

dc_101_10

**1–MOTÍVUMOK ÉS ALBANESE-LEKÉPEZÉSEK
AZ ARITMETIKAI GEOMETRIÁBAN**

Szamuely Tamás

MTA doktori értekezés tézisei
Budapest, 2011

0. BEVEZETÉS

A jelen disszertáció Abel-varietásokkal és általánosításaikkal foglalkozik. Az Abel-varietások olyan projektív varietások, amelyeken geometriailag definiált egy (szükségképpen kommutatív) csoportstruktúra. Legegyszerűbb példaként az elliptikus görbéket említhetjük. Régóta ismert, hogy miután fixáltunk egy O bázispontot valamely harmadfokú sima projektív síkgörbén, a görbéhez húzott szelő és érintő egyenesek segítségével definiálhatunk a pontokon egy összeadási műveletet, amely teljesíti az Abel-csoportok összes axiómáit. E csoportstruktúra nagy mértékben befolyásolja a görbe geometriai és aritmetikai tulajdonságait. Például amikor a görbe egyenletei racionális együtthatósak és az O bázispont koordinátái is racionálisak, akkor a racionális koordinátájú pontok részcsoporthoz tartoznak a valós vagy komplex koordinátájú pontok csoportjában. Mordell egy híres tétele szerint e részcsoporthoz végesen generált.

Természetes módon hozzárendelhetünk Abel-varietásokat magasabb nemű görbékhez is. Algebrailag zárt test felett definiált sima projektív görbén a zérus fokú divizorok lineáris ekvivalenciaosztályai megfeleltethetők egy Abel-varietás pontjainak. Ez a kanonikusan definiált Abel-varietás a görbe Jacobi-varietása. Ha fixálunk egy O bázispontot az X görbén, és a P pontot a $P - O$ divizor ekvivalenciaosztályát reprezentáló pontba küldjük a J_X Jacobi-varietáson, kapunk egy $\alpha_O : X \rightarrow J_X$ morfizmust, amely 1 nemű görbékre izomorfizmus, magasabb nemű görbékre pedig beágyazás. Az α_O morfizmus univerzális tulajdonság által is karakterizálható: minden X -ből Abel-varietásba képező morfizmus egyértelműen faktorizálódik α_O -n keresztül.

A fenti univerzális tulajdonságot teljesítő Abel-varietás magasabb dimenzióban is létezik. Ez az X varietás Albanese-varietása, szokásos jelölése Alb_X . A kitüntetett O pontot a zérus pontba küldő $\alpha_O : X \rightarrow \text{Alb}_X$ morfizmust Albanese-leképezésnek nevezzük. Bár az Albanese-varietás magasabb dimenzióban nem játszik annyira centrális szerepet, mint a Jacobi-varietás görbék esetében, mégis számos geometriai információt hordoz.

Magasabb dimenziós varietásokon a divizorokat nem pontokból származtatjuk, hanem 1 kodimenziós részvarietásokból. Mégis definiálhatunk divizorok segítségével egy Abel-varietást: ha X sima projektív varietás valamely algebrailag zárt test felett, a divizorok lineáris ekvivalenciaosztályai egy Pic_X nem-összefüggő csoportoséma pontjainak feleltethetők meg, amelyben az egységelem redukált komponense Abel-varietás. Ez a Pic_X^0 Abel-varietás az X Picard-varietása. Görbék esetében természetesen a Jacobi-varietást kapjuk, és a Pic_X csoportoséma többi komponenseit a divizorok fokainak megfelelő egész számok indexelik. Ha A Abel-varietás, a Pic_A^0 varietást az A duális Abel-varietásának nevezzük, és A^* -gal jelöljük. Felállítható egy $(A^*)^* \cong A$ kanonikus izomorfizmus; görbék Jacobi-varietásai önduálisak. Tetszőleges X esetén egy Severinek tulajdonítható tétel szerint a Pic_X^0 Picard-varietás duálisa éppen az Alb_X Albanese-varietás.

Nagy vonalakban azt mondhatjuk, hogy a jelen értekezés fő témája Abel-varietásokról szóló ismert geometriai és aritmetikai tételek kiterjesztése szemi-Abel-varietásokra. Szemi-Abel-varietásnak olyan kommutatív csoportvarietást nevezünk, amely Abel-varietásnak algebrai tóruszal való bővítése: utóbbi elnevezés olyan csoportvarietást takar, amely az alaptest algebrai lezártja felett a multiplikatív csoport egy véges direkt hatványával lesz izomorf. Szemi-Abel-varietások nagy számban fordulnak elő „a természetben”: ilyenek például nyílt (affin) görbék Jacobi-varietásai. Serre [28] megmutatta továbbá, hogy tetszőleges X algebrailag zárt test feletti varietáshoz hozzárendelhetünk egy $\widetilde{\text{Alb}}_X$ általánosított Albanese-varietást, amely teljesíti az univerzális tulajdonságot szemi-Abel-varietásokba menő morfizmusokra. Ez az általánosítás nyílt varietásokon érdekes: ha U az X sima projektív varietás nyílt részvarietása, akkor U és X klasszikus értelemben vett Albanese-varietása megegyezik, azonban ha az általánosított definíciót tekintjük, akkor az $\widetilde{\text{Alb}}_X = \text{Alb}_X$ Abel-varietás éppen az $\widetilde{\text{Alb}}_U$ legnagyobb Abel-varietás faktora lesz, míg $\widetilde{\text{Alb}}_U$ -nak általában van torikus része is.

Szemi-Abel-varietásokról szóló tételek bizonyításánál a fő nehézség az, hogy a legtöbb esetben az állítás nem redukálható az Abel-varietások, illetve a tóruszok speciális esetére. Ennek oka az, hogy Abel-varietások tóruszal való bővítése általában nemtriviális. Fennköltebb nyelven ezt úgy fejezhetjük ki, hogy az Abel-varietások (például a görbék Jacobi-varietásai) a tiszta motívumok iskolapéldáit adják, míg a szemi-Abel-varietások ún. kevert motívumok. A Deligne [8] által bevezetett 1-motívumok a szemi-Abel-varietások még további általánosítását adják. Az 1-motívumok már nem csoport-sémák, hanem azok 2 hosszúságú komplexusai. Természetes módon merülnek fel például akkor, amikor a duális Abel-varietás konstrukcióját szeretnénk szemi-Abel-varietásokra általánosítani. Bizonyos értelemben az 1-motívumok a legegyszerűbb kevert motívumok.

A jelen értekezésben a szemi-Abel-varietások és 1-motívumok aritmetikájának és geometriájának három különböző, ám egymással kapcsolatban álló kérdésével foglalkozunk.

1. *A Serre-féle általánosított Albanese-leképezés.* Elsőként a Serre [28] által bevezetett általánosított Albanese-leképezést vizsgáljuk sima kvázi-projektív varietásokon. A fő eredmény itt Roitman [25] egy híres tételének általánosítása sima projektív varietások nyílt részvarietásaira. Módszerünk új, koncepcionális bizonyítást ad a Roitman által vizsgált esetben is, és az Albanese-leképezések további tanulmányozását inspirálta.

2. *Aritmetikai dualitástételek 1-motívumokra.* Ebben a részben több dualitástételt bizonyítunk számtestek és telítései felett definiált 1-motívumok

Galois hiperkohomológia-csoportjaira. E tételek közös szimmetrikus általánosításait adják Cassels [6], Tate [36], illetve Tate–Nakayama [34] Abel-varietások és tóruszok kohomológiájára vonatkozó klasszikus eredményeinek, s ezáltal egységbe foglalják a számtest feletti kommutatív csoportsmákról szóló alapvető tényeket.

3. *Racionális pontok szemi-Abel-varietások főhomogén terein.* A diofantikus geometria egyik központi problémája a számtestek feletti varietások racionális pontjaira vonatkozó lokális-globális elvek tanulmányozása. Mi e kérdést szemi-Abel-varietások főhomogén terei (más néven torzorai) esetében vizsgáljuk, és Manin [21], illetve Sansuc [26] eredményeinek közös általánosítását adjuk, ezáltal megoldva a témakör egy hosszú idő óta nyitott kérdését. Bizonyításunk a 2. pontban említett dualitástételeken alapszik, de használja az 1. rész egy konstrukcióját is. E tétel bizonyos értelemben „hiányzó láncszemnek” számított a csoportvarietások torzorainak aritmetikájában, és komoly hatást gyakorolt a további kutatásokra.

A következő három fejezetben a fenti három téma részletesebb tárgyalását adjuk. Ismertetjük a tételek pontos állításait, amelyekhez néhány megjegyzést fűzünk a bizonyításokról és az alkalmazásokról. A bibliográfia csak a szövegben idézett forrásokat tartalmazza, nem pedig átfogó hivatkozáslista.

1. AZ ALBANESE-LEKÉPEZÉS ÉS A SZUSZLIN-HOMOLÓGIA

Bevezetésképpen idézzük fel A. A. Roitman [25] nevezetes tételét. Tekintsünk egy X algebrai varietást a k algebrailag zárt test felett. Ha fixálunk egy O bázispontot, értelmezhető az $\alpha_O : X \rightarrow \text{Alb}_X$ Albanese-leképezés, amely definíció szerint univerzális az X azon Abel-varietásokba menő morfizmusaira, amelyek O -t a zéruspontba küldik. E leképezést függetlenné tehetjük a bázispont választásától a következő módon. Tekintsük azt a $\mathcal{Z}(X)^0$ Abel-csoportot, amelyet a varietás pontjainak azon $\sum n_i P_i$ formális $\mathbf{Z}$ -lineáris kombinációi alkotnak, amelyekre $\sum n_i = 0$. Az α_O leképezést a $\mathcal{Z}(X)^0$ csoportra lineárisan kiterjesztve kapunk egy $\alpha_X : \mathcal{Z}(X)^0 \rightarrow \text{Alb}_X$ csoporhomomorfizmust, amely már nem függ O -tól. Ismeretes, hogy ez a leképezés a racionális ekvivalenciaosztályokon keresztül faktorizálódik: a $\mathcal{Z}(X)^0$ csoport két elemét akkor nevezzük racionálisan ekvivalensnek, ha különbségük X -beli görbék normalizáltjain levő divizorokból származik. A $\mathcal{Z}(X)^0$ csoport racionális ekvivalencia szerinti faktora a *nulla-ciklusok Chow-csoportjának* nulladfokú része, szokásos jelölése $CH_0(X)^0$. Roitman tétele mármint a következő.

1.1. Tétel. *Ha X sima projektív varietás, az*

$$\alpha_X : CH_0(X)^0 \rightarrow \text{Alb}_X$$

Albanese-leképezés izomorfizmust indukál a k karakterisztikájához relatív prím rendű torzióelemek részcsoportján.

Roitman eredményét később Milne [22] kiegészítette $p > 0$ karakterisztikában: megmutatta, hogy az izomorfizmus a p -hatvány rendű elemek részcsoporthai között is fennáll. Következésképpen kapjuk, hogy a $CH_0(X)^0$ csoport n -torzió részcsoporthja minden $n > 0$ mellett véges, hiszen ez a tény Abel-varietások esetén jól ismert.

Vegyük észre, hogy abban az esetben, amikor X sima projektív görbe, az Albanese-varietás nem más, mint az X Jacobi-varietása, a $CH_0(X)^0$ csoport pedig épp a Picard-csoport nulladfokú részcsoporthja, tehát maga az α_X leképezés is izomorfizmus. Azonban Mumfordtól származó példák mutatják, hogy már felületek esetében is előfordulhat, hogy az Albanese-leképezés magja *nem megszámlálható*. Ezért figyelemre méltó tény, hogy az Albanese-leképezés legalább a torzióelemeket „látja” a Chow-csoportban.

A [31] dolgozatban M. Spieß-szel közösen a következő szemi-Abel-varietásokra vonatkozó általánosítást bizonyítottuk. Tegyük fel, hogy U nyílt részvarietás az X sima projektív varietásban. Ekkor tekinthetjük a Serre [28] által definiált $U \rightarrow \widetilde{\text{Alb}}_U$ általánosított Albanese-leképezést; definíció szerint ez a leképezés univerzális U -nak olyan, szemi-Abel-varietásokba menő morfizmusaira, amelyek egy fix bázispontot a zéruselembe küldenek. E leképezés a fentiekhez hasonlóan indukál egy $\mathcal{Z}(U)^0 \rightarrow \widetilde{\text{Alb}}_U$ homomorfizmust, amely már nem függ a bázisponttól.

A $CH_0(X)^0$ csoport általánosításaként most a $\mathcal{Z}(U)^0$ csoport egy $h_0(U)^0$ faktorcsoporthját definiáljuk, amely a 0 fokú elemek részcsoporthja a $h_0(U)$ nulladik algebrai szinguláris homológia- vagy más néven Szusztlin-homológia-csoportban. A $h_0(U)$ csoportot a [32] cikkben egy általános formalizmus részeként definiálták, de elemien is megadható a következő módon: vegyük a $\mathcal{Z}(U)$ csoport (vagyis az U pontjai által generált szabad Abel-csoport) azon részcsoporthja szerinti faktorát, amelyet az $i_0^*(Z) - i_1^*(Z)$ alakú elemek generálnak, ahol $i_v : U \rightarrow U \times \mathbb{A}^1$ ($v = 0, 1$) az $x \mapsto (x, v)$ beágyazást jelöli, és Z befutja $U \times \mathbb{A}^1$ mindazon irreducibilis zárt részvarietásait, amelyekre a $Z \rightarrow \mathbb{A}^1$ projekció véges és szürjektív. A $\mathcal{Z}(U)$ csoporton adott egy természetes foksámleképezés a

$$\sum_i n_i P_i \mapsto \sum_i n_i$$

formula által. A $Z \rightarrow \mathbb{A}^1$ projekciók végességét felhasználva nem nehéz megmutatni, hogy a foksámleképezés a $h_0(U)$ csoporton keresztül faktorizálódik, és így definiálhatjuk $h_0(U)^0$ -t mint az indukált leképezés magját. Az $U = X$ esetben a $CH_0(X)^0$ csoportot kapjuk vissza.

Megmutatható, hogy a $\mathcal{Z}(U)^0 \rightarrow \widetilde{\text{Alb}}_U$ leképezés $h_0(U)^0$ -n keresztül faktorizálódik, így kimondhatjuk Roitman tételének következő általánosítását:

1.2. Tétel. *Legyen X sima projektív varietás a k algebrailag zárt test felett, $U \subset X$ pedig nyílt részvarietás. Ekkor a*

$$h_0(U)^0 \rightarrow \widetilde{\text{Alb}}_U$$

általánosított Albanese-leképezés izomorfizmust indukál a k karakterisztikájához relatív prím rendű torzióelemek részcsoportján.

A fenti általánosítás figyelemre méltó vonása, hogy a bizonyítás az $U = X$ esetben is új és igen koncepciózus. Alapgondolatát az alábbi kommutatív diagrammban foglalhatjuk össze:

$$\begin{array}{ccc} h_1(U, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_n h_0(U)^0 \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(H_{\text{ét}}^1(U, \mathbf{Z}/n), \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_n \widetilde{\mathrm{Alb}}_U(k). \end{array}$$

Itt a jobboldali függőleges leképezés az Albanese-leképezés megszorítása a $h_0(U)^0$ csoport n -torzió részcsoportjára, ahol n a k karakterisztikájához relatív prím egész. A baloldali izomorfizmus a [32] cikk egy alapvető kohomológia-összehasonlítási tétele, amely az *első* Szuszlin-homológia-csoportot hasonlítja össze az első étale kohomológiacsoporthal (utóbbi a $k = \mathbf{C}$ esetben a szokásos topológiai szinguláris kohomológia). A felső vízszintes leképezés egy homológiai hosszú egzakt sorozatból származik, az alsó pedig egy ismert összefüggést fejez ki az általánosított Albanese-varietás és az étale kohomológia között; ez annak a klasszikus ténynek az általánosítása, amely szerint görbéken a véges együtthatós H^1 -osztályok a Jacobi-varietás torziópontjaiból származnak.

Ezek után a bizonyítás már rövid: a diagram kommutatív, a felső leképezés szűrjektív, az alsó pedig izomorfizmust indukál, miután n hatványait követve direkt limeszt képeztünk. Így a limeszben a jobboldali leképezés is izomorfizmus. Persze a bizonyítás nehéz része a diagram kommutativitásának ellenőrzése. Ehhez többek között szükség van az Albanese-leképezés egy interpretációjára Voevodsky [37] motivikus kategóriájában, amely később más kutatásokban is hasznosnak bizonyult.

Roitman tételének korábbi bizonyításai (az eredeti bizonyítás, de S. Bloch [2] bizonyítása is) több ad hoc érvet tartalmaztak, míg a fenti érvelés a tételt egy alapvető kohomológia-összehasonlítási izomorfizmusra vezeti vissza. Ez inspirálta L. Barberi-Vialét és B. Kahnt [1] arra, hogy a bizonyítást még általánosabb formalizmus keretei közé helyezzék. Segítségével meg tudtak szabadulni attól a feltevéstől, hogy U -nak létezik sima kompaktifikációja (esetünkben X). Ez persze csupán pozitív karakterisztikában javítja a tételt, ahol a szingularitások feloldása jelenleg nem ismert.

Az alábbi kiegészítő állítást is bizonyítottuk (ami a kutatási projekt voltaképpen kiindulópontja volt):

1.3. Tétel. *Legyen k egy véges test algebrai lezártja, és U egy k feletti sima projektív varietás nyílt részvarietása. Ekkor a*

$$h_0(U)^0 \rightarrow \widetilde{\mathrm{Alb}}_U$$

általánosított Albanese-leképezés torzió Abel-csoportok izomorfizmusa.

Itt a karakterisztikához relatív prím rész persze azonnal következik az általánosított Roitman-tételből és abból az elemi tényből, hogy a $h_0(U)^0$ csoport torzió Abel-csoport, amennyiben az alaptest egy véges test algebrai lezártja. A p -részcsoportra vonatkozó állítás azonban nem következik az előző tételből.

A bizonyítás módszere itt teljesen más, és egy aritmetikai tételen alapszik: a véges testek feletti varietások szelíd fedéseinek osztálytestelméletén [27]. Nemrégiben e tételt G. Wiesend elemi eszközökkel újra bizonyította; lásd [33] előadásunkat a Bourbaki-szemináriumon.

2. ARITMETIKAI DUALITÁSTÉTELEK 1-MOTÍVUMOKRA

A lokális, illetve globális testek felett definiált kommutatív csoportsmák Galois-kohomológiájára vonatkozó dualitástételek a nagy aritmetikai alaptételek közé tartoznak. Idézzünk fel röviden néhányat a legfontosabbak közül.

Talán a legkorábbi dualitástétel a következő. Tekintsük a p -adikus számok $\mathbf{Q}_p$ testének egy K véges bővítését. Egy K feletti T kommutatív csoportsmát algebrai tórusznak nevezünk, ha az algebrai lezárt felett izomorf-fá válik a $\mathbf{G}_m$ multiplikatív csoport egy véges direkt hatványával. Jelölje Y^* a T tórusz karaktereinek csoportját. A $H^i(K, T)$ és $H^{2-i}(K, Y^*)$ Galois-kohomológias csoportok között $i = 0, 1, 2$ mellett a $T \times Y^* \rightarrow \mathbf{G}_m$ bilineáris leképezés indukál egy

$$H^i(K, T) \times H^{2-i}(K, Y^*) \rightarrow H^2(K, \mathbf{G}_m)$$

cup-szorzatot (a használt Galois-kohomológiai fogalmak megtalálhatók pl. a [11], [29] könyvekben). A $H^2(K, \mathbf{G}_m)$ csoport nem más, mint a K p -adikus test Brauer-csoportja, amely Hasse egy híres tétele szerint $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ -vel izomorf. Tehát $i = 0, 1, 2$ mellett

$$H^i(K, T) \times H^{2-i}(K, Y^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

bilineáris leképezéseket (párosításokat) kapunk. A Tate–Nakayama-dualitástétel (amely eredeti formájában a [34] cikkben található) azt állítja, hogy e párosítások tökéletes dualítások, amennyiben az $i \neq 1$ esetekben a H^0 csoportokat kicseréljük azok provéges telítéseire (vagyis véges faktorcsoporthaik projektív limeszére). Ez a tétel speciális esetként tartalmazza a lokális osztálytestelmélet reciprocitási izomorfizmusát, amely az $i = 0$, $T = \mathbf{G}_m$ esetnek felel meg.

Nevezetes Bourbaki-előadásában [35] Tate azt a megfigyelést tette, hogy ha K felett a tórusz helyett egy A Abel-varietást tekintünk, az A és duálisa, A^* közötti Poincaré-párosítás a $H^2(K, \mathbf{G}_m) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ izomorfizmussal együtt lehetőséget ad

$$H^i(K, A) \times H^{1-i}(K, A^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

bilineáris leképezések konstrukciójára $i = 0, 1$ mellett. Tate belátta, hogy e párosítások szintén tökéletes dualitást adnak.

Utolsó felidézendő tételünk szintén Tate-től származik. Tekintsünk most egy olyan A Abel-varietást, amely valamely k számtest felett definiált, és jelöljük $\text{III}^1(A)$ -val az A Tate–Safarevics-csoportját. Definíció szerint a Tate–Safarevics-csoport a $H^1(k, A)$ Galois-kohomológiasorozat azon kohomológiaosztályaiból áll, amelyek k minden telítésére megszorítva a zéruselemre képződnek. Egy széles körben elfogadott sejtés szerint (amely több esetben bizonyított is) e csoport mindig véges.

Tate konstruált egy

$$\text{III}^1(A) \times \text{III}^1(A^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

bilineáris párosítást (amely Cassels [6] elliptikus görbékre vonatkozó korábbi munkáját általánosította), és [36] előadásában bejelentett egy tételt, amely szerint e párosítás nemelfajuló, amennyiben mindkét csoportot lefaktorizáljuk a maximális osztható részcsoporthoz. Ha elfogadjuk a Tate–Safarevics-csoport végességéről szóló sejtést, az osztható részcsoporthoz triviálisak, és véges csoportok közti tökéletes dualitást kapunk. Az első részletes bizonyítás e tételre Milne [23] könyvében jelent meg. A tóruszokra vonatkozó analóg eredményeket Kottwitznak szokás tulajdonítani. A [19] and [20] cikkek valóban tartalmazznak ilyen állításokat, de részletes bizonyítás nélkül. A [23] és [24] monográfiák egyes esetekben teljes bizonyítást adnak.

D. Harari-val közös [15] munkákban a fenti eredmények közös általánosításait bizonyítottuk Deligne-féle 1-motívumokra. Idézzük fel a definíciót az eredeti [8] cikkből: az F test feletti 1-motívumon olyan, F feletti csoportszémából álló kételemű $[Y \rightarrow G]$ komplexust értünk (konvenció szerint -1 és 0 fokba helyezve), ahol Y olyan csoportszéma, amelyet egy, a $\text{Gal}(F)$ abszolút Galois-csoport folytonos hatásával ellátott végesen generált szabad Abel-csoport definiál, G pedig F feletti szemi-Abel-varietás, azaz valamely A Abel-varietás T tóruszal való bővítése. Minden M 1-motívumnak értelmezhető az $M^* = [Y^* \rightarrow G^*]$ Cartier-duálisa, amely általánosítja az $M = [0 \rightarrow T]$ and $M = [0 \rightarrow A]$ esetekben látott duális-fogalmakat. Fontos példa az $[0 \rightarrow G]$ alakú 1-motívumok Cartier-duálisa, ahol G szemi-Abel-varietás T torikus résszel és A Abel-varietás hányadossal. Ebben az esetben a Cartier-duális olyan $[Y^* \rightarrow A^*]$ alakú 1-motívum, ahol Y^* a T tórusz karaktercsoportja, és A^* az A Abel-varietás duálisa. Nincs értelmes módja annak, hogy a duálist csoportszémaként definiáljuk.

Amennyiben lokális vagy globális testek felett dolgozunk, konstruálhatunk M és M^* kohomológia-csoportjai között bilineáris párosításokat oly módon, hogy a fenti duálisfogalmat aritmetikai eredményekkel kombináljuk. Mivel azonban már nem csoportszémákkal, hanem komplexusokkal van dolgunk, a kohomológiát Galois hiperkohomológiaként kell értelmeznünk.

A fő eredmények a következők. Lokális testek felett az alábbiakat bizonyítottuk:

2.1. Tétel. Legyen K lokális test, $M = [Y \rightarrow G]$ pedig K feletti 1-motívum. Az $i = -1, 0, 1, 2$ egészekre léteznek kanonikus

$$\mathbf{H}^i(K, M) \times \mathbf{H}^{1-i}(K, M^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

bilineáris leképezések, amelyek tökéletes dualitást indukálnak

- (1) a $\mathbf{H}_{\wedge}^{-1}(K, M)$ provéges csoport és a $\mathbf{H}^2(K, M^*)$ diszkrét torziócsoport; illetve
- (2) a $\mathbf{H}^0(K, M)^{\wedge}$ provéges csoport és a $\mathbf{H}^1(K, M^*)$ diszkrét torziócsoport között.

Itt a $\mathbf{H}^0(K, M)^{\wedge}$ és $\mathbf{H}_{\wedge}^{-1}(K, M)$ csoportokat bizonyos telítési eljárásokkal kapjuk a megfelelő hiperkohomológia-csoportokból. Megmutattuk továbbá, hogy a fenti eredmények ún. Hensel-féle lokális testekre is általánosíthatók. Egy másik eredményünk szerint a dualizáló párosításban a kohomológiasoportok ún. nemelágazó részcsoportjai egymás annullátorai.

Legyen most M 1-motívum a k algebrai számtest felett. Bármely $i \geq 0$ mellett értelmezzük az M i -edik Tate–Safarevics-csoportját a

$$\text{III}^i(M) = \text{Ker} [\mathbf{H}^i(k, M) \rightarrow \prod_v \mathbf{H}^i(k_v, M)]$$

formulával, ahol a szorzatot a k számtest telítései indexálják. A fő eredmény itt a következő.

2.2. Tétel. Legyen k algebrai számtest, M pedig 1-motívum k felett. Ekkor $i = 0, 1$ mellett léteznek

$$\text{III}^i(M) \times \text{III}^{2-i}(M^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

kanonikus párosítások.

Az $i = 1$ esetben a párosítás a maximális osztható részcsoporttal való faktorizálás után nemelfajuló.

Az $i = 0$ esetben tökéletes dualitást kapunk egy kompakt és egy diszkrét topologikus csoport között – feltéve, hogy a $\text{III}^0(M)$ csoportot egy alkalmas $\text{III}_{\wedge}^0(M)$ módosításra cseréljük ki, és feltesszük $\text{III}^1(A)$ végeességét az A Abel-varietás faktorról.

Amennyiben elfogadjuk az Abel-varietások Tate–Safarevics-csoportjának végeességéről szóló sejtést, az $i = 1$ esetben ismét véges csoportok tökéletes dualitását kapjuk.

A tétel bizonyítása igen technikai. Először bizonyos étale kohomológiasoportokon konstruálunk párosításokat, és ezekre bizonyítunk dualitástételeket. Utána megmutatjuk, hogy ezek a Galois-kohomológián is dualitási eredményeket indukálnak. Mivel a párosítások definíciója igen absztrakt, a következő eredmény nem triviális.

2.3. Állítás. Abban az esetben, amikor $M = [0 \rightarrow A]$ valamely A Abel-varietásra, a fenti párosítás $i = 1$ esete visszaadja a klasszikus Cassels–Tate-párosítást, amely a [6] és [36] referenciákban szerepel.

Amennyiben az olvasó készen áll további kohomologikus eredmények megemésztésére, itt van két további tétel. Ezek a Poitou–Tate, illetve Cassels–Tate egzakt sorozat néven ismert klasszikus eredmények általánosításai.

2.4. Tétel. *Legyen M 1-motívum a k algebrai számtest felett. Tegyük fel, hogy a $\text{III}^1(A)$ és $\text{III}^1(A^*)$ Tate–Safarevics-csoportok végesek, ahol A az M -hez tartozó Abel-varietás. Ekkor fennáll az alábbi, topologikus Abel-csoportokból álló egzakt sorozat:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, M)^\wedge & \xrightarrow{\gamma_2^D} & \prod_{v \in \Omega_k} \mathbf{H}^2(k_v, M_k^*)^D & \xrightarrow{\beta_2^D} & \mathbf{H}^2(k, M^*)^D \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & \mathbf{H}^1(k, M^*)^D & \xleftarrow{\gamma_0} & \mathbf{P}^0(M)^\wedge & \xleftarrow{\beta_0} & \mathbf{H}^0(k, M)^\wedge \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathbf{H}^1(k, M) & \xrightarrow{\beta_1} & \mathbf{P}^1(M)_{\text{tors}} & \xrightarrow{\gamma_1} & (\mathbf{H}^0(k, M^*)^D)_{\text{tors}} \\
 & & & & & & \downarrow \\
 0 & \longleftarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, M^*)^D & \xleftarrow{\gamma_2} & \bigoplus_{v \in \Omega_k} \mathbf{H}^2(k_v, M) & \xleftarrow{\beta_2} & \mathbf{H}^2(k, M)
 \end{array}$$

Itt a $\mathbf{P}^i$ csoportokat hiperkohomológia-csoportok korlátozott topologikus szorzataiként kapjuk, a β_i leképezések megszorítások, a γ_i leképezéseket a lokális dualitás indukálja, a névtelen leképezéseket pedig a globális dualitás.

2.5. Tétel. *Az előző tétel feltevései mellett fennáll az*

$$0 \rightarrow \overline{\mathbf{H}^0(k, M)} \rightarrow \prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^0(k_v, M) \rightarrow \text{III}_\omega^1(M^*)^D \rightarrow \text{III}^1(M) \rightarrow 0$$

egzakt sorozat.

Itt $A^D := \text{Hom}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, amennyiben A diszkrét Abel-csoport, továbbá a $\overline{\mathbf{H}^0(k, M)}$ csoportot mint a $\mathbf{H}^0(k, M)$ csoportnak a $\mathbf{H}^0(k_v, M)$ csoportok topologikus szorzatában vett diagonális képének a lezárását értelmezzük. (Egy bevett konvenció szerint archimédieszi helyeken a kohomológia-csoportok módosított (Tate-féle) változatát vesszük.) Végül a $\text{III}_\omega^1(M^*)$ csoport a $\mathbf{H}^1(k, M^*)$ hiperkohomológia-csoport azon elemeinek részcsoportha, amelyek nullára képződnek k telítéseire megszorítva, *véges sok kivétellel*.

A fent leírt eredményeket számos későbbi kutatás fejlesztette tovább. González-Avilés [12] kiterjesztette a főbb eredményeket p karakterisztikájú véges testek feletti görbék függvényteste felett definiált 1-motívumokra. Ebben az esetben módszereink csekély módosítással működnek a kohomológias csoportok p -hez relatív prím torziójú részének tárgyalásakor. González-Avilésnek sikerült a 2.2 Tétel $i = 1$ esetét a p -torzióra is bizonyítani. Később González-Avilés and Tan [13] cikkükben a Poitou–Tate egzakt sorozatot (2.4 Tétel) és a Cassels–Tate duális egzakt sorozatot (2.5 Tétel) is

kiterjesztették pozitív karakterisztikájú globális testekre. Az utóbbi esetben olyan egzakt sorozatot is felállítottak, amely nem használja fel a Tate–Safarevics-csoport végességét (viszont valószínűleg kevésbé alkalmazható).

Peter Jossen a vezetésem alatt írt [17] doktori disszertációjában másfajta általánosítást bizonyított. Bevezette a *torziós* 1-motívumok fogalmát: ezek olyan $Y \rightarrow G$ morfizmusok, ahol Y végesen generált Abel-csoportnak véges lapos csoportsémával való bővítése, G pedig Abel-varietásnak olyan X csoportsémával való bővítése, amely előáll véges lapos csoportsémának tóruszal való bővítéseként. Jossen kiterjesztette az 1-motívumok Deligne-féle elméletét torziós 1-motívumokra, beleértve a Cartier-dualitást és az ℓ -adikus realizációkat, és igazolta a 2.2 Tétel általánosítását torziós 1-motívumokra. E tétel speciális eseteként adódik az összes korábbi számtestek feletti dualitástétel, beleértve a véges csoportsémákra vonatkozó Poitou–Tate-dualitást, amely nem adódik a 2.2 Tételből.

3. LOKÁLIS-GLOBÁLIS ELVEK 1-MOTÍVUMOKRA

Az előző szakaszban ismertetett dualitástételek más fontos kutatások alapjául is szolgáltak. Ezek közül mutatunk be most egyet, szintén egy D. Harari-val közös cikk alapján [16]. Ebben szemi-Abel-varietások torzorainak racionális pontjaira vonatkozó lokális-globális elveket tanulmányozunk. Egy k test feletti G csoportvarietás torzorán (vagy főhomogén terén) olyan X k -varietást értünk, amelyen adott a G algebrai csoportnak egy olyan hatása, amely az algebrai lezárt felett egyszeresen tranzitívvá válik. Speciálisan az algebrai lezárt felett X izomorffá válik G -vel mint algebrai varietással. Torzorokra alapvető példát adnak nem algebrailag zárt test felett definiált 1 nemű görbék. Amennyiben van racionális pontjuk, akkor elliptikus görbék, tehát Abel-varietások. Amennyiben viszont nincs, akkor a Jacobi-varietásuk elliptikus görbe, és ők annak torzorai. Jól ismertek klasszikus példák olyan 1 nemű görbékre valamely k számtest felett, amelyeknek minden telítés felett van pontja, ám k felett nincsen (pl. a $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ homogén egyenletű projektív síkgörbe ilyen). Az ilyen görbékre úgy szokás hivatkozni, mint a Hasse-elv ellenpéldáira (a Hasse-elv ugyanis akkor teljesül, ha a lokális pontok létezése maga után vonja globális pont létezését is).

A továbbiakban számtest felett definiált szemi-Abel-varietások torzorain vizsgáljuk a Hasse-elv sérülését. Manin az 1970-es Nemzetközi Matematikai Kongresszuson tartott előadásában [21] bevezetett egy módszert, amely megmagyarázza az ellenpéldák létezését számos (bár nem minden) esetben. E módszer bemutatásához szükségünk van néhány további alapfogalomra. Az egyik a k számtest feletti X varietás adélikus pontjainak halmaza, $X(\mathbf{A}_k)$: ennek elemei olyan (P_v) pontsorozatok, ahol P_v az X racionális pontja a k_v telítés felett, és véges sok kivétellel minden P_v v -adikus egész pont is. A másik az S séma $\text{Br } S$ Brauer-csoportjának fogalma. Ennek pontos definícióját itt nem ismertetjük, de a továbbiakhoz elég annyit tudnunk róla, hogy az

$S \mapsto \text{Br } S$ megfeleltetés kontravariáns funktor, amely az F test spektrumát a $\text{Br } F$ klasszikus Brauer-csoportba küldi. Mint már láttuk, a lokális osztálytestelmélet egyik alaptétele értelmében $\text{Br } k_v \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ a k számtest valamely véges helyen vett k_v telítésére. Frobenius tétele szerint pedig $\text{Br } \mathbf{R} \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, amelyet felfoghatunk $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ részcsoportjaként. Ha most X sima varietás a k számtest felett, Manin definiált egy

$$X(\mathbf{A}_k) \times \text{Br } X \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \quad [(P_v), \alpha] \mapsto \sum \alpha(P_v)$$

párosítást, ahol az $\alpha \mapsto \alpha(P_v)$ kiértékelési leképezést a $\text{Br } X$ Brauer-csoport kontravariáns funktorialitása adja, az összeget pedig a $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ csoportban vesszük (belátható, hogy csak véges sok tag nem nulla). Amikor (P_v) valamely k -racionális pont diagonális képe, bármely $\alpha \in \text{Br } X$ elemmel való párosítás zérust ad a globális osztálytestelmélet reciprocitási törvénye értelmében. Más szóval, ha $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}}$ jelöli a fenti párosítás baloldali zérushalmazát, fennáll az $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}} = \emptyset \Rightarrow X(k) = \emptyset$ implikáció. Ezt nevezzük a Hasse–elv Manin-féle obstrukciójának. Abban az esetben, amikor a fordított irányú implikáció is fennáll, azt mondjuk, hogy a Manin-obstrukció az egyetlen obstrukció.

Sokszor hasznos a Manin-párosítás megszorításait vizsgálni a $\text{Br } X$ csoport részeinek faktorcsoporthaira. Bennünket ezek közül a $\mathbb{B}(X)$ csoport fog érdekelni, amelyet a következőképpen értelmezünk. Tekintsük a

$$\text{Br } k \xrightarrow{\pi} \text{Br } X \xrightarrow{\rho} \text{Br } (X \times_k \bar{k})$$

természetes leképezéseket, és definiáljuk a $\text{Br }_a X$ csoportot a

$$\text{Br }_a X := \ker(\rho) / \text{im}(\pi)$$

formulával. Ezek után értelmezzük a $\mathbb{B}(X) \subset \text{Br }_a(X)$ részcsoportot mint a lokálisan (értsd: a telítésekre megszorítva) triviális elemek részcsoportját. Mint fent láttuk, $\text{Br } k$ képe a $\text{Br } X$ csoportban zérust ad bármely adélikus ponttal párosítva, ezért a Manin-párosítás indukál egy $\text{Br }_a X$ -szel, sőt $\mathbb{B}(X)$ -szel való párosítást. Természetesen a $X(\mathbf{A}_k)^{\mathbb{B}} = \emptyset \Rightarrow X(k) = \emptyset$ implikáció továbbra is érvényes, ahol $X(\mathbf{A}_k)^{\mathbb{B}}$ -t ugyanúgy definiáljuk, mint korábban az $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}}$ halmazt. A $\mathbb{B}(X)$ csoport sok esetben érdekesebb, mint $\text{Br } X$, ugyanis ha feltesszük, hogy X Albanese-varietásának Tate–Safarevics-csoportja véges, akkor $\mathbb{B}(X)$ is véges, sőt bizonyos esetekben explicite ki is számítható. Így azokban a szituációkban, ahol a $\mathbb{B}(X)$ -hez tartozó Manin-obstrukció a Hasse–elv egyetlen obstrukciója, konkrét eljárás adódik a Hasse–elv sérülésének tesztelésére.

A [16] cikk fő tétele a következő:

3.1. Tétel. *Legyen k számtest, G pedig olyan k felett definiált szemi-Abel-varietás, amelynek Abel-varietás faktora véges Tate–Safarevics-csoporttal rendelkezik. Legyen továbbá X a G egy torzora. Ekkor $X(\mathbf{A}_k)^{\mathbb{B}} \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$, azaz a $\mathbb{B}(X)$ -hez tartozó Manin-obstrukció a Hasse–elv egyetlen obstrukciója.*

E tétel ismert volt abban a speciális esetben, amikor G Abel-varietás (Manin maga bizonyította), vagy amikor G tórusz (Sansuc [26]). Az általános eset azonban jóval nehezebb, és hosszú ideig nyitott probléma volt, lásd pl. Skorobogatov könyvét ([30], 133. o.).

A bizonyítás alapgondolata (mint már Manin esetében is) az, hogy kapcsolatba hozzuk a

$$(1) \quad X(\mathbf{A}_k) \times \mathbb{B}(X) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Manin-párosítást az $M = [0 \rightarrow G]$ 1-motívumra vonatkozó

$$(2) \quad \text{III}(M) \times \text{III}(M^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Cassels–Tate-párosítással, utána pedig használjuk a 2.2 Tételt. Valamivel részletesebben: jelölje $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ az első párosítást, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{CT}$ pedig a másodikat. A módszer lényege, hogy olyan $\iota : \text{III}(M^*) \rightarrow \mathbb{B}(X)$ homomorfizmust konstruálunk, amelyre az X bármely (P_v) adélikus pontja és bármely $\alpha \in \mathbb{B}(X)$ elem mellett teljesül a

$$(3) \quad \langle (P_v), \iota(\alpha) \rangle_M = \langle [X], \alpha \rangle_{CT}$$

egyenlőség. Az egyenlőség megértéséhez idézzük fel először, hogy az X torzorhoz hozzárendelhető egy $[X]$ osztály a $H^1(k, G) = \mathbf{H}^1(k, M)$ kohomológia-csoportban, amely pontosan akkor triviális, ha X -nek létezik k felett pontja (l. pl. [30], 18–19. o.). Így a $X(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$ feltevésből $[X] \in \text{III}^1(M)$ is következik. Az egyenlőség baloldala nem függ (P_v) választásától, mert a $\mathbb{B}(X)$ csoport elemei definíció szerint „lokálisan konstansok”. Tegyük fel most, hogy ι létezik és a (3) egyenlőség fennáll. Ekkor az $X(\mathbf{A}_k)^{\mathbb{B}} \neq \emptyset$ feltevés és a (3) formula szerint $[X]$ ortogonális a teljes $\text{III}^1(M^*)$ csoportra a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{CT}$ párosításban. Ekkor viszont a 2.2 Tétel szerint $[X] = 0$, azaz $X(k) \neq \emptyset$.

Sokáig eltartott, amíg rátaláltunk a ι leképezés helyes definíciójára. Végül felfedeztük, hogy a konstrukció kulcsa az általánosított Albanese- és Picard-varietások közti dualitás, amely fontos szerepet játszott már az 1.2 Tétel bizonyításában is. Emellett szükségünk volt a Manin-párosítás egy új kohomologikus interpretációjára is, amelynek azóta más alkalmazásai is adódtak.

Hasonló eredményt bizonyítottunk az adélikus pontok racionális pontokkal való approximációjáról is. Itt a kérdés az, hogy a racionális pontok halmaza, $X(k)$ sűrű-e $X(\mathbf{A}_k)$ -ban az adélikus topológiára nézve. Ezt a kérdést a Manin-párosítás egy módosított változatával célszerű vizsgálni. Tekintsük az

$$X(k_{\Omega}) \times \text{Br}_{\text{nr}} X \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

párosítást, ahol k_{Ω} a k telítéseinek topologikus direkt szorzata, $\text{Br}_{\text{nr}} X$ pedig az X nemelágazó Brauer-csoportja; utóbbit definiálhatjuk valamely sima kompaktifikáció Brauer-csoportjaként. A párosítást megszoríthatjuk $\text{Br}_{\text{nr}} X$ részcsoportjaira is, például a $\text{Br}_{\text{nr}1} X := \ker(\text{Br}_{\text{nr}} X \rightarrow \text{Br}_{\text{nr}}(X \times_k \bar{k}))$ csoportra. Végül abban az esetben, amikor G sima csoportséma k felett, van

még egy variáns, és ezt fogjuk használni:

$$(4) \quad \prod_{v \in \Omega} G(k_v) \times \mathrm{Br}_{\mathrm{nr} \mid 1} G \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Itt az archimédeszi helyeken ugyanazt a konvenciót követjük, mint a fenti 2.5 Tételben. E párosításról szól a következő tétel:

3.2. Tétel. *Legyen G a k számtest felett definiált szemi-Abel-varietás, amelynek Abel-varietás faktora véges Tate–Safarevics-csoporttal rendelkezik. Ekkor a (4) párosítás baloldali magja benne foglaltatik $G(k)$ diagonális képének lezártjában.*

E tétel első bizonyítása a [14] cikkben jelent meg, azonban a 3.1 Tétel bizonyításának technikája és a 2.5 egzakt sorozat segítségével sikerült új, rövidebb bizonyítást adnunk.

A 3.1 Tételt több matematikus is sikeresen alkalmazta. Borovoi, Colliot-Thélène and Skorobogatov [5] általánosították a tételt összefüggő algebrai csoportok homogén tereire. Az állítás ugyanaz, mint a 3.1 Tételben, kivéve, hogy G tetszőleges összefüggő algebrai csoport lehet, X pedig a G olyan homogén tere, amelynek geometriai stabilizátorai összefüggők. Van azonban náluk egy megszorítás a k számtestet illetően: teljesen imagináriusnak kell lennie. Cikkük egy meglepő példája ([5], Proposition 3.16) szerint ugyanis létezik olyan összefüggő nemkommutatív és nemlineáris algebrai csoport $\mathbf{Q}$ felett, amelyre az állítás nem igaz. Ez azt mutatja, hogy tetszőleges számtestek felett az általános algebrai csoportok másképp viselkednek, mint a kommutatívak vagy a lineárisak.

Az idézett tétel bizonyítása Borovoi [3] and [4] cikkeinek technikáit alkalmazva visszavezeti az állítást szemi-Abel-varietások torzorainak esetére, amelyekre már a mi 3.1 Tételünk alkalmazható.

Borovoi, Colliot-Thélène és Skorobogatov fenti eredményüket egy másik, de ekvivalens formában fogalmazták meg, amely a Colliot-Thélène és Sansuc [7] által bevezetett *elemi obstrukció* fogalmát használja. Ez az obstrukció, amelyet $ob(X)$ -szel fogunk jelölni, definíció szerint a

$$(5) \quad 0 \rightarrow \bar{k}^\times \rightarrow \bar{k}(X)^\times \rightarrow \bar{k}(X)^\times / \bar{k}^\times \rightarrow 0$$

egzakt sorozattal megadott bővítés-osztály a $\mathrm{Gal}(\bar{k}|k)$ -modulusok kategóriájában, ahol k perfekt test, X sima geometriailag irreducibilis k -varietás, és $\bar{k}(X)^\times$ az invertálható racionális függvények csoportja $X \times_k \bar{k}$ -n. Egy-szerű Galois-kohomológiai érvelés (lásd pl. [30], 27. o.) mutatja, hogy bármely k -racionális pont indukálja a fenti bővítés egy Galois-ekvivariáns szelését. Más szóval $ob(X)$ nemtrivialitása obstrukciót jelent k -racionális pontok létezésére.

Amennyiben X számtest feletti varietás, amelynek van adélikus pontja, és feltesszük az Alb_X Albanese-varietás Tate–Safarevics-csoportjának vé-gességét (ami a már idézett sejtés szerint elvárható), az $ob(X)$ osztály tri-vialitása ekvivalens a (1) párosítás trivialitásával. Ezt Wittenberg [38] bi-zonyította. Néhány részletet érdemes felidéznünk a bizonyításból, mivel

használja a 3.1 tételt és az általánosított Albanese-leképezéseket. Láttuk az 1. szakaszban, hogy algebrailag zárt test felett minden varietáshoz hozzárendelhető egy $\widetilde{\text{Alb}}_X$ szemi-Abel-varietás, amely univerzális a szemi-Abel-varietásokba menő morfizmusokra nézve. Az $\widetilde{\text{Alb}}_X$ általánosított Albanese-varietás általános k alaptest felett is létezik: ebben az esetben olyan szemi-Abel-varietásként kell definiálnunk, amelynek van egy kanonikus Alb_X^1 torzora, amely univerzális az X -ből szemi-Abel-varietások torzoraiba menő morfizmusokra. A [38] dolgozat fő geometriai eredménye szerint az $ob(X)$ osztály triviális, ha az Alb_U^1 torzor triviális minden $U \subset X$ Zariski sűrű részhalmazra. Másrészt Colliot-Thélène egy rövid levezetése mutatja, hogy $ob(X)$ trivialitásából következik a (1) párosítás trivialitása, amennyiben k számtest és a mondott Tate–Safarevics-csoport véges. Megfordítva, ha az (1) párosítás triviális, akkor Alb_U^1 triviális minden Zariski sűrű U -ra. Ez azonnal következik az 3.1 Tételből, valamint abból a tényből ([9], Lemma 3.4) hogy a fenti U -ra a $\mathbb{B}(X) \rightarrow \mathbb{B}(U)$ megszorítási leképezés izomorfizmus.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az általánosított Albanese-leképezés segítségével a 2. és 3. szakaszok eredményeiből érdekes aritmetikai következmények vezethetők le tetszőleges varietásokat illetően is.

HIVATKOZÁSOK

- [1] L. Barbieri-Viale, B. Kahn, On the derived category of 1-motives, eprint arXiv:1009.1900.
- [2] S. Bloch, Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman, *Compositio Math.* **39** (1979), 107–127.
- [3] M. Borovoi, Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology, *Duke Math. J.* **72** (1993), 217–239.
- [4] M. Borovoi, The Brauer–Manin obstruction for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer, *J. reine angew. Math.* **473** (1996) 181–194.
- [5] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov, The elementary obstruction for homogeneous spaces, *Duke Math. J.* **141** (2008), 321–364.
- [6] J. W. S. Cassels, Arithmetic on curves of genus 1, IV: Proof of the Hauptvermutung, *J. reine angew. Math.* **211** (1962), 95–112; VII: The dual exact sequence, *ibid.* **216** (1964), 150–158.
- [7] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles II, *Duke Math. J.* **54** (1987), 375–492.
- [8] P. Deligne, Théorie de Hodge III, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **44** (1974), 5–77.
- [9] D. Eriksson, V. Scharaschkin, On the Brauer–Manin obstruction for zero-cycles on curves, *Acta Arithmetica* **135** (2008), 99–110.
- [10] H. Esnault, O. Wittenberg, Abelian birational sections, *J. Amer. Math. Soc.* **23** (2010), 713–724.
- [11] P. Gille, T. Szamuely, *Central Simple Algebras and Galois Cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 101, Cambridge University Press, 2006.
- [12] C. González-Avilés, Arithmetic duality theorems for 1-motives over function fields, *J. reine angew. Math.* **632** (2009), 203–231.
- [13] C. González-Avilés, K. S. Tan, The generalized Cassels–Tate dual exact sequence for 1-motives, *Math. Res. Letters* **16** (2009), 827–839.

- [14] D. Harari, The Manin obstruction for torsors under connected algebraic groups, *Intern. Math. Res. Not.*, 2006, article ID 68632, 13 pages.
- [15] D. Harari, T. Szamuely, Arithmetic duality theorems for 1-motives, *J. reine angew. Math.* **578** (2005), 93–128. Corrections: *J. reine angew. Math.* 632 (2009), 233–236.
- [16] D. Harari, T. Szamuely, Local-global principles for 1-motives, *Duke Math. J.* 143 (2008), 531–557.
- [17] P. Jossen, On the arithmetic of 1-motives, PhD thesis, Central European University, Budapest, 2009.
- [18] K. Kato, S. Saito, Unramified class field theory of arithmetical surfaces, *Ann. of Math.* **118** (1983), 241–275.
- [19] R. Kottwitz, Stable trace formula: cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.* **51** (1984), 611–650.
- [20] R. Kottwitz, D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque **255**, 1999.
- [21] Yu. Manin, Le groupe de Brauer–Grothendieck en géométrie diophantienne, in *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970)*, Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 401–411.
- [22] J. S. Milne, Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic: Rojtman’s theorem, *Compositio Math.* **47** (1982), 271–287.
- [23] J.S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, Academic Press, 1986.
- [24] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg : *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Math. Wiss. **323**, Springer-Verlag, 2000.
- [25] A. A. Roitman, The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence, *Ann. of Math.* **111** (1980), 553–569.
- [26] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, *J. reine angew. Math.* **327** (1981), 12–80.
- [27] A. Schmidt, M. Spieß, Singular homology and class field theory for varieties over finite fields, *J. reine angew. Math.* **527** (2000), 13–36.
- [28] J-P. Serre, Morphismes universels et variété d’Albanese, *Séminaire Chevalley*, année 1958/58, exposé 10.
- [29] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne* (cinquième édition, révisée et complétée), Lecture Notes in Math. **5**, Springer Verlag, 1994.
- [30] A. N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge University Press, 2001.
- [31] M. Spieß, T. Szamuely, On Albanese maps for smooth quasi-projective varieties, *Math. Ann.* **325** (2003), 1–17.
- [32] A. Suslin, V. Voevodsky, Singular homology of abstract algebraic varieties, *Invent. Math.* **123** (1996), 61–94.
- [33] T. Szamuely, Corps de classes des schémas arithmétiques, Séminaire Bourbaki, exposé 1006, mars 2009, Astérisque 332 (2010), 257–286.
- [34] J. Tate, The cohomology groups of tori in finite Galois extensions of number fields, *Nagoya Math. J.* **27** (1966), 709–719.
- [35] J. Tate, WC-groups over p -adic fields, *Séminaire Bourbaki*, année 1957/58, exposé 156.
- [36] J. Tate, Duality theorems in Galois cohomology over number fields, *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962)*, 288–295.
- [37] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field*. In V. Voevodsky, A. Suslin, E. M. Friedlander: Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories. Annals of Math. Studies **143**, Princeton University Press, 2000, 188–238.
- [38] O. Wittenberg, On Albanese torsors and the elementary obstruction to the existence of 0-cycles of degree 1, *Math. Ann.* 340 (2008), 805–838.