

dc_116_10

SZUBKONVEX BECSLÉSEK AUTOMORF
L-FÜGGVÉNYEKRE ÉS ALKALMAZÁSAIK

HARCOS GERGELY

MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

BUDAPEST, 2011

I. Kitűzött kutatási feladat

Az értekezés a számelmélet egy kulcsfontosságú egyesítő fogalmával, az L -függvénnyel foglalkozik. Az L -függvényeknek a matematikában betöltött előkelő szerepét jól mutatja, hogy a Clay Mathematics Institute által kitűzött hét milleniumi probléma közül kettőnek a megfogalmazásában is szerepelnek. A bennük rejlő információ kiaknázásához elengedhetetlen, hogy analitikus szempontból vizsgáljuk őket: megértsük az analitikus folytatásukat, a függvényegyenletüket, a gyökeik és a pólusaik eloszlását, illetve a nagyságukat. A Langlands-filozófia elképzelése szerint a számelméletben előforduló L -függvények az ún. elsődleges automorf L -függvényekből épülnek fel. Automorf L -függvényekre a szükséges analitikus tulajdonságok némelyike könnyen elérhető, míg másokról kiderült, hogy rendkívül mélyek. A területen jelenleg folyó kutatások jelentősen alapoznak arra a felfogásra, hogy az L -függvények nem elszigetelten, hanem természetes családokban fordulnak elő. A modern felfogás már egyetlen L -függvényt is L -értékek egy családjának tekinti.

Az elmúlt évek fontos felismerései közé tartozik, hogy egyes mély diofantikus problémák megoldásához a kulcsot természetes L -függvénycsaládokban várható analitikus tulajdonságok szolgáltatják. Ilyen módon az L -függvények kapcsolódnak a matematika olyan szerteágazó területeihez, mint az algebrai geometria, a kombinatorika, a reprezentációelmélet, az ergodelmélet, a dinamikai rendszerek és a véletlen mátrixok elmélete, a matematikai fizika. Központi kérdés az L -függvények eltűnése és nagysága egy-egy családon belül, és a két kérdés nem független egymástól. Az első felmerül az Abel-varietások rangjánál (Birch és Swinnerton-Dyer sejtése), az automorf formák elméletében fontos teta-megfeleltetésnél és a hiperbolikus felületek deformációinál. A második jól alkalmazható különböző egyenletes eloszlási vizsgálatokban, mint pl. Linnik problémái (rács-pontok eloszlása ellipszoidokon, illetve Heegner-pontok és zárt geodetikusok eloszlása aritmetikus hiperbolikus felületeken) vagy ezeknek az André–Oort-sejtéshez kapcsolódó finomításai és általánosításai (Shimura-varietások speciális részvarietásainak eloszlása rövid Galois-orbitokban), Hilbert 11. problémája (kvadratikus formák előállításszámának eloszlása egy génuszon belül), és a kvantum-ergodicitás (hullámok sűrűségeloszlása aritmetikus hiperbolikus felületeken). Ezeket az izgalmas fejleményeket kiválóan összefoglalja [Fr95, KS99, IS00, Sa03, MV06, Mi07].

Az értekezésben klasszikus automorf L -függvényekre vonatkozó szubkonvex becsléseket és azok néhány alkalmazását tárgyaljuk. A fejezet hátralevő részében röviden áttekintjük a szubkonvexitás problémáját.

Egy F számtest feletti n -edfokú teljes elsődleges automorf L -függvényt az F feletti GL_n csoport egy π irreducibilis csúcsos automorf reprezentációjához társítunk, amelynek centrális karaktere unitér. A kapott $\Lambda(\pi, s)$ meromorf az s komplex változóban (lehetőséges egyszerű pólusokkal a $\Re s = 0$ és a $\Re s = 1$ egyeneseken, amelyek pontosan $n = 1$ és $\pi = |\det|^i$ esetén fordulnak elő) és a π csúcsos volta miatt nem bomlik fel kisebb fokú teljes L -függvények szorzatára. A π maga realizálható a $\mathrm{GL}_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ adélikus hánypontos csúcsformáinak a terében egy irreducibilis altérként, amelyen jobbról és felcserélhetően hatnak a nemarchimédieszi $\mathrm{GL}_n(F_v)$ kvázifaktorok, illetve az archimédieszi $\mathrm{GL}_n(F_v)$ kvázifaktorok Lie-algebrái. Ez harmonizál Flath tételével, miszerint a π előáll egy $\otimes_v \pi_v$ megszorított tenzorszorzatként, ahol π_v a $\mathrm{GL}_n(F_v)$ irreducibilis megengedett reprezentációja az F minden egyes v helyére. Ennek megfelelően fennáll a $\Lambda(\pi, s) = \prod_v L(\pi_v, s)$ szorzatelőállítás, amely abszolút konvergens a $\Re s > 1$ félsíkban. A teljes L -függvény

korlátos minden függőleges sávban (a pólusok környezetét leszámítva), továbbá $\Lambda(\pi, s)$ -t egyszerű függvényegyenlet kapcsolja $\Lambda(\tilde{\pi}, 1-s)$ -hez. Itt $\tilde{\pi}$ a π kontragradiens reprezentációja, amelyet jellemez az $L(\tilde{\pi}_v, s) = L(\pi_v, \bar{s})$ azonosság.

A $\Lambda(\pi, s)$ finomabb analitikus viselkedése akkor válik láthatóvá, ha leválasztjuk róla az archimédieszi $L(\pi_v, s)$ lokális faktorokat. Valóban, az archimédieszi faktorok exponenciálisan csökkennek minden függőleges sávban, míg a nemarchimédieszi faktorok távol maradnak a nullától. A nemarchimédieszi faktorok szorzata az $L(\pi, s)$ véges L -függvény: ennek nagysága az értekezés központi témája. A nagyságot a $C(\pi, s)$ analitikus konduktorhoz képest mérjük, ami megragadja az F összes helyéhez tartozó „lokális elágazási adatot”, vö. [IS00]. A Phragmén–Lindelöf-féle konvexitási elvből és a $\Lambda(\pi, s)$ függvényegyenletéből következik a $L(\pi, s) \ll_{\varepsilon, n, F} C(\pi, s)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$ konvexitási becslés a $\Re s = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesen. Itt és a továbbiakban ε tetszőleges pozitív számot jelöl, és a $\ll_{\varepsilon, n, F}$ szimbólum jelentése az, hogy „abszolút értékben kisebb, mint egy ε, n, F -től függő abszolút konstansszor”. Valójában ezek az L -értékek egyenletesen és tetszőleges pontossággal megkaphatók az $L(\pi, s)$ és az $L(\tilde{\pi}, 1-s)$ Dirichlet-sorának mintegy $C(\pi, s)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ darab tag utáni megvágásával, vö. [Ha02]. Az általános Riemann-sejtés szerint a $\Lambda(\pi, s)$ összes gyöke a $\Re s = \frac{1}{2}$ egyenesen fekszik, amiből következne, hogy a konvexitási becslésben az $\frac{1}{4} + \varepsilon$ kitevő cserélhető ε -ra. Ez az álomkorlát az általános Lindelöf-sejtés, amelyet még egyetlen esetben sem igazoltunk. Reálisabb cél annak belátása, hogy a π -k egyes speciális családjaira (vagy sejtett családjaira) létezik $\delta = \delta(n, F) > 0$ úgy, hogy $L(\pi, s) \ll_{\delta, n, F} C(\pi, s)^{\frac{1}{4}-\delta}$ teljesül a $\Re s = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesen. Ez az automorf L -függvényekre vonatkozó szubkonvexitási probléma.

Az automorf L -függvényekre vonatkozó szubkonvex becsléseket erősen motiválja, hogy több egyenletes eloszlási problémában a hibatag ilyen L -függvények speciális értékeiből fejezhető ki (mély explicit formulákkal). Általában a konvexitási becslés még éppen kevés az egyenletes eloszlás belátásához, míg tetszőleges $\delta > 0$ nemtriviális javítás már elegendő. Másképpen szólva az aritmetika pontosan akkor válik „láthatóvá”, amikor a szóban forgó L -függvénycsaládra szubkonvex becslést állítunk fel. Egyes helyzetekben a szubkonvex kitevő minősége is lényeges. Például [Hu72]-ben valamilyen $\delta > \frac{1}{12}$ értékre van szükség a $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ -re, míg [CCU09] a $\delta < \frac{1}{32}$ tartományt használja egy bizonyos $GL_2 \times GL_1$ típusú családra.

A $C(\pi, s)$ analitikus konduktorban szereplő különböző paramétereknek megfelelően beszélhetünk a szubkonvexitási probléma s -aspektusáról, ∞ -aspektusáról (vagy sajátérték-aspektusáról), illetve q -aspektusáról (vagy szint-aspektusáról). Ebben az értekezésben $\mathbb{Q}$ feletti $GL_2 \times GL_1$, GL_2 , $GL_2 \times GL_2$ típusú családokra összpontosítunk a q -aspektusban, ezért csak röviden említünk meg néhány újabb fejleményt az egyéb irányokban: [B11, BIHa10, BR05, JM05, JM06, LLY06, Li11, MV10, Ve10].

II. Vizsgálati módszerek

Röviden összefoglaljuk a következő fejezetben kifejtett 1. és 2. és 3. Tétel bizonyításai mögött rejlő ötleteket, módszereket. A bizonyítások közvetlen előzményei a [By96, KMV00, DFI02, Mi04] dolgozatok. Vezessük be az alábbi jelölést:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &:= L(f \otimes \chi, s) && \text{az 1. Tétel esetében;} \\ \mathcal{L}(f) &:= L(f, s)^2 && \text{a 2. Tétel esetében;} \\ \mathcal{L}(f) &:= L(f \otimes g, s) && \text{a 3. Tétel esetében;}\end{aligned}$$

ekkor a cél egy bizonyos $\delta > 0$ felállítása úgy, hogy $\mathcal{L}(f) \ll q^{\frac{1}{2}-\delta}$ teljesüljön valamilyen ordókonstanssal, ami a másodlagos paraméterektől függ polinomiálisan. Ezt egy

$$\frac{1}{q} \int_{\phi} |\mathcal{M}(\phi)|^2 |\mathcal{L}(\phi)|^2 d\mu(\phi) \quad (1)$$

súlyozott második momentum becslésével érjük el, ahol az átlagolást a $\approx q$ szintű és adott melléktípusú automorf függvényeken ható Laplace-operátor spektruma felett végezzük, így a tagok valamelyike egy $\phi \approx f$ csúcsformához tartozik. Az $\mathcal{M}(\phi)$ egy megfelelően választott súlyfüggvény (ún. amplifikátor), miközben a ϕ Maass-csúcsformákon, holomorf csúcsformákon és Eisenstein-sorokon fut végig egy alkalmas $d\mu(\phi)$ spektrális mérték szerint, amit a Kuznyecov-formula szem előtt tartásával tervezünk. Az amplifikátort az

$$\mathcal{M}(\phi) := \sum_{\ell} x(\ell) \lambda_{\phi}(\ell)$$

kifejezéssel definiáljuk, ahol $(x(\ell))$ egy komplex számokból álló véges sorozat, ami kizárólag az f -től függ. A négyzetek felbontása és a Hecke-sajátértékekre vonatkozó multiplikatív azonosságok alkalmazása után a

$$\mathcal{Q}(\ell) := \frac{1}{q} \int_{\phi} \lambda_{\phi}(\ell) |\mathcal{L}(\phi)|^2 d\mu(\phi)$$

normalizált átlagok becslése marad hátra, ahol az ℓ nem haladja meg a q valamilyen kis kitevőjű hatványát. Nyert ügyünk van, amint meg tudjuk mutatni, hogy $\mathcal{Q}(\ell) \ll \ell^{-\delta}$ egy alkalmas pozitív δ -val.

A Kuznyecov-formulával a $\mathcal{Q}(\ell)$ spektrális összegeket átírjuk csavart Kloosterman-összegek egy súlyozott összegévé, ahol a súlyok alakja az 1., 2., 3. Tétel esetében rendre $\chi(m)\chi(n)$, $\tau(m)\tau(n)$, $\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)$. A $\chi(m)\chi(n)$ súlyok esete lényegesen egyszerűbb, főként ennek köszönhetően kapunk itt jobb δ értéket. Ilyenkor úgy járunk el, mint eredetileg Bikovszkij [By96] járt el, tehát az összeget Hurwitz zeta-függvényekkel fejezzük ki. Ezekre a zeta-függvényekre alkalmazzuk a függvényegyenletet: így a problémát bizonyos karakterösszegek nemtriviális becslésére vezetjük vissza, amit pedig Weil tételével végzünk el. A $\tau(m)\tau(n)$ súlyokat a $\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)$ speciális esetének tekinthetjük a

$$g(z) := \frac{\partial}{\partial s} E_{\infty}(z, s)|_{s=\frac{1}{2}} = 2\sqrt{y} \log(e^y y / 4\pi) + 4\sqrt{y} \sum_{n \geq 1} \tau(n) \cos(2\pi n x) K_0(2\pi n y) \quad (2)$$

definícióval. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy ez a g nem négyzetesen integrálható, ami technikai bonyodalmakhoz vezet, és külön eljárást tesz szükségessé. Akárhogy is, a

2. és a 3. Tétel bizonyításában a következő lépés az, hogy alkalmazzuk a Voronoi-féle összegzési formulát, ami a Kloosterman-összegeket egyszerűbb Gauss-összegekre váltja (a (2) esetben keletkezik még egy elhanyagolható adalék tag is). A Gauss-összegek felbontása után nagyjából

$$\frac{1}{q^{3/2}} \sum_h \chi_f \chi_g(h) \sum_{\ell_1 m - \ell_2 n = h} \overline{\lambda_g(m)} \lambda_g(n) W_{\ell_1, \ell_2}(m, n). \quad (3)$$

alakú összegek becslése marad hátra. Ezekben h, m, n mérete $\approx q$, továbbá W_{ℓ_1, ℓ_2} egy szép súlyfüggvény, ami enyhén függ az ℓ_1 -től és az ℓ_2 -től.

A (3)-beli belső összeg egy eltolt konvolúciós összeg, ami legjobb esetben is csak négyzetgyökösen rövidül, ezért a h paramétertől függő oszcillálást ki kell használnunk. A h -tól való függés megértéséhez az eltolt konvolúciós összeget a kör módszer Kloosterman-finomításával elemezzük. Ez a megközelítés nagyon is helyénvaló: korábban jól bevált hasonló helyzetekben [DFI93, DFI94a, Ju99, KMV02], sőt speciális esetben már Kloosterman [Kl26] eredeti alkalmazása is a szóban forgó probléma egy speciális esetévé válik. Pontosabban a Kloosterman-finomítás helyett technikai okokból a kör módszer Meurman-tól [Me01] és Jutilától [Ju92, Ju96] származó variánsait használjuk. Ennek eredményeképpen az eltolt konvolúciós összeg – elhanyagolható hiba erejéig – felbomlik egy főtagra és $S(h, h'; c)$ Kloosterman-összegekre egy súlyozott c -összegére. A súlyokat a $\lambda_g(n)$ együtthatókból fejezzük ki, de a végén csak azt kell kihasználnunk, hogy ezek négyzetes átlagban kicsik. A főtag csupán (2) esetén van jelen, erre lent visszatérünk. A Kloosterman-összegek összegére a Kuznyecov-formulát alkalmazzuk (a másik irányban), hogy a h és h' változókat szétválasszuk. Ekkor

$$\int_{\psi} \sum_h \chi(h) \rho_{\psi}(h) d\tilde{\mu}(\psi), \quad (4)$$

alakú kifejezéseket kapunk, ahol a h -összeg hossza $\approx q$, és ψ – egy másik $d\tilde{\mu}(\psi)$ spektrális mérték szerint – a $\approx \ell_1 \ell_2$ szintű és triviális melléktípusú moduláris formákon fut végig. A h -összeg rövidülése ezért a csavart automorf L -függvényekre vonatkozó szubkonvexitással egyenértékű, amihez az 1. Tételre van szükségünk. Némi nehézséget okoz, hogy a (3)-beli eltolt konvolúciós összegek lehetnek kiegyensúlyozatlanok is: ha a W_{ℓ_1, ℓ_2} tartója olyan, hogy m jóval kisebb az n -nél, akkor a (4)-beli ψ -integrál „hosszú”. A szükséges megtakarítást ilyenkor Deshouillers–Iwaniec [DI82] nagy-szita egyenlőtlenségeiből nyerjük.

A (2) esetén, tehát amikor $\lambda_g(n) = \tau(n)$, a (3) elemzése során megjelenik egy adalék tag, nevezetesen az eltolt konvolúciós összegek főtagjának járuléka. Az adalék tag – elhanyagolható hiba erejéig – megegyezik az (1)-beli Eisenstein-spektrum járulékával, amely általában túl nagy, és csupán azt a célt szolgálja, hogy az (1) spektrálisan teljes legyen. A [DFI02] dolgozat ennek a megfigyelésnek a megfelelőjét szigorúan alátámasztja: a két nagy járulékról kimutatja, hogy egyenlők, így azokat el lehet felejtetni. A 2. Tétel bizonyításában ehelyett egy rövidebb utat választunk. A közelítő függvényegyenletben és a Kuznyecov-formulában úgy választjuk meg a súlyfüggvényeket, hogy az adalék tag elhanyagolható legyen: az elemzésben ez úgy nyilvánul meg, hogy egy gyök mesterséges létrehozásával megszüntetünk egy bizonyos pólust.

III. Új tudományos eredmények és alkalmazásai

A $\mathbb{Q}$ feletti GL_2 egy irreducibilis csúcsos automorf reprezentációja azonosítható – egyszerű ekvivalencia erejéig – a $\mathcal{H}$ felső félsík egy klasszikus moduláris formájával, tehát egy $k \geq 1$ egész súlyú primitív holomorf csúcsformával vagy egy $\kappa \in \{0, 1\}$ súlyú primitív Maass-csúcsformával. Egy ilyen g automorf forma rendelkezik az alábbi három alapvető tulajdonsággal (megfelelő értelemben véve):

- szimmetrikus az $SL_2(\mathbb{Z})$ egy Γ kongruencia-részcsoporthoz nézve;
- négyzetesen integrálható modulo Γ ;
- közös sajátfüggvénye a Laplace- és Hecke-operátoroknak.

A Laplace-sajátértéket jelölje $\frac{1}{4} + t_g^2$, és a $\mu_g := 1 + |t_g|$ mennyiséget nevezzük a g spektrális paraméterének (tehát ha g holomorf és k_g súlyú, akkor $\mu_g = \frac{k_g+1}{2}$). Az n . Hecke-sajátértéket jelölje $\lambda_g(n)$: ezek a komplex számok központi jelentőséggel bírnak számunkra, mert belőlük kapjuk az értekezésbeli L -függvényeket. A következő hipotézis igen hasznos az analitikus vizsgálatokban.

Hipotézis (H_θ). Ha g egy 0 vagy 1 súlyú primitív Maass-csúcsforma, akkor $\lambda_g(n) \ll_\varepsilon n^{\theta+\varepsilon}$. Ha g egy 0 súlyú Maass-csúcsforma, akkor $\frac{1}{4} + t_g^2 \geq \frac{1}{4} - \theta^2$.

Megjegyezzük, hogy holomorf g csúcsformákra a $\lambda_g(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ korlátot Deligne bizonyította a híres [De74] dolgozatában, míg az 1 súlyú Maass-csúcsformákra $\frac{1}{4} + t_g^2 \geq \frac{1}{4}$ következik az $SL_2(\mathbb{R})$ reprezentációelméletéből. A H_θ hipotézis $\theta = 0$ esetén nem más, mint a Ramanujan–Selberg-sejtés, de bármilyen $\theta < \frac{1}{2}$ érték nemtriviális. Jelenleg a $\theta = \frac{7}{64}$ érték megfelelő Kim–Shahidi, Kim and Kim–Sarnak [KiSh02, Ki03, KiSa03] mély munkája alapján.

Az első család, amelyet vizsgálunk, $f \otimes \chi$ alakú csavart formákból áll, ahol f egy rögzített primitív forma és χ egy változó primitív Dirichlet-karakter. Az ezekhez társított (véges) L -függvényeket lényegében az

$$L(f \otimes \chi, s) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n) \chi(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1, \quad (5)$$

Dirichlet-sor definiálja, ahol $\approx$ azt jelenti, hogy a két oldal hányadosa elhanyagolható a mi analitikus céljaink szempontjából. Ezek az L -függvények Riemann zeta-függvényéhez és Dirichlet L -függvényeihez hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, nevezetesen mind-egyikük

- végtelen Euler-szorozatra bomlik a prímek felett;
- kiterjed egészfüggvénné, amely $s \longleftrightarrow 1-s$ szimmetriát mutat.

Speciálisan, ha q jelöli a χ konduktorát és N az f szintjét, akkor fennáll az alábbi (egyszerű) konvexitási becslés¹ a $\Re s = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesen:

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_\varepsilon (|s| \mu_f N q)^\varepsilon |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

¹Igazából a konvexitási becslés némileg erősebb állítás. Mi azt a változatot mutatjuk itt, amiben elkülönülnek a különböző paraméterek.

Az általános Lindelöf-sejtés szerint a (6)-ban az összes kitevő ε -ra cserélhető, míg a szubkonvexitási probléma a kitevők (néhányikének) csökkentését célozza meg. Az első eredményünk a probléma q -aspektusát érinti, tehát itt elsődlegesen a q -nak a (6)-beli $1/2$ kitevőjét próbáljuk csökkenteni, de úgy, hogy közben a másik három kitevő ne növekedjék túlzottan. Történetileg ezt az esetet vizsgálták először (Burgess [Bu63] klasszikus munkája után, amely a GL_1 -re vonatkozó analóg kérdést boncolta, lásd a (7)-et alább), és ez indította el az általános szubkonvexitási probléma módszeres tanulmányozását.

A kezdeti áttörést Duke, Friedlander, Iwaniec [DFI93] érte el 1993-ban azzal, hogy teljes szintű ($N = 1$) holomorf f formákra a q kitevőjét az $\frac{1}{2} - \delta$ értékre javította, ahol $\delta = \frac{1}{22}$. A bizonyításuk bevezetett több, a szubkonvexitási problémában alapvető eszközt, mint pl. az amplifikációs módszert (egy a család súlyozott második momentumának becslésére épülő technikát) és különböző összegzési formulákat a Hecke-sajátértékekre. A szóban forgó problémában a további fejlemények a következőképpen foglalhatók össze²:

$\delta = \frac{1}{8}$, ha f holomorf és a melléktípusa triviális, lásd Bikovszkij [By96];

$\delta = \frac{1}{54}$, ha f tetszőleges, lásd Harcos [Ha03a, Ha03b];

$\delta = \frac{1}{22}$, lásd Michel [Mi04];

$\delta = \frac{1-2\theta}{10+4\theta}$, lásd Blomer [Bl04];

$\delta = \frac{1-2\theta}{8}$, lásd Blomer–Harcos–Michel [BHM07a].

Az utolsó két eredményben θ olyan, amire a H_θ hipotézis fennáll (tehát $\theta = \frac{7}{64}$ megfelelő), és az eredmények jó okkal függenek ettől a paramétertől. Nevezetesen a [Bl04, BHM07a] munkák a [DFI93]-t követik és az amplifikációt a χ karakterek felett végzik. Az átlagolás után a $\chi(n)$ -ek eltűnnek az (5)-ből, de a $\lambda_f(n)$ -ek tovább élnek páros szorzatokban. Ezeket a Hecke-sajátértékpárokat eltolt konvolúciós összegekbe rendezik, amiket aztán bonyolult harmonikus analízisbeli technikákkal elemeznek. Mindenek ellenére bizonyos $\lambda_f(q)$ típusú tényezők nagyon „masszívnak” bizonyulnak, és ebből származnak a nemkívánatos q^θ tényezők a megfelelő becslésekben. Bikovszkij [By96] módszere azért figyelemre méltó, mert a $\delta = \frac{1}{8}$ értéket produkálja mindenféle θ nélkül. Jegyezzük meg, hogy ez felel meg Burgess [Bu63] híres

$$L(\chi, s) \ll_\varepsilon (|s|q)^\varepsilon |s|^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} \quad (7)$$

korlátjának, hiszen $L(f \otimes \chi, s)$ közeli rokona az $L(\chi_1, s)L(\chi_2, s)$ szorzatoknak, amelyekben $\chi_1\chi_2 = \chi^2$. Ennek fényében még inkább érdekes, hogy [BHM07a] ettől az eredménytől csak a θ jelenléte miatt marad el, habár emez nem tesz megszorítást az f típusára. Bikovszkij kulcsötlete az volt, hogy az $[N, q]$ szintű spektrum f formái felett amplifikáljon. Ebben az átlagolásban a $\lambda_f(n)$ -ek eltűnnek az (5)-ből, és csak a $\chi(n)$ -ek élnek tovább, amik triviálisan 1-gyel becsülhetők. Ez a leírás persze igen elnagyolt, de remélhetőleg jól motiválja a mondanivalónk egészét.

Az értekezés első eredménye közös munka Valentin Blomerrel [BlHa08], ami kihozza Bikovszkij [By96] módszeréből a maximumot.

²Csak az összes χ -re bizonyított eredményeket soroljuk fel, ezért [CI00]-t kihagyjuk.

1. Tétel. Legyen f egy primitív (holomorf vagy Maass-) csúcsforma, amelynek a szintje N és a melléktípusa triviális, továbbá legyen χ egy primitív karakter modulo q . Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett fennáll

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_{\varepsilon} (|s| \mu_f N q)^{\varepsilon} \left(|s|^{\frac{1}{4}} \mu_f^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{4}} q^{\frac{3}{8}} + |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f N^{\frac{1}{2}} (N, q)^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} \right),$$

ha f holomorf, és

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_{\varepsilon} (|s| \mu_f N q)^{\varepsilon} \left(|s|^{\frac{1}{4}} \mu_f^3 N^{\frac{1}{4}} q^{\frac{3}{8}} + |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^{\frac{7}{2}} N^{\frac{1}{2}} (N, q)^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}} \right)$$

egyébként.

A tétel újdonsága, hogy magában foglalja a Maass-formákat is, és jó egyenletességet ér el a másodlagos paraméterekben (pl. az s -aspektusban ugyanannyira erős, mint a konvexitási becslés). Az alkalmazások szempontjából könnyebb egyetlen taggal bálni a jobb oldalon, ezért megfogalmazzuk az alábbi egyszerűsítést.

1. Következmény. Legyen f egy primitív (holomorf vagy Maass-) csúcsforma, amelynek a szintje N és a melléktípusa triviális, továbbá legyen χ egy primitív karakter modulo q . Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett fennáll

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_{\varepsilon} (|s| \mu_f N q)^{\varepsilon} |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^3 N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{8}}. \quad (8)$$

Ha még $q \geq (\mu_f N)^4$ is teljesül, akkor

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_{\varepsilon} (|s| \mu_f N q)^{\varepsilon} |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^3 N^{\frac{1}{4}} q^{\frac{3}{8}}. \quad (9)$$

Az 1. Tétel fontos következményeként a félegész súlyú csúcsformák Fourier-együtthatóira vonatkozó becslések javíthatók (lásd [BIHa08, Corollary 2] és [BM10, Theorem 1.5]), ezek pedig alkalmazhatók ellipszoidokon és hiperbolikus felületeken különféle eloszlási problémákban [Du88, DuSP90], illetve ternér kvadratikus formák előállításszámaára a változók megszorításai mellett [BI08]. Egy másik alkalmazás a következő hibrid szubkonvex becslés a kritikus egyenesen:

$$L(f \otimes \chi, s) \ll_{\varepsilon} (N|s|q)^{\varepsilon} N^{\frac{4}{5}} (|s|q)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{40}}.$$

Végezetül az 1. Tétel fontos összetevője a lenti 2. és 3. Tétel bizonyításának.

A második család, amelyet vizsgálunk, q szintű f primitív csúcsformákból áll, amelyekre a konvexitási becslés így szól:

$$L(f, s) \ll_{\varepsilon} (|s| \mu_f q)^{\varepsilon} |s|^{\frac{1}{2}} \mu_f^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{4}}.$$

A cél egy hasonló korlátot igazolni $\frac{1}{4} - \delta$ kitevővel a q -n (ahol $\delta > 0$ rögzített), amelyben az ordókonstans folytonosan függ az s -től és a μ_f -től. A probléma története dióhéjban:

$\delta = \frac{1}{192}$, ha f holomorf és a melléktípusa triviális, lásd [DFI94b];

$\delta = \frac{1}{262144}$, ha f holomorf, q négyzetmentes és a melléktípus primitív, lásd [DFI01];

$\delta = \frac{1}{23041}$, ha f melléktípusa primitív [DFI02].

Az értekezés második eredménye közös munka Valentin Blomerrel és Philippe Michelrel [BHM07b], ami más módszerrel erősebb és általánosabb szubkonvex becslést állít fel a moduláris L -függvényekre.

2. Tétel. *Legyen f egy primitív (holomorf vagy Maass-) csúcsforma, amelynek a szintje q és a melléktípusa nemtriviális. Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ mellett fennáll*

$$L(f, s) \ll (|s| \mu_f)^A q^{\frac{1}{4} - \frac{1}{1889}}, \quad (10)$$

ahol $A > 0$ egy abszolút konstans.

A tétel újdonsága, hogy a melléktípustól a primitivitás helyett csak azt követeli meg, hogy ne legyen triviális³, és a szubkonvex kitevő is erősebb. A nemprimitív melléktípus felvétele elengedhetetlen az alábbi következményekhez, amik számelméleti alkalmazásokkal bírnak.

2. Következmény. *Legyen K egy másodfokú számtest, és legyen $\mathcal{O} \subset K$ egy K -beli rend, amelynek diszkriminánsa $d_{\mathcal{O}}$. Legyen χ a $\text{Pic}(\mathcal{O})$ egy primitív karaktere. Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ mellett fennáll*

$$L(\chi, s) \ll |s|^A |d_{\mathcal{O}}|^{\frac{1}{4} - \frac{1}{1889}},$$

ahol $A > 0$ egy abszolút konstans.

3. Következmény. *Legyen K egy harmadfokú számtest, amelynek diszkriminánsa d_K . Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ mellett a K Dedekind L -függvényére fennáll*

$$\zeta_K(s) \ll |s|^A |d_K|^{\frac{1}{4} - \frac{1}{1889}}, \quad (11)$$

ahol $A > 0$ egy abszolút konstans.

A 3. Következmény lényeges elem Einsiedler–Lindenstrauss–Michel–Venkatesh mély munkájában [ELMV11], amely a moduláris felület zárt geodetikusaira vonatkozó, Duke-tól származó egyenletes eloszlási tétel [Du88, Theorem 1] egy magasabb rangú általánosítása.

A harmadik család, amelyet vizsgálunk, $f \otimes g$ alakú Rankin–Selberg konvolúciókból áll, ahol g egy rögzített primitív csúcsforma és f egy változó primitív csúcsforma. Az ezekhez társított (véges) L -függvényeket lényegében az

$$L(f \otimes g, s) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n) \lambda_g(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1,$$

Dirichlet-sor definiálja, ahol $\approx$ ismét azt jelenti, hogy a két oldal hányadosa elhanyagolható a mi analitikus céljaink szempontjából. Ezeknek az L -függvényeknek a már említettekhez hasonló tulajdonságaik vannak (Euler-szorzat, analitikus folytatás, szimmetria), ezért az f szintjét q -val és a g szintjét D -vel jelölve a következő konvexitási becslést kapjuk a $\Re s = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesen:

$$L(f \otimes g, s) \ll_{\varepsilon} (|s| \mu_f \mu_g D q)^{\varepsilon} |s| \mu_f \mu_g D^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}.$$

³ A bizonyítás kiegészíthető úgy, hogy a triviális melléktípus esetét is lefedje.

A cél egy hasonló korlátot igazolni $\frac{1}{2} - \delta$ kitevővel a q -n (ahol $\delta > 0$ rögzített), amelyben az ordókonstans folytonosan függ a többi paramétertől. Ezt a problémát Kowalski–Michel–VanderKam [KMV02] megoldotta arra az esetre, amikor f holomorf és $\chi_f \chi_g$ konduktora (ahol χ_f és χ_g jelöli az f és a g melléktípusát) legfeljebb $q^{\frac{1}{2}-\eta}$ valamilyen $\eta > 0$ mellett; ekkor a megfelelő δ megtakarítás függ az η -tól. A második megszorítást (amelyik a komolyabb) Michel [Mi04] el tudta hagyni abban az esetben, ha g holomorf és $\chi_f \chi_g$ nemtriviális.

Az értekezés harmadik eredménye közös munka Philippe Michellel [HM06], ami még nagyobb általánosságban oldja meg a Rankin–Selberg L -függvényekre vonatkozó szubkonvexitási problémát.

3. Tétel. *Legyen f és g két primitív (holomorf vagy Maass-) csúcsforma, amelynek szintje q és D , melléktípusa χ_f és χ_g . Tegyük fel, hogy $\chi_f \chi_g$ nemtriviális. Ekkor $\Re s = \frac{1}{2}$ mellett fennáll*

$$L(f \otimes g, s) \ll (|s| \mu_f \mu_g D)^A q^{\frac{1}{2} - \frac{1}{1413}}, \quad (12)$$

ahol $A > 0$ egy abszolút konstans.

A tétel újdonsága, hogy nem tartalmaz megszorítást a benne szereplő csúcsformákra, és a másodlagos paraméterektől való függése polinomiális. Egész pontosan a [HM06] dolgozatban az eredményt az $\frac{1}{2} - \frac{1}{2648}$ kitevővel igazoltuk a q -n, mert annak idején az 1. Tételnek csak egy gyengébb változata állt rendelkezésünkre. Az értekezésben frissítjük a [HM06]-beli kitevőket, illetve jelezzük, hogyan függ a (12)-beli q -kitevő a θ -tól és a (8)-beli kitevőktől.

A fenti szubkonvexitási eredmények segítségével új bizonyítást és finomítást nyerhetünk Duke egyenletes eloszlási tételére [Du88], amit most röviden bemutatunk. Ha $d < 0$ (ill. $d > 0$) egy fundamentális diszkrimináns, akkor jelölje Λ_d az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ moduláris felület d diszkriminánsú Heegner-pontjainak (ill. zárt geodetikusainak) a halmazát. A Λ_d halmaz és a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ számtest H_d szűk ideálosztály-csoportja között létezik egy természetes bijekció, aminek megfelelően a H_d természetes módon hat a Λ_d -n. A Λ_d teljes térfogata Siegel tétele szerint $|d|^{1/2+o(1)}$, ezért kézenfekvő a kérdés, hogy a Λ_d egyenletesen oszlik-e el az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ -n, amint $|d| \rightarrow \infty$. Linnik [Li68] az úttörő ergodikus módszerével be tudta látni az egyenletes eloszlást azon feltétel mellett, hogy a d egy kvadratikusan maradék egy tetszőleges rögzített $p > 2$ prímszámra. A kongruenciafeltételtől – meglehetősen más módszerek segítségével – Duke-nak [Du88] sikerült megszabadulnia. Duke – Maass egy megfeleltetését használva – az egyenletes eloszlási problémában felmerülő Weyl-összegeket félegész súlyú Maass-formák Fourier-együtthatóiból fejezte ki, majd az utóbbiakra egy Iwaniec [Iw87] által bevezetett technikával nemtriviális korlátokat bizonyított. A szubkonvexitással való kapcsolat Waldspurger-nak [Wa81] a Shimura-megfeleltetésről szóló munkájából származik, ami mutatja, hogy a szóban forgó Fourier-együtthatók nemtriviális becslése ekvivalens az $L(f \otimes (\frac{d}{\cdot}), \frac{1}{2})$ centrális csavart értékek szubkonvex becslésével, ahol f az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ Hecke–Maass csúcsformáin és Eisenstein-sorain fut végig. A szükséges korlátok következnek a fenti (7)-ből és (8)-ból.

A 2. és a 3. Tételből a Λ_d jóval kisebb részhalmazainak egyenletes eloszlása is következik (amint $|d| \rightarrow \infty$), ha a két eredményt kombináljuk Zhang [Zh01] és Popa [Po06] speciális formuláival a $d < 0$ és a $d > 0$ esetben.

4. Következmény. Jelölje $d\mu(z)$ (ill. $ds(z)$) a hiperbolikus valószínűségi mértéket (ill. a hiperbolikus ívhosszt) az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ moduláris felületen. Legyen $g : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ egy kompakt tartójú sima függvény.

- Ha $d < 0$ egy fundamentális diszkrimináns, $H \leq H_d$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ szűk ideálosztály-csoportjának egy részcsoportha, továbbá $z_0 \in \Lambda_d$ egy d diszkriminánsú Heegner-pont, akkor

$$\frac{\sum_{\sigma \in H} g(z_0^\sigma)}{\sum_{\sigma \in H} 1} = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}} g(z) d\mu(z) + O_g \left([H_d : H] |d|^{-\frac{1}{2827}} \right). \quad (13)$$

- Ha $d > 0$ egy fundamentális diszkrimináns, $H \leq H_d$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ szűk ideálosztály-csoportjának egy részcsoportha, továbbá $G_0 \in \Lambda_d$ egy d diszkriminánsú zárt geodetikuss, akkor

$$\frac{\sum_{\sigma \in H} \int_{G_0^\sigma} g(z) ds(z)}{\sum_{\sigma \in H} \int_{G_0^\sigma} 1 ds(z)} = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}} g(z) d\mu(z) + O_g \left([H_d : H] |d|^{-\frac{1}{2827}} \right). \quad (14)$$

Speciálisan, $[H_d : H] \leq |d|^{\frac{1}{2828}}$ és $|d| \rightarrow \infty$ mellett minden Λ_d -beli H -orbit egyenletesen oszlik el az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ -n. A fenti becslésekben az ordókonstans a g egy Szoboljev-normájával egyenlő.

Ez a következmény megjavítja a [HM06, Theorem 2] és a [Po06, Theorem 6.5.1] eredményekben szereplő numerikus értékeket. Másfelől [HM06] és [Po06] általánosabb aritmetikus hiperbolikus felületeken tárgyalja az analóg eredményt – ettől az értekezésben az egyszerűség végett eltekintünk.

Végezetül megemlítjük, hogy a (8), (10), (12) becsléseket sikeresen alkalmazták jópár egyéb szituációban, lásd [MV07, Sa07, FM11, KMY11, Ma11, MY11].

IV. Az értekezéshez kapcsolódó szerzői közlemények

- [1] T. BERGER, G. HARCOS, ℓ -adic representations associated to modular forms over imaginary quadratic fields, *Int. Math. Res. Not.* **2007**, no. 23, Art. ID rnm113, 16 oldal
- [2] V. BLOMER, G. HARCOS, Hybrid bounds for twisted L -functions, *J. Reine Angew. Math.* **621** (2008), 53–79.
- [3] V. BLOMER, G. HARCOS, The spectral decomposition of shifted convolution sums, *Duke Math. J.* **144** (2008), 321–339.
- [4] V. BLOMER, G. HARCOS, L -functions, automorphic forms, and arithmetic, *Symmetries in Algebra and Number Theory (I. Kersten, R. Meyer eds.)*, 11–25., Universitätsverlag Göttingen, 2009.
- [5] V. BLOMER, G. HARCOS, Twisted L -functions over number fields and Hilbert’s eleventh problem, *Geom. Funct. Anal.* **20** (2010), 1–52.
- [6] V. BLOMER, G. HARCOS, A hybrid asymptotic formula for the second moment of Rankin–Selberg L -functions, benyújtva
- [7] V. BLOMER, G. HARCOS, P. MICHEL, A Burgess-like subconvex bound for twisted L -functions (with Appendix 2 by Z. Mao), *Forum Math.* **19** (2007), 61–105.
- [8] V. BLOMER, G. HARCOS, P. MICHEL, Bounds for modular L -functions in the level aspect, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **40** (2007), 697–740.
- [9] G. HARCOS, Uniform approximate functional equation for principal L -functions, *Int. Math. Res. Not.* **2002**, 923–932.; Erratum, *ibid.* **2004**, 659–660.
- [10] G. HARCOS, An additive problem in the Fourier coefficients of Maass forms, *Math. Ann.* **326** (2003), 347–365.
- [11] G. HARCOS, New bounds for automorphic L -functions, Ph. D. thesis, Princeton University, 2003.
- [12] G. HARCOS, Equidistribution on the modular surface and L -functions, *Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic*, 377–387, Clay Math. Proc. Vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [13] G. HARCOS, P. MICHEL, The subconvexity problem for Rankin–Selberg L -functions and equidistribution of Heegner points. II, *Invent. Math.* **163** (2006), 581–655.
- [14] G. HARCOS, N. TEMPLIER, On the sup-norm of Maass cusp forms of large level. II, benyújtva

Hivatkozások

- [BM10] E. M. BARUCH, Z. MAO, A generalized Kohnen–Zagier formula for Maass forms, *J. London Math. Soc.* **82** (2010), 1–16.
- [BR05] J. BERNSTEIN, A. REZNIKOV, Periods, subconvexity of L -functions and representation theory, *J. Differential Geom.* **70** (2005), 129–141.
- [Bl04] V. BLOMER, Shifted convolution sums and subconvexity bound for automorphic L -functions, *Int. Math. Res. Not.* **2004**, 3905–3926.
- [Bl08] V. BLOMER, Ternary quadratic forms, and sums of three squares with restricted variables, *Anatomy of integers (J. M. de Koninck, A. Granville, F. Luca eds.)*, 1–17., CRM Proc. Lecture Notes, 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Bl11] V. BLOMER, Subconvexity for twisted L -functions on $GL(3)$, *Amer. J. Math.*, megjelenés alatt
- [BlHa08] V. BLOMER, G. HARCOS, Hybrid bounds for twisted L -functions, *J. Reine Angew. Math.* **621** (2008), 53–79.
- [BlHa10] V. BLOMER, G. HARCOS, Twisted L -functions over number fields and Hilbert’s eleventh problem, *Geom. Funct. Anal.* **20** (2010), 1–52.
- [BHM07a] V. BLOMER, G. HARCOS, P. MICHEL, A Burgess-like subconvex bound for twisted L -functions (with Appendix 2 by Z. Mao), *Forum Math.* **19** (2007), 61–105.
- [BHM07b] V. BLOMER, G. HARCOS, P. MICHEL, Bounds for modular L -functions in the level aspect, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **40** (2007), 697–740.
- [Bu63] D. A. BURGESS, On character sums and L -series, *Proc. London Math. Soc.* **12** (1962), 193–206.; II, *ibid.* **13** (1963), 524–536.
- [By96] V. A. BYKOVSKIĬ, A trace formula for the scalar product of Hecke series and its applications, translation in *J. Math. Sci. (New York)* **89** (1998), 915–932.
- [CCU09] F. CHAMIZO, E. CHRISTÓBAL, A. UBIS, Lattice points in rational ellipsoids, *J. Math. Anal. Appl.* **350** (2009), 283–289.
- [CI00] B. CONREY, H. IWANIEC, The cubic moment of central values of automorphic L -functions, *Ann. of Math.* **151** (2000), 1175–1216.
- [De74] P. DELIGNE, La conjecture de Weil. I, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), 274–307.
- [DI82] J-M. DESHOULLERS, H. IWANIEC, Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms, *Invent. Math.* **70** (1982/83), 219–288.
- [Du88] W. DUKE, Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms, *Invent. Math.* **92** (1988), 73–90.

- [DFI93] W. DUKE, J. B. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, Bounds for automorphic L -functions, *Invent. Math.* **112** (1993), 1–8.
- [DFI94a] W. DUKE, J. B. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, A quadratic divisor problem, *Invent. Math.* **115** (1994), 209–217.
- [DFI94b] W. DUKE, J. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, Bounds for automorphic L -functions. II, *Invent. Math.* **115** (1994), 219–239.; Erratum, *ibid.* **140** (2000), 227–242.
- [DFI01] W. DUKE, J. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, Bounds for automorphic L -functions. III, *Invent. Math.* **143** (2001), 221–248.
- [DFI02] W. DUKE, J. B. FRIEDLANDER, H. IWANIEC, The subconvexity problem for Artin L -functions, *Invent. Math.* **149** (2002), 489–577.
- [DuSP90] W. DUKE, R. SCHULZE-PILLOT, Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids, *Invent. Math.* **99** (1990), 49–57.
- [ELMV11] M. EINSIEDLER, E. LINDENSTRAUSS, P. MICHEL, A. VENKATESH, Distribution of periodic torus orbits and Duke’s theorem for cubic fields, *Ann. of Math.*, megjelenés alatt
- [FM11] A. FOLSOM, R. MASRI, The asymptotic distribution of traces of Maass–Poincaré series, *Adv. Math.* **226** (2011), 3724–3759.
- [Fr95] J. B. FRIEDLANDER, Bounds for L -functions, *Proc. Int. Congr. Math. (Zürich, 1994)*, Vol. I, 363–373, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [Ha02] G. HARCOS, Uniform approximate functional equation for principal L -functions, *Int. Math. Res. Not.* **2002**, 923–932.; Erratum, *ibid.* **2004**, 659–660.
- [Ha03a] G. HARCOS, An additive problem in the Fourier coefficients of Maass forms, *Math. Ann.* **326** (2003), 347–365.
- [Ha03b] G. HARCOS, New bounds for automorphic L -functions, Ph. D. thesis, Princeton University, 2003.
- [HM06] G. HARCOS, P. MICHEL, The subconvexity problem for Rankin–Selberg L -functions and equidistribution of Heegner points. II, *Invent. Math.* **163** (2006), 581–655.
- [Hu72] M. N. HUXLEY, On the difference between consecutive primes, *Invent. Math.* **15** (1972), 164–170.
- [Iw87] H. IWANIEC, Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight, *Invent. Math.* **87** (1987), 385–401.
- [IS00] H. IWANIEC, P. SARNAK, Perspectives on the analytic theory of L -functions, *Geom. Funct. Anal. Special Volume* (2000), 705–741.

- [Ju92] M. JUTILA, Transformations of exponential sums, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori 1989)*, 263–270, Univ. Salerno, Salerno, 1992.
- [Ju96] M. JUTILA, A variant of the circle method, *Sieve methods, exponential sums and their applications in number theory*, 245–254, Cambridge University Press, 1996.
- [Ju99] M. JUTILA, Convolutions of Fourier coefficients of cusp forms, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **65(79)** (1999), 31–51.
- [JM05] M. JUTILA, Y. MOTOHASHI, Uniform bounds for Hecke L -functions, *Acta Math.* **195** (2005), 61–115.
- [JM06] M. JUTILA, Y. MOTOHASHI, Uniform bounds for Rankin-Selberg L -functions, *Multiple Dirichlet series, automorphic forms, and analytic number theory*, 243–256, Proc. Sympos. Pure Math., 75, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [KS99] N. M. KATZ, P. SARNAK, Zeroes of zeta functions and symmetry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **36** (1999), 1–26.
- [KMY11] B. D. KIM, R. MASRI, T. H. YANG, Nonvanishing of Hecke L -functions and the Bloch–Kato conjecture, *Math. Ann.* **349** (2011), 301–343.
- [Ki03] H. KIM, Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2 (with Appendix 1 by D. Ramakrishnan and Appendix 2 by H. Kim and P. Sarnak), *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), 139–183.
- [KiSa03] H. KIM, P. SARNAK, Appendix: Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg Conjectures, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), 175–181.
- [KiSh02] H. KIM, F. SHAHIDI, Cuspidality of symmetric powers with applications, *Duke Math. J.* **112** (2002), 177–197.
- [Kl26] H. D. KLOOSTERMAN, On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, *Acta Math.* **49** (1926), 407–464.
- [KMV00] E. KOWALSKI, P. MICHEL, J. VANDERKAM, Mollification of the fourth moment of automorphic L -functions and arithmetic applications, *Invent. Math.* **142** (2000), 95–151.
- [KMV02] E. KOWALSKI, P. MICHEL, J. VANDERKAM, Rankin–Selberg L -functions in the level aspect, *Duke Math. J.* **114** (2002), 123–191.
- [LLY06] Y.-K. LAU, J. LIU, Y. YE, A new bound $k^{2/3+\varepsilon}$ for Rankin-Selberg L -functions for Hecke congruence subgroups, *Int. Math. Res. Pap.* **2006**, Art. ID 35090, 78 pp.
- [Li68] Y. V. LINNIK, Ergodic properties of algebraic fields [translated from the Russian by M. S. Keane], *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 45*, Springer-Verlag, New York, 1968.

- [Li11] X. LI, Bounds for $GL(3) \times GL(2)$ L -functions and $GL(3)$ L -functions, *Ann. of Math.*, **173** (2011), 301–336.
- [Ma11] R. MASRI, The asymptotic distribution of traces of cycle integrals of the j -function, *benyújtva*
- [MY11] R. MASRI, T. H. YANG, Nonvanishing of Hecke L -functions for CM fields and ranks of abelian varieties, *benyújtva*
- [Me01] T. MEURMAN, On the binary additive divisor problem, *Number theory (Turku 1999)*, 223–246, de Gruyter, Berlin, 2001.
- [Mi04] P. MICHEL, The subconvexity problem for Rankin–Selberg L -functions and equidistribution of Heegner points, *Ann. of Math.*, **160** (2004), 185–236.
- [Mi07] P. MICHEL, Analytic number theory and families of automorphic L -functions, *Automorphic forms and applications*, 181–295, IAS/Park City Math. Ser. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [MV06] P. MICHEL, A. VENKATESH, Equidistribution, L -functions and ergodic theory: on some problems of Yu. Linnik, *Proc. Int. Congr. Math. (Madrid 2006)*, Vol. II, 421–457, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006
- [MV07] P. MICHEL, A. VENKATESH, Heegner points and non-vanishing of Rankin/Selberg L -functions, *Analytic number theory*, 169–183, Clay Math. Proc. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [MV10] P. MICHEL, A. VENKATESH, The subconvexity problem for GL_2 , *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **111** (2010), 171–271.
- [Po06] A. POPA, Central values of Rankin L -series over real quadratic fields, *Compos. Math.* **142** (2006), 811–866.
- [Sa03] P. SARNAK, Spectra of hyperbolic surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **40** (2003), 441–478.
- [Sa07] P. SARNAK, Reciprocal geodesics, *Analytic number theory*, 217–237, Clay Math. Proc. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Ve10] A. VENKATESH, Sparse equidistribution problems, period bounds and subconvexity, *Ann. of Math.* **172** (2010), 989–1094.
- [Wa81] J.-L. WALDSPURGER, Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier, *J. Math. Pures et Appliquées* **60** (1981), 374–484.
- [Zh01] S. ZHANG, Gross–Zagier formula for GL_2 , *Asian J. Math.* **5** (2001), 183–290.