

Válasz Halász Gábor bírálataira

Köszönöm Halász Gábornak a rendkívül alapos, kimerítő bírálatot, és az érdekes kérdéseket. Annak idején sokat tanultam Tőle komplex függvénytanból, harmonikus analízisből, Riemann-felületekből, és speciális függvényekből. Mindez kihat a munkámra, ezért a véleménye fontos nekem. A továbbiakban részletesen válaszolok a kritikai észrevételeire és a kérdéseire.

1. Bírálom szerint jobb lett volna, ha az értekezés ugyanilyen terjedelemben csak egy tételt (az 1.3-at) tárgyalna, részletesebb magyarázatokkal. Megvallom, ez a lehetőség nem merült fel bennem, hiszen a hasonló doktori művek több rokon tételt szoktak tartalmazni, nem ritkán 5-öt vagy akár 10-et. Az értekezésbeli bizonyítások valóban hosszadalmasak és technikai jellegűek, mégis úgy gondoltam, érdemes őket egy fedél alá hozni. Mindekelőtt szerettem volna egy külső alkalmazáson keresztül bemutatni az eredmények hasznosságát. A fő választásom természetes módon Duke eloszlási tételének élesítésére esett, amelyet igyekeztem a korábbinál jobb hibataggal kimondani, hogy újdonság is legyen az értekezésben. Ehhez az alkalmazáshoz nem elegendő az 1.3 Tétel, szükség van az 1.1 és 1.2 Tételekre is. Ugyanilyen okból az 1.3 Tétel erősebb formában szerepel, mint az eredeti 2006-os közleményben: a javítást éppen az 1.1 Tétel teszi lehetővé, ami csak 2008-ban jelent meg. A többi alkalmazásra, amiket bizonyítással vagy csak hivatkozással vettem be az értekezésbe, ugyanez vonatkozik: a három tétel különféle kombinációi adják őket. Szeretném hangsúlyozni, hogy mindegyik tétel a legjobb ismert becslést tartalmazza a benne szereplő L -függvényekre. A tételek mögött húzódó módszerek is szorosan összefüggnek, pl. már az 1.3 Tétel közlésekor megelőlegeztük, hogy az eljárás működni fog az 1.2-beli családra. Működik is, de csak új ötletek bevonásával, amiket szintén hasznosnak tartottam az értekezésbe foglalni.

Persze ettől még lehetnének a bizonyítások részletesebbek. Hogy miért nem azok, annak gyakorlati okai vannak. A társszerzőimmel annak idején igen gondosan ellenőriztük a számításokat: nem csak az 1.3 Tétel kidolgozása és leírása tartott 1 évig, hanem az 1.2 Tételé is. Mindegyik bizonyítás alapos lektoráláson és revízió ment keresztül, mielőtt megjelent. A dolgozatok főszövegét lényegében változtatás nélkül emeltem át az értekezésbe, leszámítva hogy egységesítettem a jelöléseket és a kereszt-hivatkozásokat, illetve helyenként javítottam a becsléseken. A nyilvánvaló kényelmi és terjedelmi szempontok mellett azt reméltem, hogy a fenti szűrők folytán a szöveg hibamentes lesz és a bírálóim nagyobb bizalommal viseltetnek majd iránta. A 6.1 Függelék azért részletesebb, mert eredetileg előadásjegyzetnek készült, a Clay Institute kötetében jelent meg.

2. Az első kérdés az 1.3 Tétel bizonyításának technikai magjára irányul, a konvolúciós összegek elemzésére. Ebben a részben a körmódszert kombináljuk Voronoi és Kuznyecov-formuláival, és sajnos zavarólag hat, hogy ekkor már túl vagyunk ezen formulák egy-egy alkalmazásán. A legjobb ezért az eltolt konvolúciós összegeket önmagukban kezelni, tehát elfeledkezni az eredetükről, és csak arra összpontosítani, hogy a cél érdekében hatékonyan kell őket becsülnünk.

A körmódszer szokásos alkalmazásában a kört felbontjuk két részre: az első rész áll a kis nevezőjű racionális számokhoz közeli pontokból, a második rész áll a többi pontból, amelyek csak nagyobb nevezőjű racionális számokhoz lehetnek közel. A körön egy exponenciális összeget integrálunk: az első rész feletti integrál adja a főtagot, a második feletti

a hibatagot. A jelen problémában nincs főtag, tehát a kis nevezőjű racionális számok körüli ívek járulékat is kicsinek várjuk. Ebből a megfontolásból jobbnak látszik nem megkülönböztetni a kis és a nagy nevező esetét, hanem inkább egyenletesen befedni a kört válogatott nevezőjű racionális pontok körüli egybevágó ívekkel. Ez az ötlet Jutilától származik és az ún. Kloosterman-finomítás egy változatának tekinthető. Jegyezzük meg, hogy Kloosterman az 1926-os eredeti cikkében nagyon hasonló konvolúciós összegeket vizsgál, csak nála van főtag. Például a 4 négyzetszám összegeként való előállításszám a 2 négyzetszám összegeként való előállításszám önmagával vett konvolúciója, és az utóbbi előállításszám felfogható egy 1 súlyú holomorf moduláris forma Fourier-együtthatóinak. Akárhogy is, az integrálás után a vizsgált konvolúciós összeg felbomlik lényegében Gauss-összegeknek Hecke-sajátértékekkel súlyozott összegére. Halász Gábor kérdése az volt, hogy miért alkalmazzuk ezután a Voronoi-formulát, miért van szükség a Gauss-összegekről a bonyolultabb Kloosterman-összegekre áttérni. Erre a legjobb válaszom az, hogy valamiképpen ki kell használni, hogy a konvolúcióban egy csúcsforma Hecke-sajátértékei szerepelnek, és a Voronoi-formula éppen ezt teszi. A Voronoi-formula alkalmazása és a fellépő Kloosterman-összegek nemtriviális becslése már elegendő annak belátásához, hogy a konvolúciós összegek külön-külön kicsik. Az 1.3 Tétel bizonyításában ennél többre van szükség, nevezetesen hogy az összegek nem korrelálnak a Dirichlet-karakterekkel: itt segít a Kuznyecov-formula, ami a Kloosterman-összegeket tovább bontja a megfelelő automorf spektrumban.

A végjátékban megjelenő $\bar{\lambda}_g(m)\lambda_g(n)\lambda_\psi(\ell_1 m - \ell_2 n)$ együtthatókat abszolút-értékben becsüljük. Halász Gábor éleslátásával észrevette, hogy ezek konvolúció-kinézetű összegét finomabban kezelve esetleg a rögzített g moduláris forma D szintjében is szubkonvexitás érhető el. Persze elegendő lenne D -ben csak a konvexitást beállítani, mert akkor f és g szerepcseréjével a kapott két becslés között interpolálva a szimultán szubkonvexitás is következne. A részletes elemzés hónapokat venne igénybe, mert a D burkoltan a bizonyítás több helyén előfordul: kiemelten vesz részt a Jutila-féle kör módszer paramétereiben, illetve a $\|g\|_\infty / \|g\|_2$ hányadosban, ami a g -hez tartozó exponenciális összegek becsléséhez szükséges. Érzésem szerint a felvetett ötlettel a D -től való függés jelentősen javítható, és ez mindenképpen figyelmet érdemel, de a konvexitás eléréséhez több más olyan akadályt kell leküzdeni, amik nehézségben vetekszenek az eredeti problémával. Hasonló számolást már végigvittünk Blomer és Michel kollegáimmal a 2007-es Forum Math. cikkünkben, amelyben az 1.1 Tételhez hasonló Burgess-típusú becslést állítunk fel csavart moduláris L -függvényekre, a melléktípusra vonatkozó megszorítás nélkül. Ebben a munkánkban a $\sum_{m,n} \bar{\lambda}_g(m)\lambda_g(n)\lambda_\psi(\ell_1 m - \ell_2 n)$ összegre úgy tekintünk, mint a $\sum_{\ell_1 m - \ell_2 n = h'} \bar{\lambda}_g(m)\lambda_g(n)$ és a $\lambda_\psi(h')$ konvolúciójára, amit aztán a spektrális nagy-szítával becsülünk tovább. Végeredményben a D kitevőjét $9/16$ -nak találtuk, ami messze van az $1/4$ konvexitási kitevőtől. Az 1.1 Tétel egyik érdekessége éppen az, hogy a konvexitási kitevő Bikovszkij más jellegű módszerével ténylegesen elérhető, lásd az (1.5)-öt az értekezésben. A mi eredeti eljárásunk a D kitevőjét még akkor sem viszi $7/16$ alá, ha a $\|g\|_\infty / \|g\|_2$ hányadosra a legoptimistább D -től való függést feltételezzük (amitől igen messze vagyunk, egyelőre csak négyzetmentes D -re ismerünk nemtriviális eredményt ebben a kérdésben). Persze tekinthetünk a $\sum_{m,n} \bar{\lambda}_g(m)\lambda_g(n)\lambda_\psi(\ell_1 m - \ell_2 n)$ összegre úgy is, mint osztatlan hármaskonvolúcióra. Ennek általam ismert leghatékonyabb elemzése az automorf spektrumban lehetséges úgy, hogy az $L^2(\Gamma_0(D\ell_1\ell_2)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ térben kifejezzük őt $\langle \bar{G}(\ell_1 w)G(\ell_2 w), \Psi(w) \rangle$ alakú belső szorzatként, ahol $G(w)$ (ill. $\Psi(w)$) alkalmas sima vektorok a $g(z)$ (ill. a $\psi(z)$) formához tartozó irreducibilis automorf reprezentációban. A Plancherel-formula miatt a belső szor-

zat D -től való függése ugyanaz lesz, mint a $\|\overline{G}(\ell_1 w)G(\ell_2 w)\|_2$ normáénak. Ezen a ponton jobb ötlet híján visszajutunk a már említett probléma általánosításához: milyen nagy lehet a $\|G\|_\infty / \|G\|_2$ a D függvényében.

3. Merre tovább? – kérdezi a bírálóm. A $\lambda_f(n)\lambda_g(n)\chi(n)$ együtthatós Dirichlet-sor esetét tartalmazza az 1.3 Tétel, mert az lényegében az f és a $g \otimes \chi$ moduláris forma Rankin–Selberg L -függvényével egyezik meg, aminek konduktora nagyjából $D_f^2 D_g^2 q^4$. Mindazonáltal nagyon is érdekes kérdés, hogy erre a speciális családra jobb szubkonvex becslés igazolható-e, mint általában, ahogyan az 1.1 Tétel is élesíti az 1.2 Tételt a csavart moduláris L -függvényekre. Az egyik legizgalmasabb kérdés, amit Halász Gábor is felvetett, hogy mi mondható a Rankin–Selberg L -függvényekről, amikor egyik forma sincs rögzítve. Ennek legnehezebb esete az, amikor a két forma valamilyen értelemben közel van egymáshoz, mert ilyenkor a konduktor jóval kisebb a megszokottnál, tehát rövidebb összegben kell látnunk a tagok részleges kioltódását. A szubkonvex becslések egy eredeti, geometriai megközelítésével Michel és Venkatesh jelentős sikereket értek el a közelmúltban. Ez a módszer szerveesebben használja az automorf formák elméletét, mint a miénk, pl. a Hecke-sajátértékek helyett általánosabb automorf periódusokkal dolgozik. Előnye, hogy számtestek felett ugyanolyan jól működik, mint a racionális számok felett. A két módszer között egyfajta átmenetet képez a Blomerrel közös újabb keletű munkánk, amit a Duke Math. Journal és a Geom. Funct. Anal. hasábjain közöltünk. Akárhogy is, az általános problémára alkalmasabbnak látszik a geometriai módszer. Michel és Venkatesh a Rankin–Selberg L -függvényeket az összes aspektusban hatékonyan tudja becsülni mindaddig, amíg a két forma kellő távolságra van egymástól. A területen dolgozók között általános a vélekedés, hogy a legfontosabb aktuális probléma az $L(s, f \otimes \tilde{f})$ szubkonvex becslése (bármely aspektusban), vagy másképpen a $GL_3(\mathbb{R})$ csoport önduális L -függvényeinek nemtriviális becslése. Ez nehéz feladatnak tűnik. A terveim között kiemelt helyet foglal el a $GL_n(\mathbb{R})$ csoportra nemrégiben kifejlesztett Voronoi- és Kuznyecov-típusú formulák tanulmányozása, illetve az újformák elméletének készség szintű megértése. Sok érdekes új eredmény született a többszörös Dirichlet-sorok elméletével is, aminek szintén nem vagyok szakértője. Pl. Hoffstein nemrégiben feltett egy hosszú kéziratot az arXiv-ra, amiben az 1.1 Tételt bizonyítja holomorf moduláris formákra, de a melléktípusra való megszorítás nélkül. Ez figyelemre méltó, hiszen a Ramanujan-sejtés hiánya miatt a θ paraméter mindaddig makacsul megjelent a kitevőben, erről szól a már említett Forum Math. cikkünk is. Jó lenne tudni, hogy a kézirat helytálló-e, illetve megérteni a benne szereplő módszerek hatáskörét, pl. hogy működik-e a Maass-formák esetére.

Végezetül Halász Gábor megkérdezte, hogy létezik-e olyan „szuper” szubkonvex becslés, amelyben a kitevő lineárisnál gyorsabban tart a nullához, amint $\Re s \rightarrow 1 -$. Nem ismerek ilyen becslést, és szkeptikus is vagyok, hogy a közeljövőben ilyet tudunk majd bizonyítani. A meglévő eredmények – amennyire én tudom – mind kihasználják a Dirichlet-együtthatók periodicitását, ami lehetővé teszi Vinogradov mély módszereinek alkalmazását a fellépő exponenciális összegekre. Úgy tűnik, áttörésre van szükség az általános esethez, hiszen az automorf L -függvények együtthatói messze nem periodikusak.

Budapest, 2011. december 19.

Harcos Gergely
MTA Rényi Intézet