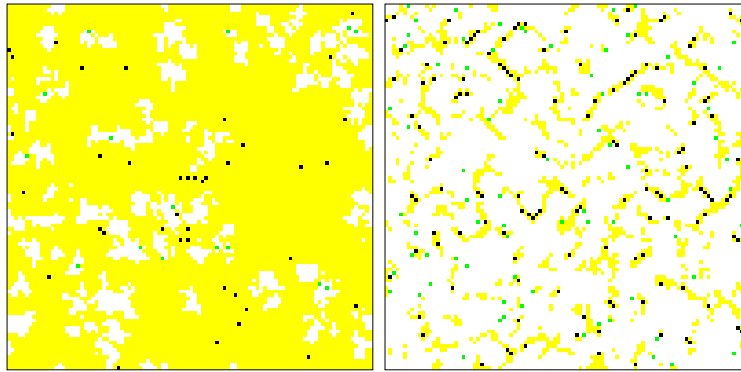
Az eltérés valódi oka a különböző stratégiák terjedésének az eltérő dinamikája, amit a 3.14. ábra illusztrál. Ha egy befolyásos élősködő játékos (bal oldal) kihelyez egy utódot, akkor az utód stratégiája a kezdeti kis befolyása miatt nem tud tovább terjedni. Ugyanakkor az élősködő utód védtelen lehet egy befolyásos együttműködő játékosal szemben, mert az előbbit az élősködő kapcsolata nem támogatja. Így a játékos újra együttműködővé válik és kezdődhet minden előről. Kezdetben az együttműködő utód sem tudja a stratégiáját terjeszteni (jobb oldali ábra), de az együttműködő kapcsolat miatt védett lehet. Az idő múlásával nő a befolyása, így képessé válhat a stratégiájának a továbbadására (alsó sor).



3.14. ábra. Az együttműködés támogató dinamikus mechanizmus illusztrációja a B-modellben. Zöld C és fekete D betű mutatja az együttműködő, illetve az élősködő stratégiájú játékosokat. A betűk nagysága a játékosok korát és így a tanítási képességük mértékét is jelzi. Az időben egymás utáni állapotokat fentről lefelé ábrázoltuk. A szaggatott és folytonos nyilak jelzik a megkísérelt, illetve a sikeres stratégiaátadást.

A fentiekben leírt mechanizmus következményét jól illusztrálja, ha ugyanannál a paraméter értékeknél ($b = 1.05$, $K = 0.1$, $\alpha = 2$) összehasonlítjuk az A és a B-modell két tipikus konfigurációját (3.15. ábra). A megértést szolgálja, ha itt is megkülönböztetünk befolyásos játékosokat, függetlenül azok stratégiájától. Az egyszerűség kedvéért azt a játékost tekintjük befolyásosnak, akinek az életkora legalább $e_{max}/2$ -vel meghaladja a közvetlen szomszédainak a korát (természetes más küszöböt is választhatunk, a konfiguráció nem változna lényegesen). Ezeket a játékosokat zöld illetve fekete színnel jelöltük az együttműködő vagy élősködő stratégiájuk függvényében. A nem befolyásos élősködőket sárga, míg az együttműködőket fehér szín jelzi. A két konfiguráció között szembetűnő különbség, hogy a B-modell esetén az élősködő befolyásos játékosokat mindig körülveszi egy keskeny, szűk sávban elhelyezkedő, hasonló stratégiájú

nem befolyásos játékosok köre. Pontosabban a „fiatal”, tehát nem befolyásos élősködők jellemzően a befolyásos élősködők szűk környezetére korlátozódnak, jelezve, hogy az élősködő stratégia terjedése gátolt. Ez nem áll fenn a bal oldali A-modellnél, ahol a befolyásos élősködők (fekete) az élősködő (sárga) tartomány mélyén is előfordulhatnak. (Ezzel szemben, az együttműködő befolyásos (zöld) játékos a B-modellnél is előfordulhat a nagy kiterjedésű nem befolyásos (fehér) tartomány belsejében, hiszen az együttműködő stratégia terjedése nincs akadályozva.)



3.15. ábra. Tipikus konfigurációk az öregedő modellekben (100×100 -as rendszerméretnél). A bal oldali ábrán a stratégiaátadás nem jár a befolyás változásával (A-modell), míg a jobb oldali ábrán a stratégiát váltó játékos életkora és így a befolyása is lecsökken (B-modell). Zöld (fekete) szín jelzi a befolyásos együttműködő (élősködő) játékosokat. Az alacsony befolyással bíró együttműködő (élősködő) játékosokat fehér (sárga) szín jelöli.

Fontos hangsúlyozni, hogy az élősködő stratégia terjedésének akadályozása nem egy merev, rögzített, hanem sokkal inkább egy oszcilláló élősködő-együttműködő doménhatárt jelent. A dinamikus egyensúlyt az is jelzi, hogy a B-modellnél előfordul gyakori „újszülött” játékosok miatt sokkal könnyebben válik befolyásossá egy játékos, mint az A-modellben, hiszen a szükséges kor és befolyás különbség ki tud alakulni. Sőt, még az is igaz, hogy a B-modellben a befolyásosak körében több az élősködő, mint az együttműködő, de a teljes rendszerre vonatkozó arányuk lényegesen kevesebb, mert az élősködő stratégiát csak ők és a szűk környezetük képviseli. Az a tény is, hogy a befolyásos játékosok körében lényegesen alacsonyabb az együttműködők aránya, mint az egész rendszerben világosan mutatja, hogy a B-modell esetén nem a térbeli kölcsönösségen alapuló mechanizmus a döntő, mint ahogy azt a korábbi statikus modelleknél megfigyeltük.

Természetesen felvetődik a kérdés, hogy a megfigyelt együttműködő stratégiát támogató mechanizmus mennyire kötődik az eddig használt $w(e)$ függvényhez. Gondolhatunk arra az esetre is, hogy egy kor felett már nem szükségszerűen nő a befolyásoló képesség, sőt az egészen öregek befolyása esetleg még csökkenhet is. Ennek ellenőrzésére kipróbáltuk, hogy mi történik, ha a stratégiaátadó képességet egy nem monoton, például Gauss-féle normál eloszlás kapcsolja a játékosok korához. Azt találtuk, hogy a megfigyelt mechanizmus ebben az esetben is működik. Az egyetlen fontos kritérium az, hogy a nagyon fiatal korúak stratégiaátadó képessége elhanyagolható legyen, hiszen ez gátolja meg az élőködő stratégia gyors térhódítását. Ebből az érvelésből azt is könnyű belátni, hogy a jelenség nem korlátozódik a rács topológiához, hanem más, heterogén kapcsolati gráffal jellemezhető rendszerekben is megfigyelhető, hiszen a legfontosabb kritérium az utódok kezdeti korlátozott reprodukciós képessége, így a szükségképpen meglévő terjedési szünet felszínre hozza a kétféle stratégia eltérő „utódgondozásának” a következményeit.

3.4. Változó kapcsolati rendszer

A koevolúciós modellek kínálta keretek között a kapcsolati rendszer egyéni változása talán az egyik legkézenfekvőbb lehetőség, amit a játékosok egyéni tulajdonságai közül számba lehet venni. Nem véletlenül, az első nem statikus játékelméleti modellek vizsgálatát éppen ilyen megfontolások motiválták [14, 89]. Meglehetősen életszerű azt feltételezni, hogy a játékosok közötti kapcsolatok időben változnak, egyesek megszűnnek, illetve új kötések is kialakulhatnak. Az ilyen jellegű vizsgálatok szorosan illeszkednek a napjainkban is intenzíven kutatott, hálózatok fejlődésére koncentráló széles kutatási irányzatba [17, 24].

A 3.2. fejezetben már vizsgáltunk egy olyan modellt, ahol a kapcsolati gráf változott, de ott a változásoknak elsősorban az együttműködést segítő inhomogenitások kialakulásában volt szerepe. A most ismertetendő modell, hasonlóan az előző fejezetben tárgyalt eredményhez, ismételten azt illusztrálja, hogy a koevolúciós modellek más, korábban nem tapasztalt mechanizmusok működése révén is segíthetik az együttműködő stratégiát.

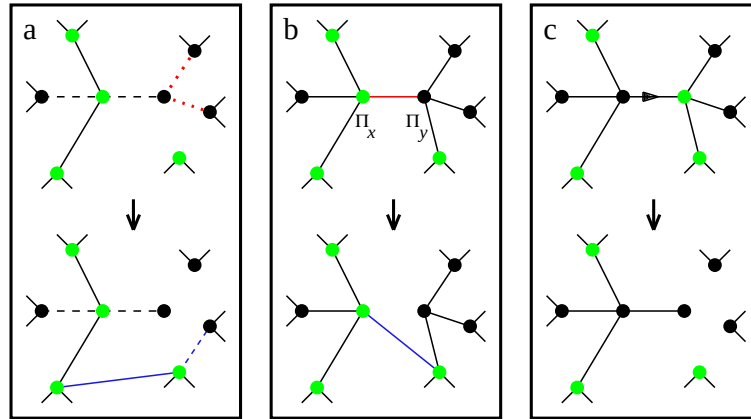
A modellünk azt a mozzanatot kívánja megragadni, hogy a stratégiaátadás révén a „meghódított” játékos változik, ami esetenként kihat a kapcsolataira is. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a stratégiáját változtató játékos elveszti az összes eddig

kapcsolatát, kivéve azt, ahonnan az új stratégiát átvette. Számtalan olyan helyzetet sorolhatunk, ami valamilyen szinten modellezhető a kapcsolati gráf ilyen módon történő változásával. Biológia rendszerre gondolva a nagyobb fitnesszel rendelkező egyed elfoglalja a kisebb fitnessű helyét és a saját utódját helyezi el oda, amely kezdetben csak az ősével áll kapcsolatban. Társadalmi helyzetekre gondolva, a stratégiáját változtató játékost tekinthetjük olyan, a véleményét, érdeklődési körét stb. megváltoztatónak, aki a változással együtt felszámolja a korábbi kötődéseit is. De a stratégiát átadó játékost tekintve, gondolhatunk egy olyan vezetőre, aki egy megüresedett pozíciót egy vele azonos elveket valló, de a munkahelyi kollektívában új, ezért kezdetben csupán a vezetőhöz kötődő munkatárssal tölti be.

A fenti szabályt követve, természetesen a kapcsolatok így csupán fogynának, ezért megengedjük, hogy a játékosok bizonyos időnként új, az egyszerűség kedvéért véletlenszerű kapcsolatokat építsenek ki. Fontos hangsúlyozni, hogy ilyen módon definiált dinamika „stratégia-semleges”, a kötések módosítása semmilyen módon nem tesz különbséget a stratégiák között, így az sem nyilvánvaló, hogy milyen hatása lesz az együttműködési szintre. Ennek a kijelentésnek az érzékeltetésére röviden felsorolunk néhány jellemző dinamikát, amit a játékelméleti modellekben a kapcsolati rendszer változására korábban javasoltak.

Egy kissé egyszerűsített, de a lehetőségek szempontjából reprezentatív áttekintést ad a lehetséges dinamikákról a 3.16. ábra. Az a) esetben bemutatott szabály szerint a kötések élettartamát kizárólag a kapcsolódó játékosok stratégiája határozza meg, hiszen a kötés típusa hatással van a játékos nyereményére [41, 42]. A javaslat szerint a legtartósabb kapcsolatok az együttműködőké (folytonos), míg a legkevésbé tartós az élőködők (pontosított) kölcsönhatása. A vegyes (élőködő-együttműködő) játékpárt összekötő szaggatott vonallal jelölt) kötés élettartama az említett két kötés élettartama közé esik. Az ábrán bontásra kerülő kötések piros, míg az új kapcsolatot kék színnel jelöltük. A b) esetben az eltérő stratégiájú x és y játékos a nyeremény szempontjából másként ítéli meg a kötés fontosságát. Ezért a kötés fennmaradását a két játékos nyereményének az összehasonlítása határozza meg [52]. A kisebb nyereményű ($\Pi_x > \Pi_y$) y játékos elvesztett kapcsolatát egy olyan szomszédja kapja meg, aki az x szempontjából kedvezőbb nyereményt biztosít. Összefoglalva, az a) esetben kizárólag a kötések típusa határozza meg a változást, míg a b) esetben a játékosok nyereménye alapján döntünk egy kötés sorsáról. A c)-vel jelzett harmadik típusú dinamikánál a kötések

változása szorosan kapcsolódik a stratégia tényleges átadásához, amit nyíllal jelöltünk. (Ez utóbbi folyamat valószínűségének a meghatározása természetesen a nyeremények kiszámolását is magába foglalja.) A stratégiát átvevő, „meghódított” játékos elveszti egyéb kötéseit [64].



3.16. ábra. Néhány jellemző példa a kapcsolati rendszer evolúcióját is figyelembe vevő modellekre. Az együttműködő (élősködő) játékosokat zöld (fekete) körök jelzik. Az a) esetben a kötések élettartamát kizárólag a kapcsolódó játékosok stratégiája határozza meg. Az együttműködőké (folytonos) tartós, míg az élősködőké (pontosított) rövid életű. A bontandó kötések piros, míg az új kapcsolatok kék színűek. A b) esetben a nemkívánatos kötés bontásánál figyelembe vesszük a játékosok nyereményét és a vesztes egyik szomszédja kapja az új kötést. A c) esetben a kötések bomlását a stratégiaátadás (nyíllal jelölve) okozza, ahol a meghódított játékos elveszti egyéb kötéseit.

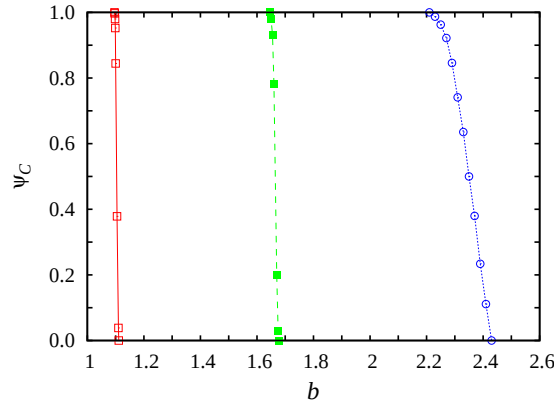
Természetesen számtalan további, közel 50 (!) modell, javaslat született a kapcsolati rendszer változásának a vizsgálatára az evolúciós játékelmélet keretei között. Ezek elemeiben hasonlítanak a bemutatott reprezentatív típusokra, esetleg további, finomabb szempontot is figyelembe vesznek. Az előbbi osztályozással csupán a markáns különbségekre kívántuk felhívni a figyelmet, illetve jelezni, hogy azoknál a dinamikáknál, amelyek közvetlen módon kedveznek az együttműködő stratégiának, egyáltalán nem meglepő, ha a dinamika alkalmazásának eredményeként emelkedni fog az együttműködési szint. Ebből a szempontból a semleges dinamikák az érdekesebbek [66, 30, 76], ahol nem feltétlen jósolható előre a dinamika hatása az együttműködés mértékére.

A továbbiakban vizsgált modellben kezdetben a játékosok kapcsolatait egy véletlen gráf írja le, ahol az átlagos kapcsolatszám $k_{av} = 4$, de minden játékos rendelkezik

legalább egy kötéssel, $k_{min} = 1$. Kezdetben mindkét stratégia véletlenül elhelyezkedve, egyforma gyakorisággal fordul elő. Maradva a gyenge fogolydilemma játéknál ($T = b$), egy Monte Carlo lépés során minden játékos átlagosan egyszer kap lehetőséget a stratégiájának az átadására. Hasonlóan a 3.2. fejezetben használtakhoz, a k_x kapcsolatból π_x nyereményt gyűjtő x játékos átadhatja az s_x stratégiáját a vele kapcsolatban álló, s_y stratégiával rendelkező y játékosnak, ha $\pi_x > \pi_y$, ahol a stratégiaátadás valószínűségét a (3.1) egyenlet határozza meg. Amint már említettük, ha egy játékos átveszi a szomszédja stratégiáját, akkor elveszti az összes kapcsolatát, kivéve azt, ahonnan a stratégiát kapta. Ha a kötések bontása során egy szomszédos játékos elvesztette az egyetlen kötését is, akkor azt egy véletlenül választott másikkal pótoltuk, a $k_{min} = 1$ feltétel teljesítéséhez. Ezen kívül τ Monte Carlo lépésként minden játékos kapcsolatot létesít egy véletlenszerűen választott másik olyan játékoskal, amellyel még nincs kapcsolata. A kötések számának a növekedését felfoghatjuk egyfajta öregedésnek, ezért ha egy játékos elér egy k_{max} kötésszámot, akkor egyetlen kivételével elveszti az összes korábbi kötését. A szimulációk során olyan nagy maximális kötésszámot használtunk ($k_{max} = 500$), hogy az lényegesen nem befolyásolta se a kezdeti véletlen gráf kialakulását, se a dinamika során a stratégiák fejlődését [64].

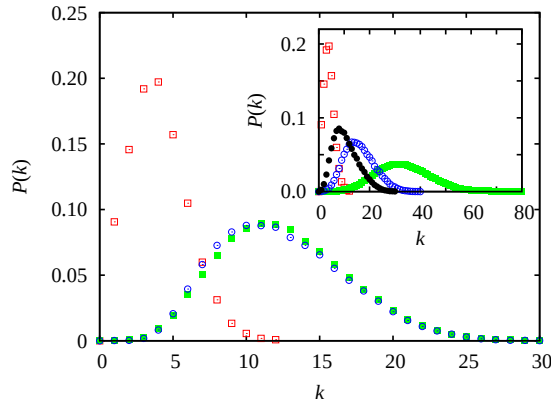
Az első érdekes megfigyelésünk az volt, hogy a rendszer mindig a tiszta együttműködő vagy a tiszta élősködő állapotba fejlődött, függetlenül a rendszermérettől. A végső állapot kimenetele a b paraméter értékétől függően meglehetősen élesen változott, tehát egy küszöb b érték alatt mindig tiszta együttműködő, míg nagyobb b érték esetén mindig tiszta élősködő állapotba fejlődött. Ahogy az a 3.17. ábrán is látható, az a b tartomány, ahol eltérő valószínűséggel, de mindkét említett végállapot előfordulhatott, általában nagyon szűk volt, csak nagyon nagy τ érték esetén szélesedett ki. Az ábráról az is leolvasható, hogy a τ paraméter értéke jelentősen képes befolyásolni az együttműködés szintjét, azt növelve az együttműködő stratégia a dilemmát jelentő bármely $1 \leq b \leq 2$ értéknél képes teljes mértékben elterjedni. (A kritikus b értékek τ függése elég nagy $k_{max} \approx 500$ érték felett telítésbe megy.)

Az együttműködés növekedésének az okát nem magyarázhatjuk a korábban oly sokszor hasznosnak bizonyult erősen heterogén kapcsolati rendszer topológiával, mert a kezdeti véletlen gráf jellege az alkalmazott dinamika eredményeképpen lényegében nem változik. A 3.18. ábrán, ami a végállapotok fokszámoszlását mutatja, jól látható, hogy találhatók olyan paraméterek, ahol a teljesen ellentétes végállapot esetén is

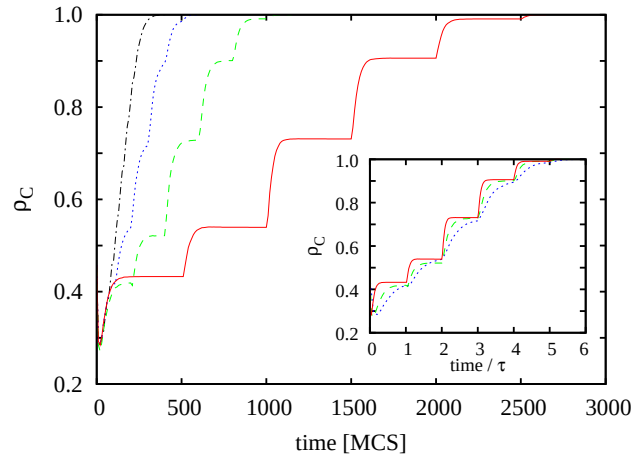


3.17. ábra. A tiszta együttműködő állapotba fejlődés valószínűsége (ψ_C), a b elősködő nyeremény függvényében $\tau = 1$ (üres négyzet), $\tau = 10$ (tömör négyzet), és $\tau = 70$ (üres kör) esetén. A komplementer esemény a tiszta élősködő állapotba fejlődés.

gyakorlatilag egybeeső Poisson-eloszlás írja le a játékosok kapcsolatait. A végállapot konkrét eloszlása csupán attól függ, hogy mennyi ideig tart a relaxáció az abszorváló (tiszta együttműködő vagy élősködő) állapotba és ezalatt a kapcsolatok átlagos száma mennyit változott. A relaxációs idő pedig szoros kapcsolatban áll a τ paraméterrel, ahogy azt a 3.18. ábra inzertje is mutatja.



3.18. ábra. A fokszámeloszlás a kezdeti (piros üres négyzet) és a végállapotban. Az egyik tiszta együttműködő végállapot $\tau = 70$ és $b = 1.6$ értékeknél (zöld tömör négyzet), a másik tiszta élősködő stratégiaeloszlás esetén $\tau = 70$ és $b = 2.7$ (fekete üres kör) paramétereknél. A kisebb ábra rögzített $b = 2$ értéknél különböző $\tau = 30, 70$ és 500 értékeknél mutatja a végállapot fokszámeloszlását (balról jobbra). A legmagasabb üres négyzetekkel jelölt eloszlás ismét a kezdőállapot eloszlása.

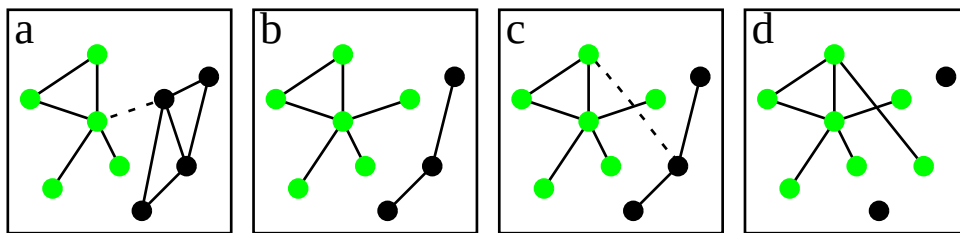


3.19. ábra. Az együttműködők ρ_C sűrűségének időbeli változása $b = 1.5$ -nél különböző, $\tau = 30, 100, 200$, és 500 értékeknél (balról jobbra). Az inzert az előbbi görbéket a megfelelő τ -val skálázva mutatja (az áttekinthetőség érdekében csak a $\tau \geq 100$ esetén).

A rendszerben végbemenő folyamat megértését nagyban segíti, ha nyomon követjük az együttműködők arányának az időbeli változását a különböző τ értékeknél, amit a 3.19. ábra mutat. Ha a τ értéke elég nagy, akkor különösen szembetűnő, hogy bizonyos időszakokban, a görbék nem változnak. Az inzertben használt skálázott idő segítségével megállapítható, hogy ezek a „mozdulatlan” időszakok azután kezdődnek, miután kellő idő eltelt a legutóbbi véletlen kapcsolatok kiépítése óta. Ezek a konstans szakaszok úgy magyarázhatóak, hogy a stratégia átadását követő kapcsolatok bontása révén közel homogén, azonos stratégiát tartalmazó játékosok elkülönült csoportja alakul ki. Ez az egymással azonosulás nagyban segíti az együttműködőket, hiszen így nagy egyéni nyereseményre tehetnek szert, ugyanakkor fokozottan sújtja az élősködőket, mert azok éppen azokat a kapcsolataikat veszítik el, amik révén a nyeresémük zérustól különbözhetne. A csoporton belüli homogenizálódás és azok egymástól történő szétválása egy bizonyos idő alatt megtörténik, majd a rendszer egy befagyott állapotba kerül, ahonnan csak akkor tud továbbfejlődni, ha a τ lépésként esedékes újabb véletlen kötések révén a különböző stratégiát hordozó csoportok egymással kapcsolatba kerülnek. Ilyenkor viszont megnyilvánulhat az együttműködő stratégia jótekonysága, hiszen a legyengült élősködőket könnyedén „meghódíthatják” az együttműködők. Fontos hangsúlyozni, hogy ilyenkor az élősködőket még a több kapcsolat sem „védi”,

hiszen azok egyike sem nyújt számukra nyeresémet. Ekkor az együttműködők térnyerése lavina-szerű folyamat révén megy végbe, ami az együttműködési szint gyors emelkedését vonja maga után. Az inzert ábráról az is látszik, hogy ennek a relatív me-redeksége éppen a legritkábban új kötést biztosító $\tau = 500$ -nál a legnagyobb, hiszen ilyenkor tud a legtökételesen a csoportok homogenizálódása és egymástól történő elkülönülése végbemenni. A fenti jelenségeknek az is egy következménye, hogy a τ értékét egy bizonyos szinten túl növelve már nem érhetünk el további hatást, csupán a fagyott, közbelső időszakok hosszát növelhetjük.

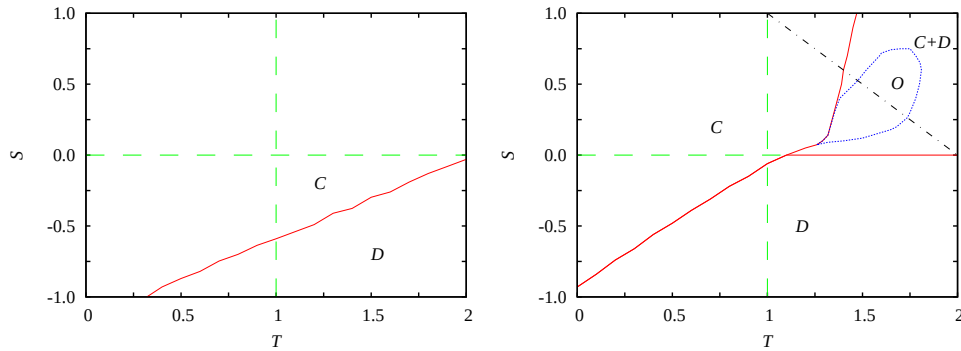
Anélkül, hogy elmélyednénk abban a biológusok között máig fennálló, meglehetősen heves vitában, ami a csoportszelekció és a többszintű szelekció meghatározása körül folyik [85], azt szeretnénk kiemelni, hogy a fenti dinamika felszínre hozza a különböző stratégiát képviselő, *spontán szerveződő* csoportok közötti különbséget, és így lényegében egy magasabb szintű, a csoportok eltérő teljesítményén alapuló szelekció révén tudja elérni az együttműködés elterjedését. (Hasonló, az egyedek szintjén működő, de a csoportok eltérő teljesítőkéességét kihasználó mechanizmust figyelt meg Szöllősi Gergely és Derényi Imre egy minimálisan strukturált, két keveredési szintet feltételező modellben [62].) Esetünkben a folyamat működését a 3.20. ábra foglalja össze. Az egyik kulcselem az, hogy a stratégiaátadást kísérő kapcsolatok ismételt bontása azonos stratégiával rendelkező, homogén játékosok csoportját fogja eredményezni. A τ lépésként előforduló új kapcsolatok kiépítése révén megtörténik az információ áramlása, amely lehetővé teszi az együttműködés nyújtotta kollektív előnyök érvényesülését.



3.20. ábra. Az együttműködést segítő mechanizmus működése. A kötések sorozatos bontása az együttműködők (zöld) és az élősködők (fekete) homogén csoportjait eredményezi. Az időnkénti új kötés révén (a ábra) a megerősödött együttműködő játékos sikeresen tudja az élősködő stratégiáját megváltoztatni. A stratégiaátadás következtében a meghódított játékos elveszti egyéb kapcsolatait (b ábra). A folyamat addig ismétlődik, míg végül az élősködő csoport teljesen meg nem szűnik (d ábra).

3.4.1. Oszcilláció a héja-galamb játékban

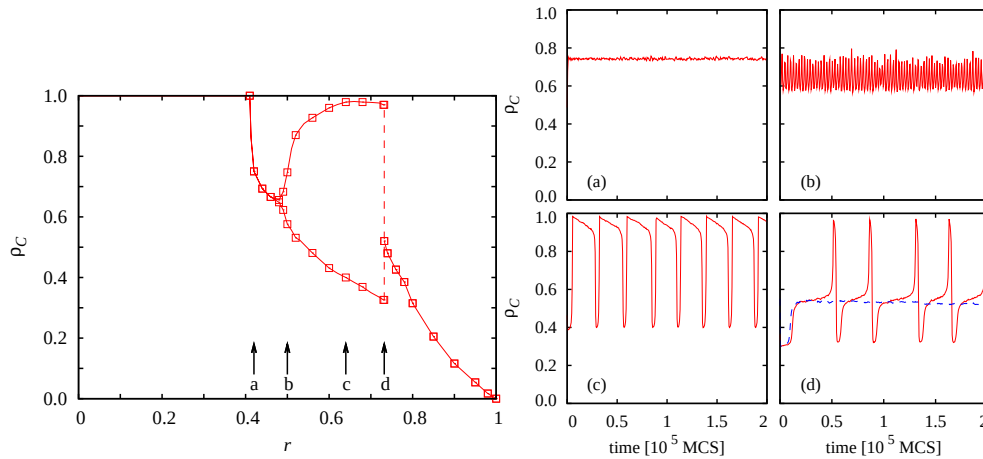
Az eltérő τ értékek következtében fellépő lényegesen különböző viselkedés lehetőségének a megmutatására, az előző fejezetben bevezetett modellben a stratégiák kölcsönhatását kiterjesztjük a szociális dilemmákat felölelő kétparaméteres $T - S$ síkon értelmezett játékokra [66]. Már a 3.17. ábra is jelezte, hogy a kis τ , tehát a túl gyakori új kapcsolatok képesek megakadályozni a homogén stratégiájú csoportok szétválását és így a fent leírt mechanizmus érvényesülését. Két, szélsőségesnek tekinthető τ értéknél kapott fázisdiagramok összehasonlítását mutatja a 3.21. ábra.



3.21. ábra. A fázisdiagramok a $T - S$ -síkon $\tau = 500$ (bal oldal) és $\tau = 1$ (jobb oldal) esetén. C és D jelöli a tiszta együttműködő illetve a tiszta élősködő tartományokat. $C + D$ jelöli azt a fázist, ahol a két említett stratégia egyszerre van jelen, állandó arányban. Az O betűvel jelölt tartományban a két stratégia aránya periodikusan változik. Az egyes játékok határát zöld szaggatott vonalak, míg a vizsgált egyparaméteres héja-galamb játék elhelyezkedését a fekete szaggatott-pontozott vonal mutatja.

Ha a τ értéke elég nagy (bal oldal), akkor mindhárom szociális dilemma játéknál hasonló viselkedést figyelhetünk meg, mint amelyet a gyenge fogolydilemma játéknál korábban tapasztaltunk. A rendszer vagy a tiszta együttműködő (C), vagy a tiszta élősködő (D) állapotba fejlődik és a két végállapot között a nyereménymátrix értékeinek a függvényében éles az átmenet. Az előbbieken leírt mechanizmus olyan hatékonyan képes segíteni az együttműködő stratégiát, hogy a héja-galamb játéknál kizárólagosan, de a fogolydilemma játékon belül is jelentős paraméter tartományban csak az együttműködők tudnak fennmaradni. Ezzel szemben kis τ -nál (jobb oldal), még a gyenge fogolydilemma esetén is csak kis T értékeknél tudnak az együttműködők életben maradni, sőt, az élősködő stratégia jelen van a héja-galamb tartományba is. Érdekes módon az utóbbi játék paraméterezése esetén olyan megoldások is felbukkannak, amit

más dilemma játékoknál, illetve nagy τ értékeknél sem figyelhetünk meg. A $C + D$ -vel jelölt tartományban a két stratégia tartósan együtt tud élni úgy, hogy az arányuk időben nem változik. Ugyanakkor az O -val jelölt tartományban a két stratégia együttélése úgy valósul meg, hogy az arányuk időben oszcillál.

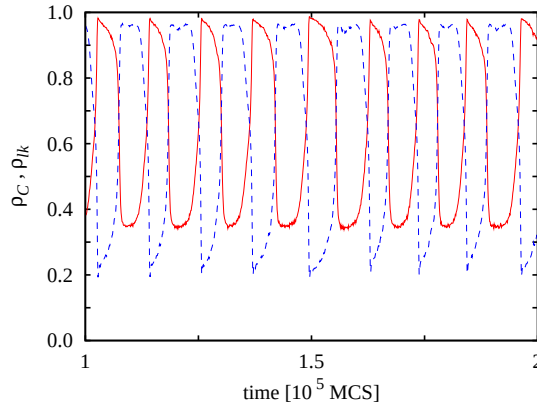


3.22. ábra. Bal oldal: Az együttműködők arányának minimális és maximális értékei az r paraméter függvényében (ha nem oszcilláló fázisban vagyunk, akkor a két érték megegyezik). Az a-d betűk azokat az r értékeket mutatják, ahol az együttműködők koncentrációjának időfüggését ábrázoltuk a jobb oldali ábrán. A (d) ábrán, az elsőrendű fázisátalakulási pontban a kezdőállapottól függően kétféle megoldás is lehetséges (folytonos piros, illetve szaggatott kék színnel jelölve). A kétféle megoldást $\rho_c = 0.2$, illetve $\rho_c = 0.6$ kezdeti együttműködő arányt feltételezve kaptuk.

A héja-galamb játék nyújtotta gazdag viselkedést a játék a 1. fejezetben leírt egy-paraméteres változatának vizsgálatával tekintjük át. Ekkor a héja-galamb negyedét átlósan szeljük át a 3.21. ábrán pontozott-szaggatott vonalnak megfelelően. Amint azt a 3.22. ábra bal oldala is mutatja, az r növelésével a rendszer a tiszta együttműködő állapotból először abba a fázisba kerül, ahol a két lehetséges stratégia aránya időben nem változik. Ebben a tartományba egy jellemző viselkedést mutat az (a) panel, az ábra jobb oldalán. Az r értékét tovább növelve, egy folytonos fázisátalakuláson keresztül, a stratégiák koncentrációja időben oszcillálni fog. Ebben a tartományban az r értékét változtatva az oszcillálásnak nem csak az amplitúdója, hanem a periódusa is változik. Fontos hangsúlyozni, hogy például a (b) panelen ábrázolt időfüggés nem a véges méret okozta fluktuáció következménye, mert az oszcilláció amplitúdója a rendszer méretét növelve is ugyanolyan mértékű marad. Az ábrán (d)-vel jelölt $r = 0.732$ pontban a rendszer egy elsőrendű fázisátalakulás révén újra egy olyan fázisba kerül,

ahol a két stratégia aránya időben nem változik. Az elsőrendű fázisátalakulást a két fázis egyensúlya jellemzi, amit a jobb oldali (d) panel is illusztrál. Itt az átalakulási pontnak megfelelő r -nél, függően attól, hogy milyen kezdőfeltételből indítjuk a rendszert, mindkét viselkedés megfigyelhető. Az r értékét tovább növelve, az (a) panelhez hasonló viselkedés figyelhető meg, ahol az együttműködők aránya folyamatosan csökken, míg $r = 1$ -nél a gyenge fogolydilemma játékot elérve a tiszta élősködő állapotba jutunk.

Oszcillációt más játékelméleti modellben is megfigyelhettünk [57, 72], de ezekben az esetekben ezt az egymást ciklikusan domináló három stratégia jelenléte tette lehetővé. A jelenlegi rendszerben a két stratégia gyakorisága egyetlen független változóval leírható, de a koevolúciós dinamika során a kapcsolati rendszer is változik, ami természetesen kínál egy másik, független változó lehetőségét is. Az egyszerűség kedvéért az egyetlen paraméter, ami a játékosok közötti kapcsolatok minőségét fogja jellemezni, azon játékosok aránya lesz, akik fokszáma a legkisebb (például $k < \frac{1}{3} k_{max}$) tartományba esik. A 3.23. ábrán az átlagos együttműködési szint és a fentiekben definiált játékosok arányának a szimultán időfüggését ábrázolva, láthatjuk, hogy a fenti mennyiség a lezajló folyamat szempontjából valóban lényeges pontot ragadott meg, hiszen a két mennyiség azonos periódussal, de ellentétes fázisban oszcillál.



3.23. ábra. Az együttműködők (folytonos piros vonal) és a kevés kapcsolattal rendelkező játékosok (szaggatott kék vonal) arányának változása az oszcilláló fázisban $r = 0.7$ -nél.

A két mennyiség kölcsönhatása érthető, ha arra gondolunk, hogy a stratégiaátadás, illetve a kis τ miatti folytonos kapcsolati szám bővülés miatt létrejöhetnek olyan nagy fokszámmal és emiatt nagy befolyással bíró együttműködők, mint amelyeket a

skálamentes gráfon is megfigyeltünk. Ezek folyamatos erősödése fokozatosan emelni tudja az együttműködés szintjét, illetve velük együtt a játékosok átlagos fokszáma is emelkedik. Amikor a befolyásos játékosok elérik a maximális k_{max} fokszámot, a dinamikai szabályok szerint egy kivételével elvesztik az összes kapcsolatukat. A nagy befolyás megszűnésével gyengül az a hatás is ami a térbeli kölcsönösség felerősödését okozta, így az együttműködők száma is csökkenni fog. Ezzel egyidőben sok játékos kerül az alacsony fokszámú halmazba, hiszen a nagy befolyású játékosok kötéseinek a megszűnésével jelentősen csökkent az átlagos kapcsolati szám is. Innentől a folyamat újra kezdődik, hiszen a stratégiaátadást követő kötések bontása miatt *csak az együttműködő* játékosok képesek nagy befolyási kört kiépíteni. Ebben a tekintetben a fenti modell lényegesen különbözik például attól, a spanyol kutatók által bevezetett modelltől, amelyben az eredeti Barabási-Albert növekvő gráf modellt adaptálva olyan koevolúciós dinamikát javasoltak, amelyben az új játékosok kapcsolódása a meglévő játékosokhoz az egyéni nyereményével arányos valószínűségű volt [46]. Itt a befolyásos élőködők környezetében folyamatosan megjelenhetett az együttműködő stratégia, ami miatt az előbbieket megtarthatták viszonylag magas nyereményüket és így a befolyásukat is. Ezek alapján a megfigyelésük, miszerint a legnagyobb befolyású játékosok körében az együttműködés csak mérsékelt, egyáltalán nem meglepő, hiszen az új „romlatlan” játékosok mindig biztosították az élőködők nyereményét. Talán ez a példa is rámutat arra, hogy milyen hatékony és az együttműködést jelentősen segítő lehet az a dinamika, amely bontja a „meghódított” játékos egyéb kötéseit.

Ebben a fejezetben bemutatott modell is látványosan illusztrálta, milyen új és minőségileg más mechanizmusok illetve viselkedés bukkanhat fel, ha túllépünk a biztonságot és ugyanakkor korlátokat is jelentő statikus modelleken. A több szabadsági fokot megengedő „koevolúció” arra is felhívja a figyelmet, hogy az időben oszcilláló megoldások is felléphetnek annak ellenére, hogy a rendszerben előforduló stratégiák csupán egyetlen független paraméterrel is leírhatóak.

4. fejezet

A zaj, mint koevolúciós paraméter

A játékelméleti koevolúciós modellek lényege az, hogy valamilyen, a stratégiaátadást befolyásoló tényező is időben változhat a játékosok stratégiája mellett. Ez növelheti a játékos nyereményét, például a kapcsolatok bővülése révén, de hatással lehet az átadás valószínűségét módosító tanítási (reprodukciós) képességre is. Ugyanakkor a stratégiaátvételt meghatározó (1.3) Fermi-valószínűség számítási módja is lehet játékosfüggő, ha a benne szereplő K zajparaméter értéke játékosonként más értéket vehet fel.

Az említett K paraméter jelentése, értelmezése meglehetősen széleskörű lehet. Kifejezheti annak a hibának a lehetséges mértékét, amit egy játékos akkor követ el, amikor elfogad egy látszólag kisebb, illetve nem fogad el egy látszólag nagyobb nyereményt biztosító stratégiát. De a Fermi-függvény szélességére gondolva K kifejezheti azt is, hogy egy játékos mekkora nyereményt hajlandó kockáztatni egy jobb stratégia érdekében. Másként fogalmazva $1/K$ azt is jelenti, hogy a stratégiaátvétel milyen intenzíven függ a nyeremény-különbségtől, tehát a játékos készségét a racionális döntésre. Röviden, K jellemezheti a stratégiaátvétel módját, a játékosoknak azt a képességét, ahogy a szomszédaiktól tanulnak.

Az eddigiek alapján kézenfekvő feltenni azt, hogy ez a mennyiség is változhat, fejlődhet, forrása lehet egy sikeresebb stratégiának, aminek a változását egy koevolúciós modell keretei közt vizsgálhatjuk. A dolgozat hátralévő részében egy ilyen modell eredményeit ismertetjük. Az eredmények értelmezéséhez ugyanakkor szükségünk van annak a tisztázására, hogy a zaj általánosan milyen módon befolyásolja az együttműködést. Ezért a fejezet első részében az ezzel kapcsolatos eredményeket foglaljuk össze.

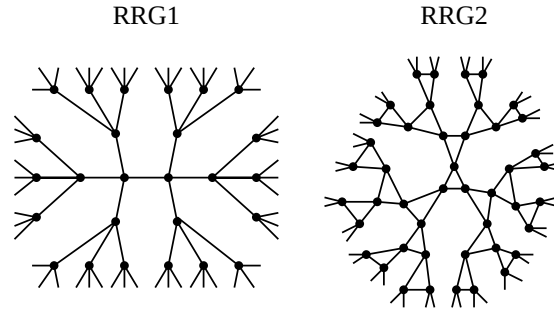
4.1. A homogén zaj hatása térbeli rendszereknél

Ismét maradva az együttműködés szempontjából legnagyobb kihívást jelentő foglydilemma helyzetnél, annak egyparaméteres (gyenge) változatát használva, azt fogjuk vizsgálni, hogy különböző kölcsönhatási gráfok esetén hogyan befolyásolja az együttműködést, milyen általános következtetések vonhatók le, ha a stratégiaátadást az (1.3) egyenlettel megadott valószínűségben minden játékos ugyanazt a K paramétert használja.

Egy korábbi fontos megfigyelésünk volt, hogy a rácstopológiák lényegében két osztályba sorolhatóak aszerint, hogy a zaj növelése hogyan befolyásolhatja az együttműködők arányát. Azoknál a rácsoknál, ahol a rács tartalmaz egymással érintkező háromszögeket (például kagomé vagy háromszögrács esetén), az a kritikus b_c érték, ahol az együttműködő stratégia eltűnik, a zaj növelésével monoton csökken. Ugyanakkor a fordított irányban, a determinisztikus $K \rightarrow 0$ határeset felé haladva az együttműködés fenn tud maradni a $1 \leq b \leq 1.5$ tartományban is [60]. Ezzel szemben, ha a kölcsönhatási topológiát olyan rács írja le, ahol hiányzik a fent említett tulajdonság, akkor az együttműködés határát jelző $b_c(K)$ függvény nem monoton, hanem egy közbenső K értéknél van az a maximális b_c , ahol a tiszta élősködő fázis kezdődik. Az előbbi viselkedésre példa a 2.2. ábra, míg az utóbbira a 2.3. ábrán bemutatott fázisdiagramok.

Bár a szilárdtestfizikában a transláció invariáns szerkezetek tanulmányozásának kitüntetett helye van, de a játékelméleti modellekben meglehetősen korlátozott azon rendszerek száma, ahol az ilyen típusú topológiát feltétel nélkül, közvetlenül lehet alkalmazni a valóság értelmezésére. Mégis, az ilyen struktúrák alkalmazását indokolhatja az egyszerűségük, ami révén akár alapvető jelenségek felismerésére is alkalmasak lehetnek, amelyeket később bonyolultabb struktúrákon is megfigyelhetünk. A zaj hatását vizsgáló említett munkával kapcsolatban is felmerül az, hogy mennyire általánosak, illetve mennyiben kötődik a megfigyelt jelenség a rácsszerkezethez.

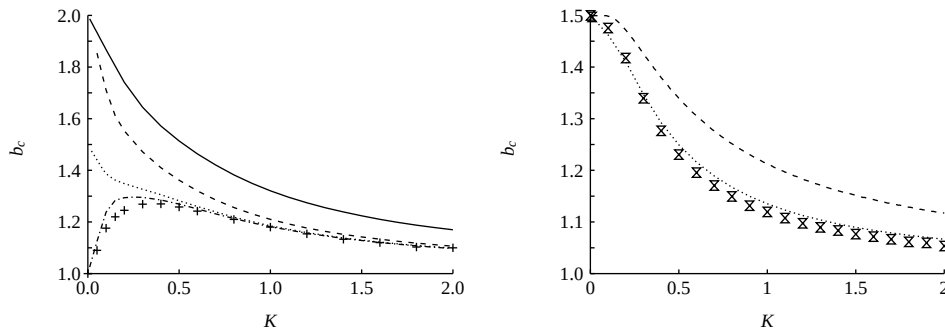
Az említett kérdés tisztázására két olyan véletlen kapcsolati hálózatot vizsgáltunk, amelyek az említett topológiai tulajdonság szempontjából lényegesen különböznek. A további effektusok zavaró hatásának az elkerülése érdekében homogén (reguláris), a korábban alaposan vizsgált négyzetrács és kagomé rácsokkal azonos foksámú ($z = 4$) struktúrákat választottunk, amiket az 4.1. ábra illusztrál [80]. Az RRG1-nek nevezett fa struktúra az ún. Bethe-rács szimulált változata. Természetesen az utóbbi tartalmaz hurkokat (amiket nem tüntettünk fel az ábrán, de ezek hatása elhanyagolhatóvá válik,



4.1. ábra. A vizsgált két véletlen hálózat egy-egy részlete, amely hurokmentes (RRG1), illetve amelyik tartalmaz érintkező háromszögeket (RRG2).

ha elegendően nagy gráfot használunk. Ezért mondhatjuk, hogy ennek a gráfnak az ún. fürtösödési együtthatója (clustering coefficient) zérus ($\mathcal{C} = 0$). Az RRG2-nek nevezett gráf lényegében olyan háromszöghöz kapcsolódó másik háromszögek véletlen ismétlődése, amelyik lokálisan a kagomé rács topológiájára hasonlít és a fürtösödési együtthatója véges, $\mathcal{C} = 1/3$.

A korábban említett, a topológiára érzékeny $b_c(K)$ függvényre kapott szimulációs és dinamikus átlagtér közelítések eredményét a 4.2. ábra mutatja a két vizsgált struktúrára. A dinamikus átlagtér számoláshoz, melynek részleteit a következő alfejezetben foglaljuk össze, az RRG1 gráfnál rendre, 2, 5, 8 és 11 pontból álló klasztert, míg az RRG2 gráfnál 3 illetve 5 pontból álló klasztereket használtunk.



4.2. ábra. Az együttműködő stratégia fennmaradásának határát jelentő b_c értékek a zajparaméter függvényében az RRG1 (bal oldal) és az RRG2 (jobb oldal) kapcsolati gráfon. A szimbólumok a Monte Carlo szimuláció eredményei, míg a vonalak a szövegben részletezett különböző szintű dinamikus átlagtérszámítások eredményei.

Az ábrák összehasonlítása jól mutatja, hogy az említett $b_c(K)$ függvénynek a korábban felismert viselkedése nem korlátozódik a transláció invarianciával rendelkező hálózatokra, hanem megmarad véletlen reguláris gráfok esetén is.

Az eltérő viselkedés hátterében természetesen ugyanannak, az együttműködés terjedését lehetővé tevő mechanizmusnak a lehetősége, vagy hiánya áll, amit korábban a rács struktúrákon is megfigyelhettünk: Az érintkező háromszögek esetén, ha három együttműködőnek sikerül összeállni egy háromszög csúcsaiban az élősködők tengerében, akkor bármelyikük a két együttműködő kapcsolatból származó nagyobb nyeresmény révén sikeresen tudja átadni a stratégiáját a szomszédos élősködőnek, aki csak egyetlen szomszédját tudja kihasználni [55]. A változás ugyanakkor nyeresménynövekedést fog jelenteni a megmaradt élősködőnek, aki átlagosan csak akkor győzhető meg, ha a két együttműködő szomszédjából származó nyeresményt felülmúlja az együttműködőt támogató három kapcsolat járulékát ($2 \cdot b < 3$). Az utóbbi teljesülése esetén az együttműködő stratégia terjedését csak az akadályozhatja, ha a véletlen kezdőállapot miatt két növekedő együttműködő sziget határán lévő élősködő mindkét oldalt ki tudja használni. Az állandósult állapot ennek a két mechanizmusnak az egyensúlyából alakul ki. Természetesen a nagy K értéknél ez a determinisztikus terjedést gyengíti az, ha a bizonyos értelemben védelmi szövetséget alkotó három együttműködő egyike a zaj eredményeként ellentétes stratégiát választ.

Érdemes megemlíteni, hogy a kapcsolati hálózatban meglévő átfedő közösségek nem csupán az együttműködés szempontjából lehetnek fontosak, hanem éppen magyar kutatók, Derényi Imre, Palla Gergely, Farkas Illés és Vicsek Tamás munkájából tudjuk, hogy azok általánosan megfigyelhetőek a hálózatok széles körében, meghatározva, illetve befolyásolva az azokon végbemenő folyamatokat [43, 9].

4.1.1. A dinamikus átlagtér közelítés

Mivel a 4.1. fejezetben ismertetett eredményekhez a dolgozat szerzőjének a hozzájárulása elsősorban a dinamikus átlagtér számolásokat jelentette, ezért a továbbiakban röviden összefoglaljuk ezt a technikát. Ez a módszer kissé hasonlít az egyensúlyi statisztikus fizikában jól ismert klaszter-variációs módszerhez, ami legalacsonyabb rendben az átlagtér, illetve a Bethe–Peierls közelítésként is ismert [28, 75]. Itt a termodinamikai potenciált, például a szabad energiát származtatjuk mikroszkopikus mennyiségek, a klaszterek előfordulási valószínűségének a segítségével, majd a kapott termodinamikai mennyiségre már alkalmazható a termodinamikai potenciálokat kihasználó

egyensúlyi formalizmus. A közelítés rendjét a leíráshoz használt legnagyobb egzaktul kezelt klaszter mérete határozza meg, míg az ettől nagyobb méretű klaszterek előfordulási valószínűségét az előbbiek segítségével közelítjük. A megoldandó egyenlet a variációs elvnek megfelelően egy szélsőérték meghatározásából származtatható.

Ezzel szemben a dinamikus átlagtér közelítésben, egyensúlyi potenciálok hiányában, a szintén felmerülő klaszter konfigurációk előfordulási valószínűségét dinamikai master-egyenletekből származtatjuk. A hátrány (átfogó leírás hiánya) egyben előny is, hiszen nem-egyensúlyi rendszerek vizsgálatára is alkalmas, a 90-es évek elején éppen ilyen rendszerek tanulmányozására használták először [10, 11, 56]. A cél általában a stacionárius megoldás megtalálása, de bizonyos esetekben a valószínűségek időbeli fejlődése is érdekes lehet. A valószínűségek a stratégiaátadás következtében változhatnak, ezért egy adott méretű klaszter előfordulási valószínűségének a változását megadó kifejezés az elemi stratégiaátadás valószínűségének és a hozzá tartozó konfiguráció feltételezett előfordulási valószínűségének a szorzata. Mivel az utóbbi nagyobb méretű klaszter vizsgálatát feltételezi, mint amilyen méretűre a master-egyenletet felírjuk, ezért azt közelítjük a kisebb méretű klaszterek valószínűségét felhasználó, feltételes valószínűségi formulával. Például az RRG1 gráf esetén a $n = 11$ -pont közelítésben a 11 játékost tartalmazó konfigurációk valószínűségére felírt egyenletrendszeret oldjuk meg. A 4.3. ábrán sárga színnel mutatott konfiguráció változásához meg kell határozni a sárga-zöld élekkel jelölt 17 pontból álló konfiguráció valószínűségét.

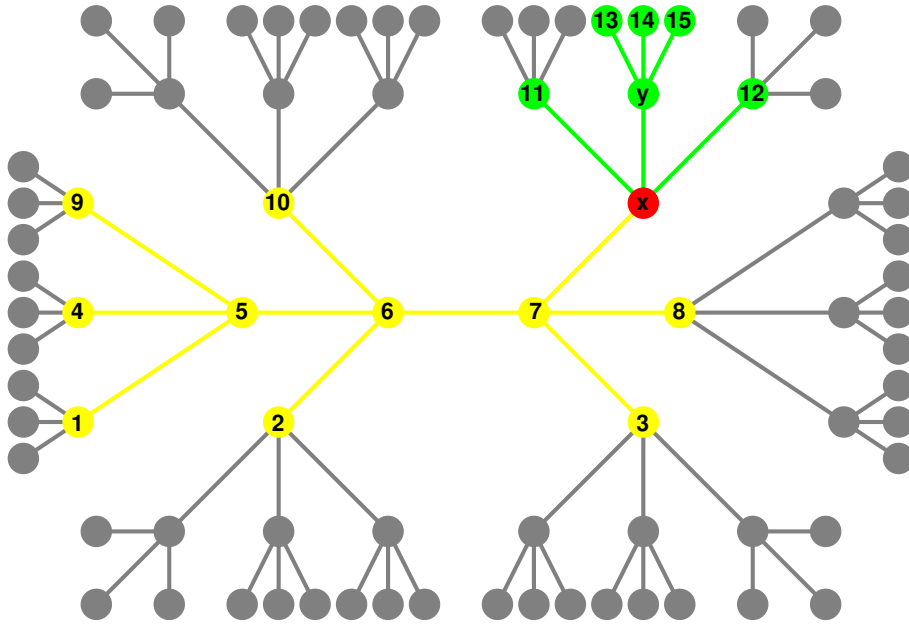
Ezt az alábbi kifejezéssel közelítjük:

$$p_{17}(s_1, \dots, s_{15}, s_x, s_y) \simeq p_{11}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_x) \times \frac{p_{11}(s_2, s_3, s_5, s_6, s_7, s_8, s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_x, s_y)}{p_8(s_2, s_3, s_5, s_6, s_7, s_8, s_{10}, s_x)} \times \frac{p_{11}(s_3, s_6, s_7, s_8, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_x, s_y)}{p_8(s_3, s_6, s_7, s_8, s_{11}, s_{12}, s_x, s_y)}. \quad (4.1)$$

Itt az alacsonyabb méretű klaszterek, például a nevezőben szereplő 8-pontból álló klaszter valószínűségét is a közelítés rendjét megadó méretű klaszterek valószínűségeiből számolhatjuk:

$$p_8(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8) = \sum_{s_9, s_{10}, s_{11}} p_{11}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}), \quad (4.2)$$

ahol az összegzés a jelölt stratégiák összes lehetséges értékeire történik. Maradva a 4.3. ábrán mutatott esetről, a fentieket felhasználó tag,



4.3. ábra. A 11-pont közelítés alkalmazása az RRG1 gráfra. A pirossal jelölt x játékos átveszi y stratégiáját. Emiatt a sárgával jelölt klaszter előfordulási valószínűsége változni fog. A változás mértékéhez ki kell számolni a sárga és zöld élekkel jelölt 17 pontból álló konfiguráció előfordulási valószínűségét is.

amely csökkenti a $p_{11}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_x)$ illetve növeli a $p_{11}(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_y)$ konfiguráció valószínűségének az értékét, a (4.1) konfiguráció és a stratégiaátadás valószínűségeinek a szorzata:

$$\Delta p = W p_{17}(s_1, \dots, s_{15}, s_x, s_y), \quad (4.3)$$

ahol W a (1.3) egyenletben megadott, az x és az y játékos nyereménykülönbségén alapuló kifejezés. Az adott konfiguráció valószínűségét meghatározó teljes master-egyenlet 44 hasonló kifejezés összegeként áll elő, ahol összegezni kell még a játékosok lehetséges állapotaira is.

Természetesen, mint a 4.2. ábra is illusztrálja, a közelítés az egzaktul kezelt klaszterméret növelésével egyre pontosabb eredményt ad, hiszen egyre nagyobb méretű térbeli korrelációkat tud figyelembe venni. A pontosság növelésének csak az szab határt, hogy a klaszterméret növelésével egyre több tagot kell figyelembe venni, egyre kisebb értékű konfigurációs valószínűségekkel, ami a konvergencia rohamos lassulását fogja eredményezni.

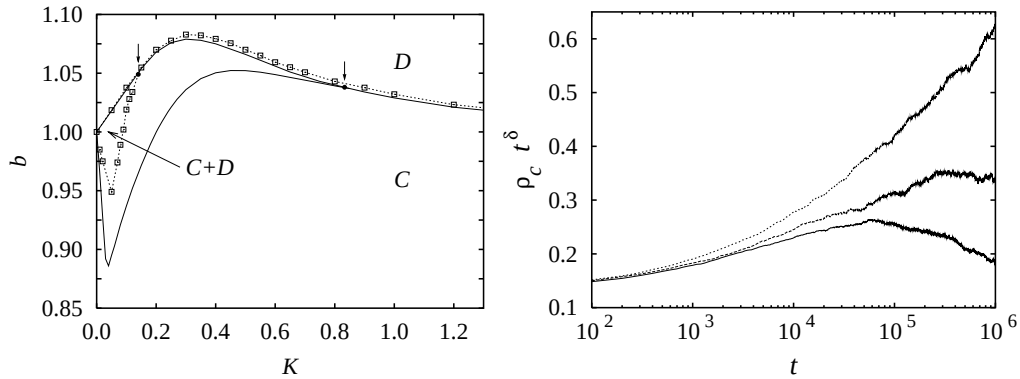
4.1.2. Átfedő csoportok hatása egydimenzióban

Az előző fejezetben vizsgált kölcsönhatási gráfokra kapott eredmények alapján azt mondhatjuk, hogy a kapcsolati rendszert jellemző érintkező háromszögek olyan alapvető topológiai tulajdonság, amely lehetővé teszi az együttműködő stratégia tartós fennmaradását a determinisztikus stratégiaátvételi határesetben bizonyos, $b > 1$ élősködő nyeremények esetén is. Feltehetjük azt a kérdést, hogy vajon az előbbi tulajdonság milyen mértékben képes meghatározni az együttműködési szintet olyankor, amikor a fentiekkel ellentétes hatású topológiai kényszer is jellemzi a játékosok kapcsolatait. Például, ha a játékosok egy egydimenziós lánc mentén helyezkednek el, ahol csak a közvetlen szomszédaikkal tudnak kölcsönhatni ($z = 2$), akkor az együttműködő stratégia egyáltalán nem képes fennmaradni, a legkisebb $b > 1$ nyereség is a kizárólagosan élősködő (tisztá D) állapot elterjedését fogja eredményezni. A két említett, egymással ellentétes hatást kiváltó topológia tulajdonság egyszerre is jelen lehet, ha érintkező háromszögek egydimenziós lánc jellemzi a játékosok kapcsolatait. A továbbiakban erre a topológiára kapott eredményeinket foglaljuk össze [81].

A korábbi eredményekkel való összehasonlíthatóság érdekében továbbra is a gyenge fogolydilemma játék határozza meg a stratégiák kölcsönhatását, ahol a játékosok szomszédoktól történő stratégiaátvételét a (1.3) egyenlet határozza meg. A játékosok egy egydimenziós láncon helyezkednek el, de nem csupán a közvetlen, hanem a másodsomszédokkal is kölcsönhatnak ($z = 4$). Ez utóbbi biztosítja, hogy három szomszédos játékos egymással közvetlen kapcsolatban álljon, illetve az így létrejött közösségek egymással is átfedjenek.

A fenti módon definiált játék fázisdiagramját a 4.4. ábra bal oldala mutatja. A különböző lehetséges fázisok bemutatása érdekében az élősködők nyereményét kiterjesztettük a $b < 1$ tartományba, ami már a szarvasvadász játék paraméterezését jelenti.

Az ábra mind a szimulációk eredményét, mind az ezzel minőségileg megegyező viselkedést jósoló dinamikus átlagtér számítások eredményét mutatja. Az egyszerű kapcsolati struktúra lehetővé teszi a dinamikus átlagtér közelítések szisztematikus növelését. Érdekes módon $n < 4$ -pont alatti közelítések csupán az élősködő stratégia túlélését jósolják a $b > 1$ tartományban, a K értékétől függetlenül. Ugyanakkor $n > 5$ közelítések esetén már az eredményül kapott fázisdiagramok jellegükben nem változtak, csak a fázishatárok helyzetére vonatkozó számszerű értékekben tértek el. A 4.4. ábrán az $n = 10$ -pont közelítés eredményét ábrázoltuk. Eszerint, összhangban a szimulációk



4.4. ábra. Bal oldal: A fogolydilemma játék fázisdiagramja a $z = 4$ egydimenziós struktúrán. A szaggatott vonallal összekötött szimbólumok a szimulációk eredménye, míg a folytonos vonalak az $n = 10$ -pontos dinamikus átlagtér közelítésből számolt fázishatárok. A nyilak a két technikával számolt trikritikus pontok helyét jelölik. Jobb oldal: Az együttműködők arányának időbeli változása $b = 1.03$ -nál, három különböző K értéknél ($K = 0.0789, 0.0790$ és 0.0791 , alulról felfelé), ahol az egydimenziós $\alpha = 0.159$ irányított perkolációs univerzalitási osztály exponensét használtuk.

eredményével, a $K \rightarrow 0$ határesetben a $\rho_c = 1$ együttműködő arányból a b növelésével egy lépcsőfüggvény-szerű változással a $\rho_c = 0$, tiszta élősködő fázisba kerül a rendszer a $b = 1$ pontban. Hasonló viselkedés extrapolálható a $K \rightarrow \infty$ határesetben. Kis K értékeknél ugyanakkor megjelenik a mindkét stratégiát tartalmazó vegyes ($C+D$) állapot, amelyből a b változtatásával, folytonos fázisátalakulás révén juthatunk a C vagy D abszorbáló fázisokba. (A fázisátalakulás jellegére még visszatérünk.) Az abszorbáló jelző természetesen azt fejezi ki, hogy ha a rendszer az említett állapotok egyikébe kerül, akkor a stratégia utánzását lehetővé tévő dinamika következtében azt már nem is képes elhagyni. A K értékét tovább növelve egy trikritikus pont felett a vegyes fázis újra eltűnik és ismét elsőrendű fázisátalakulás révén fog a rendszer a tiszta együttműködőből a tiszta élősködő állapotba kerülni. A fázisdiagramon nyíllal jelölt trikritikus pont a szimulációk szerint $b_{tr} \approx 1.05$, $K_{tr} = 0.15$ paraméter értékeknél helyezkedik el. A szimulációk és a dinamikus átlagtér közelítés trikritikus pontra vonatkozó becslésében a viszonylag nagy eltérés éppen a hosszútávú korrelációk szerepét hangsúlyozza egy-egy stratégia kihalását eredményező fázisátalakulás közelében.

A nem-egyensúlyi statisztikus fizikában vizsgált modellek tapasztalata az volt, hogy extra szimmetria vagy inhomogenitás hiányában az egyértelmű abszorbáló fázisba történő folytonos fázisátalakulás egykomponensű rendszer esetén az ún. irányított perkolációs univerzalitási osztályba tartozik [26]. Az állítást a jelenlegi modell

esetén is ellenőrizhetjük. Ennek numerikus megerősítésére az egyensúlyi állapotot jellemző rendparaméter-kontrollparaméter függvény méréséből számolható statikus exponens helyett, a hatékonyabban és pontosabban becsülhető dinamikus exponenst fogjuk mérni, amely a kontrollparaméter kritikus értékénél a rendparaméter hatványfüggvény szerinti eltűnését jósolja [33, 20]. Például a tiszta élősködő (D) fázis határánál az együttműködők koncentrációja a

$$\rho_c(t) \propto t^{-\delta} \quad (4.4)$$

függvény szerint válik zérussá, ahol az egydimenziós esetben a dinamikus exponens értéke $\delta = 0.1594$ [27]. A 4.4. ábra jobb oldalán az előbbi mennyiség időbeli változását ábrázoltuk három K érték esetén rögzített b érték mellett. Láthatóan a $K_c = 0.0790$ kritikus pontnál elegendően nagy ($t > 10^5$ Monte Carlo lépés) időre teljesül az együttműködőknek a fenti exponens szerinti eltűnése. Az ábrázolt pontosság eléréséhez meglehetősen nagy, $2 \cdot 10^6$ játékost tartalmazó rendszerméreten 30 független futás átlagát vettük.

Visszatérve a fázisdiagram értékelésére, megfigyelhetjük, hogy ellentétben az egyszerű ($z = 2$) egydimenziós esettel, véges K értéknél az együttműködő stratégia nem csak képes fennmaradni, de kizárólagossá is tud válni akár $b > 1$ élősködő nyeresemények esetén is, emlékeztetve a korábbi kétdimenziós fázisdiagramoknál megfigyeltre. Ugyanakkor determinisztikus $K \rightarrow 0$ határesetben az együttműködő stratégia nem tud fennmaradni egyetlen $b > 1$ érték esetén sem. Ezt a tulajdonságot úgy lehet értelmezni, ha figyelembe vesszük, hogy kulcsszerepet játszó együttműködő stratégia terjedési frontjai éppen az egydimenziós jelleg miatt egymást akadályozzák, nem tudják egymást kikerülni, így egymás hatását kioltják, mert az ilyen frontok találkozásánál lévő élősködő stratégia nagy nyereseményt képes elérni.

A fentiekből az is következik, hogy ha a szigorúan egydimenziós kényszert sikerül pl. hosszútávú kapcsolat hozzáadásával feloldani, akkor a homogén együttműködő állapotot eredményező frontoknak lehetőségük van egymás kikerülésére és így érvényesülhet a kétdimenziós struktúrákon megfigyelt mechanizmus. A fentiek könnyen ellenőrizhetők, ha a Newman-Watts modell konstrukciója szerint [37] további véletlen hosszútávú kapcsolatokat generálunk a meglévő kölcsönhatási gráfhoz. Ilyenkor a fázisdiagram valóban lényegesen változik, hasonlóan a 2.2. ábrán mutatott fázisdiagramhoz. Ennek megfelelően a $K \rightarrow 0$ határesetben, $b > 1$ esetén is fenn tud maradni az együttműködő stratégia.

4.2. A tanulási mód Darwini kiválasztódása

Visszatérve a 4. fejezet bevezetőjében kitűzött feladatra, a továbbiakban egy olyan koevolúciós modellt fogunk vizsgálni, ahol a játékosok egyéni K_x értékkel rendelkezhetnek és a dinamika során nem csak a stratégiát, hanem ennek a paraméternek az értékét is átvehetik egymástól. Utalva a K lehetséges jelentésére, ezt a fajta koevolúciós dinamikát úgy is értelmezhetjük, hogy a játékos nem csupán a sikeresebb stratégiát tanulhatja el a szomszédjától, hanem azt a módot is, ahogy a másik reagál a nyereménykülönbségre, azaz a másik stratégia tanulási módját.

Az egyszerűség kedvéért továbbra is a gyenge fogolydilemma játékot tekintjük, ahol a zajparaméter szempontjából két lényegesen különböző, de egyszerű kapcsolati gráfot, a négyzetrácsot és a kagomé rácsot fogjuk feltételezni. A korábbiakban már láttuk, hogy ennél a két reprezentatív topológiánál az érintkező háromszögek megléte vagy hiánya következtében az együttműködés határát kijelölő maximális b érték a zaj erősségének a függvényében monoton csökken vagy csúccsal rendelkező függést mutat.

Rögzített b érték esetén, a kezdetben véletlenszerűen kiosztott együttműködő vagy élszökő stratégia mellett minden játékos rendelkezik egy egyéni K_x paraméterrel, amit véletlenszerűen választottunk egy véges halmazból, $K_x \in \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$. Itt n jelöli a kezdeti különböző K_i értékek számát [58].

A koevolúciós folyamat során a szokásos módon kiszámoljuk a véletlenszerűen kiválasztott x játékos és y szomszédja Π_x és Π_y nyereményét, illetve az ezekből számolható

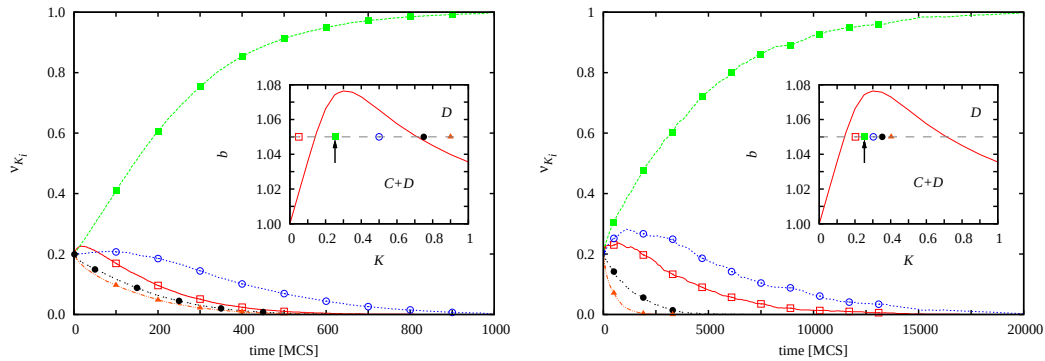
$$W = \frac{1}{1 + \exp[(\Pi_x - \Pi_y)/K_x]} \cdot \quad (4.5)$$

stratégiaátvételi valószínűséget. A kiválasztott x játékos a fenti valószínűséggel átveszi az y játékos stratégiáját és/vagy a tanulási módját jellemző K_y paraméterét. Fontos kiemelni, hogy bár a két adaptáció azonos valószínűséggel megy végbe, de egymástól független folyamat, tehát a K_y paraméter átvétele még olyankor is megtörténhet, ha a játékosok stratégiája megegyezik, mert például a játékosok homogén stratégiaeloszlással rendelkeznek. Ez utóbbi esetben, a zérus nyereménykülönbség eredményeként, a játékosok K_i paraméterértéke azonos valószínűséggel terjed a szomszédos helyre, így a modell fejlődése azonos az n állapotú szavazó modell viselkedésével [31].

A modell másik határesetre az, ha minden játékos azonos K_i értékkel rendelkezik, $K_x = K, \forall x$ esetén, ilyenkor visszkapjuk a korábban vizsgált homogén térbeli modellt, amely alapján eltérő viselkedést várhatunk például a négyzetrács és a kagomé struktúra esetén. Hasonlóan a korábbi fejezetekben már alkalmazott kiterjesztéshez, a homogén modellnél felmerülő fázisok egységesen tárgyalhatóak, ha megengedjük a $b < 1$ élősködő nyereményt is. Ez utóbbi esetben a fogolydilemma játék a szarvasvadász játékba megy át. A homogén modellben az alkalmazott rácstól függetlenül, rögzített K érték esetén kis b értéknél kizárólag az együttműködő állapot tud fennmaradni. A b értékét növelve, egy $b_{c1}(K)$ értéknél tartósan megjelenhet az élősködő stratégia, ami egy $b_{c2}(K)$ érték felett kizárólagossá válik. Mint már utaltunk rá, a kagomé topológia eredményeként a $b_{c2}(K)$ függvény monoton csökken a K növelésével, míg a négyzetrács esetén az utóbbi függvény kezdetben növekvő majd egy maximum elérése után újra csökkenő lesz.

A koevolúciós folyamat időbeli jellemzésére nem csupán az együttműködők ρ_c koncentrációját, hanem a különböző lehetséges kezdeti K_i értékek ν_{K_i} arányát is nyomon követtük. Az egyik fontos megfigyelésünk az volt, hogy sok különböző kezdeti K_i értéket használva a K és a stratégia egyidejű fejlődése olyan állandósult állapotot fog eredményezni, amelyben csupán *egyetlen* K_i érték marad fenn, még akkor is, ha a különböző stratégiák együttesen fennmaradhatnak. A K_i értékek kezdeti egyenlő arányának az időbeli változása nagyban függ attól, hogy a $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ halmaz hogyan helyezkedik el a homogén modell $b - K$ fázisdiagramján [74]. Négyzetrács topológiát használva, a lehetséges viselkedéseket illusztrálja 4.5. és a 4.6. ábra.

A 4.5. ábra bal oldalán egy olyan fejlődést láthatunk, ahol négy kezdeti K_i érték a $b = 1.05$ értékhez tartozó kiemelt $K^* = 0.253$ értéktől egyenlő mértékben növekvő (csökkenő) távolságban helyezkedik el. Amint az ábra inzertje mutatja, ezek közül három kizárólagossága esetén a rendszer a tiszta élősködő állapotba kerülne. A viszonylag nagy rendszerméret ellenére (10^6 játékos) viszonylag rövid időn belül a rendszer abba az állapotába fejlődik, ahol minden játékos ugyanazt, az ábrán nyíllal jelölt K^* értéket fogja használni, miközben a végső állapotban mindkét stratégia elő fog fordulni, a homogén modellt meghatározó (b, K^*) paraméterpárnak megfelelő arányban. A kiemelt K^* érték kiválasztódása akkor is végbemegy, ha a kezdeti K_i értékek nem különböznek lényegesen. Például a 4.5. ábra jobb oldalán a kezdeti lehetséges értékek nagyon közel vannak ($K_i = K^* + 0.05(i - 2)$, ahol $i = 1, \dots, n = 5$), emiatt a kiemelt

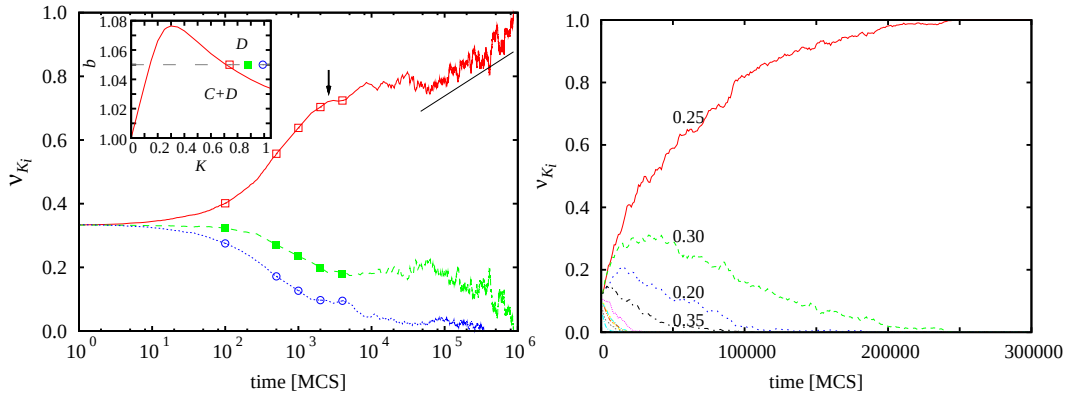


4.5. ábra. A K_i értékek arányának időbeli fejlődése $b = 1.05$ -nél. A kezdeti lehetséges K_i értékek pozícióját a négyzettrács topológiát feltételező homogén modell fázishatárához viszonyítva a kisebb inzertek mutatják. A nyíl annak a kiválasztott K^* értéknek a helyét jelöli, amelyik elegendően sok kezdeti K_i esetén kiválasztódik.

K^* érték kiválasztódása lényegesen hosszabb idő alatt következik be. Érdekes módon a végső, homogén K_i paraméter eloszlással jellemezhető állapotba történő relaxáció ideje nem növekszik lényegesen, ha kezdetben további nagy K_i értéket is lehetővé teszünk. Ezek ugyanis nagyon rövid idő alatt eltűnnek és onnantól kezdve a rendszer fejlődése a viszonylag alacsony n értékkel jellemezhető esettel lesz ekvivalens.

Érdekes viselkedés megfigyelését teszi lehetővé az, ha az összes kezdeti K_i érték a homogén rendszernek abba a paraméter tartományába esik, ahol kizárólagosan csak az egyik stratégia maradhat fenn. Egy ilyen viselkedést mutat a 4.6. ábra bal oldala. Ezekben az esetekben, amíg a kezdeti véletlen stratégia eloszlásnak köszönhetően mindkét stratégia jelen van, a kisebb K_i értékek, azaz a racionálisabb stratégiaátvételi mód hatékonyabban terjed. Ha a b és K_i értékek által preferált (most az élősködő) stratégia kizárólagossá válik, akkor a K_i értékek további fejlődését a szavazó modell dinamikája fogja meghatározni. Bár ettől, az ábrán nyíllal jelölt ponttól kezdve a K_i értékek ekvivalenssé válnak, de a korábban sikeresebb, racionálisabb tanulási mód a legkisebb K_i értéknek olyan számbeli előnyt eredményezett, ami miatt az említett paraméterérték idővel kizárólagossá fog válni. Ezt a nagyon lassú logaritmikus durvulást illusztrálja a fél-logaritmikus ábrázoláson mutatott egyenes szakasz az időbeli fejlődés második szakaszában.

Láttuk tehát, hogy a K_i értékek időbeli fejlődésében két, minőségileg különböző szakasz figyelhető meg, amelyek között a két stratégia egyidejű jelenléte (vagy annak hiánya) tesz különbséget. Elegendően nagy, a maximális $b_{c2} = 1.078$ értéket



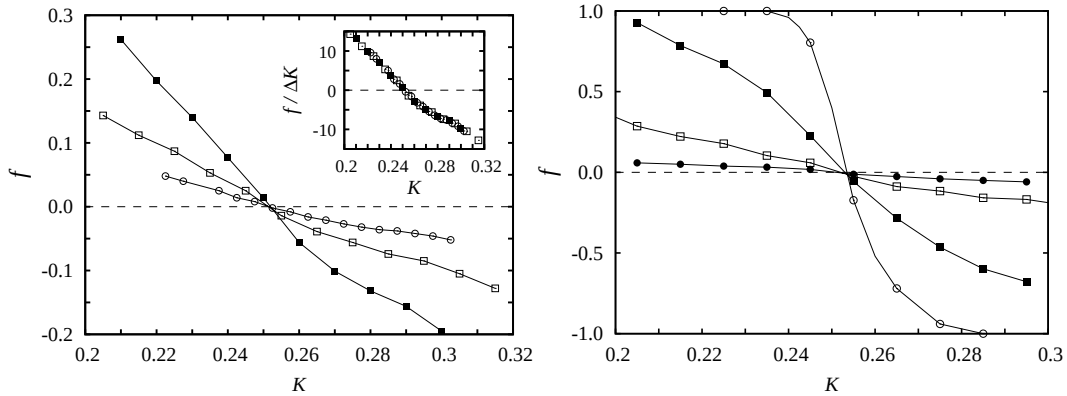
4.6. ábra. A K_i értékek arányának fejlődése olyan kezdeti értékek esetén, amelyek a tiszta élősködő abszorváló állapotban vannak $b = 1.05$ esetén (bal oldal). Az inzert a kezdeti K_i értékek helyzetét mutatja a homogén rendszer fázisdiagramján. Nyíllal jelöltük azt az időpontot, ahol az élősködő stratégia kizárólagossá válik. A jobb oldali ábrán az együttműködés számára nem elérhető $b = 1.1$ érték esetén tíz, egymástól egyenlő távolságban elhelyezkedő K_i érték esetén mutatja azok fejlődését kis, állandó mutáció jelenlétében. A közeli, kisebb b értékhez tartozó vegyes fázisban érvényes kiemelt $K^* = 0.276$ -hoz legközelebbi K_i értékek fejlődését külön jelöltük.

kissé meghaladó élősködő nyeresémet választva, a kezdeti K_i értékektől függetlenül a rendszer mindig a tiszta élősködő állapotba fog fejlődni. Felmerül a kérdés, hogy vajon miként befolyásolja ilyenkor a K_i értékek fejlődését az, ha lehetővé tesszünk egy olyan csekély mértékű stratégia mutációt, ami a stratégiák végső arányát lényegesen nem befolyásolja, de lehetővé teszi mindkét stratégia folyamatos jelenlétét. Ilyenkor a játékosok kis, ϵ arányának lehetővé tesszük, hogy a szomszédjaitól függetlenül a stratégiáját megváltoztassa. Ebben a helyzetben megfigyelhető tipikus fejlődést mutat a 4.6. ábra jobb oldala, ahol $b = 1.10$ -nél, tíz kezdeti K_i értéket feltételezve ($K_1 = 0.05, \dots, K_{10} = 0.5$) mutatjuk azok arányának a fejlődését $\epsilon = 0.02$ esetén. Láthatóan a mutáció hatásaként a K_i értékek fejlődése nagyon kis fluktuációval jellemezhető, közel „determinisztikus”. Mivel a választott b értékhez közeli vegyes tartományban a fennmaradó K_i érték $K^* = 0.276$, ezért az ehhez legközelebbi K_i értékek fognak legtovább fennmaradni. Ezért az abszorváló állapotban fennmaradó K^* értéket a vegyes fázisban megfigyelt érték analitikus folytatásaként tekinthetjük. Természetesen hasonló viselkedést figyelhetnénk meg, ha a minimális $b_{c1} = 0.940$ -nél kisebb, a tiszta együttműködő tartományba eső b értéket feltételezve vizsgálnánk a kezdeti K_i értékek arányának változását.

Az előző bekezdésben leírt jelenség felfogható úgy is, hogy a rendszerben előforduló mutációk egyfajta katalizátor szerepben, az egyébként is végbemenő folyamatokat gyorsítják fel. Bár ennek a tárgyalása a dolgozat keretein túlmutat, de érdemes megemlíteni, hogy a mutációknak az ilyen jellegű szerepe más, lényegesen különböző játékelméleti modellekben is megfigyelhető, általánosabb jelenség.

Már utaltunk rá, hogy a b függő K^* pontos meghatározása rendkívül időigényes lehet a hosszú relaxációk miatt. A kiemelt $K^*(b)$ ugyanakkor hatékonyan megtalálható, ha csupán két, egymáshoz közeli K_i kezdő értéket választva, kis rendszerméretnél azok viszonyát feltérképezzük, majd a kezdeti paramétereket szisztematikusan változtatjuk. Pontosabban, az $n = 2$ elemű halmazból a $K_1 = K - \Delta K/2$ és $K_2 = K + \Delta K/2$ kezdőértékeket egyenlő valószínűséggel választva, kis rendszerméretnél a koevolúciós folyamat mindig a K_1 vagy a K_2 kizárólagos elterjedését fogja eredményezni. Ha $g(K_i)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy a végállapotban K_i lesz a kizárólagos, akkor az $f = g(K_2) - g(K_1)$ mennyiség a K_2 kezdeti értéknek a K_1 -gyel szembeni dominanciáját fogja kifejezni. Mivel a kis méret és a kevés kezdeti K_i érték miatt a relaxáció gyorsan végbemegy, ezért a futások nagyszámú ismétlésével az előnyt jellemző f mennyiség a K függvényében könnyen mérhető. Nyilvánvalóan az f előjele megmutatja, hogy a K_i kezdőértékeknek milyen irányú fejlődése várható. Az a K érték, ahol f a csökkenése (illetve növekedése) révén előjelet vált úgy azonosítható, mint vonzó (taszító) fixpont a K_i fejlődésében. A vonzó fixpont egybeesik azzal a K^* értékkel, amit akkor kapnánk, ha elegendően nagy n esetén, kellően sok, elég sűrűn elhelyezkedő K_i kezdőértékből indítanánk el a rendszer fejlődését.

A 4.7. ábra bal oldala azt illusztrálja, hogy az előbb definiált f mennyiség a ΔK értékétől függetlenül, ugyanazon K értékek esetén azonos előjelű, és ugyanott vált előjelt, tehát a fixpont helyzete a ΔK választásától nem függ. Természetesen, ez csak akkor igaz, ha ΔK összemérhető azzal a pontossággal, amivel a K^* fixpont helyzetét meg kívánjuk határozni. Az ábráról leolvasható, hogy nagyobb ΔK esetén arányosan nagyobb a „hajtóerő”, tehát a két végállapot előfordulási valószínűsége még inkább eltér, ha a kezdeti K_i értékek jobban különböznek. Így, ha az f értékét skálázzuk az alkalmazott ΔK -val, akkor az utóbbitól független mennyiséget kapunk. A különböző ΔK értékek esetén kapott adatok egybeesése az ábra inzertjében demonstrálja azt, hogy a skálázott f valóban alkalmas a fixpont meghatározására. Fontos megjegyezni, hogy a fenti eljárást nem csupán a szimulációk esetén, hanem a dinamikus átlagtér közelítés használatánál is alkalmazhatjuk.

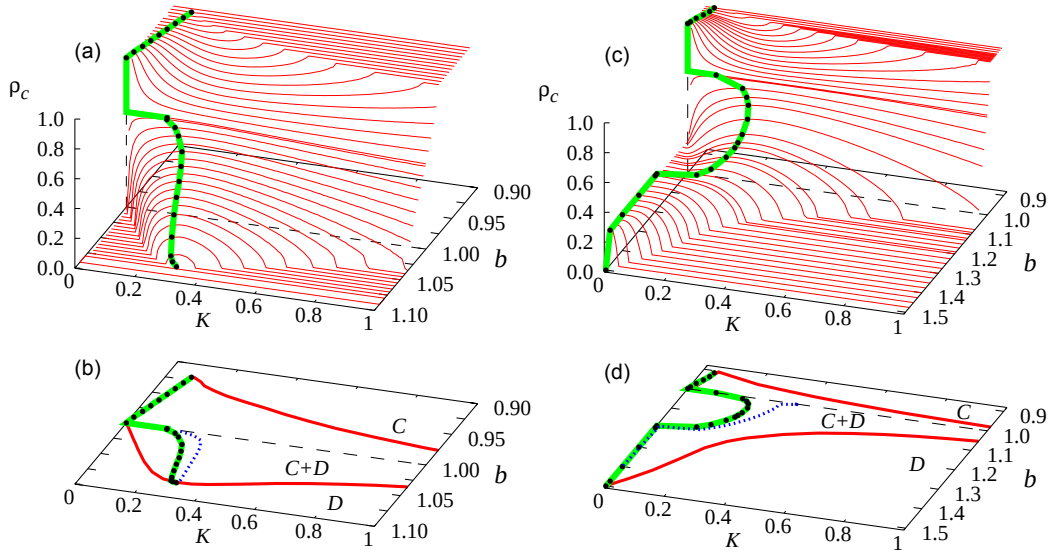


4.7. ábra. Bal oldal: A két lehetséges K_i végállapot előfordulási gyakoriságának a különbsége $b = 1.05$ -nél és $L = 40$ méretnél, különböző $\Delta K = 0.005$ (körök), 0.01 (üres négyzetek), 0.02 (tömör négyzetek) értékek esetén. Az inzer a skálázott különbségek K függését mutatja. Jobb oldal: ugyanaz a mennyiség $\Delta K = 0.01$ esetén különböző rendszerméreteknél: $L = 20$ (tömör kör), $L = 40$ (üres négyzet), $L = 80$ (tömör négyzet), $L = 160$ (üres kör).

A véges méret okozta fluktuációk kis rendszereknél még akkor is könnyen vezethetnének valamelyik K_i érték eltűnéséhez, ha egyébként a termodinamikai limitben a két K_i érték tartósan fenn tudna együtt maradni. Ezért mindenképpen indokolt megvizsgálni azt, hogy miként viselkedik a fixpont helyzetét meghatározó $f(K)$ függvény a rendszer méretének a változtatásával. A 4.7. ábra jobb oldala azt mutatja, hogy a véges méret okozta fluktuációknak csupán annyi a szerepük, hogy az f értékét képesek csökkenteni, valamilyen szinten elfedve a vizsgálni kívánt hatást, de a kis méret az f előjelét nem befolyásolja, így a fixpont helyzete bármely kis méret használatával megadható.

Amint látni fogjuk, a fennmaradó K^* érték pozíciója szoros kapcsolatban áll a homogén modell esetén az adott b értéknél elérhető együttműködési szinttel, ezért a K^* fixpontok pozícióját indokolt a homogén modellre kapott fázisdiagramhoz viszonyítani.

A 4.8. ábra (a) és (c) része a homogén modell esetén az együttműködők ρ_c arányát mutatja a K függvényében különböző b értékek esetén, a négyzetrács és a kagomé topológián. Elég sűrűn ábrázolva ezeket a $\rho_c(K)$ függvényeket lényegében az együttműködési felületet kapjuk meg a $b - K$ síkon. A 4.8. (b) és (d) ábrákon, egyfajta vetületként, a fázisokat elválasztó $b_{c1}(K)$ és $b_{c2}(K)$ függvényeket ábrázoltuk



4.8. ábra. Az együttműködők aránya a homogén modellben a $b - K$ síkon négyzetrács (bal oldal) és kagomé rács (jobb oldal) esetén. Az alsó ábrákon piros vonalak jelzik a megfelelő fázisok, míg szaggatott fekete vonal a két dilemma játék határát. Vastag zöld vonal (fekete körökkel) jelzi a kiválasztott K^* értékeket a b függvényében, míg pontozott kék vonal mutatja a lokális maximumhelyek (b, K) koordinátáit.

vastag piros vonalakkal. (A szaggatott fekete $b = 1$ vonal a fogolydilemma és a szarvasvadász játék határát jelöli.) A fixpontok helyét vastag zöld vonal jelzi. Maradva a négyzetrács topológiánál, a fogolydilemma tartományban látható, hogy adott b esetén a maximális együttműködés egy közbelső K értéknél valósul meg, amelynek a helyét pontozott kék vonal mutatja a (b) ábrán. Ezzel szemben a szarvasvadász tartományban a maximális ($\rho_c = 1$) együttműködési arányt jelentő C fázis kivételével a vegyes $C + D$ fázisban az együttműködés egy minimummal rendelkezik a K függvényében. Mindezt összevetve a fixpontok helyzetével, az (a) és (b) ábráról leolvasható, hogy a koevolúciós dinamika eredményeként fennmaradó K^* közel van, vagy megegyezik a maximális együttműködést biztosító K értékkel.

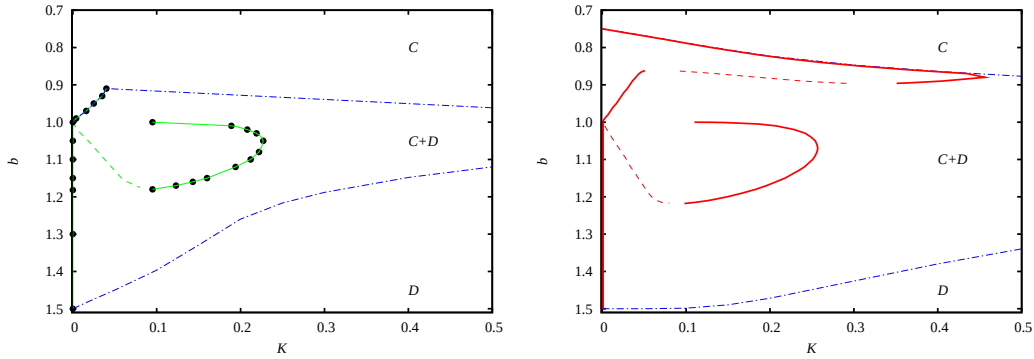
Bár első látásra a 4.8. (c) ábrán mutatott, kagomé rácsot feltételező homogén modell együttműködési felszíne a fogolydilemma tartományban bonyolultabbnak tűnik, de az felfogható úgy, mint egy, a négyzetrácséhoz hasonló, véges K -nál maximummal rendelkező felszín és egy, a $K \cong 0$ körül elhelyezkedő plató szuperpozíciója. A determinisztikus határesetnél elhelyezkedő, a $1 \leq b \leq 1.4$ tartományban lényegében b független plató az érintkező háromszög kapcsolatok következménye, hiszen

az említett paraméter tartományban az együttműködés sikeresen terjedhet úgy, mint ahogy arra a 4.1. fejezetben már utaltunk. Az eredőként kapott felület maximumhelye a $1 < b \leq b_{th} = 1.182$ tartományban egy véges K értéknél van, miközben egy lokális maximum továbbra is található $K \cong 0$ értéknél. Az együttműködők arányának az abszolút maximuma a b növelésével fokozatosan csökken és az abszolút maximumhely szerepét a $K \cong 0$ veszi át a $b > b_{th}$ tartományban. A plató magassága csak a $1.4 \leq b$ tartományban kezd el csökkenni és $b = 1.5$ -nél zérussá válik.

Ennek a felületnek a kettőssége jelentkezik a koevolúciós modell eredményeként előálló K^* fixpontok pozíciójában is. A szimulációk alapján a fogolydilemma tartományban $K^* \cong 0$ mindig egy vonzó fixpont. Ha az élőködés nyeresége a $b = 1.185 \leq b \leq 1.5$ tartományba esik, akkor a lehetséges K_i kezdeti értékektől függetlenül a lehető legkisebb fog fennmaradni a koevolúció eredményeként. Tovább csökkentve a b értékét egy $K^* \neq 0$ fixpont is meg fog jelenni. Ez utóbbi fixpont az erősebb, tehát ha a kezdeti $\{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ értékeket a teljes K tartományból választanánk, akkor mindig a nemzérus K^* maradna fenn. Ugyanakkor, ha a kezdeti értékekre fennáll, hogy $K_i < K_{sep}(b) < K^*(b), \forall i$ -re, akkor a $K^* \cong 0$ működik vonzó fixpontként. A b értékétől függő K_{sep} a kisebbik fixpont vonzáskörzetének a határát jelöli. A szarvasvadász tartományban a négyzetrácson tapasztalt fixpont viselkedéssel megegyező K^* elhelyezkedést figyelhetjük meg. Ez utóbbi egyáltalán nem meglepő, hiszen ebben a tartományban az együttműködési felületek a két kölcsönhatási topológiánál nagyon hasonlóak.

A kagomé rácsnál megfigyelt összetett fixpontok elhelyezkedése részletesebben a 4.9. ábrán látható, ahol mind a szimulációk, mind a dinamikus átlagtér közelítés eredményét is ábrázoltuk. Az utóbbi technikánál az $n = 3$ -pont közelítést alkalmaztuk. Mivel egy játékosnak nem csupán az s_x stratégiája, de a K_x zaj paramétere is különbözhet, ez ebben az alacsonyrendű közelítésben is 4^3 konfigurációra felírt egyenletrendszer megoldását jelenti.

A fogolydilemma tartományban a két módszer minőségileg egyező eredményt mutat. A b értékét 1-ről növelve először két K^* fixpont található. A nemzérus K -nál lévő a b növelésével, a négyzetrács topológiához hasonlóan, először egyre nagyobb zaj értéknél található, majd a b -t tovább növelve újra csökkenni kezd. Ez utóbbi viselkedés már az érintkező háromszögek miatti topológiai hatás eredménye. Közben a $K^* \neq 0$ fixpont vonzáskörzete fokozatosan nő, és amikor eléri a nemzérus fixpontot, akkor az



4.9. ábra. A K^* fixpontok helyzete (fekete körök, illetve piros folytonos vonal) a homogén rendszer fázisdiagramján kagomé rács esetén. A bal oldal a szimulációs eredmények, míg a jobb oldal a dinamikus átlagtér közelítés eredménye $n = 3$ esetén. A szaggatott vonalak az adott b -nél egyszerre meglévő két fixpont vonzáskörzetének a határát, míg a kék pontozott-szaggatott vonalak a fázisok határát jelölik.

utóbbi megszűnik. A fixpontok viselkedése teljesen összhangban van a 4.8. (c) ábrán bemutatott együttműködési felszín változásával.

Mint már említettük a szarvasvadász játék tartományban a szimulációk a K^* fixpont helyzetének b függésében a négyzet rácson megfigyelthez teljes mértékben hasonló viselkedést mutattak. Azoknál a b értékeknél, ahol lehetséges a két stratégia tartós fennmaradása, a kezdeti K értékek közül az marad fenn, amely a vegyes fázis és a maximális együttműködést jelentő C fázis két lehetséges határa közül a kisebb K értékhez tartozik. A fixpont viselkedése lényegében megegyezik a fogolydilemma tartományban megfigyelttel, hiszen olyan K^* érték marad fenn, ami optimális együttműködést eredményez a játékosok között.

A homogén modellt feltételező 3-pont közelítés nem képes a szarvasvadász tartományban a $b_{c1}(K)$ függvény nem monoton viselkedését visszaadni. Ennek a háttérben a túl kevés független változó áll, ami nem teszi lehetővé a valós megoldás megtalálását. Ezzel szemben a koevolúciós dinamika esetén, ami a korábbi bekezdésben már említettek szerint növeli a független változók számát, már $n = 3$ -pont közelítés esetén is képes leírni a K^* fixpont helyzetének jobbra sodródását a b csökkentésével, annak ellenére, hogy ugyanolyan méretű klaszterek kezel egzaktnak, tehát elvileg csak ugyanolyan mértékű korrelációkat tud figyelembe venni. A b értékét tovább csökkentve, tehát a dilemma mértékét tovább gyengítve a közelítés egy minimális b tartományban két fixpontot jósol, majd b -t még tovább csökkentve lényegében a homogén modellnek megfelelő fázishatár mentén mozog.

Összefoglalva elmondhatjuk, hogy mindkét reprezentatív topológián és ezért várhatóan a kapcsolati rendszerek egy széles tartományában a K_x értékek átvételét is megengedő koevolúciós folyamat olyan állapotot eredményez, amelyben minden játékos egyformán ugyanazt a tanulási módot meghatározó K^* értéket fogja használni és az ilyen módon homogénné vált rendszerben az együttműködési szint akkora, vagy közel akkora, mint amit adott b értéknél a konkrét kapcsolati rendszernél el lehet érni. A stratégiaátvételt jellemző zajparaméter uniformizálódása lényegében megerősítette azt a korábban minden modellnél használt feltevést, hogy a játékosok stratégiaátvételi képességét a zajparaméternek ugyanazzal az értékével jellemezhetjük.

5. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban rámutattam arra, hogy a játékosok közötti bizonyos típusú különbség hatékonyan képes növelni a rendszerben az együttműködés szintjét. Természetesen a játékosok sokféle módon különbözhetnek, de az átfogó vizsgálat azt mutatta, hogy a sokszínűségnek csak akkor van lényeges, pozitív hatása, ha lehetőséget nyújt az alkalmazott stratégiák környezetre gyakorolt hatásának a visszacsatolódására.

Ez a különbség a kapcsolati rendszer heterogenitása mellett megnyilvánulhat például a játékosok stratégiaátadó képességében (tekintélyében vagy biológiai rendszerekre gondolva a reprodukciós képességében) is. Sikerült megmutatnom, hogy a látszólagos eltérések ellenére a heterogén modellek sikerének a közös gyökere a kiemelt és az egyéb játékosok közötti erősen egyenlőtlen stratégiaátadási gyakoriság, másképpen mondva az aszimmetrikus információáramlás, a hierarchikus viszony. Ennek a létrejötté esetén jelentősen felerősödhet az az együttműködést segítő hatás, amely a térbeli, korlátos kapcsolati rendszert feltételező modelleken megvalósuló kölcsönösségen alapul.

A fenti hatás eredménye felerősíthető, ha a vezetők között lehetővé teszünk egy finoman hangolt közvetlen információáramlást. Bár különböző okból, de a kapcsolatok intenzitásában az ettől való mindkét irányú eltérés lényegesen tompítja a környezetre gyakorolt hatás visszacsatolódásának az eredményét.

Több előadás után tapasztaltam a hallgatóság részéről azt a „megdöbbenést”, ami az együttműködés szempontjából előnyös hierarchikus szerkezetet fogadta. Első felindulásra többen nem túl demokratikusnak találták azt, hogy vezetők jelenléte szükséges a jelentősebb együttműködési szint eléréséhez. Pedig a modellek azt is tartalmazták, hogy a vezetők „leválthatóak”, pontosabban azok stratégiája is változhat. A demokratikus eszmék védelmében, a kapott eredmények úgy is értelmezhetőek, hogy a kapitány

együtt örül, illetve együtt sír a legénységével, tehát a rossz stratégia terjesztésének következménye van, az a vezető bukását eredményezi. Ilyen módon a térbeli struktúrák révén kialakítható csoportok csak felerősítik, illetve lehetővé teszik azt, hogy egy-egy döntés (stratégia terjesztése) jó és rossz következményével a csoport, s így az egész közösség intenzívebben szembesüljön. Ilyen struktúrák hiányában, amit a jól kevert rendszerek illusztrálnak, mindig lesz, akit ki lehet használni, tehát a rossz egyéni szinten nem bűnhődik, ezért az egész populációt alacsony együttműködési szintre kárhoztatja.

A dolgozatban arra is javasoltam példákat, hogy az említett, különböző értelemben megnyilvánuló hierarchia milyen módon képes spontán kialakulni, ha lehetővé tesszük, hogy a játékosok egyéni tulajdonságai is változhassanak a szomszédoknak történő stratégiaátadás függvényében. A stratégiaátadásban megnyilvánuló sikeresség például a kapcsolati rendszer bővülésével is elismerhető. Az általam javasolt, két mennyiség fejlődését megengedő koevolúciós modell is demonstrálta a kapcsolati inhomogenitások spontán módon történő kialakulásának a lehetőségét. Rámutattam arra, hogy ha a fenti szabályt állandó számú játékost tartalmazó rendszerre alkalmazzuk, akkor megfigyelhető egy, az együttműködés szempontjából közbenső optimális méret, ami a legnagyobb befolyási körrel rendelkező játékosokat jellemzi. Ennek az optimumnak a megjelenését a befolyásos játékosok közötti információcsere mértékével tudtam magyarázni.

A koevolúciós modellek vizsgálata során az is kiderült, hogy a több egyéni tulajdonság együttes változását lehetővé tévő modellek nem csupán olyan módon képesek az együttműködés fenntartására, hogy spontán módon kialakul a környezeti visszacsatolás számára kedvező inhomogén környezet, hanem ezek az összetettebb modellek lehetőséget nyújtanak más típusú mechanizmusok működésére is.

Biológiai példák alapján a játékosok stratégiaváltását a régi játékosnak egy új játékoskal történő felváltásaként is értelmezhetjük. Ilyen módon a sokáig életben maradó játékos „sikeres”, amit a tekintély folyamatos növekedésével vehetünk figyelembe. Szociológia példát is említhetünk, például egy játékos tekintélyét növelheti, ha már hosszú ideje nem kényszerült a stratégiájának a megváltoztatására a környezetéhez viszonyított sikeressége miatt. Sikerült megmutatnom, hogy az ilyen típusú, az „öregedést” is figyelembe vevő folyamat egy dinamikus mechanizmus révén képes hatékonyan segíteni az együttműködést. Ez a mechanizmus általánosan képes működni egy széles spektrumú, nem feltétlen monoton kor-tekinthetőség függvénykapcsolat esetén, az egyetlen döntő feltétel a fiatal játékosok korlátozott stratégiaátadó képessége.

Fontos hangsúlyozni, hogy a koevolúciós modellek révén javasolt dinamikák értékét az adja, ha azok „stratégia-semlegesek”, tehát a koevolúciós szabály nem támogatja direkt módon az együttműködőket. Ez nem mindig mondható el azokra a korábban bevezetett koevolúciós modellekre, amik a kapcsolati rendszer dinamikus változását tételezik fel, a játékosok különböző minőségű kapcsolatainak a változása révén. Az előbbi kritériumot szem előtt tartva, egy olyan modellt vezettem be, ami az új stratégiát átvevő játékos kötéseinek bontása révén nagyon magas kooperációs szintet eredményezhet. Sikertelenül megértettem, hogy ennek hátterében egy olyan magasabb szintű, spontán módon kialakuló csoportselektációs mechanizmus áll, amelynek a működését ilyen típusú modelleknél korábban nem figyelték meg.

Már a 1. fejezetben is utaltunk rá, hogy sok, lényegesen bonyolultabb stratégiát is feltételezhetünk, mint a dolgozatban vizsgált két legegyszerűbb, a tiszta élőködő és a tiszta együttműködő stratégiák vetélkedése. Mégis, az utóbbiak a rendkívüli egyszerűségük ellenére is számtalan, eddig még feltáratlan lehetőséget kínálnak. Például a stratégiák evolúcióját közvetlenül segítő utánpótlásnál figyelembe vehetjük azt, hogy nem csak a „mit”, hanem a „hogyan-t” is el lehet tanulni. Ez utóbbi jellemezhető a stratégiaátvételt egyébként is befolyásoló zaj paraméter értékével, ami a játékosokat egyénileg is jellemző mennyiség lehet. Ahhoz, hogy ennek a mennyiségnek a fejlődését értelmezni tudjuk, a homogén zaj hatását kiterjesztettük más, a rács topológiától eltérő kapcsolati gráfokra is. Azt találtuk, hogy az egyszerű rácsoknál megfigyelt érintkező háromszögek együttműködésre kifejtett alapvető hatása szélesebb körben, véletlen gráfok esetén is fennáll.

A játékosok egyéni tanulási módját feltételező modellből arra a következtetésre jutottunk, hogy a rendszerben spontán módon elterjedhet, kiválasztódhat egyetlen tanulási paraméter, ami utólagosan is igazolja a korábbi, homogén tanulási paramétert feltételező modellek hipotézisét. Az utóbbi modellek együttműködési szintjének a szisztematikus feltárással azt is sikerült igazolnom, hogy a koevolúciós modell eredményeként fennmaradó tanulási paraméter a nyereménymátrix rögzített értéke mellett az optimális vagy közel optimális együttműködési szintet fog eredményezni. Ez a vizsgálat arra is rámutatott, hogy a paraméterek evolúcióját megengedő modellek spontán módon kiválasztják a lehetséges, tartósan fennmaradó paraméter értékeket, így jelentősen csökkenthető a paraméterekből fakadó szabadsági fokok száma.

A dolgozat nem tárgyalta olyan lehetőségeket, mint például a játékosok mozgékonyasága, ami szintén lehet koevolúciós folyamat [13, 19], hiszen a vándorlás révén a kapcsolati rendszer változását is egy játékos sikeressége (sikertelensége) motiválhatja.

Végezetül talán érdemes megemlíteni, hogy a játékelméleti modellek koevolúciós irányban történő „evolúciója” igazán csak most kezdődött el. Martin Nowak néhány évvel korábban már osztályozta az akkor ismert együttműködést elősegítő mechanizmusokat [38]. A dolgozatban bemutatott eredmények azonban arra figyelmeztetnek, hogy a kérdéskör messze nincs még lezárva, további érdekes új eredmények és jelenségek felbukkanásában bízhatunk.

Köszönetnyilvánítás

Elsőként Szabó Györgynek szeretnék köszönetet mondani. Hatását nehéz lenne túlbecsülni, munkatílusa, értékrendje döntően befolyásolta tudományos pályámat, sok-sok év után is öröm vele együtt dolgozni.

A munkámat inspirálta egykori diákom Danku Zsuzsa illetve kollégáim, Vukov Jeromos, Borsos István és Juhász Zoltán.

Fontos kiemelnem Tamás Gergely és munkatársai, Gosztonyi László és Villányi Árpád munkáját, akik intézetünkben egy jól használható számítógépes rendszer megalkotói és annak jelenleg is megbízható, felhasználóbarát üzemeltetői.

Talán a dolgozathoz is kiderült, egy közösség fejlődését nagyban befolyásolják annak vezetői. Munkahelyem, az MFA egy rendkívül kollegiális, kutatóbarát intézet, ennek megteremtésében és fenntartásában korábbi és jelenlegi vezetőimnek Gyulai Józsefnek és Bársony Istvánnak meghatározó szerepe van.

Jó szívvel emlékezem meg a magyarországi statisztikus fizika közösségről is. Jellemzően nagyon pozitívan, érdeklődéssel és támogatólag viszonyultak a kutatásainkhoz.

Köszönöm szüleim és családom nagy türelmét, különösen gyermekeim Zsuzsi és Dani bölcs megértését, akik remélhetőleg nem csak azt tapasztalhatták meg, hogy a tudományos pálya rengeteg munkával jár, hanem máshoz nem hasonlítható örömek forrása is lehet.

Irodalomjegyzék

- [1] G. Abramson and M. Kuperman. Social games in a social network. *Phys. Rev. E*, 63:030901(R), 2001.
- [2] R. Axelrod. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, New York, 1984.
- [3] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, 1999.
- [4] D. P. Barash. *The survival game*. Times Books, New York, 2003.
- [5] H. Brandt, C. Hauert, and K. Sigmund. Punishing and abstaining for public goods. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 103:495–497, 2006.
- [6] L. Chao and B. R. Levin. Structured habitat and the evolution of anticompetitor toxins in bacteria. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 78:6324–6328, 1981.
- [7] A. M. Colman. The puzzle of cooperation. *Nature*, 440:744–745, 2006.
- [8] T. L. Czárán and R. F. Hoekstra. Microbial communication, cooperation and cheating: Quorum sensing drives the evolution of cooperation in bacteria. *PLoS One*, 4:e6655, 2009.
- [9] I. Derényi, G. Palla, and T. Vicsek. Clique percolation in random networks. *Phys. Rev. Lett.*, 94:160202, 2005.
- [10] R. Dickman. Mean-field theory of the driven diffusive lattice gas. *Phys. Rev. A*, 38:2588–2593, 1988.
- [11] R. Dickman. Driven lattice gas with repulsive interactions: Mean-field theory. *Phys. Rev. A*, 41:2192–2195, 1990.
- [12] R. Dickman, J.-S. Wang, and I. Jensen. Random sequential adsorption: Series and virial expansions. *J. Chem. Phys.*, 94:8252–8257, 1991.
- [13] M. Droz, J. Szwabinski, and G. Szabó. Motion of influential players can support cooperation in prisoner’s dilemma. *Eur. Phys. J. B*, 71:579–585, 2009.
- [14] H. Ebel and S. Bornholdt. Coevolutionary games on networks. *Phys. Rev. E*, 66:056118, 2002.

- [15] E. Fehr. Don't lose your reputation. *Nature*, 432:449–450, 2004.
- [16] F. Fu, C. Hauert, M. A. Nowak, and L. Wang. Reputation-based partner choice promotes cooperation in social networks. *Phys. Rev. E*, 78:026117, 2008.
- [17] T. Gross and B. Blasius. Adaptive coevolutionary networks: a review. *J. R. Soc. Interface*, 5:259–271, 2008.
- [18] G. Hardin. The tragedy of the commons. *Science*, 162:1243–1248, 1968.
- [19] D. Helbing and W. Yu. The outbreak of cooperation among success-driven individuals under noisy conditions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 106:3680–3685, 2009.
- [20] H. Hinrichsen. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Adv. Phys.*, 49:815–958, 2000.
- [21] P. Holme and M. E. Newman. Nonequilibrium phase transition in the coevolution of networks and opinions. *Phys. Rev. E*, 74:056108, 2006.
- [22] M.-B. Hu, R. Jiang, Q.-S. Wu, and Y.-H. Wu. Simulating the wealth distribution with a richest-following strategy on scale-free networks. *Physica A*, 381:467–472, 2007.
- [23] B. Huberman and N. Glance. Evolutionary games and computer simulations. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 90:7716–7718, 1993.
- [24] G. Iñiguez, J. Kertész, K. K. Kaski, and R. A. Barrio. Opinion and community formation in coevolving networks. *Phys. Rev. E*, 80:066119, 2009.
- [25] Y. Iwasa, M. Nakamaru, and S. A. Levin. Allelopathy of bacteria in a lattice population: Competition between colicin sensitive and colicin-producing strains. *Evol. Ecol.*, 12:785–802, 1998.
- [26] H. K. Janssen. On the non-equilibrium phase-transition in reaction-diffusion systems with an absorbing state. *Z. Phys. B*, 42:151–154, 1981.
- [27] I. Jensen. Universality class of a one-dimensional cellular automaton. *Phys. Rev. A*, 43:3187–3189, 1991.
- [28] R. Kikuchi and S. Brush. Improvement of the cluster-variation method. *J. Chem. Phys.*, 47:195–203, 1967.
- [29] B. C. Kirkup and M. A. Riley. Antibiotic-mediated antagonism leads to a bacterial game of rock-paper-scissors in vivo. *Nature*, 428:412–414, 2004.
- [30] Á. Kun and I. Scheuring. Evolution of cooperation on dynamical graphs. *Biosystems*, 96:65–68, 2009.
- [31] T. M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer, New York, 1985.

-
- [32] M. W. Macy and A. Flache. Learning dynamics in social dilemmas. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 99:7229–7236, 2002.
- [33] J. Marro and R. Dickman. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- [34] J. Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982.
- [35] J. Maynard Smith and G. R. Price. The logic of animal conflict. *Nature*, 246:15–18, 1973.
- [36] M. Milinski, R. D. Sommerfeld, H.-J. Krambeck, F. A. Reed, and J. Marotzke. The collective-risk social dilemma and the prevention of simulated dangerous climate change. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 105:2291–2294, 2008.
- [37] M. E. J. Newman and D. J. Watts. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Phys. Lett. A*, 263:341–346, 1999.
- [38] M. A. Nowak. Five rules for the evolution of cooperation. *Science*, 314:1560–1563, 2006.
- [39] M. A. Nowak and R. M. May. Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, 359:826–829, 1992.
- [40] M. A. Nowak and K. Sigmund. Tit for tat in heterogeneous population. *Nature*, 355:250–253, 1992.
- [41] J. M. Pacheco, A. Traulsen, and M. A. Nowak. Active linking in evolutionary games. *J. Theor. Biol.*, 243:437–443, 2006.
- [42] J. M. Pacheco, A. Traulsen, and M. A. Nowak. Coevolution of strategy and structure in complex networks with dynamical linking. *Phys. Rev. Lett.*, 97:258103, 2006.
- [43] G. Palla, I. Derényi, I. Farkas, and T. Vicsek. Uncovering the overlapping community structure of complex networks in nature and society. *Nature*, 435:814–818, 2005.
- [44] M. Perc and A. Szolnoki. Social diversity and promotion of cooperation in the spatial prisoner’s dilemma game. *Phys. Rev. E*, 77:011904, 2008.
- [45] M. Perc, A. Szolnoki, and G. Szabó. Restricted connections among distinguished players support cooperation. *Phys. Rev. E*, 78:066101, 2008.
- [46] J. Poncela, J. Gómez-Gardeñes, L. M. Floría, A. Sánchez, and Y. Moreno. Complex cooperative networks from evolutionary preferential attachment. *PLoS ONE*, 3:e2449, 2008.
- [47] M. Posch. Win-stay, lose-shift strategies for repeated games—memory length, aspiration levels and noise. *J. Theor. Biol.*, 198:183–195, 1999.

-
- [48] C. P. Roca, J. A. Cuesta, and A. Sánchez. Promotion of cooperation on networks? the myopic best response case. *Eur. Phys. J. B*, 71:587–595, 2009.
- [49] Z. Rong, X. Li, and X. Wang. Roles of mixing patterns in cooperation on a scale-free networked game. *Phys. Rev. E*, 76:027101, 2007.
- [50] F. C. Santos and J. M. Pacheco. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Phys. Rev. Lett.*, 95:098104, 2005.
- [51] F. C. Santos and J. M. Pacheco. A new route to the evolution of cooperation. *J. Evol. Biol.*, 19:726–733, 2006.
- [52] F. C. Santos, J. M. Pacheco, and T. Lenaerts. Cooperation prevails when individuals adjust their social ties. *PLoS Comput. Biol.*, 2:1284–1290, 2006.
- [53] M. Sysi-Aho, J. Saramäki, J. Kertész, and K. Kaski. Spatial snowdrift game with myopic agents. *Eur. Phys. J. B*, 44:129–135, 2005.
- [54] G. Szabó and T. Czárán. Phase transition in a spatial Lotka-Volterra model. *Phys. Rev. E*, 63:061904, 2001.
- [55] G. Szabó and G. Fáth. Evolutionary games on graphs. *Phys. Rep.*, 446:97–216, 2007.
- [56] G. Szabó, A. Szolnoki, and L. Bodócs. Correlations induced by transport in one-dimensional lattice gas. *Phys. Rev. a*, 44:6375–6378, 1991.
- [57] G. Szabó, A. Szolnoki, and R. Izsák. Rock-scissors-paper game on regular small-world networks. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37:2599–2609, 2004.
- [58] G. Szabó, A. Szolnoki, and J. Vukov. Selection of dynamical rules in spatial prisoner’s dilemma games. *EPL*, 87:18007, 2009.
- [59] G. Szabó and C. Tóke. Evolutionary prisoner’s dilemma game on a square lattice. *Phys. Rev. E*, 58:69–73, 1998.
- [60] G. Szabó, J. Vukov, and A. Szolnoki. Phase diagrams for an evolutionary prisoner’s dilemma game on two-dimensional lattices. *Phys. Rev. E*, 72:047107, 2005.
- [61] P. Szabó, T. Czárán, and G. Szabó. Competing associations in bacterial warfare with two toxins. *J. Theor. Biol.*, 248:736–744, 2007.
- [62] G. J. Szöllősi and I. Derényi. Evolutionary games on minimally structured populations. *Phys. Rev. E*, 78:031919, 2008.
- [63] A. Szolnoki and M. Perc. Coevolution of teaching activity promotes cooperation. *New J. Phys.*, 10:043036, 2008.
- [64] A. Szolnoki and M. Perc. Emergence of multilevel selection in the prisoner’s dilemma game on coevolving random networks. *New J. Phys.*, 11:093033, 2009.

-
- [65] A. Szolnoki and M. Perc. Promoting cooperation in social dilemmas via simple coevolutionary rules. *Eur. Phys. J. B*, 67:337–344, 2009.
- [66] A. Szolnoki and M. Perc. Resolving social dilemmas on evolving random networks. *EPL*, 86:30007, 2009.
- [67] A. Szolnoki, M. Perc, and Z. Danku. Making new connections towards cooperation in the prisoner’s dilemma game. *EPL*, 84:50007, 2008.
- [68] A. Szolnoki, M. Perc, and Z. Danku. Towards effective payoffs in the prisoner’s dilemma game on scale-free networks. *Physica A*, 387:2075–2082, 2008.
- [69] A. Szolnoki, M. Perc, and G. Szabó. Diversity of reproduction rate support cooperation in the prisoner’s dilemma game in complex networks. *Eur. Phys. J. B*, 61:505–509, 2008.
- [70] A. Szolnoki, M. Perc, and G. Szabó. Topology-independent impact of noise on cooperation in spatial public goods games. *Phys. Rev. E*, 80:056109, 2009.
- [71] A. Szolnoki, M. Perc, G. Szabó, and H.-U. Stark. Impact of aging on the evolution of cooperation in the spatial prisoner’s dilemma game. *Phys. Rev. E*, 80:021901, 2009.
- [72] A. Szolnoki and G. Szabó. Phase transitions for rock-scissors-paper game on different networks. *Phys. Rev. E*, 70:037102, 2004.
- [73] A. Szolnoki and G. Szabó. Cooperation enhanced by inhomogeneous activity of teaching for evolutionary prisoner’s dilemma games. *EPL*, 77:30004, 2007.
- [74] A. Szolnoki, J. Vukov, and G. Szabó. Selection of noise level in strategy adoption for spatial social dilemmas. *Phys. Rev. E*, 80:056112, 2009.
- [75] T. Tanaka. *Methods of Statistical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [76] J. Tanimoto. The effect of assortative mixing on emerging cooperation in an evolutionary network game. In *IEEE Conference on Evolutionary Computation, 2009*, pages 487–493, 2009.
- [77] M. Tomassini, L. Luthi, and E. Pestelacci. Social dilemmas and cooperation in complex networks. *Int. J. Mod. Phys. C*, 18:1173–1185, 2007.
- [78] P. E. Turner and L. Chao. Prisoner’s dilemma in an RNA virus. *Nature*, 398:441–443, 1999.
- [79] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [80] J. Vukov, G. Szabó, and A. Szolnoki. Cooperation in the noisy case: Prisoner’s dilemma game on two types of regular random graphs. *Phys. Rev. E*, 73:067103, 2006.

-
- [81] J. Vukov, G. Szabó, and A. Szolnoki. Prisoner's dilemma game on Newman-Watts graphs. *Phys. Rev. E*, 77:026109, 2008.
 - [82] S. Wang, M. S. Szalay, C. Zhang, and P. Csermely. Learning and innovative elements of strategy adoption rules expand cooperative network topologies. *PLoS ONE*, 3:e1917, 2008.
 - [83] W.-X. Wang, J. Ren, G. Chen, and B.-H. Wang. Memory-based snowdrift game on networks. *Phys. Rev. E*, 74:056113, 2006.
 - [84] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of 'small world' networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.
 - [85] S. A. West, A. S. Griffin, and A. Gardner. Social semantics: how useful has group selection been? *J. Evol. Biol.*, 21:374–385, 2008.
 - [86] B. Widom. Random sequential addition of hard spheres to a volume. *J. Chem. Phys.*, 44:3888–3894, 1966.
 - [87] Z.-X. Wu, J.-Y. Guan, X.-J. Xu, and Y.-H. Wang. Evolutionary prisoner's dilemma game on Barabási-Albert scale-free networks. *Physica A*, 379:672–680, 2007.
 - [88] Z.-X. Wu, X.-J. Xu, Z.-G. Huang, S.-J. Wang, and Y.-H. Wang. Evolutionary prisoner's dilemma game with dynamic preferential selection. *Phys. Rev. E*, 74:021107, 2006.
 - [89] M. G. Zimmermann, V. Eguíluz, and M. S. Miguel. Coevolution of dynamical states and interactions in dynamic networks. *Phys. Rev. E*, 69:065102(R), 2004.