

Opponensi vélemény Szamuely Tamás
1-motives and Albanese maps in arithmetic geometry
című MTA doktori értekezéséről.

Az értekezés Szamuely Tamásnak három, egymással rokon, angol nyelvű dolgozatából áll. Jelen esetben azonban nem egyszerűen a dolgozatok egymás utáni fűzéséről van szó, hanem azok szerkesztett változatáról. Ez egyrészt azt jelenti, hogy a hivatkozásjegyzék közös, másrészt a dolgozatok végén azok hatásáról, a releváns újabb eredményekről is beszámol a szerző.

Az első fejezet áttekintést ad az értekezés legfontosabb eredményeiről. A magyar nyelvű tézisfüzet lényegében ennek a fejezetnek a fordítása, de önálló irodalomjegyzékkel. Tekintettel arra, hogy az értekezésben használt fogalmak jelentős része az algebrai geometria modern fejezeteihez tartozik, így azok magyarra fordítása dicséretes teljesítmény.

Egy olyan csoportvarietást, amely az alaptest algebrai lezártja felett a multiplikatív csoport valamely véges direkt hatványával izomorf, tórusznak nevezzük. Valamely Abel varietásnak egy tórussszal vett bővítését szemi-Abel varietásnak nevezzük. Az értekezés ezen objektumokra koncentrál, pontosabban az Abel varietásokra, illetve tóruszokra vonatkozó ismert geometriai és aritmetikai tételeket terjeszti ki szemi-Abel varietásokra.

Az 1.fejezet az M. Spieß-el közös *On Albanese maps for smooth quasi-projective varieties* című, a Mathematische Annalenben 2003-ban megjelent dolgozaton alapul. Céljuk A.A. Roitman egy 1980-as tételének általánosítása. Legyen X egy k algebrailag zárt test feletti algebrai varietás. Rögzített O bázispont mellett értelmezhető az $\alpha_0 : X \mapsto Alb_X$ Albanese leképezés, amely függetlenné tehető a bázispont megválasztásától. Ehhez tekintsük azt a $\mathcal{Z}(X)^0$ Abel csoportot, amely a varietás pontjainak azon $\sum n_i P_i$ formális $\mathbb{Z}$ -lineáris kombinációiból áll, amelyekre $\sum n_i = 0$. Az α_0 leképezést lineárisan kiterjesztve a $\mathcal{Z}(X)^0$ csoportra kapjuk az $\alpha_X : \mathcal{Z}(X)^0 \mapsto Alb_X$ csoporthomomorfizmust, amely már független O -tól. A $\mathcal{Z}(X)^0$ csoporton definiálható egy ekvivalencia reláció, amely szerinti faktor nulladfokú részét $CH_0(X)^0$ -val jelöljük. Roitman tétele szerint, ha X sima projektív varietás, akkor az $\alpha_X : CH_0(X)^0 \mapsto Alb_X$ izomorfizmust indukál a k karakterisztikájához relatív prím rendű torzióelemek részcsoportján.

Legyen most U nyílt részvarietás az X sima projektív varietásban. J.-P. Serre 1958-ban definiálta az $U \mapsto \widetilde{Alb}_U$ általánosított Albanese leképezést. Megjegyezzük, hogy $\widetilde{Alb}_U$ általában már olyan szemi-Abel varietás, amelynek van torikus része. Ezek után egy alkalmas párosítással definiálható a $CH_0(X)^0$ csoport általánosításaként a $\mathcal{Z}(U)^0$ csoport egy $h_0(U)^0$ faktorcsoportja. A fejezet fő eredménye a Theorem 1.1.1, amely szerint a $h_0(U)^0 \mapsto \widetilde{Alb}_U$ általánosított Albanese leképezés izomorfizmust indukál a k karakterisztikájához relatív prím rendű torzióelemek részcsoportján.

Az $U = X$ esetben visszkapjuk Roitman tételét, azonban az általánosítás bizonyítása a Roitman tétel korábbi bizonyításaihoz képest teljesen új koncepcióra épül. Lényegében egy diagram kommutativitásának megmutatásán alapul.

Roitman tételét Milne $p > 0$ karakterisztika esetén általánosította úgy, hogy az izomorfizmus a p -hatványrendű elemek részcsoportjára is teljesül. Kérdés, hogy a Theorem 1.1.1 is teljesül-e ebben az esetben?

A 2. fejezet a D. Harari-val közös *Arithmetic duality theorems for 1-motives* című és a J. reine angewandte Mathematik folyóiratban 2005-ben megjelent dolgozat némileg módosított és újabb eredmények ismertetésével kibővített változata. Két kiemelt eredményt találunk itt.

A Theorem 2.1.1 szerint legyen K egy lokális test és $M = [Y \mapsto G]$ egy K feletti 1-motívum. Az $i = -1, 0, 1, 2$ egészekre léteznek kanonikus

$$(1) \quad \mathbf{H}^i(K, M) \times \mathbf{H}^{1-i}(K, M^*) \mapsto \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

bilinéaris leképezések, amelyek tökéletes dualitást indukálnak $i = -1, 0$ mellett egy megfelelően definiált provéges csoport és a $\mathbf{H}^{1-i}(K, M^*)$ diszkrét torziócsoport között. Ez az eredmény a klasszikus Tate-Nakayama dualitástétel általánosítása. Utóbbit először abban az esetben bizonyították, amikor (1)-ben M helyett egy K feletti algebrai tórusz áll. Ilyenkor M^* a tórusz karaktereinek a csoportja. A tétel Tate egy másik, 1958-as, eredményének is általánosítása. Ebben az esetben M illetve M^* helyén egy Abel varietás, illetve annak duálisa áll.

Jelöljön most k egy algebrai számtestet és legyen M egy 1-motívum k felett. A Theorem 2.1.2 szerint $i = 0, 1$ -re léteznek a

$$(2) \quad \mathbf{III}^i(M) \times \mathbf{III}^{2-i}(M^*) \mapsto \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

kanonikus párosítások. Az $i = 1$ esetben a párosítás a maximális osztható részcsoporttal való faktorizálás után nem elfajuló. Az $i = 0$ esetben - bizonyos feltételek mellett - tökéletes dualitást kapunk egy kompakt és egy diszkrét topológikus csoport között. Ha az Abel varietások Tate-Safarevics csoportjának végességéről szóló sejtés igaz, akkor $i = 1$ esetben véges csoportok tökéletes dualitását kapjuk. Ennek a tételnek az elliptikus görbékre vonatkozó speciális esetét Cassels, Abel varietásokra vonatkozó esetét pedig Tate bizonyította. Tekintettel arra, hogy 1-motívumok duálisát általában nem lehet csoportsémaként definiálni, már annak a bizonyítása is érdekes, hogy a fenti tételek Abel-varietásokra visszaadják a Cassels-Tate párosítást.

A tételek bizonyítása, mint az várható is, mély étale kohomológiai megfontolásokat tartalmaz. Az értekezésben a szerző beszámol arról, hogy a Harari közös cikke további kutatások kiindulópontját jelentette. Így González-Avilés, Tan és Jossen kiterjesztette az eredményeket más alaptestek felett definiált 1-motívumokra.

Az algebrai számelmélet egyik alaperedménye a kvadratikus formákra vonatkozó Minkowski-Hasse tétel, amelyet $\mathbb{Q}$ feletti formákra Minkowski, algebrai számtestek feletti formákra Hasse bizonyított 1921-ben. A tétel szerint,

ha egy racionális együtthatós kvadratikus formának van zérushelye $\mathbb{R}$ -ben és minden p -adikus számtestben, akkor van $\mathbb{Q}$ -ban is. Természetes kérdés, hogy érvényes-e hasonló eredmény magasabb fokú formákra is. Selmer 1957-ben példát mutatott olyan harmadfokú formára - ez szerepel a tézisben is -, amelyre a Hasse elv nem igaz. A 2. fejezet eredményeinek ismertetése során már említettük a III Tate-Safarevics csoportot, amely elliptikus görbékre azon negyedfokú lefedések ekvivalencia osztályaiból áll, amelyekre nem teljesül a Hasse-elv. A III tehát a Hasse-elvvel szembeni obstrukció nagyságát méri. Az algebrai geometriai kutatások egyik fontos területe annak jellemzése, hogy milyen feltételek mellett nem teljesül a Hasse elv. Az 1970-es Nemzetközi Matematikus Kongresszuson Manin bevezetett egy módszert a kivételek jellemzésére.

Az értekezés 3. fejezete is egy D. Harari-val közös cikkben alapszik¹ és a Manin féle obstrukcióval foglalkozik. Legyen G egy k test feletti szemi-Abel varietás, amelynek Abel-varietás faktorát jelölje A . Legyen továbbá X a G egy torzora. Jelölje $B(X)$ az X kohomológikus Brauer csoportjának $Br(X)$ azt a faktorát, amelyek a $Br(X)$ azon algebrai elemeiből állnak, amelyek mindenütt lokálisan konstansok. Manin definiált egy

$$X(A_k) \times Br(X) \mapsto \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

párosítást, amelyre teljesül, hogy ha $X(A_k)^{Br} = \emptyset$, akkor $X(k) = \emptyset$. Itt $X(A_k)^{Br}$ jelöli az előbbi párosítás baloldali zérushalmazát. Ha ennek az implikációnak a megfordítása is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a Manin-obstrukció az egyetlen kivétel a Hasse elv teljesülésével szemben. A fejezet fő eredménye a Theorem 3.1.1, amely szerint, ha $III(A)$ véges, akkor a $B(X)$ -hez tartozó obstrukció a Hasse elv egyetlen obstrukciója.

Ez az eredmény a $G = A$ esetben Manin eredeti eredményét adja vissza, a $G = X$ esetet pedig Sansuc bizonyította 1981-ben. A tétel érdekessége az is, hogy ha $III(A)$ véges, akkor $B(X)$ is az, ami a Brauer csoportra nem feltétlenül teljesül. Ez lehetővé teszi konkrét esetben a Hasse elv sérülésének tesztelését.

Tudna mutatni egy olyan példát, amikor a Manin obstrukción kívül más kivétel is van?

Görbékre esetén milyen következménnyel járnak ezek az eredmények? Arra gondolok, hogy elliptikus görbék Tate-Safarevics csoportja általánosan elfogadott sejtés szerint véges. A Manin tétel szerint tehát ilyen görbékre csak a Manin obstrukció jelentkezhet.

Itt az ideje, hogy összefoglaljam a véleményemet. Pozitívumként állapítom meg, hogy az értekezés az algebrai geometria hazánkban kevésbé képviselt, de világviszonylatban igen nagy fejlődésen keresztül ment elméletében tartalmaz érdekes, új eredményeket. Az értekezésből megállapítható, hogy Szamuely Tamás nagyon jól elsajátította a terület modern elméletét és alkotó

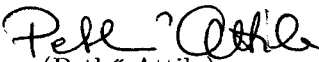
¹Local-global principles for 1-motives, Duke Math. J. 143 (2008), 531-557.

módon tudja azt használni. Érdeme az is, hogy a tézisekben tovább fejleszti ennek az elméletnek a magyar nyelvű terminológiáját.

Negatívum számomra, hogy az értekezésben feldolgozott **minden egyes dolgozat társszerzős**, sőt két dolgozat ugyanazzal a társszerzővel készült. Nekem is sok társszerzős dolgozatom van, így nem vagyok a priori az ilyen dolgozatok ellen, sőt nagyon fontosnak tartom az együttműködést a szakemberek között. Az MTA doktora címmel azonban egyéni teljesítményt ismerünk el és a jelen értekezésből lehetetlen kihámozni Szamuely Tamás saját eredményeit. Vélelmezem, hogy az eredmények fele tényleg az övé. Még ezzel sem lenne baj, ha az eredmények a szakterület kiemelkedő teljesítményei közé tartoznának. A véleményem elkészítése közben tanulmányoztam a MathSciNet-en és a Zentralblattban megjelent referátumokat, de nem találtam annak a jelét, hogy legalább valamelyik a három dolgozat közül nemzetközileg nagy feltűnést keltett volna. Ez volt egyébként a saját prekoncepcióm is. Úgy éreztem, hogy a Abel varietásokról szemi-Abel varietásokra általánosított eredmények bizonyítása technikai szempontból nehéz lehet, de áttörést jelentő eredményt nem hoz.

A pro és kontra érvek majdnem kiegyenlítik egymást, de nekem egyértelműen kell állást foglalni. **Az értekezés nyílt vitára bocsájtását határozottan javaslom. Ugyanakkor az MTA doktora cím odaítélését, halványan bár, de nem támogatom.**

Debrecen, 2011. október 23.


(Pethő Attila)