Opponensi vélemény

Stachó L. László

Bounded circular domains and their Jordan structures

című MTA doktori értekezéséről

A disszertáció angolul íródott, a bevezető 1. fejezettel együtt összesen 8 fejezetből és egy háromrészes függelékből áll. A szerző 13 cikkéből (melyből 2 társszerzős, Isidro és Zalar) és részben egy Isidro-val közösen íródott könyvéből válogatta a disszertáció anyagát. Az összesen 161 oldalas értekezés Banach terek korlátos, körszerű tartományainak vizsgálatához kapcsolódó problémákat vizsgál. A szerző közvetlenül e témához köthető munkásságának (ami a teljes publikációs listájának csak kb 1/6-a), közel 30 évnek az ide vonatkozó eredményeit gyűjti egybe. Az olvasónak könnyebbség, hogy a fejezetek nem cikk másolatok. Az értekezésben leggyakrabban használt technikai eszközök a klasszikus Banach térbeli funkcionálanalízishez tartoznak.

1. FEJEZET: Bevezetés. Részletesen tárgyalja a téma történeti hátterét, a felmerülő rokon problémák, fogalmak időrendi megjelenését, alakulását, jól megvilágítva, hogyan kapcsolódik mindez a matematika egyéb területeihez. Részletesen ismerteti a kezdetektől, Cartan 1935-ös, a szimmetrikus tartományok osztályozásáról szóló munkájától, a maig napig tartó, e területen folyó, részben a szerző által végzett kutatásokat.

Megjegyeznénk azonban, hogy a 1.1-ben Henri Cartan-nak tulajdonított 1935-ös eredmény nem tőle, hanem az édesapjától Élie Cartantól származik (amint ez az irodalomjegyzékből is látható).

A disszertáció eredményeiből

2.FEJEZET: Projekciós elv

A fejezet első fele (2.1, 2.2, 2.3) szól magáról a projekciós elvről, majd a hátralévő 2.4 részben a projekciós elv néhány alkalmazását láthatjuk.

A 2.4 részből a következő érdekes állításokat emelném ki:

Corollary 2.4.1: Ha D egy Banach tér korlátos, szimmetrikus tartománya, M pedig komplex részsokaság D-ben, mely egy $D \to D$ holomorf projekciónál D képe, akkor maga M is egy szimmetrikus Banach sokaság.

Prop. 2.4.14. : ha H^j, $j = 1, \dots, N$ Hilbert terek, $N \geq 3$, $\dim H^j \geq 2$, $E = \mathcal{B}(H^1, \dots, H^n)$ a $H^1 \times \cdots \times H^n \to \mathbb{C}$ korlátos N-lineáris funkcionálok Banach tere, akkor E egységgömbjének összes biholomorfizmusa lineáris.

Theorem 2.4.17.: jelölje E az előző állítás Banach terét. Ekkor E minden unitér operátora megkapható, mint $\{1, \dots, N\}$ egy π permutációjából és $U_k : H^k \to H^{\pi(k)}$ unitér operátorokból természetes módon összerakott operátor.

A bizonyítás több lépésből áll: a véges dimenziós eset az A1 függelékben található. A következő lépés egy Stone-típusú tétel, erről szól a 3. fejezet, végül a projekciós elv egy alkalmázása befejezi a bizonyítást. A tétel Prop. 2.4.14-el együtt E egységgömbje összes biholomorfizmusainak teljes leírását adja.

MEGJEGYZÉSEK:

A projekciós elv arra a kérdésre keres választ, hogy milyen feltételek mellett lesz egy (félig-) teljes holomorf vektormezőnek holomorf projekciónál vett képe ugyanilyen tulajdonságú. (félig-teljes= a trajektóriák definiáltak a $[0, \infty)$ intervallumon). Rögtön felmerül a kérdés, hogy ezt pontosan hogyan is kell érteni, hiszen egy vektormező képe egy leképezésnél nem lesz feltétlen vektormező a képhalmazon (különböző pontok képe lehet ugyanaz a pont, az ezen pontokhoz tartozó vektorok képe a leképezésnél pedig adhat két különböző vektort a képpontban). Mindez nincs elmagyarázva a disszertációban. Prop. 2.1.1. azt állítja, hogy egy $P : D \to D$ holomorf projekciónál egy X holomorf vektormező képe $P'X$ érinti a $P(D) = S$ képhalmazt. A $P'X$ vektormezőre 2.1.1-ben adott formula globálisan, az egész D-n ad egy vektormezőt, nemcsak S pontjaiban. Ez kicsit szokatlan, de ha jól értem arról van szó, hogy csak az S pontjaiban nézzük X-et és ennek a P-nél vett pontonkénti képe egy mező S minden pontjában, az így kapott mezőre olyan formula is adódik rögtön, ami már az egész D-n is értelmes és egy holomorf vektormezőt definiál, ez lesz $P'X$.

A 2.1.1-beli állításnak, hogy $P'X$ érinti S-et, persze csak akkor van értelme, ha tudjuk, hogy S egy részsokaság. (Továbbá a v és w betűk is összekeveredtek az állításban és az sem derül ki, hogy D valójában micsoda, úgy sejtem, hogy egy Banach tér nyílt részhalmaza.)

A hosszú bizonyításból az derül ki, hogy ezt a következőképpen kell gondolni: egy S pontjából kiinduló $P'X$ trajektória kis ideig S-ben marad.

Én úgy látom, hogy meg lehetne kerülni 2.1.1 hosszú bizonyítását és a fenti terminológiai gondokat az alábbi módon: először belátjuk a következőt (az inverzfüggvény tételt felhasználva): ha D tetszőleges komplex Banach sokaság és $P : D \to D$ holomorf, $P \circ P = P$, akkor $S = P(D)$ zárt komplex részsokaság D-ben. Ebből 2.1.1 állítása $P_* : TD \to TS$ definíciója alapján azonnal adódik.

A 2.2 rész (Theorem 2.2.1) tartalmazza magát a projekciós elvet. Sajnálatos módon csak a bizonyítás utolsó mondatából derül ki, hogy egy fontos feltétel kimaradt a tétel állításából: a d pseudometrika S-re való megszorítása teljes kell legyen.

A 2.2.8 következmény bizonyításában ρ definíciójában $p \in S$ kellene. Továbbá valahogy módosítani kellene a bizonyítást, ugyanis az nem igaz (ellentétben a bizonyításban mondottakkal), hogy minden korlátos tartományon a Caratheodory metrika teljes lenne.

A 2.3 rész a projekciós elv sokaság változata. Ezt is lehetne módosítani a 2.1.1 kapcsán előbb mondottak alapján.

A 2.4.1-es Következmény bizonyításában is történik hivatkozás arra, hogy a D tartomány d Caratheodory metrikája teljes, mert D korlátos. Azonban itt valóban teljes lesz d, mert D nemcsak korlátos, hanem homogén tartomány is.

A szerzőnek a projekciós elvről szóló [79]-es 1982-ben megjelent munkája megjelenése után egy darabig elkerülte a terület szakértőinek figyelmét. Í gy például tőle függetlenül W. Kaup 1984-ben újra felfedezte az elvet egy speciális esetben. Ahogy azt a bevezetés 1.4-es részében olvashatjuk, S. Dineen volt az, aki a [79]-es cikkre felhívta a terület művelőinek figyelmét. Hozzáteszem azonban, hogy nem a [79]-es cikk Math Reviews-beli ismertetésében (ellentétben az 1.4 szakaszban mondottakkal), hanem a [15]-s cikkében. A [79]-es cikket nem S. Dineen, hanem Isidro referálta a Math. Reviewsban.

3. FEJEZET: Egy Stone típusú tétel multilineáris funkcionálok automorfizmusairól.

A fejezet fő tétele (Theorem 3.1.1) Stone klasszikus tételét általánosítja a Prop. 2.4.14-ben szereplő E Banach tér unitér operátorainak csoportjába menő erősen folytonos 1-paraméteres részcsoportjaira.

4. FEJEZET: Korlátos körszerű tartományok algebrai klasszifikációja

Braun, Kaup, Upmeier, Vigué, Panou munkái alapján tudjuk, hogy egy E Banach tér minden, az origót tartalmazó D körszerű tartományához (a tartomány biholomorfizmuscsoportján keresztül) hozzárendelhető egy ún parciális J^* struktúra $(E, E_D, \{.,.,.\})$. Itt E_D az E Banach tér egy bizonyos zárt altere (ennek metszete D-vel lesz D szimmetrikus része), $\{.,.,.\}$ pedig egy 3 változós algebrai művelet E-n mely eleget tesz bizonyos axiómáknak.

Ebben a fejezetben a szerző azt a nehéz kérdést szeretné megválaszolni, hogy a parciális J^* tripletek között hogyan lehet felismerni, melyek származnak egy Banach tér origót tartalmazó körszerű tartományából, azaz a J^*-struktúrát megadó axiómákon kívül milyen egyéb axiómákra van szükség. A szimmetrikus esetben, azaz amikor D szimmetrikus, Kaup eredménye teljesen megválaszolja a kérdést, az ún JB^* struktúrát megadó axiómákra van szükség. A fejezet fő eredménye (Theorem 4.1.5) az eredeti kérdés kissé gyengített változatára ad teljes választ. Az egyszerűsített kérdés így szól: adott $(E, E_0, \{...\}_0)$ parciális J^* struktúra esetén mikor létezik olyan korlátos, az origót tartalmazó körszerű D tartomány E-ben, melyhez rendelt $(E, E_D, \{...\}_D)$ J^* struktúrára $E_0 \subset E_D$ és a $\{...\}_D$ hármas művelet az $\{...\}_0$ kiterjesztése. Az derül ki, hogy a JB^*-ot definiáló axiómákon kívül egy ún gyenge kommutativitási feltételre van szükség.

Menet közben Kaupnak a korlátos, körszerű, origót tartalmazó szimmetrikus tartományok konvexségéről szóló nevezetes tételének egyik kulcslépésére (az ún. spektrális becslésre) is új bizonyítást kapunk a 4.4 szakaszban.

Kérdés: Egy origót tartalmazó körszerű D tartományhoz tartozó parciális J^* tripletről leolvasható-e (és hogyan), hogy D a Banach tér (esetleg egy ekvivalens normára vett, nem feltétlen szimmetrikus) egységgömbje?

5. FEJEZET: Parciális JB^*-tripletek belső derivációinak kiterjeszthetősége a bázistérről.

Legyen $\mathbf{E}:= (E, E_0, \{.,.,.\})$ tetszőleges parciális JB^* struktúra. Ezen struktúra 4.1.4 (P2) definíciója alapján az $\{(ia), a, .\} : E \to E$ operátorok az $(E, E_0, \{.,.,.\})$ deriválásai. Ezek véges valós lineáris kombinációi definíció szerint a belső deriválások. Mindent megszorítva az E_0 bázistérre kapjuk $\mathbf{E}_0$ belső deriválásait. Panou 1990-es bicirkuláris tartományokhoz asszociált véges dimenziós J^* hármasok axiomatizálásáról szóló munkájában fontos szerepet játszott a bázistér belső deriválásainak az egész térre való kiterjeszthetősége. A 4. fejezetben tárgyalt Banach terek korlátos körszerű tartományaihoz rendelt ún geometriai parciális J^* tripletek finomabb szerkezetének megértéséhez a szerző célul tűzi ki olyan $\mathbf{E}= (E, E_0, \{.,.,.\})$ tripletek vizsgálatát, melyek rendelkeznek ezzel a kiterjesztési tulajdonsággal (BDKE=belső derivációk egyértelmű kiterjesztése típusúak). Többek között bebizonyítja, hogy ha E_0 egy ún véges dimenziós Cartan faktor (Prop 5.1.3), vagy ha $\mathbf{E}_0$ ún elemi JB^* tripletek c_0 direktösszegével izomorf (Prop 5.2.2), akkor $\mathbf{E}$ BDKE típusú.

6. FEJEZET: Banach-Stone típusú tétel folytonos Reinhardt tartományokra

A szerző általánosítja a $C_0(\Omega)$ típusú terek közti izometriákról szóló klasszikus Banach-Stone tételt. Az új változatban a $C_0(\Omega)$ téren a spektrálnorma helyett vehető tetszőleges (a pontonkénti rendezés szerinti) Banach háló norma. A 6.1.4 tételben két ilyen Banach háló közötti lineáris izometriák teljes leírását adja.

Ezt követően bevezeti a $\mathbb{C}^N$-beli Reinhardt tartományok általánosításaként, egy Banach háló-beli Reinhardt tartomány, majd ennek segítségével a folytonos Reinhardt tartomány (FRT) fogalmát. Az E Banach háló D tartománya Reinhardt tulajdonságú, ha

$$0 \in D \quad \text{és} \quad [f \in D, g \in E, |g| = |f|] \Rightarrow g \in D.$$

A $C_0(\Omega)$ Banach háló korlátos Reinhardt tulajdonságú tartományai lesznek a FRT-ok. A szerző ezen munkáját megelőzően több, sorozattérbeli Reinhardt tartomány fogalom is megjelent már az irodalomban, és ezek mindegyikére teljesült Sunada korábbi, $\mathbb{C}^N$-beli korlátos Reinhardt tartományokól szóló tétele: ilyen tartományok között a holomorf ekvivalenciából következik a pozitív lineáris ekvivalencia. Az FRT-k azonban bonyolultabb szerkezetű tartományok is lehetnek, amint azt a 6.4.1 tétel mutatja: vannak olyan lineárisan izomorf FRT-k, melyek nem vihetők at egymásba még valós részt megtartó izomorfizmussal sem.

Kérdés: A véges dimenziós eset analógiájára, lehet-e valamit mondani arról, hogy egy teljes FRT mikor lesz holomorfan konvex, azaz van-e valami megfelelője a logaritmikus konvexségnek teljes FRT-okra?

7. FEJEZET: Folytonos Reinhardt tartományok parciális JB^* tripletjének finom szerkezete

A 7.1.7 tétel szerint egy FRT-hoz tartozó parciális JB^* struktúra tripletje kifejezhető egy bizonyos integrálformula segítségével, mely többek között normabecsléseket is lehetővé tesz. Ennek folyományaként kapjuk (7.3.5 tétel), hogy az így keletkező parciális JB^* struktúrákra igaz a BDKE (l. 5. fejezet) tulajdonság.

8. FEJEZET: Súlyozott gridek folytonos J^* tripletekben.

Ez a fejezet tisztán algebrai struktúrákat vizsgál, az itt felbukkanó lineáris leképezésektől nincs megkövetelve a folytonosság. A szerző Neher grid fogalmát általánosítva bevezeti a súlyozott grid fogalmát: egy $E, \{., ., .\}$ J^* tripletben egy súlyozott grid E-ben egy W halmazzal indexelt előjeles tripotensekből ($\{e, e, e\} = 0$ vagy $\pm e$) álló lineárisan független vektorok $\{g_w \mid w \in W\}$ olyan halmaza, melyre teljesül, hogy $\{g_u g_v g_w\} \in \mathbb{C} g_{u-v+w}$, ha $u - v + w \in W$, egyébként pedig nulla. Ez a fogalom hasonlít a féligegyszerű Lie algebrák gyökeihez és egy hasonló szituációban, természetes módon bukkan fel, mint J^* algebrák deriváltjai kommutatív családjának közös súlyvektorai. Többek között a szerző Theorem 8.5.14-ben osztályozza a $W = \mathbb{Z}^2$ súlyalakzatú súlyozott grideket.

Észrevételek: Az 1. fejezet 1.10 alapfogalmakat tárgyaló része (10.oldal alja) (és a dolgozatban több helyen l. fent a 2. fejezet kapcsán), a szerző azt állítja, hibásan, hogy egy korlátos tartomány Caratheodory metrikája mindig teljes. Ez nem így van.

Az is nagyon zavaró, hogy szintén az 1.10 szakaszban a 11. oldal alján a körszerű tartományok expliciten definiálva vannak, és itt nincs feltéve, hogy az origó benne kell legyen a tartományban (és én is így tanultam, hogy ezt nem tesszük fel eleve), ugyanakkor a szerző az értekezésben végig úgy használja ezt a fogalmat, hogy az origó benne van a körszerű tartományban.

A magyar nyelvű összefoglaló tételszámozása nem kompatibilis a disszertáció számozásával, sőt a fejezetek tartalma sem pont ugyanaz a magyar felsorolásban, mint magában a disszertációban. A magyar nyelvű összefoglaló 3.1Prop, 3.2 tétel a dolgozatban nem a 3., hanem a 2. fejezetben található.

Az irodalomjegyzékben (mind a disszertációban, mind a magyar nyelvű összefoglalóban) több hiba csúszott a források adataiba. A disszertáció irodalomjegyzékének számozása szerint:

[50] vol 257, nem 357, oldal 463-483 nem 463-481

[51] vol 183, nem 83
[101] vol 223, nem 233
[104] kimaradt a szerző, csak cim van

Összefoglaló: A fent leírt összes megjegyzés nem befolyásolja azt a tényt, hogy Stachó László komoly eredményeket ért el a Banach terek körszerű tartományainak vizsgálatában. Munkásságával lényegesen hozzájárult e terület további fejlődéséhez. Az értekezés igen gazdag, sokrétű anyagot tartalmaz, a bemutatott eredmények messzemenően megfelelnek az MTA doktori disszertációkkal szemben támasztott követelményeknek.

Ezért az értekezés nyilvános vitára tűzését és a doktori cím megadását határozottan javaslom.

Budapest, 2011. június 15.

Szőke Róbert