Bírálói vélemény

Böhm Gabriella

Kvantum Grupoidok

című akadémiai doktori értekezéséről

A modern algebrai kutatásoknak egy jelentős része irányul bizonyos Hopf-algebrákkal (úgynevezett kvantum-csoportokkal) kapcsolatos kérdésekre. Az ilyen algebrák fontos szerepet játszanak többek közt a kvantummechanikai rendszerek vizsgálatában. Újabb – például *kvantum-dinamikai* rendszerekkel valamint a Fields-érmes Alain Connes által felvetett nemkommutatív geometriával kapcsolatos – kutatások során olyan rokon konstrukciók és problémák merültek fel, amelyek már nem tárgyalhatók a Hopf-algebrák nyújtotta keretben; szükségessé vált a fogalom különféle általánosításainak keresése és vizsgálata. Ennek a területnek egyik jelentős kutatója Böhm Gabriella, aki értekezésében a témakörbe tartozó eredményeiből mutat be szép, összefüggő válogatást.

A dolgozat – rövid előszó után – egy, a definíciókat, a hátteret és az eredményeket tárgyaló magyar nyelven írt fejezetből, továbbá az egyes eredményeket tartalmazó hat angol nyelvű publikációból épül fel. Tematikai szempontból két nagyobb részt különíteném el. Ezek közül az egyik a Hopf-algebroidok fogalmi felépítését, integrál-elméletét és Galois-elméletét tárgyalja. Ide az 1.2., 1.3. és 1.4. sorszámú alfejezetek, valamint az ezek mögötti cikkeket tartalmazó 3., 4. és 5. fejezetek tartoznak. A jelöltnek ezeken a területeken végzett munkásságának jelentőségét és elismertségét jelzi az is, hogy a tárgykörben egy, a *Handbook of Algebra*-ban megjelent fejezet megírására kérték fel. A másik rész a hasonló konstrukciók kategóriaelméleti hátteréről szól, amelybe a témába tulajdonképpen átvezető 1.5. alfejezet és a 2. fejezet után az 1.6. és 1.7. alfejezet, illetve a 6. és 7. fejezet anyaga tartozik. A hátteret kitűnően ismerteti az 1.1. alfejezet.

A disszertációban szereplő munkák közül véleményem szerint a legnagyobb hatású a jelöltnek 2004-ben Szlachányi Kornéllal közösen megjelentetett cikke, amely a dolgozatban alapvetően az 1.2. alfejezet és a 3. fejezet anyagát képezi. Ez a rész a Hopf-algebrák Hopf-algebroidoknak elnevezett általánosításait vezeti be bialgebroidokra (bialgebrák nemkommutatív gyűrűk fölötti általánosításaira) és bemutatja a Hopf-algebroidok alapvető tulajdonságait, valamint a legfontosabb példákat. A nem feltétlenül bijektív antipód-leképezés esetére működő definíció a szerzőnek a Hopf-algebroidok integrálelméletét vizsgáló cikkében jelent meg, így az 1.2 alfejezethez tartozik a 4. fejezet anyagának egy része is. A fogalom megalkotásánál két bialgebroid-struktúrát tételez fel, és egy Morita-összefüggésen alapuló szellemes ötlettel küzdi le az antipód-leképezés definíciójának fogalmi nehézségeit. A definiált Hopf-algebroid a Hopf-algebrának a jelenleg ismert legtágabb érvényű olyan általánosítása bialgebroidra, amelyben garantált az antipód-leképezés létezése. (Schauenburg még általánosabb definíciója nem garantálja az antipód létezését.) A bemutatott tisztán algebrai megközelítés egyenértékűnek bizonyult Day és Street kategóriaelméleten alapuló, nagyjából egyidejű javaslatával (1.43 Tétel). A Hopf-algebroid fogalma így a Hopf-algebrák algebrailag elegáns és kategóriaelméletileg természetes, messzemenő általánosítása. Az általánosítás korántsem öncélú, például a nemkommutatív geometriában szerepet játszó Connes–Moscovici-féle algebra is ide tartozik, továbbá algebrák kettes mélységű Frobenius-kiterjesztései is leírhatók a fogalom segítségével. A Hopf-algebroidok általánosításai a Böhm Gabriella és Szlachányi Kornél által korábban bevezetett és az értekezés későbbi részeiben szerepet játszó úgynevezett gyenge Hopf-algebráknak is.

Az 1.3. alfejezet és a 4. fejezet nagy része Hopf-algebroidok integrál-elméletének alapjait fekteti le. A fő eredmény Maschke csoportalgebrák féligegyszerűségéről szóló, illetve Sweedler ezt Hopf-algebrákra általánosító tételének további általánosítása Hopf-algebroidokra. Itt az algebroid speciális elemeinek, a különféle struktúrákra vonatkozó *normalizált integráljainak* a létezésének és a különféle struktúrákban rejlő algebra-bővítések szeparabilitásának illetve relatív féligegyszerűségének ekvivalenciájáról van szó. Integrálok és a bővítések Frobenius-tulajdonságának kapcsolatáról szól az alfejezet másik fontos eredménye, amely igen értékes annak ellenére, hogy az eredeti publikációban egy elnézés miatt valamivel erősebb tételt vélt bizonyítani a szerző. (A hiba orvosolhatónak bizonyult az eredetinél némileg erősebb feltételek kikötése árán.) Az ilyen Hopf-algebroidokra sikerült a szerzőnek megmutatni, hogy izomorf, illetve antiizomorf a különféle duálisaival. Tematikailag ide tartozik még a 3. fejezetnek az 1.2 alfejezetben nem tárgyalt integrálelméleti része; ez arra a speciális esetre vonatkozik, amikor az antipód-leképezés bijektív.

Az 1.4. alfejezet, illetve a mögötte álló cikket tartalmazó 5. fejezet algebrák olyan bővítéseivel foglalkozik, melynek szimmetriáit egy Hopf-algebroid bialgebroid-struktúrái szerinti komodulus-struktúrák írják le. (Az 5. fejezetnek a különféle oldali komodulus-struktúrák egymásból való meghatározottságáról szóló állítása (Proposition 3.1.) a már említetthez hasonló elnézés miatt a jelenleg bizonyíthatónál valamivel erősebbre lett kimondva, de szerencsére az igazolható gyengébb változat is elegendőnek bizonyult.) Sikerült Kreimer és Takeuchi Hopf-algebrák szerinti Galois-kiterjesztésekre vonatkozó eredményét Hopf-algebroidokra általánosítani (1.53. Tétel). A szerző észrevette azt is, hogy bizonyos további feltételek fennállása esetén a két struktúra lehetővé teszi Caenepeel és társai Morita-összefüggéseken alapuló módszerének alkalmazását a Galois-bővítések finomabb jellemzésére.

Az 1.5. alfejezet és a hozzá tartozó 2. fejezet a Doi és Koppinen által vizsgált úgynevezett Doi–Hopf-modulusokat, ezek alapvető tulajdonságait és az oda tartozó legfontosabb példákat mutatja be, továbbá általánosítja az úgynevezett smash-product-algebra konstrukciót a szerző és Szlachányi Kornél által korábban definiált speciális Hopf-algebroidok, a gyenge Hopf-algebrák felett. Az ebben a részben bemutatott munka a következő rész motivációjaként is szolgál.

Az 1.6. alfejezetben, illetve az emögött álló, az *Advances in Mathematics*-ban megjelent cikket tartalmazó 6. fejezetben a szerző kiterjeszti monádoknak a Lack és Street által vizsgált konstrukcióját. Ebben egy 2-kategória monádjaiból egy újabb 2-kategóriát építenek fel. Böhm Gabriella kiterjesztése abban áll, hogy a 2-ciklusoktól a Lack–Street-féle kompatibilitási feltételeknél valamivel kevesebbet követel meg. Ebben az új keretben tárgyalhatóvá válnak gyenge Hopf-algebrákkal kapcsolatos konstrukciók, például a megelőző részben szereplő Doi-Hopf-modulusok bizonyos aspektusai is. Ezen rész sok szép eredménye közül az 1.74. Tételt emelném ki. Ez Lack és Street egy fontos tételét általánosítva bijektív kapcsolat létezését igazolja a monádok kiterjesztett 2-kategóriájának monádjai és az eredeti kategóriának bizonyos szorzatalakú általánosított monádjai (úgynevezett premonádjai) között. Ennek az eredménynek konkrét megnyilvánulása az előző részben felmerülő smash-product algebra. További fontos eredmény az Eilenberg–Mooreobjektumokra való felhúzást általánosító *gyenge felhúzás* fogalmának bevezetése és gyenge bialgebrák moduluskategórájának monoidális struktúrájának jellemzése ennek a segítségével.

Az 1.7. alfejezet és a hozzá tartozó publikációból álló 7. fejezet a gyenge bialgebrák és a bimonádok közös általánosítását, a gyenge bimonádok fogalmát vezeti be. A definíció Szlachányi Kornél gyenge bialgebráknak a moduluskategóriájuk tulajdonságaival történő jellemzése nyomán a monád Eilenberg–Moore kategóriájával szemben megfogalmazott feltételekkel történik. Ezen rész számos eredménye közül hármat emelnék ki. Az első az, hogy az alapkategória Cauchy-teljessége esetén sikerült egy viszonylag egyszerű egyenértékű feltételrendszert is megadni (1.83. Tétel). A második a gyenge bimonád Eilenberg–Moore kategóriájának, illetve az alapkategóriának a monoidális struktúrái közötti kapcsolat leírása a gyenge felhúzás segítségével (1.84.-1.85. Tételek). A harmadikban, általánosítva a gyenge bialgebrák és bialgebroidok közötti korábban ismert kapcsolatot, azt igazolja, hogy (szintén Cauchy-teljesség feltételezése mellett) a gyenge bimonádok kategóriája ekvivalens egy bimonád-kategóriával (1.87. Tétel).

Az értekezésben bemutatott munkákban a jelölt kiemelkedő elméletalkotó képességről tesz tanúbizonyságot. Sikerrel alkotja meg a megfelelő fogalmakat és igazolja a velük kapcsolatos legfontosabb tényeket. Fontos és érdekes általánosítását találja meg több, korábban ismert fogalomnak és eredménynek. Bizonyításait, amelyek az érintett terület mély ismeretéről árulkodnak, igen ügyesen tagolja kisebb lépésekre. Részben ennek a tagolási stratégiának köszönhető, hogy gyakran előfordulnak viszonylag hosszú, több állításból álló tételkimondások. Az eredményeket áttekintő fejezetben sikerrel oldja meg a magyarítás nehéz feladatát is.

Összefoglalva: Értekezésében Böhm Gabriella bevezeti a Hopf-algebroidok fogalmát, kidolgozza ezek integrálelméletének és a hozzájuk tartozó Galois-bővítések elméletének alapjait. Az algebrák másik arcát vizsgálva további szép és fontos eredményeket mutat be a kapcsolódó kategóriaelméleti területeken is. Mindezzel a témakör egyik jelentős képviselőjeként a Hopf-algebrák izgalmas kutatási területét érdekes, algebrai szemszögből nézve elegáns, ugyanakkor a nemkommutatív geometriában és a fizikai alkalmazásokban is fontos szerephez jutó általánosításokkal, új elméletekkel gazdagította. A végül is telitalálatnak bizonyuló fogalmak megalkotása perspektivikus látásmódról, az algebra több területének mély ismeretéről árulkodik, emellett nem hiányoztak a szellemes ötletek sem. A disszertáció mögött álló munkásság fogadtatását illetően ismételten kiemelném az *Advances is Mathematics*-ba elfogadott (és megjelent) publikációt, továbbá a *Handbook of Algebra*-ban megjelent fejezet megírására történő felkérést. Véleményem szerint a dolgozat bőségesen megfelel a formai és tartalmi követelményeknek. *Melegen javaslom az értekezés kitűzését nyilvános vitára és az MTA doktora cím odaítélését.*

Kérdés: Az értekezés olvasásakor kisebb nehézséget okozott, hogy a 6. fejezet (az Advances-ben megjelent cikk) eredményeinél formálisan általánosabbak az 1.6. alfejezetben megfogalmazottak: míg az előbbi a 2-kategóriák nyelvén szól, utóbbi a valamivel gyengébb bikategória fogalmát használja. A jelölttől az kérném, térjen ki röviden arra, hogy miért maradnak érvényben a 6. fejezet eredményei az általánosabb környezetben.

Budapest, 2011. október 12. Ivanyos Gábor