Opponensi vélemény

Böhm Gabriella: Kvantum grupoidok

c. MTA doktori értekezéséről

Böhm Gabriella értekezése a PhD fokozatának megszerzése óta született dolgozatai közül hatot foglal egybe, mindegyik Hopf-algebrák általánosításaihoz kötődik.

Az értekezés címében szereplő kvantum-grupoidok a kvantum-csoportok általánosításai. Az utóbbi fogalomnak általánosan elfogadott definíciója nincs, valamilyen Hopf-algebrát szokás érteni rajta. A név abból származik, hogy kvantum szimmetriákat írnak le kvantum-csoportokkal. Hopf-algebrára talán a legegyszerűbb példa valamely véges csoport test feletti csoportalgebrája, de Hopf-algebra struktúrája van egy Lie-csoport univerzális burkolóalgebrájának is. A továbbiak szempontjából lényeges megemlíteni, hogy Hopf-objektumok természetes módon definiálhatók monoidális kategóriákban, mégpedig úgy, hogy egy kommutatív gyűrű feletti modulusok kategóriájában (amely a tenzorszorzattal monoidális kategória) a Hopf-objektumok pontosan a Hopf-algebrák. Hopf-algebrák természetes módon lépnek fel a topológiában is.

A Hopf-algebrák általánosításának szükségessége azért merült fel, mert számos, a fizikában előkerült szimmetria leírására a Hopf-algebrák nem alkalmasak, és hasonló jelenségek voltak észlelhetők az algebrai topológiában és a nem-kommutatív geometriában is. A Hopf-algebráknak számos általánosítása született, és ezek közül talán éppen a gyenge Hopf-algebrák és a náluk még általánosabb Hopf-algebroidok lettek a legsikeresebbek (ezt a két fogalmat Böhm Gabriella Szlachányi Kornéllal közösen vezette be). Ez valószínűleg azért lett így, mert e fogalmak kialakítása nem egy-egy konkrét eset leírásának igényével született, hanem a Hopf-algebrák kategorikus megközelítésében természetes feltételek megadásával történt. (Itt kívánom megjegyezni, hogy a Hopf-algebroidoknál az alapgyűrű nem feltétlenül kommutatív.) Böhm Gabriella mind a gyenge Hopf-algebrák, mind a Hopf-algebroidok elméletét számos irányban építette, a Hopf-algebrák elméletének megfelelő részeit általánosítva.

A jelen értekezés legfőbb eredményei nem tételek, hanem fogalmak és elmélet-fejezetek. A kategóriaelmélet sajátos tulajdonsága, hogy itt a munka legjelentősebb része a megfelelő fogalmak megtalálása, olyanoké, amelyekkel természetes módon fejezhetők ki korábbi elmélet-fejezetek általánosabb szinten. Ez történik itt is. A tételek sokszor annyira technikaiak, hogy ezeket nem szakemberek számára érthetően megfogalmazni eléggé reménytelen vállalkozás.

Az értekezésben a gyenge Hopf-algebrák leginkább csak kiindulópontként vannak jelen. Egyetlen fejezet foglalkozik kifejezetten velük, a második, amely gyenge Hopf-algebrák feletti Doi-Hopf-modulusokról szól. Ezek szerepeltetése bizonyára annak köszönhető, hogy a szokásos Doi-Hopf-modulusok szerves részét alkotják a monádok Street-féle formális elméletének, és a kiterjeszthetőségük a gyenge Hopf-algebrák esetére lényeges építőköve a monádok gyenge elméletének, amely az értekezés utolsó két fejezetének a témája. Ezt a kiterjesztést adja a második fejezet, a következő fogalmak, ill. konstrukciók megadásával: gyenge Doi-Hopf-adatok, gyenge Doi-Hopf-modulusok, gyenge csapott szorzat, gyenge Doi-Hopf-adatok integráljai.

Az értekezés harmadik, negyedik és ötödik fejezete Hopf-algebroidokról szól. A Böhm és Szlachányi által bevezetett Hopf-algebroid-fogalom jellemzője az, hogy egy adott algebrán nem egy, hanem két kompatibilis bialgebroid-struktúra van jelen az algebra, ill. az ellentettje fölött. Ez két konvolúcióalgebrát eredményez, amelyeket egy Morita-összefüggés köt össze. Az identitás leképezés a Morita-összefüggés egyik bimodulusának az eleme, az antipód a másiknak. Ez a konstrukció természetes, és szerencsésebbnek látszik más Hopf-algebroid definícióknál. A szóban forgó három fejezet a Hopf-algebrák elméletének több részét viszi át Hopf-algebroidokra. A harmadik fejezet az alapvető összefüggéseket fejti ki – ez lényegében a Hopf-algebroidok elméletének a megalapozása. A negyedik fejezet a Hopf-algebroidok integrálelméletét építi fel. Itt három jelentős tételt is ki tudok emelni:

– a Maschke-típusú tételt (a szeparábilis, ill. féligegyszerű bővítések jellemzése – ez a fejezet 3.1-es, a tézisek 10. tétele) és a
– duális Maschke-típusú tételt (ez a fejezet 3.2-es, a tézisek 11. tétele);
  itt érdemes megjegyezni, hogy a duális tétel formailag duálisa az előző tételnek, de a bizonyítás nem dualizálható, mert maga a struktúra nem önduális;
– a Frobenius-típusú tételt (a Frobenius-bővítések jellemzése – ez a fejezetben a javítás 3. következménye, a tézisek 12. tétele).

Az ötödik fejezet a Hopf-algebroidokkal való Galois-bővítések elméletet írja le; innen a Kreimer-Takeuchi-típusú tételt emelem ki (ez a fejezet 3.3-as lemmája és 4.3-as következménye, a tézisek 17. tétele), valamint a Morita-elméletet is használó gyenge és erős struktúratételt (a fejezet 5.4-es tétele és 5.5-ös állítása, a tézisek 18. és 19. tétele).

Az értekezés két utolsó fejezete a gyenge Hopf-algebrák elméletének „tiszta" kategóriaelméleti megalapozását tűzi ki célul. Ehhez szeretném megjegyezni, hogy az Eilenberg-Moore-kategóriák, a monádok és a monoidális kategóriák az algebrai elméletek kategóriaelméleti tárgyalásának fontos eszközei. Finomítja az algebrai és más elméletek tárgyalását, ha nem csak a kategóriákat és a funktorokat, hanem a természetes transzformációkat is figyelembe vesszük – ez a célja a 2-kategóriák és vele rokon fogalmak (pl. a bikategóriák) bevezetésének. Bénabou vette észre, hogy a monád-konstrukció elvégezhető minden 2-kategóriában, sőt, minden bikategóriában, és a szokásos monádok így a ***Cat*** 2-kategóriában megadott monádok. Ez tekinthető a monádok formális definíciójának, a monádok Street-féle formális elmélete pedig a monádok hagyományos elméletének az általánosítása erre a szintre. Ez a szemlélet rendkívül alkalmasnak bizonyult Hopf-algebrák (és általánosításaik) tárgyalására – ezt lényegében talán Pareigis vette észre, de formálisan a disszertáns írta le először az értekezés 5. fejezetéül szolgáló dolgozat bevezetésében.

Az 5. fejezet a monádok gyenge elméletének a megalapozását adja. Itt a szerző a szokásos fogalmak „gyenge" változatait vezeti be. A szerző gyenge Doi-Hopf-modulusokról szóló cikkének (ez a jelen értekezés 2. fejezete) egyik alapvető fogalma a gyenge szemidirekt szorzat. Erre építve definiál itt egy bikategória feletti gyenge Eilenberg-Moore-bikategóriát, gyenge koszorúszorzatot, majd a gyenge bialgebrák monoidális struktúrájában fontos szerepet játszó gyenge felemeléseket. A gyenge elméletnek fontos tétele az, amely egy 2-kategória és a fölötte vett gyenge Eilenberg-Moore-2-kategória monádjai közti kapcsolatot írja le (ez az 5. fejezet 2.3, a tézisek 30. tétele), valamint a gyenge felemeléseket leíró tétel (az 5. fejezet 4.4, a tézisek 34. tétele). A fejezet vége számos érdekes példát közöl gyenge felemelések előfordulására.

A 6. fejezet a bimonádok (ezek egy monoidális kategória feletti alkalmas monádok) és a gyenge bialgebrák közös általánosításaként bevezeti a gyenge bimonádok fogalmát monoidális kategóriákon, majd a Hopf-monádokat. Az itt szereplő tételek közül azt emelem ki (6. fejezet 2.11-es, tézzisek 43. tétele), miszerint egy Cauchy-teljes monoidális kategória gyenge bimonádjainak a kategóriája ekvivalens egy olyan kategóriával, melynek objektumai egy szeparábilis Frobenius-monoidból és egy, az afölötti bimodulusok kategóriáján értelmezett bimonádból állnak.

Két kérdésem van:

1. Lehet-e már tudni, hogy a Schauenburg-féle Hopf-algebroid fogalma ténylegesen általánosabb-e az itt bevezetettnél?
2. Lack és Street megmutatta, hogy egy $\boldsymbol{K}$ 2-kategóriára az $\mathbf{EM}(\boldsymbol{K})$ Eilenberg-Moore-2-kategória a $\boldsymbol{K}$-nak egy alkalmas lezárása. Milyen kapcsolatban van az $\mathbf{EM}^{w}(\boldsymbol{K})$ gyenge Eilenberg-Moore-2-kategória a $\boldsymbol{K}$-val, megkapható-e $\boldsymbol{K}$-ból valamilyen lezárási konstrukcióval?

Összefoglalva: Böhm Gabriella a kategóriaelmélet egy ágában, a Hopf-algebrák általánosításai terén jelentős eredményeket ért el, ezt tükrözi a disszertációja. Munkásságának legerősebb oldala a fogalomalkotás és ehhez kapcsolódóan elméletek kiépítése. Melegen javaslom nyilvános védésének kitűzését és számára az MTA doktora cím odaítélését.

Budapest, 2012. február 6.

Márki László
a matematikai tudomány doktora