VÉLEMÉNY

Harcos Gergely: Subconvex Bounds for Automorphic L-functions and Applications

doktori értekezéséről

A téma. Már négy évtizeddel ezelőtt propagálta Turán Pál a moduláris formák akkor itthon még hiányterületnek számító elméletét. Egy évtizede, hogy kezdtek megjelenni érdemleges eredmények fiatal magyar matematikusok, az elsők között Harcos Gergely tollából, és ez az első nagydoktori disszertáció.

Nem csoda, hogy lassan ment a honosítás. Amellett, hogy moduláris formák a legkülönbözőbb területeken merülnek fel alkalmazásként, a legkülönbözőbb matematikai diszciplínákat igénylik eszközként. A valamelyik, de többnyire mind a két irányú kapcsolatra példa az analitikus, algebrai és diofantikus számelmélet, reprezentáció-elmélet, algebrai geometria, harmonikus analízis és parciális differenciálegyenletek sokaságokon, speciális függvények, matematikai fizika, gráfelmélet.

A szűkebb téma. Moduláris formán itt a felső félsíkban értelmezett $f(z)$ függvényt kell érteni, ami az $SL(2, Z)$ egy *kongruencia-részcsoportja* elemeinek, azaz egy D_f modulus szerint az identitásmátrixszal kongruens mátrixoknak egy adott $\chi_f(d) \pmod{D_f}$ karaktertől is függő hatására invariáns, a számelméleti alapon definiált úgynevezett *Hecke-operátor*ok sajátfüggvénye $\lambda_f(n)$ sajátértékekkel, függvénytani szempontból pedig vagy holomorf (ezek a *holomorf formá*k) vagy a Laplace-operátor sajátfüggvénye (a technikailag általában nehezebben kezelhető *Maass-formá*k). Az

$$L(f, s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} \quad (\Re s > 1)$$

Dirichlet-sor a forma *L-függvény*e, ami analitikusan kiterjeszthető az egész síkra, akárcsak a legegyszerűbb speciális esetben a Riemann-féle ζ-függvény.

A ζ-függvény becslésével a Riemann-sejtés megközelítéseként kezdtek foglalkozni, de kiderült, hogy már annak vannak számelméleti következményei. Általános vélekedés, hogy a sejtett nagyságrend elérése ugyanolyan nehéz probléma, mint maga a Riemann-sejtés.

Hasonló az általános moduláris formák esete is. A definíció jó becslést ad a $\Re s > 1$ félsíkban, az s és az $1 - s$ pontbeli értékeket összekapcsoló függvényegyenlet révén a $\Re s < 0$ félsíkban is. Általános komplex függvénytani tételekből következik az úgynevezett *konvex* becslés a $0 \le \Re s \le 1$ kritikus sávban. Ennél (akármelyik paraméterben) hatványrendben jobb korlát *szubkonvex becslés.*

Eredmények. Az értekezés három ilyen szubkonvex becslést tartalmaz. Az 1.1 Tétel V. Blomerrel közös, a Journal für Reine und Angewandte Mathematik-ban jelent meg, az 1.2 Tétel V. Blomerrel és Ph. Michellel közösen az Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure-ben, az 1.3 Tétel (és alkalmazása) egy Ph. Michellel közös, 75 oldalas dolgozat az Inventiones Mathematicae-ben. Mindkét társszerző, különösen az utóbbi az elmélet élvonalához tartozik.

Az 1.1 Tétel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)\chi(n)}{n^s}$$

alakú függvényekre ad szubkonvex korlátot a $\chi(n)$ Dirichlet-karakter modulusában, ha a $\chi_f(n)$ karakter triviális (azaz a főkarakter), Harcos Ph.D. disszertációja egy tételének más módszerrel történő numerikus javítása. Az volt az első ilyen tétel, ami Maass-formákat is megengedett.

Az 1.2 Tétel magáról $L(f,s)$-ről szól, a szubkonvexitás D_f-re vonatkozik. Az újdonsága – a numerikus javítás mellett –, hogy a χ_f karakterről nem kell feltenni, hogy primitív, mint a korábbi tételekben, elég, ha nem a triviális. Ennek az alkalmazásokban van szerepe.

Minden szempontból az 1.3 Tétel az értekezés legjobb eredménye. Két formából felépülő

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)\lambda_g(n)}{n^s},$$

úgynevezett *Rankin–Selberg-féle L-függvény*ek szubkonvex becslése az egyik (a továbbiakban a D_f) modulusban, feltéve, hogy $\chi_f\chi_g$ nem triviális.

Az elméleti érdekessége – bár a bizonyításban ennek nincs szerepe –, hogy ilyen L-függvény a $GL(4,R)$ csoporthoz tartozik, és így beleillik Langlands nagyszabású programjába, ami általános automorf formák analitikus leírását is célul tűzte ki. A rang szempontjából tudtommal ma is 4 a csúcs.

A korábbi eredmények csak szigorú megkötések mellett voltak érvényesek. Az utolsóban, a társszerző, Ph. Michel Annals of Mathematics-beli cikkében a $g(z)$ formának holomorfnak kellett lennie. Itt tetszőleges Maass-forma is lehet.

A nem említett paraméterekben minden korlát, ha nem is konvex, de hatványrendű, ami lényeges az alkalmazások szempontjából.

Következmények. Nem kis szenzációt keltett 20 egynéhány évvel ezelőtt, amikor W. Duke teljes általánosságban bebizonyította Linnik klasszikus sejtését adott diszkriminánsú egész együtthatós másodfokú egyenletek gyökei ekvivalenciaosztályainak egyenletes eloszlásáról a hiperbolikus metrika szerint a felső félsíkon, ha a diszkrimináns $-\infty$-hez tart, illetve a gyököknek megfelelő zárt geodétikusok egyenletes eloszlásáról a moduláris csoport Riemann-felületén, ha a diszkrimináns $+\infty$-hez tart.

Mármost a három tétel 1.4 Következménye szerint az ekvivalencia-osztályok minden elég nagy részcsoportján és aszerinti mellékosztályán is egyenletes az eloszlás, az értekezésben eszközölt numerikus javításoknak köszönhetően erősebb kvantitatív formában, mint a 3. dolgozatban eredetileg szerepelt.

A dolgozatban több, mások által történt alkalmazás is idézve van. Emellett az 1.1 Tételt lényegesen használja a másik kettő, de a szerzőnek az értekezésben nem tárgyalt más szubkonvex becslése is.

A módszer. Az apró betűs részben az 1.3 Tétel módszerét vázolom. Nem tartozik szigorúan az értékeléshez, de segít a megértésben és érzékelteti, milyen összetettek a bizonyítások.

A képletekben csak a leglényegesebb mennyiségeket tűntettem fel, például a változójától simán függő tagokat, tényezőket nem; erre utalnak a hullámos egyenlőségjelek.

Eszerint például

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)\lambda_g(n)}{n^s}\right|^2 \approx \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_f}(m)\lambda_f(n)\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n).$$

Az első lépés angol szóval az amplification, fordítsuk *hízlalás*nak: a becslendő mennyiség kiegészítendő súlyozott tagokkal úgy, hogy a teljes összeg kiszámolható és ne túl nagy legyen.

Itt az $f(z)$ forma kiegészítéséről van szó ugyanolyan invarianciával rendelkező formák egy ortogonális rendszerévé – jelöljük őket $\varphi(z)$-vel. A hízlalt sor tehát

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)\sum_{\varphi}\overline{\lambda_\varphi}(m)\lambda_\varphi(n).$$

(A súlyokat lecsaltam.) A belső összegre vonatkoznak Petersson és Kuznyecov nevezetes formulái:

$$\sum_{\varphi}\overline{\lambda_\varphi}(m)\lambda_\varphi(n)\approx\sum_{c\equiv 0\pmod{D_f}}\sum_{a=1}^{c}\chi_f(a)e^{2\pi i\frac{ma+n\overline{a}}{c}};$$

a belső szumma *Kloosterman-összeg*, benne $\overline{a}$ a multiplikatív inverze $\pmod c$.

Az ezen utóbbi által okozott számelméleti nehézséget *Voronoi formulája* – egy analitikus kifejezése annak, hogy $g(z)$ invariáns $\left(\begin{smallmatrix} a & \cdot \\ c & \overline{a}\end{smallmatrix}\right)$ hatására –,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_g(n)e^{2\pi i\frac{n\overline{a}}{c}}\approx\chi_g(a)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_g(n)e^{-2\pi i\frac{na}{c}}$$

úgy kerüli meg, hogy $\overline{a}$-ból a-t csinál. (Ennek persze feltétele, hogy $c\equiv 0\pmod{D_g}$, de feltehető, hogy $D_g|D_f$.) Az előző képletbe helyettesítve, azt a hízlalt soréba:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)\sum_{a=1}^{c}\chi_f\chi_g(a)e^{2\pi i\frac{(m-n)a}{c}};$$

a c-re vett összegzést elhagytuk, mert ez a hármas összeg külön-külön minden c-re meg lesz becsülve.

A $\chi_f\chi_g(a)\stackrel{\text{def}}{=}\chi(a)(\neq$ főkarakter) egyszerűsítéssel, $h\stackrel{\text{def}}{=}m-n$ értékei szerint csoportosítva a tagokat, ez

$$=\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{c}\chi(a)e^{2\pi i\frac{ha}{c}}\sum_{\substack{m,n\\ m-n=h}}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n);$$

h negatív értékei hasonlóan kezelhetők, $h=0$ esetén az a szerinti úgynevezett *Gauss-összeg* eltűnik. Elemi tény, hogy ezen utóbbi a h-tól való függésben

$$\sum_{a=1}^{c}\chi(a)e^{2\pi i\frac{ha}{c}}\approx\overline{\chi}(h)\sum_{a=1}^{c}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{c}}.$$

A már csak c-től függő szumma abszolút értéke ismert, a továbbiakban eltekinthetünk tőle, és csak $\overline{\chi}(h)$-val kell számolnunk.

Ami a legbelső, $m-n=h$-ra kiterjesztett konvolúciós összeget illeti, erre való a Hardy és Littlewood nevéhez fűződő *körmódszer*. Legyen

$$G(\alpha)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_g(n)e^{2\pi in\alpha}.$$

A konvolúciós összeg

$$|G(\alpha)|^2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)e^{2\pi i(n-m)\alpha}$$

$-h$-adik Fourier-együtthatója:

$$\sum_{\substack{m,n\\ m-n=h}}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)=\int_0^1|G(\alpha)|^2e^{2\pi ih\alpha}\,d\alpha.$$

A módszer abban áll, hogy jó közelítéssel bizonyos q-kra a $\frac{p}{q}$ $(0<p\leq q,\ (p,q)=1)$ pontok egymástól diszjunkt kis környezeteire bontjuk a $[0,1]$ intervallumot. q-nak csak D_g többszöröseit választhatjuk – mindjárt kiderül, miért –, ezek azonban nem adnának kellő lefedettséget.

Ha a diszjunktságot feladjuk, és minden pontot átlagosan ugyanannyiszor fedünk le, akkor a teljes integrál mégis közelíthető a környezeteken vett integrálok átlagával. Ez Jutila más célra kitalált eljárása. Egy ilyen integrál,

$$\int_{[\frac{p}{q}-\delta,\frac{p}{q}+\delta]}|G(\alpha)|^2e^{2\pi ih\alpha}\,d\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)e^{2\pi i\frac{(n-m+h)p}{q}}\int_{-\delta}^{\delta}e^{2\pi i(n-m+h)\alpha}\,d\alpha.$$

Ha δ minden környezetre közös, akkor az utolsó integrál p-től, q-tól független, a változóitól simán függő mennyiség, ilyentől ebben a vázlatban mindig eltekintünk, és mondhatjuk, hogy a konvolúciós összeg,

$$\sum_{\substack{m,n\\ m-n=h}}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)\approx\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)\sum_{q}\sum_{\substack{p=1\\(p,q)=1}}^{q}e^{2\pi i\frac{(n-m+h)p}{q}}.$$

A χ-t tartalmazó Gauss-összeg viselkedését is figyelembe véve, marad tehát

$$\sum_{h=1}^{\infty}\overline{\chi}(h)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)\sum_{q}\sum_{\substack{p=1\\(p,q)=1}}^{q}e^{2\pi i\frac{(n-m+h)p}{q}}.$$

A legbelső összeg ismét Gauss-összeg, a $\pmod q$ főkarakterrel képezve. Ha mind az m, mind az n változóra ismét ráeresztjük a Voronoi-formulát – itt jön be a $q\equiv 0 \pmod{D_g}$ feltétel –,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\overline{\lambda_g}(m)e^{-2\pi i\frac{mp}{q}}\approx\chi_g(p)\sum_{m=1}^{\infty}\overline{\lambda_g}(m)e^{2\pi i\frac{m\overline{p}}{q}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_g(n)e^{2\pi i\frac{np}{q}}\approx\chi_g(\overline{p})\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_g(n)e^{-2\pi i\frac{n\overline{p}}{q,}},$$

($\overline{p}$ most $\pmod q$ vett inverzet jelent), akkor

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)\sum_{q}\sum_{\substack{p=1\\(p,q)=1}}^{q}e^{2\pi i\frac{(n-m+h)p}{q}}\approx\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q\equiv 0\pmod{D_g}}\sum_{\substack{p=1\\(p,q)=1}}^{q}e^{2\pi i\frac{hp+(m-n)\overline{p}}{q}},$$

ahol éppen fordítva, mint korábban, Gauss-összeg alakult át a főkarakterrel ($=\chi_g(p)\chi_g(\overline{p})$) képzett Kloosterman-összeggé.

A cél az volt, hogy ismét alkalmazhassuk a Petersson- és Kuznyecov-formulákat – ezúttal visszafelé olvasva! –, amelyek a jobb oldalon az utolsó előtti, q-ra kiterjesztett szummát a $\pmod{D_g}$ kongruencia-részcsoport főkarakterhez tartozó moduláris formái egy ortogonális rendszerével – jelöljük ezeket $\psi(z)$-vel – fejezik ki:

$$\sum_{\psi}\overline{\lambda_\psi}(h)\lambda_\psi(m-n),$$

feltéve, hogy $m>n$. (Az $m<n$ esetre hasonló formula érvényes, az $m=n$ tagokat közvetlenül kell kezelni.) h-ra is összegezve

$$\sum_{\psi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\overline{\lambda_g}(m)\lambda_g(n)\lambda_\psi(m-n)\overline{\sum_{h=1}^{\infty}\lambda_\psi(h)\chi(h)}.$$

Itt már minden egyes $\psi(z)$-re helyettesíthetjük a $\overline{\lambda_g}(m)$, $\lambda_g(n)$, $\lambda_\psi(m-n)$ együtthatókat az abszolút értékükkel, felhasználva az ismert tényt, hogy ezek négyzetes átlagban korlátosak, és készen lennénk, ha a legbelső összegre volna a χ karakter modulusában, D_f-ben szubkonvex becslésünk. Ez éppen az 1.1 Tétel esete.

A procedúra tehát kezdődik elölről azzal az eltéréssel, hogy nem kell a teljes kört megismételni, hanem a Gauss- és a konvolúciós összeget tartalmazó képlet megfelelőjébe már be lehet vinni az abszolút értéket.

A valóságban minden sokkal bonyolultabb. Komoly technikai problémát jelent, hogy a Laplace-operátor spektruma nem diszkrét, a (Petersson- és Kuznyecov-féle) spektrális formulákban a folytonos részével is számolni kell.

Lépten-nyomon szükség van az analitikus számelmélet klasszikusabb technikáira is. A függvényegyenleteket véges alakban kell közelíteni, összegeket és integrálokat síma függvényekkel le kell vágni, fel kell darabolni, ami rendszerint a Mellin-transzformáció, Bessel-transzformációk oda-vissza való alkalmazását vonja maga után, a különböző tartományokban máshogy és máshogy becsülve. Már a program gyakorlati végigvitele is komoly teljesítmény. (Nem véletlen, hogy az Inventiones-cikk tudtommal egy évig készült.)

Mi ebben a szerzők, speciálisan Harcos érdeme? A mindhárom tételben alapvető hízlalásos módszer ebben a témában először Duke, Friedlander és Iwaniec úttörő munkájában jelent meg. Már ott szerepet játszanak Petersson, Kuznyecov, Voronoi formulái, konvolúciós összegek, a körmódszer egy módosítása.

Az 1.1 Tétel eredeti változata Harcos önálló munkája, itt szerepel először a Jutila-féle körmódszer. A jelen változat pontosan követi Bikovszkij dolgozatát, a jobb numerikus becslések mellett kijavítva annak hiányosságait, kidolgozva hiányzó részleteket.

Az 1.3 Tétel közvetlen előzménye Ph. Michel cikke a Rankin–Selberg-féle L-függvéyekről. A hízlalás konkrét formája abból való. Ott jelent meg a Gauss- és a konvolúciós összeget tartalmazó alaknak (az ittenitől különböző) spektrális felbontás segítségével történő visszavezetése alacsonyabb rangú formákra.

Másfelől világos az előzőkből, hogy a körmódszer Jutila-féle változata Harcos adaléka volt. További részleteket remélve megkérdeztem magát Michelt. Felhatalmazott, hogy szabadon használhatom a kapott információt.

Lényegében az eddigieket erősítette meg: ő ismerte fel, hogy a Gauss- és a konvolúciós összegek egyedi becslése nem vezet célhoz, de kimutatható a kioltás ezek összegeiben spektrális úton visszavezetve azokat egy másik szubkonvexitási problémára; ennek köszönhette, hogy az Annals of Mathematics elfogadta a dolgozatát. Nem tudott viszont megbirkózni a Maass-forma $g(z)$ esetével. Harcossal való beszélgetés során jutottak arra a meggyőződésre, hogy a Jutila-féle körmódszer segíthet a probléma megoldásában. Az alkalmazásban Harcosé volt a vezető szerep, míg neki volt nagyobb tapasztalata abban, mi a teendő az után. A kivitelezés azonban nehéznek bizonyult, a közös munkában mindegyikük részvétele 50-50% volt. Több kényes analitikus nehézség áthidalása Harcos érdeme volt.

Az 1.2 tétel időben az 1.3 után keletkezett, lényegében követi annak bizonyítását. A Jutila-féle körmódszerre itt nincs szükség, mert csak a speciális osztószámfüggvény konvolúciós összegei lépnek fel. Ennek zavaró főtagja is van, amit technikailag ügyesebben kezelnek, mint korábban, amennyiben alkalmas magfüggvénnyel eltűntetik. A közelítő függvényegyenlet felállításában hasznosnak bizonyultak Harcos korábbi ilyen irányú vizsgálatai.

Formai szempontok. Dicséretes, hogy a pályázó értekezést írt, és nem néhány cikkének az összefűzéséből áll a mű.

Ennek ellenére nagyon nehéz olvasmány, meggyőződésem, hogy még a bennfentesek számára is, magam pedig nem tartozom hozzájuk.

Az általában kedvcsináló bevezetést olvasva rögtön felmerült bennem, hogy visszaadom a bírálói megbízásomat. Azért nem tettem mégsem, mert szerencsére átugrottam az első oldalt. A bizonyításokban nagyon sok a magyarázat nélküli hivatkozás. A formulák, eljárások alkalmazására gyakran csak utalás történik, az olvasó már csak a végeredményt látja, és az ő feladata marad, hogy kitalálja, mi honnan származik.

Furcsa módon az egyetlen kivétel az Appendix 6.1 pontja, ahol részletesen el vannak magyarázva az egyik alkalmazási terület alapfogalmai, ami az értekezésben csak érintőlegesen szerepel, és amihez a pályázónak az értekezés tanúsága szerint közvetlenül kevés köze van.

Tudom, mit fog minderre válaszolni. Sok igazság van benne. Mégis, sokkal szebb lenne az értekezés, ha ugyanilyen terjedelemben csak egy tételt (az 1.3-at) bizonyítana benne részletesebb magyarázatokkal. Az összefoglaló értékelésem ugyanez maradna, legfeljebb a téma rejtelmeibe való jobb betekintés birtokában:

Összefoglalás. Harcos Gergely értekezése egy modern, nagyon fontos, gyorsan fejlődő, nehéz, széleskörű ismereteket igénylő, itthon még kevéssé képviselt területével foglalkozik a matematikának. A benne foglalt eredmények komoly előrelépést jelentenek az elméletben. Egyértelmű, hogy társszerzői mellett ebben neki is lényeges szerepe volt, konkrétan elsősorban a Jutila-féle körmódszer szubkonvexitási problémákra való alkalmazásában, és ilyen problémák alacsonyabb rangú automorf formákra való visszavezetésének egy új, Petersson és Kuznyecov formuláit szokatlan módon használó eljárásában.

A szűkebb szakterületen is nagy verseny folyik, amibe híres matematikusok is beszálltak. Harcos Gergely ezekkel az eredményeivel, ha nem is az élen, de az élbolyban van. Az értekezés vitára bocsátását, és Harcos Gergelynek a doktori cím odaítélését feltétlenül javasolom.

Kérdéseim. 1. A bizonyítások számos lépése deus ex machina számomra. A vázlatomban a főkarakter Gauss-összege (az első p-re vett szumma) zárt alakban megadható. Ehelyett Kloosterman-összeget csinálunk belőle, holott korábban éppen annak örültünk, hogy Gauss-összegünk van.

Másfelől az utolsó lépésben $\overline{\lambda_g}(m)$, $\lambda_g(n)$, $\lambda_\psi(m-n)$ mindegyikét az abszolút értékükkel helyettesítettük. Nem lehet a konvolúció-kinézetű összeget finomabban kezelni, és így egyidejűleg esetleg D_g-ben is szubkonvexitást elérni?

2. Merre tovább? $\lambda_f(n)\lambda_g(n)\chi(n)$ együtthatós L-függvények a következő cél?

Vagy a becslések kvalitatív élesítése is soron van? Létezik például olyan "szuper" szubkonvex becslés, amelyben a kitevő lineárisnál gyorsabban tart 0-hoz, amint $\Re s \to 1-0$? (Persze ilyen – tudtommal – a közönséges L-függvényekre is csak a komplex változóban ismert, a modulusban annak csak nagyon speciális értékei mellett.)

Budapest, 2011. november 21.

Halász Gábor