MTA
Doktori Tanács Titkársága
Érkezett: 199..2011.JÚN..03.....n
Iktatószám:.....622...../.....
Melléklet:.....db
Üi.:.....

Opponensi Vélemény Solymosi József Doktori disszertációjáról

2011. június 1.

Solymosi József "Geometriai problémák az additív kombinatorika területén" című akadémiai doktori disszertációját az alább ismertetettek alapján a védésre kitűzésre kiemelkedően alkalmasnak tartom, megvitatását és elfogadását melegen támogatom.

A modern kombinatorika, illetve extremális gráfelmélet szorosan kapcsolódik bizonyos számelméleti kérdésekhez. Valamilyen értelemben a klasszikus extremális gráfelmélet és Ramsey elmélet mindig is kétirányú kapcsolatban, kölcsönhatásban állt bizonyos számelméleti problémákkal. Ugyancsak szoros a kapcsolat bizonyos geometriai problémák és az extremális gráfelmélet között. Maga az extremális gráfelmélet is valamilyen értelemben egy multiplikativ Sidon problémából is származtatható, más értelemben, a Ramsey tételen keresztül egy geometriai problémából keletkezett.

Solymosi József matematikai kutatási területe is elsősorban erre a fontos területre vonatkozik, Doktori disszertációja pedig a geometriai problémák és az additív kombinatorika kapcsolatát tárgyalja. A disszertáció Solymosi eredményeinek csak egy kis de igen fontos részét tartalmazza.

Solymosi ennek a területnek egyik legkiemelkedőbb, legeredményesebb kutatója, számos fontos elv, kapcsolat ezen a területen az ő nevéhez fűződik, Fields Medal-os matematikusokkal (Gowers, Tao, Bourgain) dolgozik együtt idevonatkozó témákon.

A disszertáció tézises formájú: egy 10 oldalas magyar nyelvű bevezető + egy 35 cikkes irodalomjegyzék után 4 fejezetből, 1+12 cikk másolatából áll. Ezek összesen kb 95 oldalt tesznek ki. A cikkek többsége egyszerzős és túlnyomó többsége kitűnő helyen jelent meg.

1. A dolgozat struktúrája

A dolgozat 1+12 saját, gyakran társszerzős cikket foglal egybe az adott témában. Magáról az első cikkről *(Solymosi, Jozsef; Regularity, uniformity, and quasirandomness. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 102 (2005), no. 23, 8075–8076 (electronic)*, Solymosi megjegyzi, hogy ez nem tartalmaz önálló eredményt, hanem egy felkért cikkhez felkért bevezető cikk, survey típusú. Itteni célja segíteni a továbbiak megértését.

Az itt szereplő új eredmények többsége Erdős klasszikus geometriai/illeszkedési problémáira felel. Ezekre az alábbiakban [S-1]-[S-12]-vel fogok hivatkozni. Nem szándékozom a dolgozat minden eredményét ismertetni, ezek a Tézis-füzetben nagyon áttekinthetően vannak leírva. Inkább néhány részletet emelnék ki, melyek kiválasztása az opponens szubjektív viszonyát tükrözi a tárgyhoz. Ugyancsak eltekintek az apróbb (helyesírási) elírások megemlítésétől: ezeket elsősorban a magyar nyelvű bevezetőben találtam.

1.1. A Hypergraph Removal Lemma alkalmazásai...

Elöljáróban megjegyezném, hogy a dolgozaton végigvonul az a jelenség, hogy valamikor régen a kombinatorika valamelyik, eldugottnak tűnő kérdésére adandó/adott válasz azóta egy igen komoly és igen komoly technikát igénylő elméletté fejlődött. Kiemelném itt az Erdős-Turán sejtésre adott Roth, majd Szemerédi válaszát, az ekörül kifejlődő elméletet, melynek egyik ágát a Fürstenberg által kezdeményezett ergodelméleti bizonyítások, és messzemutató általánosítások fémjeleznek, másrészt analízisbeli módszerek, végül a matematikai logika környéki módszerek becsatlakozása mutat.

Szorosan idetartozik, és a disszertáció megértéséhez is fontos a modern kombinatorika egyik legerősebb módszerének megjelenése, a Szemerédi Regularitási Lemma.

Egy másik fontos forrás a Brown-Erdős-Sós egyik kérdése nyomán kialakuló Ruzsa-Szemerédi tételben gyökerező Removal Lemma-k. Ezek is fontos szerepet játszanak a dolgozatban.

A harmadik ilyen „apróság", melyet megemlítenék, az Erdős-Szemerédi ún. összeg-szorzat tétele. Ez is centrális a dolgozatban, és a mai, modern kombinatorikában.

Az első rész a Ruzsa-Szemerédi Removal Lemma „hypergraph removal lemma" verziójának alkalmazásairól szól.

A dolgozat ezen része 3 cikket tartalmaz. Az elsőben, [S-1]-ben egy nehéz, nagyon fontos Ajtai-Szemerédi eredményt újrabizonyít, néhány sorban, a Ruzsa-Szemerédi cikk egyik azóta centrálissá vált eredményét alkalmazva. Az itt tekintett tétel: a négyzetrács egy pozitív sűrűségű részhalmaza tartal-

maz $\{(a,b),(a+d,b),(a,b+d)\}$ alakú háromszöget. Ezt később Fürstenberg és Katznelson messzemenőleg általánosították, Solymosi megoldása viszont elemibb és effektívebb. Mivel a felhasznált eredményre aránylag jó becslés volt ismert, $(n^2/\log^* n)$, így Solymosi eredménye meg is javítja az Ajtai-Szemerédi tételt, de ezirányú becslése ma már nem csúcstartó.)

A következő cikkben, [S-2]-ben egy ennél sokkal élesebb tételt, a négyzet létezését garantálja Solymosi, és emellett megmutatja, hogyan használható a többdimenziós Removal Lemma a Szemerédi $r_k(n) = o(n)$ tételének bizonyítására. (Ennek gyökerei a Ruzsa-Szemerédi cikkben találhatók.)

1.2. Összeg-szorzat tételek

A **2. fejezet** 4 cikket foglal össze. Ez a rész Erdős és Szemerédi egy meglepő eredményéből indul ki, mely szerint adott n egész esetén vagy a különböző szorzatok, vagy a különböző összegek száma nagy. Erdős és Szemerédi idevonatkozó eredménye rámutatott egy érdekes jelenségre, de az általuk megadott becslés nem volt túl erős. Sokan probálkoztak ennek megjavításával. A csúcstartó jelenleg Solymosi, eredményei Elekes György egy nagyon elegáns módszerét használják, amely azonban távolról sem triviális. Solymosi idevágó eredményei igen nagy, pozitív visszhangot keltettek.

Solymosi kővetkező cikke Balog és Szemerédi egy eredményével foglalkozik. Freiman tétele szerint, ha egész számokra az összeghalmaz kicsi, akkor a halmaz hasonlit egy számtani sorra. A Balog-Szemerédi cikk azt vizsgálja, hogy ha csak egy sürű gráf élei mentén adjuk össze az egészeket és így kis halmazt kapunk, akkor mi mondható. Az eredmény, hogy ilyenkor is tartalmaz a halmaz hosszú számtani sort. Solymosi erre egy új bizonyítást ad amely nem használja a Balog-Szemerédi technikát és

Először kiterjeszti az összeg-szorzat tételt komplex számokra, majd megjavítja az addig ismert becslést a Szemerédi-Trotter tétel alkalmazásával. [S-6] az összeg-szorzat becslés mátrixos formájával foglalkozik. Itt mellékfeltételek mellett marad csak igaz a tétel. Végül az Advances-beli elegáns és mély cikkében ezt a valós (így az egész) számokra vonatkozó korábbi becsléseket továbbjavítja. Ebben a témakörben gyakran a minimum-becslés helyett erősebb „trade-off" formulákat bizonyítanak, mint pl. itt

$$|AA||A+A|^2 \geq \frac{|A|^4}{4\lceil \log |A| \rceil}$$

A következő cikk, [S-8] a híres Szemerédi-Trotter illeszkedés-szám tétel stabilitását vizsgálja. Ezután az Összeg-szorzat egy geometriai alkalmazása következik, majd, végül Solymosi egy Erdős-Ulam probléma speciális esetét oldja meg.

A disszertáció egy igen szép eredménye [S-9], *Mei-Chu Chang és Solymosi: Sum-product theorems and incidence geometry. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 9 (2007), no. 3, 545–560.* cikke. Ennek egyik legérdekesebb eredménye azt mondja ki, hogy ha a komplex 2-dimenziós síkban 4 sugársor **kevés** metszéspontot határoz meg (sok ponton megy át négy egyenes), akkor a centrumaik kollineárisak.

Az itteni eredmények igen szorosan kapcsolódnak a sum-product tételekhez.

1.3. Számelméleti eredmények alkalmazása a Diszkrét Geometriában

Solymosi, Jozsef; de Zeeuw, Frank; On a question of Erdös and Ulam. Discrete Comput. Geom. 43 (2010), no. 2, 393–401.

Talán ez az egyik olyan rész, amelyik hozzám (az opponenshez) nagyon közel áll. Az az Anning-Erdős tétel, hogy ha végtelen sok pontra a síkban bármely kettő távolsága egész, akkor ezek egy egyenesre esnek, de racionális távolságok esetében megadhatjuk őket egy körön is, olyan tény, amelyet minden magasabb igényű kombinatorika előadásban tanítanék. Ezekhez kapcsolódik Ulam kérdése, amellyel kapcsolatban Solymosi és tanítványa a témakörben most ismert legmélyebb tételt igazolják: ha adott a síkban végtelen sok pont és bármely kettő távolsága racionális, és tudjuk, hogy ezek egy algebrai görbén vannak, akkor ezek egy körön, vagy egy egyenesen vannak. (Ulam sejtése az, hogy nem lehet a halmaz mindenütt sűrű.)

Solymosiék bizonyítása mély eszközöket használ fel, algebrai görbék genuszát és Faltings tételét, ezután viszont már elegáns.

Itt bizonyos értelemben feleslegesnek tűnik, hogy Solymosi a fő tételét irreducibilis algebrai görbére mondja ki: a cikkből az derül ki, hogy tetszőleges algebrai görbére igaz, hogy ha tartalmaz egy végtelen racionális távolságú halmazt, akkor ezek 4 pont kivételével egy körön vagy egyenesen vannak.

1.4. Különböző távolságok

Az utolsó részben Solymosi két cikke szerepel, [S-11] és [S-12], az előző Van Vu-val, az utóbbi Tóth Csabával közös. Itt [S-11] a különböző távolságok minimális számára vonatkozó becslés magasabb dimenziós változata a másik a különböző távolságok számának becslése homogén ponthalmazokban, ahol a homogenitás azt jelenti, hogy a pontokról feltesszük még azt is, hogy egyenletesen vannak eloszolva. Solymosi és Vu bizonyítják hogy Erdős idevonatkozó sejtése majdnem igaz. Ez a sejtés azt mondta ki, hogy ha $\mathbb{R}^d$-ben a rácsszerű elrendezésben van a (lényegében) legkevesebb különböző távolság: $d \geq 3$-ra, akkor $\mathbb{R}^d$-ben $n^{2/d}$ különböző távolság van.

Solymosi és Van Vu [S-11]-ben a kicsit gyengébb $cn^{\frac{2}{d}-\frac{2}{d(d+2)}}$ alsó becslést bizonyítják.

Solymosi és Tóth Csaba [S-12]-ben – homogénre– erősebb becsléseket adnak, pl. $d = 3$-ra bizonyítják az $n^{0.6}$ alsó becslést.

2. Összefoglaló

A cikkek a kutatási terület legjobb folyóirataiban lettek leírva. Az eredmények elismertsége, mint már említettem, igen komoly.

A fentiek alapján tehát elismétlem, amit az első paragrafusban is megfogalmaztam: Solymosi József "Geometriai problémák az additív kombinatorika területén" című akadémiai doktori disszertációját a védésre kitűzésre alkalmasnak tartom, megvitatását és elfogadását tehát melegen támogatom.

Budapest, 2011. június 1.

Simonovits Miklós
Rényi Intézet