

dc_66_10

Korlátos körszerű tartományok
és
kísérő Jordan-struktúráik

Akadémiai Doktori Értekezés

Tézisei

Stachó László

Szeged, 2010

I. A tárgyalt problémakör

Az MTA Doktora címért írt disszertációk a szerző egy közös kutatási területéhez köthető cikksorozatának egységes tárgyalását kívánják meg a legújabb elvárások szerint. Ennek megfelelően a disszertáció a Banach-térbeli korlátos körszerű tartományok holomorf geometriájával és ennek a Jordan-algebrai tárgyalásával kapcsolatos, az irodalomjegyzékben *-gal jelölt [76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 88, 89] saját, továbbá a társszerzővel írt [93, 42] cikkeim ill. a [37] könyvünk egyes részleteinek monográfiászerű feldolgozása.

1. Történeti megjegyzések

A Banach-térbeli korlátos tartományokkal ill. általánosabban a metrikus Banach-sokaságokkal kapcsolatos metrikus algebrai struktúrák vizsgálata az 1970-es években került egy nagyobb matematikus közösség érdeklődésének középpontjába a kvantumfizikai térelmélet hatására. A témakör kezdetei azonban jóval régebbiek: az irreducibilis $\mathbb{C}^N$ -beli szimmetrikus tartományokat már 1935-ben kimerítően leírta H. Cartan [14] a félig-egyszerű Lie algebrák osztályozásának segítségével, amelyek használata a tartomány holomorf automorfizmuscsoportja Lie-algebrájának a tartományban teljes holomorf vektormezőkkel való azonosíthatóságán alapult. Harish-Chandra beágyazási tétele később rámutatott, hogy mindegyik véges-dimenziós szimmetrikus tartomány egy körszerű tartomány biholomorf képe, sőt mint később egy részletes esetvizsgálatból kiderült (az ún. Hermann-féle konvexitási tétel [112]), ezek a Harish-Chandra-féle realizációk mind konvexek. Mihelyst elkezdődött a végtelen dimenzióra való általánosítás vizsgálata, hamar kiderült az eddigi megközelítéseket imitáló utak járhatatlansága, aminek hátterében az általános Banach-Lie-algebrák és csoportok kanonikus ekvivalenciájának hiánya állott. 1976-ban Vigué [105, 106] új, a lokálisan egyenletes konvergencia tulajdonságain alapuló komplex függvényteni érvekkel kimutatta a körszerű Harish-Chandra realizációk létezését. A mélyebb strukturális tulajdonságok, mint pl. ezek konvexitásának vizsgálatához elengedhetetlennek tűnt a tartomány holomorf automorfizmusain egy Banach-Lie-algebrai struktúra megtalálása, amelyre a lokálisan egyenletes konvergencia nem alkalmas topológiai alap. Vigué e problémájának megoldását Upmeyer [100, 101] még 1976-ban megtalálta: a metrikus komplex Banach-sokaságok (pl. a korlátos tartományok egy holomorfia-invariáns távolsággal) automorfizmuscsoportján megadható olyan topológia, amely azt Banach-Lie-csoporttá teszi. Az igazi áttörést W. Kaup egy 1977-es munkája [48] hozta meg: a komplex szimmetrikus metrikus Banach-sokaságok pontjai körül vannak mindenütt értelmezett kör-

szerű teljes vektormezők, aminek algebrai következményeként kanonikus 1-1 megfeleltetés létesíthető ezen sokaságok és a Jordan-azonosságot teljesítő *három-tényezős* szorzattal rendelkező hermitikus Banach-algebrák között. Az elmélet azonnal lehetőséget adott Kaup egy, a $\mathbb{C}^N$ -beli körszerű tartományokban teljes holomorf vektormezők másodfokú polinomiális szerkezetéről szóló 1970-es cikkének [47] a végtelen-dimenziós kiterjesztésére [11]. Ennek konklúziója: a korlátos körszerű tartományok teljes holomorf vektormezői egy háromtényezős szorzatú parciális Jordan*-algebrából (a továbbiakban *J*-triple*) származtathatók. Pl. egy C*-algebra egységömbjénél a hármas-szorzat $\{xy^*z\} = (xa^*y + ya^*x)/2$.

A disszertáció fő témája a J-triplek topológikus algebrai szerkezetének a vizsgálata az ezzel kapcsolatos inverz problémával, a velük konstruálható korlátos körszerű tartományok további tulajdonságainak leírásával együtt.*

A Jordan-algebrákat mind komplex és valós Banach-algebraként, mind pedig tiszta algebrai formában kommutatív testek fölötti vektorterekben intenzíven kutatták az 1940-es évektől kezdve. Sikerült a C*-algebrák biduális beágyazási elméletét az Arens-szorzattal binér Jordan*-algebrákra kiterjeszteni, másrészt az 1950-es években Koecher iskolája teljesen új Jordan-algebrai megközelítést alkotta meg a szimmetrikus tartományok Cartan-féle elméletének a pontos struktúra-osztályozásukkal együtt [56], amelyet később Loos [58] a Jordan-párok bevezetésével elegánsan továbbfejlesztett. Mindazonáltal ezen eredmények geometriai és fizikai alkalmazásai az 1970-es évek közepéig olyan implicit kompaktsági érveken alapultak, amelyekkel nem lehetett lényegesen meghaladni a véges-dimenziós kontextust.

2. Kiindulási eredmények

Egy komplex Banach-térbeli D tartomány (összefüggő, nyitott halmaz) *automorfizmusai* a biholomorf $\phi : D \leftrightarrow D$ leképezések. A D tartomány *körszerű*, ha $\mathbb{T}D = D$, azaz ha $[D \ni x \mapsto \kappa x] \in \text{Aut}(D)$ ($\kappa \in \mathbb{T}$), ahol $\mathbb{T} := \{\kappa \in \mathbb{C} : |\kappa| = 1\}$ a komplex egységkörvonal. Egy $a \in D$ pont D -nek *szimmetria-pontja*, ha $\sigma(a) = 0$ és $\sigma'(a) = -\text{id}$ valamely $\sigma \in \text{Aut}(D)$ mellett. Amennyiben D korlátos, Cartan unicitás-tétele szerint minden $a \in \text{Sym}(D)$ szimmetria-pontjánál pontosan egy σ_a szimmetriája van. A *szimmetrikus tartományok* azok, amelyeknek minden pontja szimmetriapont. 1976-ban J.-P. Vigué [109] új, végtelen dimenzióban is érvényes bizonyítást adott az egyszerűen összefüggő korlátos szimmetrikus tartományok korlátos körszerű biholomorf ekvivalenseinek létezésére. E Harish-Chandra típusú realizáció konvexitását sok, addig véges dimenzióban sem ismert (vagy ignorált) tulajdonsággal együtt 1983-ban sikerült W. Kaupnak [50] kimutatnia az 1.

részen említett 1977-es Jordan-triplet modellje vizsgálatával. Az [50] cikket a matematikusok és elméleti fizikusok egy jelentős közössége azóta is forradalminak tartja, mivel lehetővé tette a szimmetrikus egységömbű Banach-terek kategóriájának teljes algebrai axiomatizálását – mégha egy kevésbé szokásos 3-tényezős szorzattal is. *Az E Banach-térben pontosan akkor vannak korlátos szimmetrikus tartományok, ha egy ekvivalens norma szerinti egységömbje szimmetrikus, amely esetben egy (szükségképpen egyértelmű) $\{..*\}$ hármasszorzattal az $(E, \{..*\})$ pár JB^* -triplet.* Ez utóbbi a C^* -algebrák alábbi természetes általánosítása. Az $(E, E_0, \{..*\})$ struktúra, ahol E_0 egy zárt komplex-lineáris altere az E Banach-térnek, $\{..*\}$ pedig egy $E^3 \rightarrow E$ folytonos művelet *parciális J^* -triplet*, ha a $\{xa^*y\}$ kifejezés komplex-lineáris a külső x, y változóiban, és konjugált-lineáris a belső a szerint, továbbá teljesíti a

$$(J) \quad \{ab^*\{xc^*y\}\} = \{\{ab^*x\}c^*y\} - \{x\{ba^*c\}^*y\} + \{xc^*\{ab^*y\}\}$$

Jordan-azonosságot. Az $(E, \{..*\})$ struktúra JB^* -triplet, ha $(E, E, \{..*\})$ parciális J^* -triplet, és a következő axiómák állnak:

$$(JB^*) \quad \|\{aa^*a\}\| = \|a\|^3, \quad \text{Sp}(a \square a^*) \geq 0, \quad \|\exp(i\tau a \square a^*)\| = 1 \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

a szokásos $a \square b^* : x \mapsto \{ab^*x\}$, $\text{Sp}(\alpha) := [\alpha \text{ spektruma}]$ jelölésekkel. A tételhez vezető gondolatmenet egyik alaplépése korlátos körszerű tartományokra vonatkozik [11]: *Ha $D \subset E$ korlátos körszerű tartomány, akkor van olyan $(E, E_D, \{..*\}_D)$ parciális J^* -triplet, amelynél $\text{Sym}(D) = E_D \cap D$ szimmetrikus tartomány az E_D altérben, továbbá*

$$[a - \{xa^*x\}] \partial / \partial x \in \text{aut}(D) \quad (a \in E_D),$$

ahol $\text{aut}(D) := \{D\text{-ben teljes holomorf vektormezők}\}.$

3. Problémák és történetük

3.1. A kontraktív projekciók problémája

A kvantummechanika modelljeivel kapcsolatban kezdettől fogva ismert volt az a geometriai paradoxon, hogy egy C^* -algebra kontraktív projekciós képe a vetített művelettel általában nem C^* -algebra. Pl. a komplex $(N \times N)$ -es mátrixok C^* -algebrájának kontraktív képe a szimmetrikus mátrixok családja. Részben ez a tény motiválta P. Jordant a JB^* -algebrák fogalmának megalkotására, azonban még ez a kategória sem zárt a kontraktív projekciókra.

Megadható-e olyan algebrailag axiomatizálható Banach-tér kategória, amely tartalmazza a C^ -algebrákat és zárt a kontraktív projekciók képzésére?*

Még a JB^* -tripletek fogalmának megjelenése előtt 1980-ban a Pisa-ban írt PhD-disszertációmban megadtam a probléma geometriai oldalának egy implicit megoldását: a $B(E)$ egységömb egy teljes holomorf X vektormezőjének

a PX vetülete egy kontraktív lineáris $P \in \mathcal{L}(E)$ projekcióval teljes a PE altér egységömbjében. Később 1982-ben a [78] munkámban ennek egy Banach–Finsler-sokaságokra kiterjesztett nem-lineáris változatát publikáltam. Ez képezi alkalmazási példákkal a Disszertáció 2. fejezetének fő témáját. Mihelyst 1983-ban Kaup [50] bebizonyította a körszerű korlátos szimmetrikus tartományok konvexitását azok triplet-algebraizálhatóságával együtt, a tétel szerint a JB^* -tripletek kategóriája zárt a kontraktív lineáris projekciókra.

3.2. Parciális JB^* -tripletek bidualizálhatósága

A [78] cikkemről nem tudván, 1985-ig több tiszta algebrai részeredmény [22, 23] született a JB^* -tripletek kontraktív projekciós problémájával kapcsolatban, míg Kaup [51] a [78] cikkem 2.4 Következményét újra felfedezve lezárta a témakört. A matematikus közösség a [78] cikkem Math. Reviewsbeli referálójától, S. Dineentől értesült a projekciós elvemről, aki 1985-ben ennek egy igen jelentős alkalmazását találta [15]: bármely E Banach-tér E'' második duálisa izometrikusan izomorf valamely $E^{\mathcal{U}}$ ultrahatvány egy alkalmas kontraktív lineáris P projekció általi képével, és így az $\{..*\} := \{..*\}_{B(E)}$ hármasszorzattal képezett $[a - P\{za^*z\}]\partial/\partial z_{\mathcal{U}}$ ($a \in PE^{\mathcal{U}}$) alakú vektormezők mindegyike természetes módon megfelel egy $B(E'')$ -beli teljes holomorf vektormezőnek. Ennek következtében a JB^* -tripletek bidualisai szintén JB^* -tripletek változónként gyenge*-folytonos hármasszorzattal [4]. Nyitott probléma, hogyan viselkedik Dineen konstrukciója a nem-szimmetrikus esetben:

Igaz-e, hogy bármely korlátos körszerű $D \subset E$ tartomány esetén a $\{..\}_D$ hármasszorzat változónként gyenge*-folytonosan kiterjeszthető $E'' \times E''_D \times E''$ -ra, és a kapott művelet egy E'' -beli korlátos körszerű tartomány kanonikus parciális J^* -tripletének része?*

Közismert sejtés volt, hogy általánosított végtelen-dimenziós Reinhardt-típusú tartományok ellenpéldát adhatnak. A Disszertáció 6-7. fejezeteiben tárgyalt [93, 42, 85, 86]-beli vizsgálataim a folytonos Reinhardt-tartományokkal kapcsolatban megcáfolják ezt az elvárást.

3.3. Klasszikus tenzorterek erősen folytonos egy-paraméteres automorfizmus-csoportjai

Hogyan rekonstruálható egy automorfizmus-csoport ismert struktúrájú alacsony-dimenziós részei alapján?

A teljes holomorf vektormezőkről szóló projekciós elvem egyik fő célja egy ilyen rekonstrukció volt vetületek segítségével. Így többek között sikerült az atomos Banach-hálók és a Hilbert-terek szorzatainak értelmezett multilineáris

funkcionálok egységömbjeinek holomorf automorfizmusait pontosan leírnom [78]. Ez utóbbiak 3-tényezőtől kezdve csak lineárisak lehetnek (ld. Dissz. 2.fej. és Appendix). 2008-ban Botelho és Jamison egy cikkében [8] felvetődött a klasszikus Stone-tételt általánosításaival kapcsolatos következő kérdés:

Mikor igaz, hogy a $\mathcal{B}(X_1 \times \cdots \times X_N)$ tér szürjektív izometriáinak összes erősen folytonos egy-paraméteres részcsoportjai $t \mapsto \bigotimes_{k=1}^N \exp(itA_k)$ alakúak?

Ezt sikerült nemrégiben pozitívan megválaszolni [88] Hilbert-terek esetén a [78]-beli részeredményekkel és valószínűségelméleti megfontolásokkal, amit a Disszertáció 3. fejezetében mutatok be.

3.4. Geometriai parciális J^* -tripletek axiomatizálása

A parciális J^* -tripletek 1978-as [11] megjelenése óta ismert volt a kérdés:

Milyen további topológikus-algebrai axiómákra van szükség annak a geometriai ténynek a leírásához, hogy egy $(E, E_0, \{..\})$ parciális J^* -triplet valamely $D \subset E$ korlátos körszerű tartományból származtatható legyen?*

Ennek egy kissé gyengített változata a következő pontosítás:

Milyen axiómákat kell teljesítenie egy $(E, E_0, \{..\})$ parciális J^* -tripletnek ahhoz, hogy létezzen olyan $D \subset E$ korlátos körszerű tartomány, amely mellett $E_D \subset E_0$ és $\{..*\}|E \times E_D \times E = \{..*\}_D$?*

Ez utóbbi kérdés teljes megválaszolása a [79, 80] munkáimban történt meg 1991-ben. A konstrukcióimból adódik, hogy a kapott axiomatika, amely lényegében a (JB^*) -beli kívánalmakat jelenti az $a \in RE_0$ elemekre egy gyenge kommutativitási tulajdonsággal együtt, egyben az első kérdés válasza is (a hosszú, bár egyenes gondolatmenetet végül nem publikáltam). Jóllehet Kaup a kérdések szimmetrikus tartományokra szorítókozó változatát a (JB^*) axiómákkal már 1983-ban megtalálta, a gondolatmenet nem volt alkalmas további általánosításokra, és a Disszertáció 4. fejezetében bemutatott [79, 80] dolgozataim új bizonyításokat adnak a szimmetrikus esetben is.

3.5. Parciális J^* -tripletek reprezentációi, gridek

Parciális J^* -tripleteket természetes módon lehet definiálni komplex-, kvaternió- ill. oktonió-mátrixokon. Végtelen-dimenzióban ezekhez a legközelebbi objektumok a Hilbert-terek lineáris operátorai. 1985-ben Friedman és Russo [25] megtalálták a klasszikus Gelfand–Naimark-tétel JB^* -tripletekre is érvényes formáját: bármely JB^* -triplet hűen reprezentálható Hilbert-térbeli operátorok Cartan-faktoraival és (2×1) -es ill. (3×3) -as oktonió-mátrixokkal. A megközelítésük, amely teljesen új volt a C^* -esetre is, a triplet Dineen-féle biduális beágyazásán alapult: a biduálisban vannak olyan idempotens $\{ee^*e\} = e$ tulajdonságú, ún. *tripotens*) elemek, amelyek kvadratikus reprezentációja minimális abban az értelemben, hogy $\{eE^*e\} = \mathbb{C}e$. Ezek az

ún. *atomok*, ill. a koordináta-funkcionáljaik (a $\{ex^*e\} = \overline{\phi_e(x)}e$ azonoságot teljesítő $\phi_e \in E'$ formák) veszik át a C^* -állapotok szerepét: az általuk generált E'' -beli gyenge*-zárt $\mathbf{A}$ ideál ugyanis tisztán nem-atomos $\mathbf{N}$ ideállal komplementált, és IE beágyazottján a $\mathbf{N}$ -magú $P : E'' \rightarrow \mathbf{A}$ projekció injektív, és így a $P \circ I$ leképezés hű reprezentációja az $(E, \{..*\})$ JB^* -tripletnek. Innen reprezentáció-tételeket nyerhetünk az $\mathbf{A}$ atomos ideál szerkezetének leírásával, amely először a binér JB^* -algebrák Gelfand–Neimark-típusú tételeinek segítségével [33], majd később Neher [67, 68] egy, a komplex tereken túlmutató tiszta algebrai módszerével, a tripotensek *grid*-rendszerének klasszifikációjával történt meg. *Mely részei vihetők át ennek ezen elméleteknek a parciális J^* -tripletek ill. parciális JB^* -tripletek vizsgálatára?*

A kérdés tovább motiválja a bidualizációval kapcsolatos 3.2-beli problémákat, ugyanakkor algebrai oldalról pontosításra szorul, hiszen egy $(E, E_0, \{..*\})$ triplet tripotensei csak az E_0 bázis-térben helyezkedhetnek el. Bár nem tűnik reménytelennek a véges-dimenziós Koecher-elmélet kiterjesztése a J^* -tripletekről a parciális J^* -tripletekre, azaz a *véges-dimenziós parciális J^* - ill. JB^* -tripletek klasszifikációja* tiszta algebrai eszközökkel, még ez a probléma is szinte teljesen nyitott máig. Fontos részeredményt ért el Panou [70] 1990-ben, kimutatván, hogy a véges-dimenziós komplex körszerű tartományokból származtatott parciális JB^* -tripletekben a $\sum_k \alpha_k a_k \square a_k^*$ alakú valós-lineáris kombinációk (a belső derivációk) megszorítása az bázis-térre injektív transzformáció, vagyis a $\{..*\}$ hármasszorzat jelentős része rekonstruálható a belső derivációk alaptérre megszorított Lie-algebrájának a reprezentációiból. Bizonyítása azonban, amely a Levi–Malcev-tételen alapult, megkívánta a teljes tér véges-dimenziós voltát.

Igaz-e, hogy a belső derivációk megszorítása az bázis-térre injektív transzformáció általános parciális JB^ -triplet esetén is, és ha igen, milyen folytonossági és kiterjeszthetőségi tulajdonságokkal bír az inverze?*

A probléma teljes megoldása véges-dimenziós és elemi JB^* -triplet szerkezetű bázis-tér esetére a [81] munkámban jelent meg, amelyet a Disszertáció 5. fejezetében tárgyalok. A belső derivációk kiterjeszthetőségi tulajdonságai fontosak lehetnek a komplexen túli véges-dimenziós parciális J^* -tripletek struktúra-leírásához is. Ebben a kontextusban természetes kérdés:

A bázisban gridszerű rendszerek létezéséből levezethető-e a belső-derivációk egyértelmű kiterjeszthetőségi (BDEK) tulajdonsága általános J^ -tripletek esetén? Hogyan definiálhatók ilyen koordinatizáló gridek?*

1985-től kezdve Neher [66, 67, 68] mélyreható eredményeket ért el egy tripotensekkel értelmezett Jordan-grid fogalommal kapcsolatban, amelynek segítségével pl. a JB^* -tripletek Gelfand–Naimark-tételéhez szükséges atomos JBW^* -tripleteket pontosan le lehetett írni. Sikerült axiomatikát is megadnia e rendszerekhez, azonban ezt, szemben a látszólag rokon Dynkin-diagramok-

kal, a legtöbb ismerője igen furcsának, más matematikai területekhez nem köthetőnek tartja. 1999-ben a BDEK tulajdonság általános testek feletti parciális J^* -tripletekben való vizsgálataim során a Neher-féle grid-fogalomnak egy természetes kiterjesztését találtam, a *súlyozott grideket* [83]. Komplex $(E, E_0, \{..*\})$ triplet esetén ezek olyan $G \subset E_0$ lineárisan független rendszerek, amelyek egy valós vektortér valamely W alakzatával $G = \{g_w : w \in W\}$, $\{g_u g_v^* g_w\} \in \mathbb{C} g_{u-v+w}$ alakban indexelhetők.

Mi a reprezentációelméleti háttere a súlyozott grideknek? Mennyiben mennek túl Neher grid-fogalmán? Milyen új Jordan-struktúrák vezethetők be velük?

Az egyik legújabb [89] cikkem alapján a Disszertáció 7. foglalkozik ezekkel a kérdésekkel. Megmutatjuk, hogy affinitás erejéig a szóba jöhető W alakzatok belső derivációk maximális kommutatív családjainak súlyfüggvény-rendszerei. A súlyozott gridek lehetőséget adnak különböző előjelű tripotensek nem-triviális keveredésére, és ezzel Lorenz-tripletek bevezetésére, amelyeket pontosan leírunk. Másrészt jelentősen a súlyozott gridekkel a Neher-féle standard gridek tovább bővíthetők az asszociációs ekvivalencia-osztályaikból vett alkalmas előjeles tripotens-sorozatokkal. Már az első lépés is ebben az irányban, a Disszertáció zárásaként a $W = \mathbb{Z}^2$ súlyalakzatú súlyozott gridek osztályozása, sok meglepő új komplex J^* -tripletet eredményez, amelyek többek közt a nil-tripotensek szerepét is új megvilágításba helyezik.

3.6. Folytonos Reinhardt-tartományok

A projekciós elvem egyik eredeti célja egy Banach-tér egységsgömbje holomorf automorfizmusainak a leírásának a visszavezetése alacsonyabb dimenziós ismert holomorf geometriájú egységsgömbökre volt. Ezzel a stratégiával a [78] munkámban sikerült többek között az atomos Banach-hálók egységsgömbjeinek holomorf automorfizmus-csoportját meghatároznom, kiterjesztve ezzel Sunada ismert [96, 97] eredményeit véges-dimenziós Reinhardt-tartományokról sorozat-terek konvex Reinhardt-tartományaira. A klasszikus komplex függvénytanban a Reinhardt-tartományok jól-kezelhető teszt-objektumokként is szolgáltak kezdettől fogva. Kézenfekvő módon lehet ugyanakkor Reinhardt-tartományokat definiálni folytonos függvények tereiben, sőt tetszőleges komplex Banach-hálóban az elemek abszolútértékét használva.

Milyen eredményekre vezet a $C_0(\Omega)$ -terek korlátos Reinhardt-tartományaihoz (röviden: folytonos Reinhardt-tartományokhoz (FRD)) társított parciális JB^ -tripleteken a bidualizálással és a BDEK-tulajdonsággal kapcsolatos sejtések tesztje? Sunada tételei mennyiben vihetők át FRT-ra? A spektrálnorma szerinti egységsgömb lineáris automorfizmusait leíró klasszikus Banach–Stone-tétel hogyan módosul FRD estén?*

A válaszokhoz természetesen az illető parciális JB^* -tripletek pontos leírására

van szükség, amely közel sem érhető el közvetlenül az általános elméletből. Ez utóbbi feladatot társszerzőkkel a szimmetrikus részre a [40, 93, 42] cikkeimben oldottuk meg: az eredmény véges-dimenziós euklideszi gömbök egy váratlan új topologikus keveréke, amely más területek kutatóinak érdeklődésére is számot tarthat. a Banach–Stone-tétel egy, az FRT-kontextuson is túlmenő általánosítását egy, a Sunada-tételek analogonjait cáfoló ellenpéldával a [85], míg a teljes tesztelést, amely a várákosításokkal szemben nem hozott ellenpéldákat, a FRT-ok JB^* -tripletjeinek osztályozásával együtt a [85] dolgozatomban közöltem. Ez a Disszertáció 5-6. fejezeteinek témája, ahol a szimmetrikus rész struktúráját a [40, 93, 42] cikkektől függetlenül az [85]-beli általánosított Banach–Stone-tételemből vezetem le.

II. Módszerek és források

1. Komplex függvénytan Banach sokaságokon

A klasszikus függvényteni elvek elsősorban a szereplő holomorf automorfizmus-csoportok Banach–Lie-csoport voltát ill. ezek Lie-algebrájának a teljes holomorf vektormezőkkel való azonosíthatóságát hivatottak biztosítani a téma körünkben, amely tény intenzív használata a projekciós elvvel ill. a geometriai J^* -tripletek axiomatizálásával (2. ill. 4. fejezet) kapcsolatosan kerül sorra. Eredeti módon mélyebb komplex függvényteni eszközöket, mint pl. a Carathéodory-féle infinitezimális metrika Banach-sokaságokon, csak a projekciós elvhez (2. fejezet) alkalmazok. Forrás: a speciális előismeretek megtalálhatók a [37] monográfiánk 1-6 fejezeteiben, a metrikus Banach-sokaságokkal kapcsolatos rész Vesentini–Franzoni ill. Upmeyer [104, 101] monográfiáiban.

2. Topologikus algebrák, Jordan-struktúrák

A Disszertáció leggyakrabban használt technikai elemei a klasszikus Banach-térbeli funkcionálanalízishez sorolhatók. Ennek az alapvetően lineáris indítássalú diszciplinának az átvitele történik a nem-lineáris kontextusra, elsősorban polinomiális szinten. A JB^* -tripletek (szimmetrikus egységömbű Banach-terek) vizsgálata, amely egy széles matematikusi és fizikusi közösség érdeklődésének a centruma, természetes módon egyesíti a komplex függvénytant a funkcionálanalízissel, és új megközelítést ad az ultraszorzat-technikájú bidualis beágyazással még olyan klasszikus eredményekhez is, mint a Gelfand–Naimark-tétel. A Disszertáció témája ezen a kutatási fősodrason kissé túl van: a fő kérdések egyike a 4-5. fejezetekben az, mely tulajdonságok vihetők

tovább a kiindulási alakzat szimmetrikus része által meghatározott JB^* -tripletnek az egész térre. Ez természetes módon vezet reprezentációelméleti problémákhoz, amelyek még véges-dimenzióban ill. általánosabb számtestek fölötti algebrai objektumokkal kapcsolatban is önálló érdekességgel bírnak, mint pl. a grid-elmélet, amelyhez a Disszertáció 8. fejezete új megközelítést ad. Algebrai szempontból a Disszertáció szorosan kapcsolódik a Jordan-algebrák és a Jordan-tripletek témaköréhez. Források: Banach-terek hermitikus operátoraival kapcsolatban [6, 7], az ultraszorzat- és biduális beágyazási technikához [29, 15, 4], a Jordan-elmélethez [63, 10, 58], a grid-elmélethez [67, 68]. A Disszertáció témakörében alapvető fontosságúak Kaup [48, 50] művei.

3. Mértékelmélet, valószínűség

A folytonos Reinhardt-tartományok 6-7. fejezetbeli tárgyalása során a $\mathcal{C}_0(\Omega)'$ -terekben gondolatmenetek természetesen vezetnek a Radon-mértékek elméletének intenzív használatához. Sőt a Riesz–Kakutani-féle reprezentációtételnek egy multilineáris változatára is szükség van, amely csak implicit formában [111] található meg az irodalomban. Erre önálló bizonyítást adtam a [86] cikkemben, amely olvasható a Disszertáció Függelékében. A 3. fejezetben a Hilbert-terek multilineáris funkcionáljainak egy-paraméteres izometria-csoportjaira adott Stone-tétel bizonyítása a probléma felvetőinek némi meglepetésére valószínűségi megfontolásokat is igényelt. A szükséges előismeret ezen a téren a nagy számok törvényeivel kapcsolatos szokásos anyagon [19].

III. Eredmények

2.fejezet [78, 76, 82]. Projekciós elv

Egy $\mathcal{D}$ Banach-sokaságon ható $\mathcal{D} = f(z)\partial/\partial z$ sima vektormező *félig teljes* egy $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ alakzatban, ha a $\left[\frac{d}{dt}z(t) = f(z(t)), z(0) = s\right] \quad p \in \mathcal{S}$ kezdetiérték-problémák maximális megoldásai kiterjednek a teljes pozitív $\mathbb{R}_+$ félegyenesre.

2.1. Tétel. (Projekciós Elv, [Értekezés]Thm.2.3.1) *Legyen $\mathcal{P} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ a $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ komplex sokaság egy holomorf projekciója. Ekkor bármely $\mathcal{D}$ -beli $\mathcal{X}$ holomorf vektormező $\mathcal{P}'\mathcal{X}$ vetülete érintőleges a $\mathcal{S} := \mathcal{P}(\mathcal{D})$ képteréhez. Ha van olyan $\mathfrak{d}$ pseudo-metrika $\mathcal{D}$ -n, amely szerint minden holomorf $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ leképezés $\mathfrak{d}$ -kontrakció, és amelynek a $\mathcal{S}$ -re való megszorítása a $d_\phi(p, q) := \|\phi(p) - \phi(q)\|$ ($\phi \in \mathcal{A}$, $p, q \in \text{dom}(\phi)$) koordinátázási távolságokkal lokálisan ekvivalens teljes metrika, akkor bármely $\mathcal{D}$ -ben félig teljes $\mathcal{X}$ holomorf vektormező $\mathcal{P}'\mathcal{X}$ vetülete félig teljes $\mathcal{S}$ -ben.*

2.2. Következmény. *Speciálisan egy Banach-térbeli korlátos szimmetrikus D tartománynak egy M complex alsokasága szimmetrikus metrikus Banach-sokaság a Caratéodory-féle pseudometrikájával, amennyiben D valamely holomorf projekciójának a képe*

A Banach-terek egységömbjeivel társított parciális J^* -tripletek $\text{Sym}(E) := E_{B(F)} = \{a \in E : \exists X \in \text{aut}(B(E)) \ X(0) = a \partial/\partial z\}$ szimmetrikus részével kapcsolatban a kapjuk az alábbi eredményt.

2.3. Következmény. ([78]Cor.2.4). *Ha $P : E \rightarrow E$ egy kontraktív lineáris leképezés, akkor $P\text{Sym}(E) \subset \text{Sym}(PE)$. Ha a $B(E)$ egységömb szimmetrikus, akkor szimmetrikus tartomány a vetületi $B(PE)$ egységömb is.*

2.4. Megjegyzés. A Projekciós Elv 2.3 következményének segítségével alakította ki Dineen a JB^* -tripletek biduizációs technikáját, amely alapján lehetővé vált a Neumann-algebrák elméletének egy természetes kiterjesztése a preduállal rendelkező szimmetrikus egységömbű Banach-terekre, az ún. *JB^* -tripletekre*. Másrészt a Projekciós Elv egyszerű folyamánya az is, hogy a legtöbb Banach-tér egységömbjének csak lineáris automorfizmusai lehetnek.

2.5. Következmény. ([78]Cor.2.5). *Ha található kontraktív lineáris $E \rightarrow E$ projekcióknak egy olyan $\mathcal{P}$ családja, amelynek minden $P \in \mathcal{P}$ tagja esetén $\text{Aut}(B(PE))$ csak lineáris transzformációkból áll, akkor $\text{Aut}(B(E))$ tagjai csak lineáris transzformációk lehetnek.*

3.fejezet [88]. Multilineáris funkcionál-terek erősen folytonos automorfizmuscsoportjai

Legyenek $\mathbf{H}^{(1)}, \dots, \mathbf{H}^{(N)}$ legalább 2-dimenziós komplex Hilbert-terek. Tekintsük a korlátos N -lineáris $\mathbf{H}^{(1)} \times \dots \times \mathbf{H}^{(N)} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcionálok

$$E := \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{H}^{(1)}, \dots, \mathbf{H}^{(N)})$$

terének $B := B(E)$ egységömbjét a $\|\Phi\| := \sup_{\|\mathbf{x}_1\|=\dots=\|\mathbf{x}_N\|=1} |\Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)|$ operátor-norma szerint. A Projekciós Elv 2.5 következménye alapján kapjuk:

3.1. Propozíció. $N \geq 3$ esetén $\text{Aut}(B)$ összes elemei lineárisak.

Sőt a Projekciós Elvet alkalmazva visszavezethetjük ezen automorfizmusok pontos leírását az elemi kompaktsági megfontolásokkal kezelhető véges-dimenziós esetekre a következő konklúzióval.

3.2. Tétel. *A lineáris $\mathcal{B}$ -unitér operátorok pontosan azok, amelyek*

$$F(\Phi) = [(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N) \mapsto \Phi(U_1^{-1}\mathbf{f}_{\pi(1)}, \dots, U_N^{-1}\mathbf{f}_{\pi(N)})].$$

alakban írhatók az $\{1, \dots, N\}$ indexhalmaz valamely π permutációjával és alkalmas $U_k : \mathbf{H}^{(k)} \rightarrow \mathbf{H}^{(\pi(k))}$ szürjektív lineáris izometriákkal. Egy E -beli lineáris V vektormező pontosan akkor teljes $B(\mathcal{B})$ -ben, ha

$$V = i \cdot \sum_{k=1}^N \text{id}_{\mathbf{H}^{(1)}} \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathbf{H}^{(k-1)}} \otimes A_k \otimes \text{id}_{\mathbf{H}^{(k+1)}} \otimes \dots \otimes \text{id}_{\mathbf{H}^{(N)}}$$

alakú, ahol $A_1, \dots, A_N$ rendre $\mathbf{H}^{(1)}, \dots, \mathbf{H}^{(N)}$ -önadjungált operátorok.

Itteni fő eredményünk Stone klasszikus tételének az alábbi természetes általánosítása a $\mathcal{B}$ tér erősen folytonos egy-paraméteres automorfizmus-csoportjaira, azaz olyan $\mathbf{U} : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{A} := \{\text{szürjektív lineáris } \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \text{ izometriák}\}$ leképezésekre, amelyek rendelkeznek a $\mathbf{U}(t+h) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}(h)$ ($t, h \in \mathbb{R}$) csoporttulajdonsággal, és amelyeknél a $t \mapsto \mathbf{U}(t)\Phi$ függvények folytonosak minden rögzített $\Phi \in \mathcal{B}$ mellett.

3.3. Tétel. *Legyen $\mathbf{U} : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{A}(\mathbf{H}^{(1)}, \dots, \mathbf{H}^{(N)})$ egy erősen folytonos egy-paraméteres csoport. Ekkor található olyan $A_k : \text{dom}(A_k) \rightarrow \mathbf{H}^{(k)}$ mindenütt sűrűn definiált esetleg nem-korlátos önadjungált operátorok, amelyekre*

$$\mathbf{U}(t) = [\exp(itA_1)] \otimes \dots \otimes [\exp(itA_N)] \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3.4. Következmény. *Ha $\mathbf{W} : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{L}(\mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)}))$ erősen folytonos egy-paraméteres csoport, akkor $\mathbf{W}(t)X = \exp(tA_1)X\exp(tA_2)$ írható valamely esetleg nem-korlátos $A_k : \text{dom}(A_k) \rightarrow \mathbf{H}^{(k)}$ önadjungált operátorokkal.*

Azonnal adódik a $\mathcal{B}(\mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)}) \simeq \mathcal{L}(\mathbf{H}^{(1)}, \mathbf{H}^{(2)})$ JB*-triplet nem-korlátos derivációinak leírása: ezek $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \mathbf{W}(t) = A_1 \otimes \text{id} + \text{id} \otimes A_2$ alakúak. Várhatóan minden végtelen-dimenziós Cartan-faktor nem-korlátos derivációi kezelhetők a bizonyítás valószínűségelméleti technikájával, s biduális beágyazással innen döntő információk nyerhetők az általános JB*-tripletek nem-korlátos derivációival kapcsolatban is, hiszen a Hille–Yosida-tétel [19, 113] szerint egy JB*-triplet esetleg nem-korlátos derivációi pontosan az erősen folytonos egy-paraméteres izometria-csoportjainak az infinitezimális generátorai.

4. fejezet [79, 80]. Geometriai eredetű parciális J*-tripletek algebrai axiomatizálhatósága

Jelöljön D egy korlátos körszerű az E komplex Banach-térben. 1976-ban Kaup-Upmeyer [53] L. Harris egy sejtését igazolva bebizonyították, hogy

holomorf értelemben ekvivalens egységömbű Banach-terek lineáris izometriával is izomorfak. Eredményüket D holomorf automorfizmusai $\mathfrak{G} := \text{Aut}(D)$ csoportjának a szisztematikus Banach–Lie-algebrái vizsgálatával érték el. Ennek továbbfejlesztése vezetett a az $(E, E_D, \{..*\})$ parciális J^* -triplet fogalmához [11], amely szerint általában is

$$\mathfrak{G} = \text{GL}(D) \cdot \{\exp[(a - \{xa^*x\}_D)\partial/\partial x] : a \in E_D\}, \quad \mathfrak{G}(0) = D \cap E_D,$$

ahol $\text{GL}(D) := \{\alpha \text{ inverible} \in \mathcal{L}(E) : \alpha(D) = D\}$. Célunk azon parciális J^* -tripletek algebrái leírása, amelyek valamely korlátos körszerű tartomány holomorf automorfizmus-csoportjából származtathatók ilyen módon.

4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(E, E_0, \{..*\})$ parciális J^* -triplet *geometriai*, ha az összes $(a - \{xa^*x\})\partial/\partial x$ ($a \in E_0$) vektormezők teljesek valamely E -beli korlátos körszerű tartományban, azaz
 ha $E_0 \subset E_D$ és $\{..*\} = \{..*\}_D|E \times E_0 \times E$ valamely $D \subset E$ mellett;
hermitikus, ha az $a \square a^* (= [E \ni x \mapsto \{aa^*x\}])$ operátorok hermitikusak, azaz
 ha $a \square a^* \in \text{Her}(E, \|\cdot\|) := \{A \in \mathcal{L}(E) : \|\exp(i\tau A)\| = 1 \ (\tau \in \mathbb{R})\}$ ($a \in E_0$);
gyengén kommutatív, ha $\{\{xa^*x\}b^*x\} = \{xa^*\{xb^*x\}\}$ ($a, b \in E_0, x \in E$);
pozitív, ha $\text{Sp}(a \square a^*) \geq 0$ ($a \in E_0$) áll a box-operátorok spektrumára;
JB-bázisú*, ha az $(E_0, \{..*\}|E_0^3)$ J^* -triplet egyben JB*-triplet is.

4.2. Megjegyzés. 1990-re tisztázódott [37]Prop.7.10.(c), [47, 69, 50], hogy az E teret ellátva a $\|v\| = \|v\|_D := \sup \{|\varphi'(0)v| : \varphi \in \text{Hol}(D, \mathbb{D}), \varphi(0) = 0\}$ infinitezimális Carathéodory-normával, $(E, E_D, \{..*\}_D)$ JB*-bázisú gyengén kommutatív hermitikus parciális J^* -tripletté válik, azaz *minden geometria parciális J^* -triplet az E alaptér renormálásával lineárisan elvivalens egy JB*-bázisú gyengén kommutatív hermitikus parciális J^* -triplettel*. Az idevezető gondolatmenetek döntő láncszeme annak a ténynek a tisztázása volt [50], hogy a szimmetriapontok $\text{Sym}(D) := E_D \cap D$ halmaza automatikusan konvex, amit Kaup eredetileg a

$$0 \leq \text{Sp}(a \square a^*|E_D) \subset \frac{1}{2}\Omega_a + \frac{1}{2}\Omega_a \quad (a \in E_0) \quad (4.3)$$

spektrál-egyenlőtlenségből vezetett le, ahol $\Omega_a := \{0\} \cup \text{Sp}(a \square a^*|C_0(a))$ és $C_0(a)$ a legszűkebb $a \square a^*$ -invariáns és az a elemet tartalmazó zárt altér. Itt a kommutatív Gelfand-Naimark-tétel és Sinclair tétele alapján [37] a $(C_0(a), \{..*\}_D|C_0(a))$ J^* -triplet izometrikusan izomorf a maximum-normával és $\{\varphi\psi^*\chi\} = \varphi\bar{\psi}\chi$ szorzattal ellátott $C_0^{(0)}(\Omega_a) := \{\varphi \in C_0(\Omega_a) : \varphi(0) = 0\}$ függvényterrel.

4.4. Definíció. A JB^* -bázisú gyengén kommutatív pozitív hermitikus parciális J^* -tripleket *parciális JB^* -tripleknek* nevezzük. Egy folytonos $\{..*\} : E \times E_0 \times E \rightarrow E$ folytonos művelet *parciális JB^* -hármasszorzat*, ha $E_0 \subset E$ zárt altér és minden $a, b \in E_0$ ill. $x, y \in E$ mellett

- (P1) $\{xa^*y\}$ szimmetrikus bilineáris x, y -ban, konjugált-lineáris a -ban,
- (P2) $ia \square a^* \in \text{Der}(E, \{..*\})$,
- (P3) $\{\{xa^*x\}b^*x\} = \{xa^*\{xb^*x\}\}$;
- (P4) $\{aa^*a\} \in E_0$ és $\|\{aa^*a\}\| = \|a\|^3$,
- (P5) $a \square a^* \in \text{Her}(E, \|\cdot\|)_+ := \{A \in \text{Her}(E, \|\cdot\|) : \text{Sp}(A) \geq 0\}$.

Az a változó szerinti polarizációval látható, hogy a (P2) axióma ekvivalens a Jordan-azonossággal. A (P5)-beli $\text{Her}(E, \|\cdot\|)_+$ operátor-család leírható az $A \in \text{Her}(E, \|\cdot\|)_+ \iff \|\exp(\zeta A)\| \leq 1$ ($\text{Re}(\zeta) \leq 0$) norma-bebecsléssel is.

4.5. Tétel. ([80]Thm.6.2). *Lineáris Banach-tér izomorfia erejéig a geometriai parciális J^* -triplek azonosak a parciális JB^* -triplekkel:*

- (i) *a geometriai parciális J^* -triplek pozitívak;*
- (ii) *minden $(E, E_0, \{..*\})$ parciális JB^* -triplethez található olyan korlátos 0-környet E -ben, hogy bármely abban található, és az $\exp(ia \square a^*)$ ($a \in E_0$) operátorokra invariáns körszerű B tartomány esetén a*

$$D := \bigcup_{c \in E_0} [\exp((c - \{xc^*x\})\partial/\partial x)](B) \quad (4.6)$$

*alakzat olyan korlátos körszerű tartomány, amelyre $[c - \{xc^*x\}]\partial/\partial x \in \text{aut}(D)$ minden $c \in E_0$ vektor mellett.*

A 4.5 Tétel véges-dimenziókban is új. Az (ii)-beli konstrukció alapján sejtethető, hogy a parciális JB^* -triplek és az $(E, E_D, \{..*\}_D)$ alakú parciális J^* -triplek kategóriája egybeesik. Az (i) állítás bizonyításában a fő eszköz a következő technikai proposíció, amelynek segítségével a (4.3) spektrálbecslésre is új, Jordan-elméletileg nagyon egyszerű bizonyítást adhatunk.

4.7. Propozíció. ([79]Prop.2.3). *Legyen $(E, E_0, \{..*\})$ geometriai parciális J^* -triplek, $\mathcal{U}$ pedig egy nem-triviális ultrafilter $\mathbb{N}$ -en. Ekkor az $(E^{\mathcal{U}}, E_0^{\mathcal{U}}, \{..*\}^{\mathcal{U}})$ ultrahatvány is geometriai parciális J^* -triplek. Bármely $a \in E_0$, $\lambda \in \text{Sp}(a \square a^*)$ párhoz létezik olyan $0 \neq \tilde{x} \in E^{\mathcal{U}}$ ultravektor és olyan korlátos változású komplex μ Radon mérték Ω_a fölött, amelyekkel*

$$\lambda_0 = \int \omega d\mu(\omega), \quad \{T(\varphi)T(\psi)^*\tilde{x}\} = \int \varphi \bar{\psi} d\mu \cdot \tilde{x} \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0(\Omega_a)).$$

5.fejezet [81, 83]. Parciális JB*-tripletek belső derivációinak kiterjeszthetősége a bázis-térről

Legyen $\mathbf{E} := (E, E_0, \{..*\})$ egy tetszőlegesen rögzített parciális JB*-triplet, és jelölje $\mathbf{E}_0 := (E_0, \{..*\} | E_0^3)$ ennek a bázisát. A 4.4(P2) axióma szerint az $ia \square a^*$ ($a \in E_0$) operátor derivációi $\mathbf{E}$ -nek, ezek véges valós-lineáris kombináció alkotják a *belső derivációk* $\text{Der}_0(\mathbf{E})$ családját.

A [80] munkám egyik motivációját adva, 1990-ben Panou [70] pontosan leírta algebrailag azokat a $(\mathbb{C}^K \times \mathbb{C}^M, \mathbb{C}^K \times \{0\}, \{..*\})$ parciális J*-tripleteket, amelyeknél az $Z_a = (a - \{za^*z\})\partial/\partial z$ ($a \in \mathbb{C}^K \times \{0\}$) vektormetódok teljesek valamely korlátos, és az $(x, y) \mapsto (e^{i\tau}x, e^{i\vartheta}y) \in D$ ($\tau, \vartheta \in \mathbb{R}$) forgatásokra invariáns ún. *bicirkuláris* D tartományban. Fő eszköze a következő észrevétel volt: ha $\dim(E) < \infty$, akkor $\mathbf{E}_0$ belső derivációja egyértelműen kiterjeszthető $\mathbf{E}$ -nek egy belső derivációjává. A Levi–Malcev-felbontást használó bizonyítása azonban az $\exp(\text{Der}_0(\mathbf{E}))$ lineáris automorfizmus-család $\mathcal{K}$ norma-lezártjának kompaktságán, alapult. Ehhez a $\dim(E) < \infty$ feltevés elengedhetetlen, $\mathcal{K}$ lehet nem-kompakt akár a $\dim(E_0) < \infty \leq \dim(E)$ esetben is. E fejezetben Panou eredményeit elemi JB*-triplet bázisú parciális JB*-tripletekre ill. általános testek fölötti véges-dimenziós bázisú Jordan-tripleteke általánosítjuk.

5.1. Definíció. Az $\mathbf{E} := (E, E_0, \{*\})$ parciális J*-triplet rendelkezik a *belső derivációk egyértelmű kiterjesztési* tulajdonságával (rövidítés: *BDEK*), ha mindegyik $\Delta_0 \in \text{Der}_0(\mathbf{E}_0)$ E_0 -on értelmezett operátorhoz pontosan egy olyan $\Delta \in \text{Der}_0(\mathbf{E})$ deriváció van, amelyre $\Delta_0 = \Delta|_{E_0}$.

5.2. Propozíció. ([81]Prop.2.3). *Tegyük fel, hogy az $\mathbf{E}$ parciális J*-triplez E_0 bázisa véges-dimenziós dimenziós Cartan-faktor. Ekkor $\mathbf{E}$ BDEK tulajdonságú. A $\mathcal{D} := \text{Span}_{\mathbb{C}} E_0 \square E_0^*$ komplex Lie-operátoralgebra $\mathcal{Z}$ centruma 1-dimenziós. A $P: \sum_j \lambda_j e_j \square e_j^* \mapsto \sum_j \lambda_j Z$ ($\lambda_j \in \mathbb{C}, e_j \in E_0$ minimális tripotensek) leképezés jól-definiált kontraktív $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Z}$ projekció, amelyre $\mathcal{Z} = \mathbb{C}Z$, ahol $Z := \int_{\text{Aut}(\mathbf{E}_0)} (Ue) \square (Ue)^* dU$ tetszőleges $\mathbf{E}$ -beli minimális e tripotens mellett.*

Norma-bebecslésekkel az eredmény kiterjeszthető a Bunce és Chu [12] által bevezetett *elemi JB*-tripletekig*, amelyek a Cartan-faktorok legszűkebb végtelen-dimenziós analogonjai: izometrikus kópiái a Hilbert terekbeli kompakt-, kompakt szimmetrikus- ill. kompakt antiszimmetrikus operátok $c_0(H, K)$, $c_0^{(B, \pm)}(H)$ (valamely Bortonormált bázis szerinti) természetes JB*-tripleteinek, továbbá a komplex spin-faktorok ill. a Neumann–Wigner–Jordan-féle 18 ill. 27-dimenziós kivételes J-algebrák tripletjeinek.

5.3. Tétel. *Az olyan parciális J^* -tripletek, amelyeknek a bázisa elemi JB^* -tripletek c_0 -direkt összegével izomorf, rendelkeznek a BDEK tulajdonsággal.*

A fejezet második részében alternatív, topológia-mentes megközelítést adjuk a BDEK tulajdonságnak. Legyen $\mathbb{K}$ egy 0-karakterisztikájú konjugációs test. A $\mathbb{K}$ -fölötti vektorterek a komplex esethez hasonlóan a $\{..*\}$ művelet konjugált-linearitásával a belső változóban, és a (J) Jordan-azonosság megkövetelésével definiálhatjuk a parciális J^* -tripleteket. Technikai eszközük a 8. fejezetben a komplex esetre részletesen tárgyalt alábbi fogalom.

5.4. Definíció. Legyen $\mathbf{F} := (F, F_0, \{..*\})$ $\mathbb{K}$ -fölötti parciális J^* -triplet, X egy $\text{Re } \mathbb{K} := \{\xi \in \mathbb{K} : \xi = \bar{\xi}\}$ -fölötti vektortér, ahol $\emptyset \neq W \subset X$. A $G := \{g_w : w \in W\} \subset F_0$ halmaz *súlyozott grid* $\mathbf{F}$ -ben (a W súly-alakzattal), ha lineárisan független, és (a $z \notin W$ esetén $g_z := 0$ konvencióval)

$$\{g_u g_v^* g_w\} \in \mathbb{K} g_{u-v+w} \quad (u, v, w \in W).$$

A Disszertáció A.2 függeléke önálló bevezetés a témakörbe. Tipikus példa: az egyetlen helyen nem-zéró együtthatójú $N \times N$ -es $u_{k\ell} := [\delta_{ik} \delta_{j\ell}]_{i,j=1}^N$ mátrixok családja a $g_{(e_k, e_\ell)} := u_{k\ell}$ indexeléssel az $e_k := [\delta_{ik}]_{i=1}^N$ egységvektorok mellett.

5.5. Tétel. [83]. *Legyen $(F, F_0, \{..*\})$ olyan $\mathbb{K}$ -fölötti parciális J^* -triplet, amelynél $F_0 = \text{Span}(G)$ egy véges, nem-nül elemekből álló $G := \{g_w : w \in W\}$ súlyozott griddel. Ekkor a $\sum_{u,v \in W} \gamma_{uv} g_u \square g_v^* \mapsto \sum_{u,v \in W} \gamma_{uv} g_u \square g_v^*|_{F_0}$ megszorítás injektív.*

6.fejezet [85]. Banach–Stone-típusú tétel folytonos Reinhardt-tartományokra

A klasszikus Banach–Stone-tétel szerint lokálisan kompakt $\Omega, \tilde{\Omega}$ terek esetén bármely szürjektív $U : \mathcal{C}_0(\tilde{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\Omega)$ izometria a $\|f\|_\infty = \max |f|$ normák szerint $Uf(\omega) = u(\omega)f(T\omega)$, $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ alakú valamely $T : \Omega \leftrightarrow \tilde{\Omega}$ homeomorfizmussal és $u : \Omega \rightarrow \mathbb{T} = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$ függvénnyel. Ezt általánosítjuk először a pontonként rendezés szerinti Banach–háló-normákra:

6.1. Tétel. ([85]Thm.1.1). *Legyen $\|\cdot\|$ komplex háló-norma a $\mathcal{C}_0(\Omega)$ téren. Ekkor van (pontosan egy) olyan Π véges halmazokra való partíciója az Ω térnek, amelynél akkor és csak akkor áll $\eta, \omega \in S$ valamely $S \in \Pi$ tagra, ha $[\exp(iA)f](\omega) = \lambda_{\omega, \eta} f(\omega)$ ($f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$) valamely $\|\cdot\|$ -hermitikus A operátor*

és $\lambda_{\omega,\eta}$ konstans mellett. Bármely $\|\cdot\|$ -hermitikus operátor megszorítottjai a Π -beli halmazokra

$$Af|_S = \mathbf{a}^A(S) [f|_S] \quad (f \in \mathcal{C}_0(\Omega), S \in \Pi)$$

alakban írhatók alkalmas (egyértelműen meghatározott) $\mathbf{a}^A(S) : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S)$ lineáris leképezésekkel. Mindegyik $S \in \Pi$ partíció-taghoz található (pontosan egy) olyan $\langle \cdot | \cdot \rangle_S$ belső szorzat a véges-dimenziós $\mathcal{C}(S)$ függvénytéren, amelyre

$$\{f|_S : \|f\| \leq 1\} = \{\varphi \in \mathcal{C}(S) : \langle \varphi | \varphi \rangle_S \leq 1\} \quad (S \in \Pi).$$

6.2. Tétel. ([85]Thm.1.4). Legyen $U : \mathcal{C}_0(\tilde{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\Omega)$ egy szürjektív lineáris izomorfia a $\|\cdot\|, \|\cdot\|$ háló-normák szerint. Jelölje $\Pi, [\langle \cdot | \cdot \rangle_S : S \in \Pi]$ ill. $\tilde{\Pi}, [\langle \cdot | \cdot \rangle_Z : Z \in \tilde{\Pi}]$ az ezekhez a normákhoz a 6.1 Tétel szerint szerkesztett partíciókat és belső szorzatokat. Ekkor található olyan $T : \Pi \leftrightarrow \tilde{\Pi}$ bijekció, továbbá vannak olyan $\mathbf{u}(S) : \mathcal{C}(T(S)) \rightarrow \mathcal{C}(S)$ ($S \in \Pi$) szürjektív lineáris $\langle \cdot | \cdot \rangle_{T(S)} \rightarrow \langle \cdot | \cdot \rangle_S$ unitér operátorok, hogy $\#S = \#T(S)$ ($S \in \Pi$) az elemszámokra, továbbá

$$U\tilde{f}|_S = \mathbf{u}(S) \tilde{f}|_{T(S)} \quad (\tilde{f} \in \mathcal{C}_0(\tilde{\Omega}), S \in \Pi).$$

Bár széles irodalom érint hasonló témát [1, 2, 20, 21, 46], úgy tűnik a bennük szereplő szokásos háló-ortogonalitási megfontolásokon mindenképp túl kell lépni e tételek bizonyításához. Ezek során becsléseket is kapunk a Π partícióbeli elemek maximális számára ill. a $\langle \cdot | \cdot \rangle_S$ belső szorzatokkal kapcsolatban a $\|\cdot\|, \|\cdot\|_\infty$ normák hányadosainak terminusain. A következőkben ezeket az eredményeket általánosított Reinhardt-tartományokra alkalmazzuk. A $\mathbb{C}^N$ -beli klasszikus Reinhardt-tartományok nem mások, mint az 1-abszolútértékű koordináta-szorításokra invariáns összefüggő nyitott 0-környezetek.

6.3. Definíció. Az E Banach-háló D tartománya *Reinhardt-tulajdonságú*, ha

$$(CR) \quad 0 \in D \text{ és } [f \in D, g \in E, |g| = |f|] \Rightarrow g \in D.$$

A $\mathcal{C}_0(\Omega)$ terek korlátos Reinhardt-tulajdonságú tartományait nevezzük *folytonos Reinhardt-tartományoknak* (rövidítés: *FRT*).

1974-ben Sunada a [96, 97] cikkeiben megállapította, hogy a holomorfia-ekvivalens korlátos $\mathbb{C}^N$ -beli Reinhardt-tartományok pozitív lineáris ($\mathbb{R}_+^N$ -ot megőrző) transzformációval is egymásba vihetők. Hamarosan több sorozat-térbeli Reinhardt-tartomány fogalom jelent meg az irodalomban [20, 46, 78, 107, 2, 1] amelyek mindegyikénél a holomorfia-ekvivalencia maga után vonta

a pozitív-lineáris ekvivalenciát. Ennek oka mindannyiszor az volt, hogy a lineáris ekvivalenciák adjungáltjai, amelyeket holomofia-ekvivalencia esetén már a Kaup–Upmeyer-tétel [53] automatikusan garantál, valamely, a 6.2 tételbeli $\mathcal{C}(S)$ ($S \in \Pi$) terekkel analóg szerepű Hilbert-ideálokat megtartják. Egy összefüggőséget is megengedő topológia az FRT-ok Ω alaptereinél a sorozat-térbeli helyzeteknél érdekesebb lehetőségeket ad, mint arra Vigué [109] 1998-ban egy komplex körlapok folytonos szorzatairól egy szimmetriaparadoxonnal rámutatott. Az általános FRT-ok a topogikus szorzatoknál jóval bonyolultabb struktúrájúak lehetnek. Egy Möbius-szalagszerű teret alapul véve konstrutív bizonyítást adunk a következőre.

6.4. Tétel. ([85]Thm.1.8). *Vannak olyan lineárisan izomorf komplex FRT-k, amelyek pozitív (sőt valósrésztartó) izomorfizmussal nem vihetők egymásba.*

7.fejezet [86, 93, 42]. Folytonos Reinhardt-tartományok parciális JB^* -tripletjeinek szerkezete

Fő céljaink ebben a fejezetben: (1) az FRT-k közötti holomorf ekvivalenciák teljes leírása; (2) a biduális beágyazással és a BDEK tulajdonsággal kapcsolatos I.3.2 ill. I.3.5-ben ismertetett sejtések tesztelése FRT-ken.

Ad (1). Első lépésként integrálformulát adunk a FRT-k J^* -tripletjeinek hármasszorzatára, majd ezt továbbfinomítjuk a Banach–Stone-típusú tételeink segítségével. Kiderül, hogy egy FRT szimmetrikus része (amely maga is FRT), véges-dimenziós euklideszi gömbök új-típusú folytonos keveréke, amely általában jóval bonyolultabb, mint a topologikus szorzat. Másrészt pontos mátrix-leírást kapunk az FRT-k közötti lineáris izomorfizmusokra.

Ad (2). Az FRT-k J^* -tripletjeinek BDEK tulajdonsága azonnal következik a hármasszorzat (1)-ben említett leírásából, amely pontos normabecslésekre is lehetőséget ad. Egy $\mathcal{C}_0(\Omega)$ -beli FRT parciális J^* -tripletjének biduális beágyazottja természetes módon azonosítható egy kompakt $\tilde{\Omega}$ hiper-Stone tér folytonos függvényein definiált $\tilde{\mathbf{E}}$ parciális J^* -tripletnek. Itt hármasszorzat változónkénti gyenge*-folytonosságát az (1)-beli finomított integrálformulánk diszkussziója biztosítja. Az $\tilde{\mathbf{E}}$ triplet geometriai voltát a 4.5 Tétellel mutatjuk meg, verifikálva a (P1-5) axiómákat. A 4.5(ii)-beli konstrukcióból az is kiderül, hogy $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_{\tilde{D}}$ alakú alkalmas (általában nem egyértelműen meghatározott) $\tilde{D} \subset \mathcal{C}(\tilde{\Omega})$ -beli FRT-vel.

7.1. Tétel. ([86]Thm.3.5). *Legyen E a $\mathcal{C}_0(\Omega)$ függvénytér egy Banach-hálmó-normával, és tegyük fel, hogy $\mathbf{E} = (E, E_0, \{\dots\})$ olyan parciális JB^* -triplet,*

amely rendelkezik a következő Reinhardt-tulajdonsággal:

$$(R) \quad \Psi \subset \text{Aut}(\mathbf{E}) \quad \text{where} \quad \Psi := \{\psi \cdot : \psi \in \mathcal{C}(\Omega), |\psi| = 1\}.$$

Ekkor létezik olyan $D \subset E$ FRT, és van olyan nyitott $\Omega_0 \subset \Omega$ halmaz, amelyek mellett $\mathbf{E}$ altripletje $\mathbf{E}_D := (E, E_D, \{..*\}_D)$ -nek, és $E_0 = \{f \in E : f(\Omega \setminus \Omega_0) = 0\}$. Minden $\omega \in \Omega$ pont egyértelműen meghatároz egy olyan Ω_0 fölötti μ_ω pozitív Radon-mértéket, amelyre $\mu_\omega(\Omega_0) \leq M := \sup_{0 \leq x, a, y \leq 1} \max\{xay\}$ és

$$\{xa^*y\}(\omega) = \frac{1}{2}x(\omega) \int \bar{a}y \, d\mu_\omega + \frac{1}{2}y(\omega) \int \bar{a}x \, d\mu_\omega \quad (x, y \in E, a \in E_0). \quad (7.2)$$

A Banach–Stone-típusú tételeinkkel a következőképpen finomíthatjuk a 7.2 reprezentációt a tér szimmetrikus részén:

7.3. Tétel. ([93]Thm.3). *Létezik olyan Π partíció Ω -n, továbbá van olyan $\Pi_0 \subset \Pi$ részpartíció ill. $m : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény, amelyekkel*

- (i) $0 < \inf m \leq \sup m < \infty$, $\Omega_0 = \bigcup \Pi_0$, és $\sup\{\#S : S \in \Pi_0\}$;
- (ii) $\mu_\omega = \sum_{\eta \in \Pi_0(\omega)} m(\eta) \delta_\eta \quad (\omega \in \Omega_0)^1$;
- (iii) $x|_S = 0 \Rightarrow Ax|_S = 0$, és a $\langle \varphi | \psi \rangle_S := \sum_{\omega \in S} m(\omega) \varphi(\omega) \overline{\psi(\omega)}$ skalár-szorzatokkal
 $\langle [Ax|_S] \mid [x|_S] \rangle_S \in \mathbb{R} \quad (x \in E, S \in \Pi, A \in \text{Her}(E, \|\cdot\|)).$

7.4. Definíció. A $(\tilde{\Pi}, \tilde{m})$ párt, ahol $\tilde{m} : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\tilde{\Pi}$ pedig Ω_0 -nak egy partíciója, megengedettnek mondjuk, ha a

$$D_0(\tilde{\Pi}_0, \tilde{m}) := \left\{ f \in \mathcal{C}_0(\Omega_0) : \sup_{\omega \in \Omega_0} \sum_{\eta \in \tilde{\Pi}_0(\omega)} \tilde{m}(\eta) |f(\eta)|^2 < 1 \right\} \quad (7.5)$$

alakzat szimmetrikus $\mathcal{C}_0(\Omega_0)$ -beli FRT. A továbbiakban $\Omega_0 \cup \{\infty\}$ az Ω_0 tér egy-pontos kompaktifikáltja, $\mathcal{K}(\Omega_0 \cup \{\infty\})$ pedig az $\Omega_0 \cup \{\infty\}$ -beli kompakt halmazok családja, amelyet a $\mathcal{H}$ Hausdorff topológiával látunk el.²

7.6. Tétel. ([42]Thm.1.2). *Tegyük fel, hogy (Π_0, m) megengedett pár.*

Ekkor az $\mathcal{S} := \{S \cup \{\infty\} : S \in \Pi_0 \cup \{\emptyset\}\}$ halmazcsaládra a következők állnak:

- (i) *az $\mathcal{S}$ halmaz $\mathcal{H}$ -kompakt;*
- (ii) *bármely $\mathcal{S}$ -beli $\mathcal{H}$ -konvergens $S_j \rightarrow S_0 \neq \{\infty\}$ hálózhoz van olyan Ω_0 -ban konvergáló $\omega_j \rightarrow \omega_0$ háló, hogy $S_j = \Pi_0(\omega_j)$ minden indexre;*
- (iii) *az $A^*f(S) := \sum_{\omega \in S} m(\omega) |f(\omega)|^2$ ($S \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$) függvények mind folytonosak.*

¹ $\Pi_0(\omega) := [S \in \Pi_0 : \omega \in S]$ jelöli az ω pontot tartalmazó (egyedüli) Π_0 -beli halmazt.

² Azaz egy $K \in \mathcal{K}(\Omega_0 \cup \{\infty\})$ halmaznak $\mathcal{H}$ -környezete az $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}(\Omega_0 \cup \{\infty\})$ halmazcsalád, ha K valamely véges nyitott $\{U_1, \dots, U_N\}$ $\Omega \cup \{\infty\}$ -beli lefedése mellett $\mathcal{U} \subset \{S \subset \Omega_0 \cup \{\infty\} : S \subset \bigcup_{k=1}^N U_k, U_k \cap S \neq \emptyset (k=1, \dots, N)\}$.

Ettől kezdve Π_0 Ω_0 -nak egy tetszőlegesen rögzített véges halmazokra való partíciója, m egy $\Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, és feltesszük, hogy $\mathbf{E} = (E, E_0, \{..*\})$ olyan parciális J^* -triplet, ahol $E = \mathcal{C}_0(\Omega)$, $E_0 = \{a \in E : a(\Omega \setminus \Omega_0) = 0\}$, a hármasszorzat pedig (7.2) alakú, és

$$\mu_\omega = \sum_{\eta \in \Pi_0(\omega)} m(\eta) \delta_\eta \quad (\omega \in \Omega_0), \quad 0 < \inf m \leq \sup_{\omega \in \Omega_0} \sum_{\eta \in \Pi_0(\omega)} m(\eta) < \infty. \quad (7.7)$$

7.8. Tétel. ([86]Thm.4.2). *Legyen $\mathbf{F} = (F, F_0, \{..*\})$ olyan gyengén kommutatív parciális J^* -triplet, amelynél $F = \mathcal{C}_0(\Omega)$, $F_0 = \{f \in F : f(\Omega \setminus \Omega_0) = 0\}$, a szorzat pedig (7.2) alakú. Ha a μ_ω ($\omega \in \Omega$) mértékek mind pozitívak és (7.7) áll, akkor $\mathbf{F}$ altriplete valamely FRT kanonikus parciális JB^* -tripletének.*

A kapott struktúratételek már elegendők a BDEK tulajdonság norma-bebecsléseket is adó bizonyításához.

7.9. Tétel. ([86]Thm.4.3). *Az $E := \mathcal{C}_0(\Omega)$ téren legyen $\mathbf{E} = (E, E_0, \{..*\})$ olyan parciális JB^* -triplet, amelyre $\{\psi : \psi \in \mathcal{C}(\Omega), |\psi| = 1\} \subset \text{Aut}(\mathbf{E})$. Ekkor van olyan $M < \infty$ konstans, hogy $\|\Delta\| \leq M\|\Delta|E_0\|$ teljesül $\mathbf{E}$ minden Δ belső derivációjára.*

A biduális beágyazási probléma teljes megválaszolásához az FRT-kontextusban szükség van a $\{aa^*y\} | \Omega \setminus \Omega_0$ részek pontosabb leírására is.

7.10. Definíció. Jelölje Ω_0/Π_0 az $\widetilde{\Omega_0} := \{P \cup \{\infty\} : P \in \Pi_0\}$ tér Hausdorff-topológiájából örökölt topológiát Π_0 -on. Legyen (Π_0, m) megengedett pár, $\omega \mapsto \kappa_\omega$ pedig egy nem-negatív mérték értékű $\Omega \rightarrow \mathcal{M}(\Omega/\Pi_0) := \{\text{Borel függvények } \Omega/\Pi_0 \rightarrow \mathbb{C}\}$ leképezés. Ekkor

$$\mathbf{E}(\Omega, \Omega_0, m, \Pi, \kappa) := (\mathcal{C}_0(\Omega), \{f \in \mathcal{C}_0(\Omega) : f(\Omega \setminus \Omega_0) = 0\}, \{..*\})$$

fogja jelölni azt a hármasszorzatú struktúrát, amelynél a $\{..*\}$ szorzat az

$$\{xa^*x\}(\omega) = x(\omega) \int_{S \in \Pi_0} \sum_{\zeta \in S} m(\zeta) \overline{a(\zeta)} x(\zeta) d\kappa_\omega(S) \quad (7.11)$$

forma polarizáltja a külső változóknál. Az $(\Omega, \Omega_0, m, \Pi_0, \kappa)$ négyest *megengedettnek* mondjuk, ha az $\omega \mapsto \kappa_\omega$ leképezés gyengén folytonos³, és fennáll $\kappa_\omega = \delta_{\Pi_0(\omega)}$ (ahol $\Pi_0(\omega) := [S \in \Pi_0 : \omega \in S]$) valahányszor $\omega \in \Omega_0$.

³ Azaz $\omega \mapsto \int_{S \in \Pi_0} \phi(S) d\kappa_\omega(S)$ folytonos minden rögzített $\phi \in \mathcal{C}_0(\Omega/\Pi_0)$ mellett.

7.12. Tétel. ([86]Thm.6.6). *Legyen Ω lokálisan kompakt Hausdorff-tér, $\emptyset \neq \Omega_0 \subset \Omega$ nyitott halmaz. Az $(E, E_0, \{..*\})$ struktúra, ahol $E := \mathcal{C}_0(\Omega)$ és $E_0 := \{f \in E : f(\Omega \setminus \Omega_0) = 0\}$ pontosan akkor altripletje valamely E -beli FRT kanonikus parciális JB^* -tripletének, ha megadható $\mathbf{E}(\Omega, \Omega_0, m, \Pi_0, \kappa)$ alakban valamely megengedett $(\Omega, \Omega_0, m, \Pi_0, \kappa)$ négyessel. Bármely nem-üres szimmetrikus részű FRT kanonikus JB^* -triple $\mathbf{E}(\Omega, \Omega_0, m, \Pi_0, \kappa)$ alakú.*

Az $(E, E_0, \{..*\}) := \mathbf{E}(\Omega, \Omega_0, m, \Pi_0, \kappa)$ parciális JB^* -triplet bidulizálásához tekintsük a spektrál-normával ellátott $E := \mathcal{C}_0(\Omega)$ kommutatív C^* -algebrát az $\mathbf{E} := E'' \equiv \mathcal{C}(\Omega)$ tér gyenge*-sűrű altereként, ahol Ω a $E \rightarrow \mathbb{C}$ állapotok szokásos kompakt hiper-Stone tere.

7.13. Tétel. *Legyen D korlátos Reinhardt-tartomány az $E := \mathcal{C}_0(\Omega)$ térben. Ekkor található olyan $\mathbf{E} := E'' \equiv \mathcal{C}(\Omega)$ -beli $\mathbf{D}$ korlátos Reinhardt-tartomány, amelynél az $(E, E_D, \{..*\}_D)$ parciális JB^* -triplet altriplete $\mathbf{E}, \mathbf{E}_D, \{..*\}_{\mathbf{D}}$ -nek, $\mathbf{E}_D$ nem más, mint E gyenge*-lezártja $\mathbf{E}$ -ben, a $\{..*\}_{\mathbf{D}}$ szorzat pedig $\{..*\}_D$ változónkénti gyenge*-folytonos kiterjesztettje.*

8.fejezet [89]. Súlyozott komplex gridek

A gridek analóg koordinatizáló szerepet játszanak a Jordan-elméletben, mint az egyetlen 1-es nem-zéró együtthatójú mátrixok a $\text{Mat}(n, n, \mathbb{C})$ mátrix-algebrában. Egy hosszú fejlődési folyamat [61, 59, 62, 60, 66] utolsó lépéseként Neher [67] a Jordan-grideket tripotensek olyan maximális Peirce-kompatibilis $\{e_i : i \in I\}$ rendszereiként definiálta (ahol $\{e_i e_i^* e_k\} = \frac{1}{2} \pi_{ik} e_k$ valamely $\{0, 1, 2\}$ -beli együtthatójú mátrixszal, az ún. *Peirce mátrixszal*), amelyek *asszociáció-mentesek* ($\pi_{ik} = 2 = \pi_{ki} \iff i = k$), és egy ún. *merevségi feltételt* teljesítenek. Az ilyen típusú gridek teljes, izomorfizmus és asszociáció erejéig való klasszifikációja ismert [67]. A BDEK tualjdonság algebrai vizsgálata során az 5.4 Definícióban bevezettük a (parciális) J^* -tripletbeli *súlyozott grid* fogalmát. Ez magában foglalja a Neher-féle ún. standard grideket, ezen túlmenően azonban nem-triviális módon megenged asszociált elemekből álló végtelen sorozatokat, pozitív- negatív- és nil tripotenseket ($\{ee^*e\} = [\pm e \text{ vagy } 0]$). Egyes nem $\mathbb{C}$ -fölötti testek J^* -tripletjeiben vannak előjeles tripotensekből állóvá nem átskálázható súlyozott gridek is, szemben a fejezetben tárgyalt komplex esettel. Ismereteink szerint a klasszikus grid-elméletben előjeles tripotensek csak a Hilbert-tripletek kontextusában jelentek meg [67]p.147, ott azonban a pozitív és a negatív tripotensek triviális módon ideálokat generálva különülnek el. A fejezet egyik fő célja a nem-nil komplex súlyozott gridekbeli lehetséges előjel-mintázatok kapcsolatbahozása a súlyalakzat geometriájával, amely a félig-egyszerű esetben pl. a Lorenz-tripleteknél különösen látványos

eredményt hoz. Kiterjesztjük a nem-nil COG-alapalakzatok Neher-féle [68]2.1 elméletét előjelváltó és asszociált párokat is megengedve. A disszertációt a klasszikus grid-elméleten túli első befejezett lépésként a $\mathbb{Z}^2$ -súlyalakzatú nem-nil komplex súlyozott gridek osztályozásával zárjuk. Már ez az eredmény is végtelen sok páronként nem-izomorf új struktúrához vezet, sőt ezekből határátmenettel olyan nem-triviális komplex J^* -tripletre is példát kapunk, amelyet nil tripotensek generálnak (ld. [Dissz.]8.5.15-16 ill. [89]Rem.6.15-16).

8.1. Definíció. Innentől csak *komplex* J^* -tripleteket tekintünk. Az $E, \{..*\}$ triplet J^* -derivációinak családja $Der_*(E, \{..*\}) := \{D \in L(E) : D\{xy^*z\} \equiv \equiv \{(Dx)y^*z\} - \{x(Dy)^*z\} + \{xy^*(Dz)\}\}$. Ha V egy vektortér és $\mathcal{A} \subset L(V) \neq \emptyset$, tetszőleges $w : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mellett $V_w := \{x \in V : Ax = w(A)x \ (A \in \mathcal{A})\}$ az $\mathcal{A}$ operátorcsalád w -szerinti közös sajátvektorainak altere, $\mathcal{A}$ súly-alakzata pedig a $W(\mathcal{A}) := \{w : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : V_w \neq 0\}$ halmaz. Egy $\mathcal{D} \subset Der_*(E)$ halmazt M -családnak mondunk, ha $a \square a^* \in \mathcal{D}$ valahányszor $a \in E$ és $\mathcal{D}a \subset \mathbb{R}a$. Egy $0 \neq e \in E$ elem pozitív [negatív, nil] tripotens, $\{ee^*e\} = e$ [ill. $-e, 0$]. A $\text{sgn}(e) := [\varepsilon : \{ee^*e\} = \varepsilon e]$ számot nevezzük az e tripotens előjelének.

8.2. Tétel. ([89]Thm.2.5). Egy $\mathcal{D} \subset Der_*(E)$ M -család. E_w ($w \in W(\mathcal{D})$) súly-terei 1-dimenziós vagy nil altripletek. Ha ezek mind 1-dimenziósok, akkor az $E(W(\mathcal{D})) := \text{Span}(W(\mathcal{D}))$ altér zárt a hármasszorozásra, és tetszőleges olyan $G = \{g_w : w \in W(\mathcal{D})\}$ rendszer, amelynél $g_w \in E_w$ ($w \in W(\mathcal{D})$), előjeles tripotensek nem-zéró többszöröseiből álló súlyozott grid E -ben.

A fordított irányban a következő áll:

8.3. Tétel. ([89]Thm.2.10). Legyen G olyan nem-nil tripotensekből álló család, amelynél $\mathbb{C}G$ zárt a hármasszorozásra. Ekkor G pontosan akkor látható el súlyozott grid-struktúrával, ha az $F := \text{Span}(G)$ altripletet véve,

$$\mathcal{D}_G := \{D \in Der_*(F) : Dg_w \in \mathbb{R}g_w \ (w \in W)\}$$

maximális kommutatív család $Der_*(F)$ -ben. Ha $G = \{g_w : w \in W\}$ súlyozott grid, akkor a W súlyalakzat szükségképpen lineáris képe $W(\mathcal{D}_G)$ -nek. W pontosan akkor izomorf lineárisan $W(\mathcal{D}_G)$ -vel, ha bármely $D \in \mathcal{D}_G$ J^* -deriváció $Dg_w = \phi(w)g_w$ ($w \in W$) alakú valamely $\phi : \text{Span}_{\mathbb{R}}W \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionállal.

8.4. Definíció. Innentől feltesszük (az általánosság megszorítása nélkül), hogy az összes tárgyalt súlyozott gridek előjeles tripotenskből állnak. A $\{\pm 1\}$ -tripotensekből álló súlyozott grideket röviden *nem-nil súlyozott grideknek* nevezzük, az általuk kifeszített J^* -tripleteket pedig röviden grid-tripleteknek. A $G = \{g_w : w \in W\}$ súlyozott grid W súlyalakzata *nem-degenerált*, ha

minden $D \in \mathcal{D}_G(:= \{D \in \text{Der}_*(\text{Span}_{\mathbb{C}}G) : Dg_w \in \mathbb{R}g_w \ (w \in W)\})$ J^* -derivációhoz található olyan $\phi : \text{Span}_{\mathbb{R}}W \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amellyel $Dg_w = \phi(w)g_w \ (w \in W)$. A $\{h_w : w \in W\}$ ill. $\{g_w : w \in W\}$ nem-nil súlyozott gridek *ekvivalensek*, ha $h_w \in \mathbb{T}g_w \ (w \in W)$.

8.5. Példa. ([89]Ex.2.13). Az $(E, \{..*\})$ J^* -tripletet S -vágású *Lorenz-tripletnek* nevezzük, ha E Hilbert tér, amelynek $\langle .|. \rangle$ skalár-szorzására nézve S olyan ortogonális tükrözés ($S = S^*$, $S^2 = 1$), hogy a sajátaltereiben levő $e \neq 0$ elemekre $e^3 (= \{ee^*e\}) \neq 0$ és $e \square e^*$ nem-negatív operátor a $\langle x|y \rangle^S := \langle Sx|y \rangle$ indefinit skalár-szorzat szerint ($\langle S(e \square e^*)x|x \rangle \geq 0$, ha $Se = \pm e$ és $x \in E$).

Véges-dimenziós Lorenz-tripletben mindig van olyan bázis, amely a vágás sajátaltereiben páronként merőleges $\{\pm 1\}$ -tripotensekből álló súlyozott grid.

Megmutatjuk, hogyan vezethető vissza egy előjeles nem-nil súlyozott griden a hármas-szorzat egy pozitív tripotensek által kifeszített J^* -triplet szorzatára.

8.6. Definíció. Legyen S az $(E, \{..*\})$ triplet involutív automorfizmusa. A

$$\{xy^*z\}_S := \{x(Sy)^*z\} \quad (x, y, z \in F)$$

műveletet az $\{..*\}$ szorzat S -szerinti *előjel-transzformációjának* nevezzük. Azonnal adódik, hogy egy $S : E \rightarrow E$ lineáris operátor, amelyre $Sg_w = \varepsilon_w g_w$, $\varepsilon_w \in \{\pm 1\} \ (w \in W)$, pontosan akkor automorfizmusa of $(E, \{..*\})$ -nek, ha

$$(S) \quad \varepsilon_{u-v+w} = \varepsilon_u \varepsilon_v \varepsilon_w \quad \text{valahányszor} \quad \{g_u g_v^* g_w\} \neq 0 \quad (u, v, w \in W).$$

8.7. Tétel. ([89]Cor.3.5). Legyen $G := \{g_w : w \in W\}$ nem-nil súlyozott gridje $(E, \{..*\})$ -nek, és legyen $\varepsilon : W \rightarrow \{\pm 1\}$. Pontosán akkor található olyan $[..*]$ J^* -szorzat a $\text{Span}(G)$ altripleten, amelynél $[g_u g_v^* g_w] = \varepsilon_v \{g_u g_v^* g_w\}$ ($u, v, w \in W$), ha az (S) előjel-feltétel teljesül. Speciálisan, a $\{..*\}$ J^* -szorzat $\text{Span}(G)$ fölött pontosan akkor előjel-transzformáltja valamely pozitív $[..*]$ J^* -szorzatnak (azaz ahol $\text{sgn}_{[..*]}(g_w) = 1 \ (w \in W)$), ha

$$\prod_{k=1}^4 \text{sgn}(g_{u_k}) = 1 \quad (u_1, u_2, u_3 \in W, u_4 = u_1 - u_2 + u_3, \{g_{u_1} g_{u_2}^* g_{u_3}\} \neq 0).$$

Kiterjesztjük a Neher-féle COG-alapkonfigurációk elméletét ([67]Ch.I,[68]2.5) a nem-nil súlyozott gridek kontextusára előjelváltást és asszociációt is megengedve, ami három új alakzathoz vezet. A Peirce-egyenlet könnyen láthatóan negatív tripotensekre is érvényes, így bármely nem nil $G = \{g_w : w \in W\}$ nem-nil súlyozott grid estén is jól-definiált a *Peirce mátrix* a

$$(g_u \square g_u^*)g_v = \frac{1}{2} \text{sgn}(g_u) \pi_{uv} g_v \quad (u, v \in W)$$

egyenletekkel. A COG-relációk (C~collinear, O~orthogonal, G~governig) is bevezethetők ugyanúgy:

$$\begin{aligned} u \top v, & \quad \text{ha } \pi_{uv} = \pi_{vu} = 1 ; & u \perp v, & \quad \text{ha } \pi_{uv} = \pi_{vu} = 0 ; \\ u \approx v, & \quad \text{ha } \pi_{uv} = \pi_{vu} = 2 ; & u \vdash v, & \quad \text{ha } \pi_{uv} = 2 \text{ és } \pi_{vu} = 1 . \end{aligned}$$

Bármely $u, v \in W$ párra az uRv ($R = \top, \perp, \vdash, \dashv, \approx$) relációk pontosan egyike teljesül ($u \dashv v : \Leftrightarrow v \vdash u$). A Peirce mátrix

$$u^* := [t(\in W) \mapsto \pi_{tu}] \quad (u \in W)$$

oszlopvektorai nem különböztetik meg az $u \approx v$ asszociált párokat.. A Jordan-azonosság szerint pedig

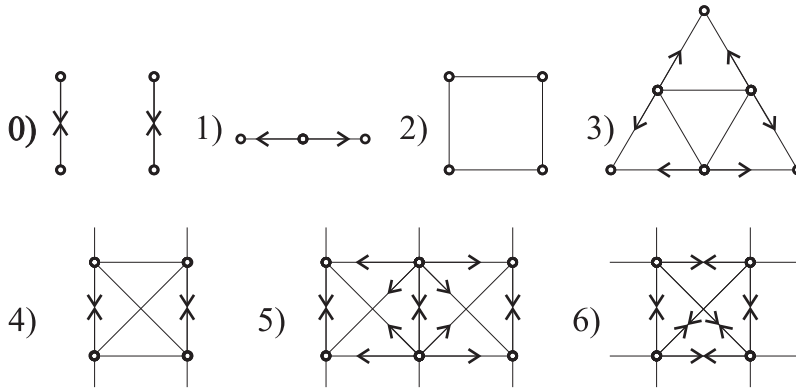
$$(J') \quad u_1^* - u_2^* + u_3^* = (u_1 - u_2 + u_3)^* , \quad \text{ha } u_1, u_2, u_3, u_1 - u_2 + u_3 \in W .$$

8.8. Definíció. A $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in W^4$ négyes *alapkonzfiguráció* a $\{g_w : w \in W\}$ nem-nil súlyozott grid súlyalakzatán, ha $\{u_1 u_2^* u_3\} \neq 0$ és $u_4 = u_1 - u_2 + u_3$.

8.9. Megjegyzés. Neher [68]3.1 terminológiája átvihető a súlyozott gridekre: egy $(w_1, \dots, w_4) \in W^4$ négyes *háromszög* (triangle), ha $w_1 = w_3 \vdash w_2 \dashv w_4 \perp w_1$, *négyszög* (quadrangle), ha $w_1 \top w_2 \top w_3 \perp w_1 \top w_4 \top w_3 \top w_2 \perp w_4$, *gyémánt* (diamond), ha $w_1 \vdash w_2 \dashv w_3 \top w_1 \vdash w_4 \dashv w_3 \vdash w_2 \perp w_4$.

A [67]Ch.I-beli meg gondolásokhoz hasonlóan kapjuk a következőt.

Bármely (esetleg degenerált) W -beli $(w_1, \dots, w_4)$ paralelogramma, amelynél $w_1 - w_2 = w_3 - w_4$ és $w_1^* - w_2^* = w_3^* - w_4^*$, beágyazható W -nek egy olyan részhalmazába, amely affin képe az alábbi alakzatok valamelyikének



ahol az $u, v(\in W)$ pontok között $u \text{ --- } v$ jelentése $u \top v$; $u \text{ --> } v$ jelentése $u \vdash v$; $u \text{ --x-- } v$ jelentése $u \approx v$, és u nincs összekötve v -vel, ha $u \perp v$.

8.10. Propozíció. ([89]Prop.4.4). *Tegyük fel, hogy $(u_1, \dots, u_4)$ olyan alap-konfiguráció, hogy $u_k \not\approx u_\ell$ valamely $k \neq \ell$ párnál. Ekkor $\prod_{k=1}^4 \text{sgn}(g_{u_k}) = 1$.*

8.11. Definíció. A $G := \{g_w : w \in W\}$ súlyozott grid félig-egyszerű, ha páronként nem-asszociált nem-nil tripotensekből áll.

8.12. Tétel. ([89]Thm.5.8). *Legyen $G := \{g_w : w \in W\}$ nem-nil súlyozott grid, $R_1 := \{w^* : w \in W\}$ pedig G Peirce vektorainak a családja. Ekkor ekvivalensek a következő állítások. (i) G félig-egyszerű. (ii) W -ben nincs végtelen számtani sorozat. (iii) Van a $W^* := \text{Span}_{\mathbb{R}} R_1$ tér olyan $\text{Span}_{\mathbb{R}} W$ -re való lineáris L ráképezése, amelynél $w = Lw^*$ ($w \in W$), és található W^* -on olyan $(\cdot | \cdot)$ skalár-szorzat, amely szerint R_1 valamely 3-szintű gyök-rendszer 1-komponense, továbbá $\text{sgn}(g_w) = (-1)^{\Psi(w^*)}$ ($w \in W$) valamely R_1 -en egész értékeket felvevő $\Psi : W^* \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionál mellett.*

A Disszertációt a $\mathbb{Z}^2$ rácson súlyozott nem-nil grid-tripletek teljes osztályozásával zárjuk. A következő rövidítő jelölést használjuk:

$$u \wedge v := \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1, \quad \text{ha } u := (u_1, u_2), \quad v := (v_1, v_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

8.13. Tétel. ([89]Thm.6.14). *Tegyük fel, hogy $(E, \{..*\})$ olyan J^* -triplet, amelyet egy $G := \{g_u : u \in \mathbb{Z}^2\}$ nem-nil súlyozott grid feszít ki. Ha fennáll a $(*) \prod_{k=1}^4 \text{sgn}(g_{u^{(k)}}) = 1$ ($u^{(1)} - u^{(2)} = u^{(3)} - u^{(4)}$) előjel-feltétel, akkor van olyan $G' := \{g'_u : u \in \mathbb{Z}^2\}$, $g'_u \in \mathbb{T}g_u$ ekvivalense G -nek, továbbá van olyan $\omega \in \mathbb{T} \cup \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstans, amelyekkel*

$$\{g'_{z+u} g'^*_{z^*} g'_{z+v}\} = \left[\frac{1}{2} \omega^{u \wedge v} + \frac{1}{2} \omega^{-u \wedge v} \right] \text{sgn}(g'_z) g'_{z+u+v} \quad (z, u, v \in \mathbb{Z}^2).$$

Ha $()$ nem teljesül, akkor található olyan $G'' := \{g''_{pq} : p, q \in \mathbb{Z}\}$ ekvivalense G -nek, hogy valamely $\delta \in \mathbb{R}$ konstans mellett*

$$\{g''_{z+u} g''^*_{z^*} g''_{z+v}\} = \text{Re}((1 + i\delta) i^{u \wedge v}) \text{sgn}(g''_z) g''_{z+u+v} \quad (z, u, v \in \mathbb{Z}^2).$$

A fenti konstrukciók mind különböző J^ -triplet struktúrákhoz vezetnek.*

Hivatkozások

- [1] T. Barton, *Biholomorphic equivalence of bounded Reinhardt domains*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa Cl. Sci 13 No.4 (1986), 1-13.
- [2] T. Barton–S. Dineen and R.M. Timoney, *Bounded Reinhardt domains in Banach spaces*, Compositio Mathematica 59, (1986) 265-321.

- [3] T.J. Barton–Y. Friedman, *Bounded derivations of JB^* -triples*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 41 No. 163 (1990) 255–268.
- [4] T.J. Barton–R.M. Timoney, *Weak*-continuity of Jordan triple products and applications*, Math. Scand., 59 (1986), 177–191.
- [5] H. Behnke–P. Thullen, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* (Ergebnisse der Math. 51), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1970.
- [6] F.F. Bonsall–J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators* (London Math. Soc. Lecture Note Ser. 2), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971.
- [7] F.F. Bonsall–J. Duncan, *Numerical Ranges II.*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 10, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1973.
- [8] F. Botelho–J. Jamison, *Projections on tensor products of Banach spaces*, Arch. Math. 90 No.4 (2008), 341–352.
- [9] O. Bratteli–P.E.T. Jørgensen, *Unbounded *-derivations and infinitesimal generators on operator algebras*, Proc. Sympos. Pure Math. 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 353–365.
- [10] H. Braun–M. Koecher, *Jordan-Algebren*, Grundlehren der Math. Wiss. 158, Springer, Berlin–Heidelberg, 1966.
- [11] H. Braun–W. Kaup–H. Upmeyer, *On the automorphisms of circular and Reinhardt domains in complex Banach spaces*, Manuscripta Math., 25 (1978), 97–133.
- [12] L.J. Bunce–C.-H. Chu, *Compact operations, multipliers and Radon-Nikodým property in JB^* -triples*, Pacific J. Math., 153 (1992), 249–265.
- [13] L.J. Bunce–C.-H. Chu – **L.L. Stachó** – B. Zalar, *On prime JB^* -triples*, Quart. J. Math.(Oxford), 49 No.2 (1998) 279–290. Math. Z. (1994)
- [14] E. Cartan, *Sur les domaines bornés de l'espace de n variables complexes*, Abh. Hand. Seminar Hamburg 11 (1935), 116–162.
- [15] S. Dineen, *Complete holomorphic vector fields on the second dual of a Banach space*, Math. Scand. 59 (1986), 131–142.
- [16] S. Dineen–R. Timoney, *The centroid of a JB^* -triple system*, Math. Scand., 62 (1988), 327–342.

- [17] E.B. Dynkin, *Normed Lie algebras and analytic groups*, Lie Groups, AMS Translations, series 1, 9 (1950) 471–535.
- [18] C.J. Earle–R.S. Hamilton, *A fixed point theorem for holomorphic mappings*, Proc. Sympos. Pure Math. 16, AMS, Providence R.I., 1970, pp. 61–65.
- [19] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. II., Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1966.
- [20] R.J. Fleming–J.E. Jamison, *Hermitian and adjoint abelian operators on certain Banach spaces*, Pacific J. Math. 52 (1974), 67–84.
- [21] R.J. Fleming–J.E. Jamison, *Isometries of certain Banach spaces*, J. London Math. Soc. 9 No.2 (1975), 121–127.
- [22] Y. Friedman–B. Russo, *Contractive projections on operator triple systems*, Math. Scand. 52, (1983) 279–311.
- [23] Y. Friedman–B. Russo, *Conditional expectation without order* Pac. J. Math. 115, (1984) 351–360.
- [24] Y. Friedman–B. Russo, *Structure of the predual of a JBW^* -triple*, J. Reine u. Angew. Math., 356 (1985), 67–89.
- [25] Y. Friedman–B. Russo, *The Gelfand-Naimark theorem for JB^* -triples*, Duke Math. J. 53 (1986), 139–148.
- [26] I.S. Gradshteyn–I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Elsevier, Amsterdam–Boston, 2007.
- [5] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, (Graduate Texts in Math. 19), Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982.
- [27] P. Harmand–D. Werner–W. Werner, *M -ideals in Banach spaces and Banach algebras*, Lecture Notes in Math. 1547, Springer-Verlag, 1993.
- [28] T.L. Hayden–T.J. Suffridge, *Biholomorphic maps in Hilbert space have fixed points*, Pacific J. Math., 38 (1971), 419–422.
- [29] S. Heinrich, *Ultraproducts in Banach space theory*, J. Reine Angew. Math. 313 (1979), 72–104.
- [30] E. Hewitt–K. Strømberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1965.

- [31] G. Hochschild, *The Structure of Lie Groups*, Holden Day, San Francisco, 1966.
- [32] G. Horn, *Klassifikation der JBW^* -Tripel vom Typ I.*, Dissertation, Math. Fak. der Eberhard-Karls-Universität Tübingen. 115 S. ,1984.
- [33] G. Horn, *Classification of JBW^* -triples of type I.*, Math. Z. 196 (1987), 271-291.
- [34] G. Horn–E. Neher, *Classification of continuous JBW^* -triples*, Trans. Am. Math. Soc. 306 No.2 (1988), 553-578.
- [35] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Math. 9, Springer, 1985.
- [36] R. Iordanescu, *Jordan structures in analysis, geometry and physics* (English) Editura Academiei Romane, Bucharest, 2009.
- *[37] J.-M. Isidro–**L.L. Stachó**, *Holomorphic Automorphism Groups in Banach Spaces*, North Holland Math. Studies 105, North Holland Publ. Co., Oxford–New York–Amsterdam, 1985.
- [38] J.-M. Isidro–**L.L. Stachó**, *Weakly and weakly* continuous elements in JBW^* -triples*, Acta Sci. Math. (Szeged), 57 (1993) 511-525.
- [39] J.-M. Isidro–**L.L. Stachó**, *Pointwise convergent nets of holomorphic automorphisms of the unit ball of Cartan factors*, Rev. Univ. Complutense (Madrid), 8 (1995) 71-90.
- [40] J.-M. Isidro–**L.L. Stachó**, *Holomorphic automorphisms of continuous products of balls*, Math. Z. 234 (2000), 621-633.
- [41] J.-M. Isidro–**L.L. Stachó**, *On the Jordan structure of ternary rings of operators*, Annales Math. Univ. Sci. Eötvös Budapest, 46 (2003) 143-150.
- *[42] J.-M. Isidro–**L.L. Stachó**, *Holomorphic invariants of continuous bounded symmetric Reinhardt domains*, Acta Sci. Math. (Szeged) 71 (2004), 105-119.
- [43] J.-M. Isidro–**L.L. Stachó**, *On the manifold of tripotents in JB^* -triples*, J. Math. Anal. Appl., 304/1 (2005) 147-157.
- [44] J.-M. Isidro–**L.L. Stachó**, *On the manifold of complemented principal inner ideals in JB^* -triples*, Quart. J. Math (Oxford), 57 (2006), 505-525.

- [45] P. Jordan–J. von Neumann–E.P. Wigner, *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, Ann. Math. 35 (1934), 29–64.
- [46] N.J. Kalton–G.V. Wood, *Orthonormal systems on Banach spaces and their applications*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 79 (1976), 493–510.
- [47] W. Kaup, *Über das Randverhalten von holomorphen Automorphismen beschränkter Gebiete*, Manuscripta Math. 3 (1970), 257–270.
- [48] W. Kaup, *Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds*, Math. Ann. 228 (1977), 39–64.
- [49] W. Kaup, *Über die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension I.*, Math. Ann., 357 (1981), 463–481.
- [50] W. Kaup, *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces*, Math. Z., 83 (1983), 503–529.
- [51] W. Kaup, *Contractive projections on Jordan C^* -algebras and generalizations*, Math. Scand. 54, (1984) 95–100.
- [52] W. Kaup–**L.L. Stachó**, *Weakly continuous elements in JB^* -triples*, Math. Nachr., 166 (1994) 305–315.
- [53] W. Kaup–H. Upmeyer, *Banach spaces with biholomorphically equivalent unit balls are isomorphic*, Proc. Amer. Math. Soc., 58 (1976), 129–133.
- [54] W. Kaup–J.-P. Vigué, *Symmetry and local conjugacy on complex manifolds*, Math. Ann., 286 (1990), 329–340.
- [55] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Marcel Dekker, New York, 1970.
- [56] M. Koecher, *An elementary approach to bounded symmetric domains*, Lecture Notes of the Rice University, Houston, 1979.
- [57] S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds*, Second edition. Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [58] O. Loos, *Bounded Symmetric Domains and Jordan Pairs*, Lecture Notes of UCI, University of California, Irvine, 1977.
- [59] O. Loos, *Jordan Pairs*, Lecture Notes in Math. 460, Springer, 1975.

- [60] K. McCrimmon, *Compatible Peirce decompositions of Jordan triple systems*, Pacific J. Math., 103 (1982), 57-102.
- [61] K. McCrimmon, *Book review of [67]*, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1987), 685–690.
- [62] K. McCrimmon–K. Meyberg, *Coordinatization of Jordan triple systems*, Comm. Algebra 9 (1981), 1495–1542.
- [63] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan algebras*, Universitext Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg, 2004.
- [64] K. Meyberg, *Lectures on algebras and triple systems*, Lect. Note University of Virginia, Charlottesville, 1972.
- [65] J.M. Moreno, *JV-algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 87 (1980), 47-50.
- [66] E. Neher, *On the classification of Lie and Jordan triple systems*, Comm. in Algebra 13 (1985), 2615–2667.
- [67] E. Neher, *Jordan Triple Systems by the Grid Approach*, Lecture Notes in Math. 1280, Springer 1987.
- [68] E. Neher, *3-graded root systems and grids in Jordan triple systems*, J. Algebra 140 (1991), 284–329.
- [69] D. Panou, *Über die Klassifikation der beschränkten bizirkularen Gebiete in $\mathbb{C}^n$* , Dissertation, Tübingen, 1988.
- [70] D. Panou, *Bounded bicircular domains in $\mathbb{C}^n$* , Manuscripta Math., 68 (1990), 373–390.
- [71] A. Peralta–**L.L. Stachó**, *On the atomic decomposition of real JBW^* -triples*, Quart. J. Math. Oxford, 52 (2001) 79-87.
- [72] F. Riesz–B. Sz.-Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.
- [73] R.A. Ryan, *Introduction to tensor products of Banach spaces*, (Springer Monographs in Mathematics), Springer-Verlag, London-Berlin-Heidelberg, 2002.
- [74] B. Russo, *Structure of JB^* -triples*, in: Jordan Algebras (eds. W. Kaup, K. McCrimmon and H.P. Petersson), de Gruyter 1994.

- [75] H.H. Schaefer, *Banach Lattices of Positive Operators*, Grundlehren der Math. Wiss. 215, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.
- *[76] **L.L. Stachó**, *A short proof of the fact that the biholomorphic automorphisms of the unit ball in certain L^p -spaces are linear*, Acta Sci. Math. (Szeged), 41 (1979), 381–383.
- [77] **L.L. Stachó**, *Holomorphic Maps and Fixed Points*, PhD Dissertation, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980.
- *[78] **L.L. Stachó**, *A projection principle concerning biholomorphic automorphisms*, Acta Sci. Math., 44 (1982), 99–124.
- *[79] **L.L. Stachó**, *On the spectrum of inner derivations in partial Jordan triples*, Math. Scand 66 (1990), 242–248.
- *[80] **L.L. Stachó**, *On the algebraic classification of bounded circular domains*, Proc. R. Irish Acad. 91A (2) (1991), 219–238.
- *[81] **L.L. Stachó**, *On the structure of inner derivations in partial Jordan-triple algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged), 60 (1995), 619–636.
- *[82] **L.L. Stachó**, *On nonlinear projections of vector fields*, in: Convex Analysis and Chaos (Proceedings of NLA98, ed.: K. Nishizawa), Josai Mathematical Monographs Josai, JMM 1 (1999) 47–55.
- *[83] **L.L. Stachó**, *Partial Jordan* triples with grid base*, in: Castellón Serrano, A. (ed.) et al., Proceedings of the International Conference on Jordan Structures, Málaga, Spain, June 1997. Málaga: Univ. de Málaga, Departamento de Algebra, Geometria y Topologia. 175–184 (1999).
- [84] **L.L. Stachó**, *A counterexample concerning the problem of contractive projections of real JB^* -triples*, Publ. Math. Debrecen, 58 (2001) 223–230.
- *[85] **L.L. Stachó**, *Banach–Stone type theorem for lattice norms in C_0 -spaces*, Acta Sci. Math. (Szeged), 73, (2007) 193–208.
- *[86] **L.L. Stachó**, *Continuous Reinhardt-domains from a Jordan view point*, Studia Math., 185(2), (2008) 177–199.
- [87] **L.L. Stachó**, *On the manifold of tripotents in JB^* -triples*, in: D. Andrica - S. Morianu (Editors), Contemporary Geometry and Topology and Related Topics, Cluj University Press, pp. 351–264 (2008).

- *[88] **L.L. Stachó**, *On strongly continuous one-parameter groups of automorphisms of multilinear functionals*, J. of Math. Anal. and Appl., 363/2 (2010) 419-431.
- *[89] **L.L. Stachó**, *Weighted grids in complex Jordan^{*} triples*, Asian-Eur. J. Math. 3(1), (2010) 155-184.
- [90] **L.L. Stachó**–J.-M. Isidro, *Algebraically compact elements of JBW^{*}-triples*, Acta Sci. Math. 54 No.1-2 (1990), 171-190.
- [91] **L.L. Stachó**–B. Zalar, *On the norm of Jordan elementary operators in standard operator algebras*, Publ. Math. (Debrecen), 49 (1996) 127-134.
- [92] **L.L. Stachó**–B. Zalar, *Uniform primeness of the Jordan algebra of symmetric operators*, Proc. AMS, 126(8) (1998) 2241-2247.
- *[93] **L.L. Stachó**–B. Zalar, *Symmetric continuous Reinhardt domains*, Archiv der Mathematik 81 (2003), 50-61.
- [94] **L.L. Stachó**–B. Zalar, *Bicircular projections and a characterization of Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 132 (2004) 3019-3025.
- [95] **L.L. Stachó**–B. Zalar, *Bicircular projections in some matrix and operator spaces*, J. Linear Algebra and its Applications, 384 (2004) 9-20.
- [96] T. Sunada, *On bounded Reinhardt domains*, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 119-123.
- [97] T. Sunada, *Holomorphic equivalence problem for bounded Reinhardt domains*, Math. Ann., 235 (1978), 111-129.
- [98] P. Thullen, *Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreskörpern*, Math. Ann., 104 (1931), 244-259.
- [99] H. Upmeyer, *Über die Automorphismengruppen beschränkter Gebiete in Banachräumen*, Dissertation, Tübingen, 1975.
- [100] H. Upmeyer, *Über die Automorphismengruppen von Banachmannigfaltigkeiten mit invarianter Metrik*, Math. Ann. 233 (1976), 279-288.
- [101] H. Upmeyer, *Symmetric Banach manifolds and Jordan C^{*}-algebras*, North-Holland Math. Studies 104, North-Holland Publ. Co., Oxford–New York–Amsterdam, 1985.

- [102] V.S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras and their Representations* (Graduate Texts in Math. 102), Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, Springer, 1984.
- [103] *Variations on a theme of Carathéodory*, Ann. scuola Norm. Sup. Pisa (4), 6 (1979) 39–68.
- [104] E. Vesentini–T. Franzoni, *Holomorphic maps and invariant distances*, Notas de Matemática 69, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1980.
- [105] J.-P. Vigué, *Sur le group des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe*, C.R. Acad. Sci. Paris, A 282 (1976), 111–114; 211–213.
- [106] J.-P. Vigué, *Le group des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Applications aux domaines bornés symmetriques*, Ann. Sci. Ecole Norm. sup. 9 (1976), 203–282.
- [107] J.-P. Vigué, *Automorphisms analytiques des produits continus de domaines bornés*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 8 (1978), 229–246.
- [108] J.-P. Vigué, *Automorphismes analytiques d'un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach a base*, Ann. Inst. Fourier, 34 (1984), 67–87.
- [109] J.-P. Vigué, *Automorphismes analytiques des domaines produits*, Ark. Mat., 36 (1998), 177–190.
- [110] J.-P. Vigué–J.-M. Isidro, *Sur la topologie du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine cerclé borné*, Bull. Sci. Math., 106 (1982), 417–426.
- [111] I. Villanueva, *Integral multilinear forms on $C(K, X)$ spaces*, Czechoslovak Math. J., 54 No.2 (2004) 373–378.
- [112] J. Wolf, *Fine structure of hermitian symmetric spaces. Symmetric spaces*, pp. 271–357. Marcel Decker, New York, 1972.
- [113] K. Yosida, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.