

dc_69_10

Cardinal Sequences and Combinatorial Principles

MTA Doktori Értekezés Tézisei

Soukup Lajos

Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézet

soukup@renyi.hu

<http://www.renyi.hu/soukup>

2010

1. Bevezetés

1.1. Kitűzött kutatási feladat rövid összefoglalása

Egy topologikus teret *diszpergáltnak* (*szétszórttnak*) hívunk, ha minden nem üres alterének van izolált pontja. Cantor és Bendixson klasszikus eredménye szerint minden topologikus tér egyértelműen előáll $P \cup S$ alakban, ahol P egy önmagában sűrű zárt altér, S pedig egy diszpergált nyílt altér. A topológia feladata a topologikus terek szerkezetének a leírása. A fentiek szerint tetszőleges terek szerkezetének megértéséhez szükségünk van a terek diszpergált részeinek vizsgálatára. Egy ilyen vizsgálat zajlik a disszertáció első felében.

A topológia standard eljárását követve invariánsokat rendelünk diszpergált terekhez és azt vizsgáljuk, hogy ezen invariánsok milyen értékeket vehetnek fel bizonyos térosztályokon belül.

Diszpergált terek vizsgálatának alapvető módszere az adott tér Cantor-Bendixson felbontásának az előállítása. Ennek segítségével definiálhatjuk a diszpergált terek alapvető invariánsát, nevezetesen a tér *számosságssorozatát*, mint a tér nem üres Cantor-Bendixson szintjei számosságainak a sorozatát.

A disszertáció első részében bizonyos térosztályok (elsősorban lokálisan kompakt reguláris terek) számosságssorozatát vizsgáljuk.

Vizsgálataink igen hamar túlmennek az általános topológia keretein és a felmerülő függetlenségi kérdések halmazelméleti módszereket követelnek.

Itt azonban a következő problémával kell szembenéznünk: míg az általunk vizsgálandó kérdések érdekesek egy szélesebb közönség, az általános topológiával és – amint azt látni fogjuk – a Boole algebrákkal foglalkozók számára, addig a szükséges vizsgálati módszerek komoly halmazelméleti háttérrel, a forszolás módszerének beható ismeretével feltételezik.

Ez a probléma természetesen már korábban is felmerült a halmazelmélet más alkalmazásai kapcsán, s ezért vezették be a *kombinatorikus elveket*. Ezek olyan, a halmazelmélet szokásos axiómarendszerétől független, általában kombinatorikus jellegű állítások, amelyeket (a) *egyszerű megfogalmazni*, de amelyek (b) *hasznosak* abban az értelemben, hogy számos érdekes következményük van. Ilyen elvekre két klasszikus példa a Martin Axióma illetve a $\diamond$ elv, de akár a kontinuum hipotézis is ennek tekinthető.

W. Just megmutatta, hogy számosságok két speciális sorozata az úgynevezett Cohen modellben nem lehet lokálisan kompakt diszpergált terek (szuperatomos Boole algebrák) számosságssorozat. A két bizonyítás hasonló ötletekre

épült, s mindkettő a Cohen forszolás beható ismeretét feltételezte. Just meggondolásait használva több más kombinatorikus és topológiai eredményt is kaptunk, s ez vetette fel az ötletet, hogy a Cohen modell vizsgálatára is próbáljunk valamiféle kombinatorikus elveket bevezetni. Ezek a vizsgálatok vezettek el [12] megírásához, s így vette kezdetét a Cohen modellben teljesülő kombinatorikus elveknek a disszertáció második részében leírt kutatása.

Parciálisan rendezett halmazok weak Freeze-Nation (wFN) tulajdonságának a vizsgálatához a fentiektől függetlenül csatlakoztam, azonban hamar kiderült, hogy a bizonyos parciálisan rendezett halmazokat wFN tulajdonsága maga is egy számos érdekes következménnyel rendelkező kombinatorikus elvnek tekinthető. Ez a megfigyelés indokolja, hogy a disszertáció második részének három fejezetében tárgyaljuk a wFN tulajdonságot és annak következményeit.

Kombinatorikus elveink alapvetően a Cohen modellre vonatkoznak. A Cohen modellben azonban közismerten nem igaz például a számos konstrukcióban igen hasznos $\clubsuit$ elv. A disszertáció utolsó fejezetében azt a kérdést vizsgáljuk, hogy vajon hogyan lehet „sok” Cohen valóst adni egy modellhez olyan módon, hogy a generikus bővítésben valamilyen $\clubsuit$ -szerű elv érvényben lehessen.

1.2. Vizsgálati módszerek

Az általános topológia szokásos módszerei mellett alapvetően a halmazelméletből veszünk eszközöket. Kiterjedten használjuk a forszolás során keletkező új halmazok neveinek beható vizsgálatát. A végtelen kombinatorika tételeit is lépten-nyomon alkalmazzunk kell.

Adott számosságsorozattal rendelkező diszpergált terek konstrukciójára új amalgációs módszereket fejlesztettünk ki. Bizonyos osztályokba tartozó terek számosságsorozatainak teljes konzisztens jellemezésének alapvető eszköze az általunk bevezetett *univerzális tér* fogalma.

1.3. A disszertáció szerkezete

A disszertáció 17 fejezetből áll. Az első fejezetben összefoglaljuk a legfontosabb fogalmakat, a a számosságsorozatokkal kapcsolatos korábbi alapvető tételeket, továbbá a disszertáció alapvető eredményeit. A további fejezeteket témakörönként a disszertáció két része tartalmazza. Egy fejezet egy vagy több cikk legfontosabb eredményeit tartalmazza rövidített formában.

2. Fő tudományos eredmények

2.1. Alapfogalmak

Legyen X egy tetszőleges topologikus tér. Transzfinit indukcióval minden α rendszámra definiáljuk az adott tér $X^{(\alpha)}$ -val jelölt α -adik *Cantor-Bendixson deriváltját* a következőképpen:

- $X^{(0)} = X$;
- $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$, azaz az $X^{(\alpha)}$ tér torlódási pontjainak a halmaza;
- $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\nu < \alpha} X^{(\nu)}$, ha α limesz rendszám.

Azaz $X^{(1)}$ az X torlódási pontjainak halmaza, $X^{(2)}$ a torlódási pontok torlódási pontjai, és így tovább. Ha $\alpha < \beta$, akkor $X^{(\alpha)} \supseteq X^{(\beta)}$. Van tehát egy olyan minimális α rendszám, hogy $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$. Ezt az α rendszámot az X tér *magasságának* vagy *Cantor-Bendixson magasságának* hívjuk és $ht(X)$ -szel jelöljük. Természetesen ekkor az $X^{(\alpha)}$ altér nem tartalmazhat izolált pontot, azaz önmagában sűrű. Mivel a derivált halmazok mind zártak, ezért $X^{(\alpha)}$ perfekt lesz.

Egy topologikus teret *diszpergálnak* (szétszórtnak) hívunk, ha minden nem üres alterének van izolált pontja. Könnyű látni, hogy az $X \setminus X^{(ht(X))}$ altér diszpergált. Vagyis minden X tér előáll, mint az önmagában sűrű zárt $X^{(ht(X))}$ altér és a diszpergált nyílt $X \setminus X^{(ht(X))}$ altér uniója. Azonban egy diszpergált tér számossága legfeljebb akkor lehet, mint a tér súlya. Ez a megfigyelés adja Cantor és Bendixson klasszikus tételét: a valós számok minden altere előáll egy önmagában sűrű altér és egy megszámlálható diszpergált altér uniójaként.

Történetileg, a diszpergált terek vizsgálatát Cantor, [32], kezdte, amikor 1872-ben belátta, hogy ha a

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrikus sor nullához konvergál egy olyan X halmaz kivételével, amely diszpergált és amely magassága véges, akkor a sor minden együtthatójának nullának kell lennie.

Vizsgálataink során egy X tér Cantor-Bendixson deriváltjai helyett a tér alábbi módon definiált *Cantor-Bendixson hierarchiáját* fogjuk vizsgálni.

Először is jelölje $I(Y)$ egy tetszőleges $Y \subset X$ (al)tér izolált pontjainak halmazát. Transzfinit indukcióval minden α rendszámra definiáljuk az adott X tér $I_\alpha(X)$ -val jelölt α -adik *Cantor-Bendixson szintjét* a következőképpen:

$$I_\alpha(X) = I(X \setminus \cup\{I_\beta(X) : \beta < \alpha\}).$$

A definícióból világos, hogy

$$I_\alpha(X) = X^{(\alpha+1)} \setminus X^{(\alpha)},$$

továbbá, hogy az X tér pontosan akkor diszpergált, ha előáll a Cantor-Bendixson szintjeinek uniójaként.

Egy X diszpergált tér $ht(X)$ magassága tehát a legkisebb olyan β rendszám, hogy $I_\beta(X) = \emptyset$, azaz $X = \cup_{\alpha < \beta} I_\alpha(X)$. A tér $CS(X)$ -el jelölt *számos-ságsorozata* a nem üres Cantor-Bendixson szintek számosságainak a sorozata, azaz

$$CS(X) = \langle |I_\alpha(X)| : \alpha < ht(X) \rangle.$$

Egy X diszpergált tér $wd(X)$ -vel jelölt *szélességét* a következőképpen adjuk meg:

$$wd(X) = \sup\{|I_\alpha(X)| : \alpha < ht(X)\}.$$

Használjuk a következő jelöléseket: az α hosszú konstant κ értékű sorozatot jelölje $\langle \kappa \rangle_\alpha$. Ha $\alpha = 1$, akkor $\langle \kappa \rangle_1$ helyett $\langle \kappa \rangle$ -t írunk. Ha f egy α hosszú, g pedig egy β hosszú sorozat, akkor a két sorozat összefűzőttjét, konkatenáltját jelölje $f \frown g$. Tehát a $h = f \frown g$ sorozat hossza $\alpha + \beta$, továbbá $h(\xi) = f(\xi)$ ha $\xi < \alpha$, és $h(\alpha + \eta) = g(\eta)$ ha $\eta < \beta$.

Algebrai kitekintés: A számos-ságsorozat fogalmát Day vezette be [33]-ben, azonban nem topologikus terekre, hanem Boole algebrákra.

Egy $\mathbf{B}$ Boole algebrát *szuperatomosnak* nevezünk, ha $\mathbf{B}$ minden homomorf képe atomos. A szuperatomos Boole algebrákkal kapcsolatos alapkérdéseket Tarski és Mostowski, [87], vetették fel 1939-ben. Szintén ők vezették be a szuperatomos Boole algebrák legfontosabb invariánsait az alábbi módon.

Legyen $\mathbf{A}$ egy tetszőleges Boole algebra. Jelölje $At(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ atomjainak halmazát. Ha $\mathcal{J}$ egy ideál $\mathbf{A}$ -ben, akkor legyen $\mathcal{J}^*$ az az ideál, amit a

$$\mathcal{J} \cup \{x \in \mathbf{A} : x/\mathcal{J} \in At(\mathbf{A}/\mathcal{J})\}$$

halmaz generál.

Az α rendszám szerinti tranzfinit indukcióval definiáljuk a $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{A})$ ideálokat az alábbi módon: legyen $\mathcal{J}_0(\mathbf{A}) = \{0_{\mathbf{A}}\}$; ha $\alpha = \alpha' + 1$, akkor $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{A}) = \mathcal{J}_{\alpha'}(\mathbf{A})^*$; ha pedig α limesz akkor $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{A}) = \bigcup_{\alpha' < \alpha} \mathcal{J}_{\alpha'}(\mathbf{A})$.

Az $\mathbf{A}$ magassága, amit $\text{ht}(\mathbf{A})$ jelöl, legyen az a legkisebb δ rendszám, amire $\mathcal{J}_\delta(\mathbf{A}) = \mathcal{J}_{\delta+1}(\mathbf{A})$. Legyen továbbá $\text{wd}_\alpha(\mathbf{A}) = |\text{At}(\mathbf{A}/\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{A}))|$.

Definiáljuk az $\mathbf{A}$ -nak a $\text{CS}(\mathbf{A})$ -val jelölt számosságsorozatát a következő módon:

$$\text{CS}(\mathbf{A}) = \langle \text{wd}_\alpha(\mathbf{A}) : \alpha < \text{ht}(\mathbf{A}) \rangle.$$

Jól ismert, (lásd [68, Proposition 17.8],) hogy egy $\mathbf{A}$ Boole algebra pontosan akkor szuperatomos ha van olyan α rendszám amire $\mathbf{A} = \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{A})$.

Idézzük fel, hogy egy topologikus teret akkor hívunk *Boole térnek*, ha kompakt, 0-dimenziós és Hausdorff. A *Stone dualitás* kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést ad Boole terek és Boole algebrák között.

2.1. Állítás ([68, Construction 17.7]). *Egy $\mathbf{B}$ Boole algebra pontosan akkor szuperatomos ha az $S(\mathbf{B})$ -vel jelölt duális tere diszpergált. Ebben az esetben $\text{ht}(\mathbf{B}) = \text{ht}(S(\mathbf{B}))$, és $\text{CS}(\mathbf{B}) = \text{CS}(S(\mathbf{B}))$.*

Történetileg a Boole algebrák számosságsorozatai előbb definiálták, ugyanis ezt a fogalmat Day, [33], 1967-ben vezette be, míg topologikus terek számosságsorozatait először LaGrange definiálta egy évvel később.

A jelen disszertációban azonban, ha tehetjük, akkor szuperatomos Boole algebrák helyett kompakt diszpergált tereket fogunk vizsgálni.

2.2. A kezdetek

Mazurkiewicz és Sierpiński klasszikus eredménye szerint (lásd [86] vagy [68, Theorem 17.11]) egy $\mathbf{B}$ megszámlálható szuperatomos Boole algebrát az izomorfia erejéig meghatároz számosságsorozata! Megmutatták, hogy a megszámlálható szuperatomos Boole algebrák számosságsorozatai pontosan az $\langle \omega \rangle_\beta \frown \langle n \rangle$ alakú sorozatok, ahol β egy megszámlálható rendszám, n pedig egy pozitív természetes szám.

Mit mondhatunk nem megszámlálható Boole algebrákról? Telgarsky 1968-ban vetette fel a kérdést, hogy van-e olyan szuperatomos Boole algebra, aminek számosságsorozata $\langle \omega \rangle_{\omega_1} \frown \langle 1 \rangle$. A szuperatomos Boole algebrák modern vizsgálatának ez a kérdés a kiinduló pontja.

A számosságsorozatok tanulmányozása tehát a szuperatomos Boole algebrák vizsgálatában gyökeredzik. Mivel a Stone dualitás révén ezek az algebrák

a kompakt diszpergált tereknek felelnek meg, ezért a topológiai vizsgálatok is a kompakt terekre koncentráálódtak.

Technikai okokból kompakt terek helyett célszerűbb egy másik térosztályt vizsgálni.

2.2. Definíció. Egy X topologikus tet akkor nevezünk LCS^* -térnek, ha lokálisan kompakt, diszpergált, de nem kompakt. ¹

Elemi meggondolások adják a következő állítást.

2.3. Állítás. Legyen s számosságok egy sorozata. A következő állítások ekvivalensek:

(1) s egy kompakt diszpergált tér számosságsorozata.

(2) $s = t \cap \langle n \rangle$, ahol $n \in \omega \setminus \{0\}$, és t egy LCS^* -tér számosságsorozata.

Igy tehát a kompakt terek számosságsorozatait pontosan akkor ismerjük, ha meghatároztuk az LCS^* terek számosságsorozatait. Telgarsky eredeti kérdését is átfogalmazhatjuk az alábbi módon:

Van-e olyan LCS^ -tér, mely számosságsorozata $\langle \omega \rangle_{\omega_1}$?*

A fenti kérdést, számos konzisztens eredmény után, az alábbi tétel válaszolja meg ZFC-ben.

2.4. Tétel (Rajagopalan, 1976, [91]). *Létezik olyan LCS^* tér, mely számosságsorozata éppen $CS(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_1}$.*

Számosságok egy adott sorozatának számos követelményt kell kielégítenie ahhoz, hogy egy adott térosztány valamely elemének számosságsorozata lehessen.

2.5. Állítás. (1) *Ha az X tér diszpergált és reguláris, akkor $|X| \leq 2^{|\mathcal{I}(X)|}$, és ezért $ht(X) < (2^{|\mathcal{I}(X)|})^+$.*

(2) *Ha az $\mathfrak{s} = \langle \kappa_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ sorozat egy reguláris tér számosságsorozata, akkor minden $\alpha < \beta < \delta$ rendszámra teljesül $\kappa_\beta \leq 2^{\kappa_\alpha}$ és $|\delta \setminus \alpha| \leq 2^{\mathfrak{s}(\alpha)}$.*

A következő definíciók megkönnyítik majd eredményeink megfogalmazását.

2.6. Definíció. Ha α tetszőleges rendszám, akkor jelölje $\mathcal{C}(\alpha)$ az α magas LCS^* -terek számosságsorozatait. Minden fix végtelen λ számosságra legyen

$$\mathcal{C}_\lambda(\alpha) = \{s \in \mathcal{C}(\alpha) : s(0) = \lambda \wedge \forall \beta < \alpha [s(\beta) \geq \lambda]\}.$$

¹Az irodalomban egy lokálisan kompakt diszpergált teret neveznek LCS térnek.

A 2.13 tétel szerint, amit [14]-ben bizonyítottunk, $\mathcal{C}(\alpha)$ -t meghatározza ha ismerjük $\mathcal{C}_\lambda(\beta)$ -t minden λ számosságra és minden $\beta \leq \alpha$ rendszámra.

1978-ban Juhász és Weiss erősítették Rajagopalan eredményét.

2.7. Tétel (Juhász, Weiss, [59]). *Minden $\alpha < \omega_2$ rendszámhoz van olyan X LCS*-tér, amire $\text{CS}(X) = \langle \omega \rangle_\alpha$.*

A 2.5 állítás szerint, ha igaz a kontinuum hipotézis, akkor $\langle \omega \rangle_{\omega_2} \notin \mathcal{C}(\omega_2)$. Juhász és Weiss, [59], kérdezték, hogy vajon konzistens-e, hogy $\langle \omega \rangle_{\omega_2} \in \mathcal{C}(\omega_2)$. Just megmutatta, hogy egy ilyen tér konstrukciójához nem elegendő feltennünk a kontinuum hipotézis tagadását.

2.8. Tétel (Just, [64]). *A Cohen modellben nincs olyan X LCS*-tér, amire $\text{CS}(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_2}$.*

Évekkel később 1985-ben Baumgartner és Shelah adtak igenlő választ Juhász és Weiss kérdésére.

2.9. Tétel (Baumgartner, Shelah, [25]). *Konzisztens, hogy van olyan X LCS*-tér, amire $\text{CS}(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_2}$.*

Baumgartner és Shelah bizonyítása azon alapult, hogy bevezették a Δ -függvény fogalmát, és megmutatták: (a) *konzisztens, hogy van a Δ -függvény*, (b) *ha van Δ -függvény, akkor az alapmodel valamely MAF-os generikus bővítésében van olyan LCS*-tér amely számosságsorozata éppen $\langle \omega \rangle_{\omega_2}$.*

LCS*-terek számosságsorozataival kapcsolatban kétfajta kérdést vizsgálhatunk:

- (1) Számosságok adott $\mathfrak{s}$ sorozatáról döntsük el vajon $\mathfrak{s}$ előáll-e mint egy LCS*-tér számosságsorozata valamely/egy adott ZFC modellben.
- (2) Adjunk pontos leírást a $\mathcal{C}(\alpha)$ vagy a $\mathcal{C}_\lambda(\alpha)$ osztály elemeiről bizonyos ZFC modellekben.

Természetesen a második kérdéstípus általánosabb, és ezért elvárhatóan nehezebben is kezelhető.

Az eddig említett pozitív eredmények mind az első típusba tartoznak: bizonyos speciális sorozatokhoz konstruáltak a szerzők adott sorozattal rendelkező tereket. Már ezen konstrukciók bonyolultsága (különösen a Baumgartner-Shelah tétel bizonyítása) is előre jelezte, hogy milyen nehézségekkel kell szembesülnünk amikor a második típusú problémákat vizsgáljuk.

2.3. Egy ZFC eredmény

A disszertacio 1.2. fejezetében a következő, az első típusba sorolható problémával foglalkozunk. A 2.7, a 2.8 és a 2.9 tételek szerint (a) *minden $\alpha < \omega_2$ rendszámhoz van LCS^* tér $\langle \omega \rangle_\alpha$ számosságsorozattal*, (b) *ZFC+ $\neg CH$ nem dönti el, hogy van-e olyan LCS^* tér amely számosságsorozata $CS(X) = \langle \omega \rangle_{\omega_2}$* . Amint azt [9]-ben beláttuk, a $ht(X) < (2^{|I(X)|})^+$ becslés éles a megszámlálható sok izolált ponttal rendelkező LCS^* terekre az alábbi értelemben: *minden $\alpha < (2^\omega)^+$ rendszámhoz van olyan X LCS^* tér, amely magassága α , de $|I(X)| = \omega$* .

Sokkal kevesebbet tudtunk az ω_1 sok izolált ponttal rendelkező LCS^* terekről, például máig megoldatlan kérdés, hogy ZFC-ben konstruálható-e olyan LCS^* tér, amely számosságsorozata $\langle \omega_1 \rangle_{\omega_2}$. Valójában, ahogy azt Juhász megjegyezte a 80-s évek közepén, az a sokkal egyszerűbb kérdés is nyitott volt, hogy vajon ZFC-ben konstruálható-e olyan LCS^* tér, amely legalább ω_2 magas, de csak ω_1 izolált pontja van. Ez a probléma is sokáig ellenállt a bizonyítási kísérleteknek. Végül a [9] cikk fő eredményeként pozitív választ adtunk Juhász kérdésére:

2.10. Tétel. *ZFC-ben konstruálható olyan LCS^* tér, amely legalább ω_2 magas, de csak ω_1 izolált pontja van.*

A bizonyítás fő összetevője a következő általánosabb eredmény:

2.11. Tétel. *Ha κ végtelen számosság, és $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, akkor van olyan X LCS^* tér, amely magassága κ^+ , de $|I(X)| = \kappa$.*

2.10 bizonyításának alapgondolata az, hogy minden $\alpha < \omega_2$ rendszámhoz konstruálunk egy LCS^* teret $\langle \omega_1 \rangle_\alpha$ számosságsorozattal, aztán pedig megpróbáljuk valahogy összeragasztani ezen ω_2 tér legalsó szintjeit, hogy egy ω_2 magas, de csupán ω_1 izolált ponttal rendelkező térhez jussunk. Sajnos elemi megfontolások adják, hogy nem elegendő a legalsó szinteket összeragasztani, hanem további pontokat is azonosítanunk kell. Ehhez egy teljesen új amalgációs technológiát kellett kifejlesztenünk.

A kidolgozott technika ekkoriban csak azt bizonyította, hogy $\mathcal{C}_{\omega_1}(\omega_2) \neq \emptyset$, azonban ennek a módszernek a továbbfejlesztésén alapulnak a következő fejezet eredményei, ahol az Általánosított Konntinuum Hipotézis (ÁKH) feltevése mellett teljes $\mathcal{C}_\lambda(\alpha)$ osztályokat írunk le.

2.4. Számosságsorozatok ÁKH mellett

Hosszú ideig lényegében egyetlen olyan pozitív eredmény volt, amely egy „második típusú” kérdésre válaszolt volna, azaz egy teljes $\mathcal{C}_\lambda(\alpha)$ osztályt jellemzett. Nevezetesen LaGrange, és Juhász és Weiss munkája ZFC-ben jellemezte a legfeljebb ω_1 magas LCS* terek számosságsorozatait.

2.12. Tétel (Juhász, Weiss, [61]). *Végtelen számosságok egy $\langle \kappa_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ sorozata pontosan akkor lesz egy LCS* tér számosságsorozata, ha $\kappa_\eta \leq \kappa_\xi^\omega$ teljesül valahányszor $\xi < \eta < \omega_1$.*

Azaz a számosságaritmetika önmagában eldönti, hogy számosságok egy ω_1 hosszú sorozata előáll-e mint egy LCS* tér számosságsorozata. A helyzet azonban drámaian más, ha hosszabb, akár csak $\omega_1 + 1$ hosszú sorozatokat tekintünk. Például azt a kérdést, hogy vajon $\langle \omega \rangle_{\omega_1} \cap \langle \omega_2 \rangle \in \mathcal{C}(\omega_1 + 1)$ teljesül-e, nem dönti el a következő számosságaritmetika: $2^\omega = \omega_2$ és $2^\kappa = \kappa^+$ ha $\kappa > \omega$ (lásd Just[64] és Roitman[93]).

Épp emiatt sokáig a számosságaritmetika nem tűnt alkalmasnak arra, hogy eldöntse, hogy akár egy viszonylag „rövid” sorozat egy LCS* tér számosságsorozata-e. Azonban [14]-ben megmutattunk, hogy a valóság más, hisz az ÁKH eldönti, hogy mik a $\mathcal{C}(\alpha)$ osztály elemei az összes $\alpha < \omega_2$ rendszámra.

Először is megmutattuk, hogy $\mathcal{C}(\alpha)$ elemeinek meghatározásához elegendő megmondanunk hogy milyen sorozatok vannak a $\mathcal{C}_\lambda(\alpha')$ osztályokban minden $\alpha' < \omega_2$ rendszámra és minden végtelen λ számosságra. Ez az állítás következik az alábbi általános ZFC-ben igazolható redukciós tételből:

2.13. Tétel ([14]). *Tetszőleges δ rendszámra és végtelen számosságok tetszőleges s sorozatára az alábbiak ekvivalensek:*

- (1) $s \in \mathcal{C}(\delta)$,
- (2) az s sorozat előáll $s_0 \cap s_1 \cap \dots \cap s_{n-1}$ alakban, ahol $n \in \omega$ és minden $i < n$ -re $s_i \in \mathcal{C}_{\lambda_i}(\delta_i)$, ahol $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{n-1}$ végtelen számosságok és $\delta = \delta_0 + \dots + \delta_{n-1}$.

A redukciós tétel alapján feladatunk tehát a $\mathcal{C}_\lambda(\alpha)$ osztályok jellemzése, ahol λ tetszőleges számosság, α pedig ω_2 -nél kisebb rendszám. Az ÁKH melletti karakterizáció pontos megfogalmazásához a következő definíciókra lesz szükségünk.

Tetszőleges $s \in {}^\alpha\{\lambda, \lambda^+\}$ sorozatra legyen

$$A_\lambda(s) = \{\beta \in \alpha : s(\beta) = \lambda\} = s^{-1}\{\lambda\}.$$

2.14. Definíció. Ha α egy rendszám, akkor egy $L \subset \alpha$ sorozatra akkor mondjuk hogy κ -zárt α -ban, ahol κ egy végtelen számosság, ha minden $\langle \alpha_i : i < \kappa \rangle \in {}^\kappa L$ növény sorozatra $\sup \langle \alpha_i : i < \kappa \rangle \in L \cup \{\alpha\}$ teljesül. Az L halmaz $< \lambda$ -zárt α -ban pontosan akkor ha κ -zárt α -ban minden $\kappa < \lambda$ végtelen számosságra. Azt mondjuk, hogy L rákövetkező zárt α -ban ha $\beta + 1 \in L \cup \{\alpha\}$ minden $\beta \in L$ rendszámra.

Most már készen állunk a jellemzésre.

2.15. Tétel. Tegyük fel, hogy ÁKH igaz, és rögzítsünk egy $\alpha < \omega_2$ rendszámot.

(i) $\mathcal{C}_\omega(\alpha) = \{s \in {}^\alpha \{\omega, \omega_1\} : s(0) = \omega\}$.

(ii) Ha $\lambda > \text{cf}(\lambda) = \omega$, akkor

$$\mathcal{C}_\lambda(\alpha) = \{s \in {}^\alpha \{\lambda, \lambda^+\} : s(0) = \lambda \text{ és } A_\lambda(s) \text{ } \omega_1\text{-zárt } \alpha\text{-ban}\}.$$

(iii) Ha $\text{cf}(\lambda) = \omega_1$, akkor

$$\mathcal{C}_\lambda(\alpha) = \{s \in {}^\alpha \{\lambda, \lambda^+\} : s(0) = \lambda \text{ továbbá } A_\lambda(s) \text{ } \omega\text{-zárt és rákövetkező-zárt } \alpha\text{-ban}\}.$$

(iv) Ha $\text{cf}(\lambda) > \omega_1$, akkor

$$\mathcal{C}_\lambda(\alpha) = \{\langle \lambda \rangle_\alpha\}.$$

A bizonyítás legnehezebb lépése az alábbi tétel belátása volt, ami a 2.11 tétel egy messzemenő általánosítása.

2.16. Tétel. Legyen λ egy tetszőleges végtelen számosság, $\mu = \text{cf}(\lambda) > \omega$ és tegyük fel, hogy $\lambda = \lambda^{<\mu}$. Ha $\lambda < \kappa \leq \lambda^\mu$ egy számosság és $\alpha < \mu^+$ egy μ kofinalitású rendszám, akkor $\langle \lambda \rangle_\alpha \cap \langle \kappa \rangle_{\mu^+} \in \mathcal{C}(\mu^+)$.

A disszertáció 1.4. fejezetében azt a kérdést vizsgáljuk, hogy mit mondhatunk hosszabb, azaz legalább ω_2 hosszú sorozatokról az ÁKH feltételezése mellett. Annyi ismert volt, hogy minden $\alpha < \omega_3$ rendszámra az ÁKH-val konzisztens, hogy $\langle \omega_1 \rangle_\alpha \in \mathcal{C}(\alpha)$. Az azonban a mai napig nyitott kérdés, hogy $\langle \omega_1 \rangle_{\omega_2} \in \mathcal{C}(\omega_2)$ bizonyítható-e ZFC-ben vagy ÁKH-ból.

Ha κ egy végtelen számosság és $\delta < \kappa^{++}$ egy rendszám, akkor definiáljuk függvények $\mathcal{D}_\kappa(\delta)$ rendszerét az alábbi módon: ha $\kappa = \omega$, akkor

$$\mathcal{D}_\omega(\delta) = \{f \in {}^\delta \{\omega, \omega_1\} : f(0) = \omega\},$$

és ha $\kappa > \omega$, akkor

$$\mathcal{D}_\kappa(\delta) = \{s \in {}^\delta\{\kappa, \kappa^+\} : s(0) = \kappa, s^{-1}\{\kappa\} < \kappa\text{-zárt és rákövetkező-zárt } \delta\text{-ban}\}.$$

Elemi topológiai meggondolások adják, hogy ha ÁKH igaz, akkor a $\mathcal{D}_\kappa(\delta)$ függvényosztály az $\mathcal{C}_\kappa(\delta)$ osztály természetes felső korlátja, vagyis ÁKH-ból következik, hogy

$$\mathcal{C}_\kappa(\delta) \subseteq \mathcal{D}_\kappa(\delta).$$

Azt sejtjük, hogy ÁKH-ból következik, hogy $\mathcal{C}_\kappa(\alpha) = \mathcal{D}_\kappa(\alpha)$, de ezen sejtés legegyszerűbb speciális esetének, a $\langle \omega_1 \rangle_{\omega_2} \in \mathcal{C}(\omega_2)$ tartalmazásnak a belátásától is messze vagyunk.

Konzisztens részeredményeket értünk el. Az alábbi fogalom - amint azt később kifejtjük - kulcsszerepet játszott vizsgálatainkban.

2.17. Definíció. Egy X LCS* tér akkor $\mathcal{C}_\kappa(\alpha)$ -univerzális ha $\text{CS}(X) \in \mathcal{C}_\kappa(\alpha)$ és minden $s \in \mathcal{C}_\kappa(\alpha)$ sorozathoz van X -nak olyan Y nyílt altere, hogy $\text{CS}(Y) = s$.

A keresett részleges karakterizációhoz vezető és a 2.3 fejezetben megfogalmazott fő eredmény az alábbi tétel.

2.18. Tétel. Ha $\kappa > \omega$ egy reguláris számosság, $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ és $2^\kappa = \kappa^+$, akkor minden $\delta < \kappa^{++}$ rendszámhoz van egy olyan κ -teljes, κ^+ -antilánc feltételes P kényszerképzet, amely számossága κ^+ , továbbá V^P -ben az alábbi állítás igaz:

$$\mathcal{C}_\kappa(\delta) = \mathcal{D}_\kappa(\delta)$$

és létezik $\mathcal{C}_\kappa(\delta)$ -univerzális LCS* tér.

Hogyan jönnek az univerzális terek a képbe? Az első ötlet a $\mathcal{C}_\kappa(\delta) = \mathcal{D}_\kappa(\delta)$ egyenlőség konzisztenciájának a bizonyítására az, hogy hajtsunk végre egy iterált forszolást. Minden $f \in \mathcal{D}_\kappa(\delta)$ függvényhez próbáljunk találni egy P_f parciálisan rendezett halmazt, hogy

$$1_{P_f} \Vdash \text{Van olyan } X_f \text{ LCS* tér aminek számosság sorozata éppen } f.$$

Mivel tipikusan $|X_f| = \kappa^+$, így a szokásos meggondolások alapján, ha meg akarjuk őrizni a számosságokat és az ÁKH-t is, akkor P_f -nek κ -teljesnek és a κ^+ -antilánc feltételt kielégítőnek kell lennie. Ebben az esetben a P_f -fel való forszolás κ -nak κ^+ új részhalmazát hozza be. Azonban tipikusan

$|\mathcal{D}_\kappa(\delta)| = \kappa^{++}$! Így az iterálás hossza legalább κ^{++} , azaz a végső modellben κ -nak lesz legalább $\kappa^+ \cdot \kappa^{++} = \kappa^{++}$ új részhalmaza, azaz $2^\kappa > \kappa^+$.

Azonban egy $\mathcal{C}_\kappa(\delta)$ -univerzális tér számossága κ^+ , így tehát esélyünk van arra, hogy azt egyetlen κ^+ számosságú, κ -teljes, a κ^+ -antilánc feltételnek eleget tevő P forszolással behozzuk. Ebben az esetben viszont a $(2^\kappa)^{V^P} \leq ((|P|^\kappa)^\kappa)^V = \kappa^+$, azaz a generikus bővítésben van esélyünk az ÁKH megőrzésére.

A 2.18 bizonyítása során a fő probléma az, hogy a keresett univerzális LCS^* tér forszolására természetesen adódó parciálisan rendezett halmazok nem tesznek eleget a megfelelő antilánc feltételnek, s így annak garantálására az „orbit” Martinez által bevezetett fogalmát is használnunk kell. Az antiláncfeltétel teljesülését garantáló amalgációt így is csak hosszodalmas számolás révén tudjuk ellenőrizni.

A 2.18 tétel a hosszabb számosságsorozatok alábbi konzisztens jellemzést adja:

2.19. Tétel. *Ha ÁKH igaz, akkor reguláris számosságok egy tetszőleges, α hosszú f sorozatára az alábbi állítások ekvivalensek:*

- (A) $f \in \mathcal{C}(\alpha)$ az alapmodell valamely számosság- és ÁKH-őrző generikus bővítésében.
- (B) s előáll $s_0 \cap s_1 \cap \dots \cap s_{n-1}$ alakban, ahol $n \in \omega$, és minden $i < n$ -re $s_i \in \mathcal{D}_{\lambda_i}(\delta_i)$, ahol $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_{n-1}$ végtelen reguláris számosságok és $\delta = \delta_0 + \dots + \delta_{n-1}$.

Szinguláris számosságokat is tartalmazó sorozatok jellemzése pillanatnyilag reménytelennek tűnik, ugyanis jelenleg még ahhoz is nagyszámosság feltevését kell használnunk, hogy megmutassuk, hogy az $\langle \aleph_\omega \rangle_{\aleph_\omega} \cap \langle \aleph_{\omega+1} \rangle_{\aleph_{\omega+1}}$ sorozat is lehet LCS^* tér számosságsorozata.

2.5. Univerzális terek és fellépési tételek

Az 1.5. és 1.6 fejezetekben foglalkozunk ezekkel a kérdésekkel.

Az univerzális terek fogalmát a disszertáció 1.4. fejezetében vezettük be. Azt sejtjük, hogy mindig létezik univerzális tér, belátni azonban ezt az állítást [16]-ban csak az alábbi speciális esetekben sikerült: (1) Van $\mathcal{C}_\omega(\omega_1)$ -univerzális LCS^* tér. (2) Ha ÁKH igaz, akkor minden végtelen λ számossághoz és $\delta < \omega_2$ rendszámhoz van $\mathcal{C}_\lambda(\delta)$ -univerzális LCS^* tér.

Mi a helyzet a $\mathcal{C}_\omega(\omega_2)$ osztállyal? Amint azt már említettük, Baumgartner and Shelah megmutatták, hogy *ha van Δ -függvény, akkor $\langle \omega \rangle_{\omega_2} \in \mathcal{C}_\omega(\omega_2)$ teljesül az alapmodell egy „természetesen adódó” MAF-os kényszerképzettel történő bővítésében.* Esetünkben a „természetesen adódó” kifejezés azt jelenti, hogy a parciálisan rendezett halmaz elemei egy, az adott számosságsorozattal rendelkező tér környezetbázisának a véges közelítései. Erre a módszerre építve Bagaria, [21], megmutatta, hogy a $\mathcal{C}_\omega(\omega_2) \supseteq \{s \in {}^{\omega_2}\{\omega, \omega_1\} : s(0) = \omega\}$ állítás szintén konzisztens. Ehhez arra volt szüksége, hogy $MA_{\aleph_2}$ teljesüljön a végső modelljében. Azonban ha $MA_{\aleph_2}$ igaz, akkor $2^{\omega_0} \geq \omega_3$, márpedig ha $2^{\omega_0} = \omega_\alpha$, akkor $\mathcal{C}_\omega(\omega_2)$ osztály természetes felső korlátja egy sokkal nagyobb halmaz, nevezetesen

$$\mathcal{C}_\omega(\omega_2) \subseteq \{s \in {}^{\omega_2}\{\omega_\nu : \nu \leq \alpha\} : s(0) = \omega\}. \quad (\dagger)$$

Ezek az eredmények vetették fel azt a kérdést, hogy vajon lehet-e egyenlőség $(\dagger)$ -ban.

Az 1.5. fejezetben erre a kérdésre pozitív választ adunk, mert belátjuk, hogy konzisztens, hogy $2^\omega = \omega_2$ és van olyan $\mathcal{C}_\omega(\omega_2)$ -univerzális LCS* tér ami mutatja, hogy $\mathcal{C}_\omega(\omega_2)$ a lehető legnagyobb, azaz

$$\mathcal{C}_\omega(\omega_2) = \{s \in {}^{\omega_2}\{\omega, \omega_1, \omega_2\} : s(0) = \omega\}.$$

Az 1.6. fejezetben azt vizsgáltuk, hogy adott magasságú LCS* terek konstrukcióiból mikor lehet magasabbakat kapni. Baumgartner and Shelah nevezetes 2.9 tételét Martinez a következő irányban általánosította. Sokkal bonyolultabb kombinatorikus megfontolásokat használva belátta, hogy *ha van Δ -függvény, akkor minden $\delta < \omega_3$ rendszámhoz van olyan MAF-os P_δ kényszerképzet, hogy $\langle \omega \rangle_\delta \in \mathcal{C}_\omega(\delta)$ igaz V^P -ben.*

Természetesen adódik a kérdés, hogy vajon tényleg szükség van-e Martinez forszolós konstrukcióira, vagy pedig az igaz-e, hogy

ha $\langle \omega \rangle_{\omega_2} \in \mathcal{C}_\omega(\omega_2)$ akkor $\langle \omega \rangle_\delta \in \mathcal{C}_\omega(\delta)$ igaz minden $\delta < \omega_3$ rendszámra.

Ez a kérdés nyitott maradt, de sikerült egy fellépési tételt belátnunk: ha valamilyen κ számosságra van egy „természetesen adódó” MAF-os P parciálisan rendezett halmaz, melyre $\langle \omega \rangle_\kappa \in \mathcal{C}_\omega(\kappa)$ teljesül V^P -ben, akkor minden $\delta < \kappa^+$ rendszámra van egy „természetesen adódó” MAF-os Q parciálisan rendezett halmaz, melyre $\langle \omega \rangle_\delta \in \mathcal{C}_\omega(\delta)$. A tétel érdekessége, hogy nem csak a $\kappa = \omega_2$ esetben működik.

2.6. Szélesebb terek

Baumgartner és Shelah, Bagaria, Martinez és jelen szerző munkája nyomán tudjuk, hogy konzisztens, hogy $2^\omega = \omega_2$ és ${}^{\omega_2}\{\omega, \omega_1, \omega_2\} \subset \mathcal{C}(\omega_2)$.

Hosszú ideig ω_2 egy misztikus korlátnak tűnt nem csak magasságban, de szélességben is. Az sem volt ismert, hogy vajon a $\langle \omega \rangle_{\omega_1} \cap \langle \omega_3 \rangle$ sorozat lehet-e $\mathcal{C}(\omega_1 + 1)$ eleme. A 1.7. fejezetben sikerült megmutatni, hogy nem csak a fenti sorozat lehet számosságsorozat, hanem ${}^{\omega_2}\{\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} \subset \mathcal{C}(\omega_2)$ is lehetséges. Pontosabban az alábbi állítást láttuk be:

2.20. Tétel. *Ha ÁKH igaz és $\lambda \geq \omega_2$ egy reguláris számosság, akkor valamely számosságmegőrző generikus bővítésben $2^\omega = \lambda$ és végtelen számosságok egy teszőleges $\mathbf{s} = \langle s_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ sorozata, melyre $s_\alpha \leq \lambda$, egy LCS^* tér számosság-sorozata lesz.*

A kapott modellben tehát $\mathcal{C}_\omega(\omega_2)$ a $(\dagger)$ által megengedett lehető legnagyobb.

Ebben az esetben is egy univerzális teret konstruálunk, azonban a szélesebb tér konstrukciójáért meg kell fizetni az árat, ugyanis egy sokkal bonyolultabb, több lépéses forszolás adja a teret.

A megfelelő generikus bővítést egy három lépéses iterálásban készítjük el.

- (1) Az első generikus bővítéssel megkonstruálunk egy „*strongly stationary strong* (ω_1, λ) -*semimorass*”-t.
- (2) Ezt a „*strong semimorass*”-t használván a második bővítéssel elkészítünk egy $\Delta(\omega_2 \times \lambda)$ -függvényt.
- (3) Végül a $\Delta(\omega_2 \times \lambda)$ -függvényt használva hozzáadunk egy „*törzsszel rendelkező LCS^* teret*” a második modellhez és megmutatjuk, hogy egy ilyen tér létezése elegendő annak garantálására hogy végtelen számosságok egy teszőleges $\mathbf{s} = \langle s_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ sorozata, melyre $s_\alpha \leq \lambda$, egy LCS^* tér számosságsorozata legyen.

Jegyezzük meg, hogy a *törzsszel rendelkező LCS^* tér* esetünkben egy speciális alakú $\mathcal{C}_\omega(\omega_2)$ -univerzális teret ad.

Az 1.8. fejezetben Roitman egy klasszikus eredményét általánosítjuk és erősítjük. Függvények NDP tulajdonságát bevezetve Roitman megmutatta, hogy konzisztens, hogy az $\langle \omega \rangle_{\omega_1} \cap \langle \omega_2 \rangle$ sorozat egy LCS^* tér számosságsorozata. Ezt az eredményt általánosították [66]-ban, amikor is belátták, hogy teszőleges végtelen κ reguláris számosságra konzisztens, hogy van olyan LCS^*

tér, amely számosságsorozata $\langle \kappa \rangle_{\kappa^+} \cap \langle \kappa^{++} \rangle$. Ennél erősebb állítást látunk be [17]-ben:

2.21. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\kappa \leq \lambda$ végtelen számosságok, $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ és $2^\kappa = \kappa^+$. Ha η egy olyan rendszám, hogy $\kappa^+ \leq \eta < \kappa^{++}$ és $\text{cf}(\eta) = \kappa^+$, akkor a $\langle \kappa \rangle_\eta \cap \langle \lambda \rangle$ sorozat egy LCS^* tér számosságsorozata lesz az alapmodell valamely számosságmegőrző generikus bővítésében.*

2.22. Következmény. *Ha $\alpha < \omega_2$, $\text{cf}(\alpha) = \omega_1$, akkor konzisztens, hogy $\langle \omega \rangle_\alpha \cap \langle \omega_3 \rangle \in \mathcal{C}(\alpha + 1)$. Ha $\beta < \omega_3$, $\text{cf}(\beta) = \omega_2$, akkor konzisztens, hogy $\langle \omega_1 \rangle_\beta \cap \langle \omega_4 \rangle \in \mathcal{C}(\beta + 1)$.*

A távlati cél az, hogy a 2.21 tétel módszerét lehessen általánosabban az 1.4. fejezetben leírt módon szélesebb terek jellemzésére használni, de jelen pillanatban már 2.21 belátása is komoly technikai problémákat vetett fel.

2.7. Reguláris és 0-dimenziós terek

Láttuk, hogy a 2.5 állításban megfogalmazott követelmények nem elegendőek ahhoz, hogy jellemezzék az LCS^* terek számosságsorozatát. Például, ha $2^\omega \geq \omega_2$, akkor a $\langle \omega \rangle_{\omega_2}$ sorozat eleget tesz a 2.5-ben megfogalmazott követelményeinek, de mégsem lesz feltétlen $\mathcal{C}(\omega_2)$ eleme.

Gyökeresen más a helyzet, ha LCS^* terek helyett bővebb térosztályokat tekintünk. [9]-ben megmutattuk, hogy a fenti megszorítás az egyetlen követelmény reguláris vagy 0-dimenziós terek számosságsorozataira nézve.

2.23. Tétel. *Ha $s = \langle s(\alpha) : \alpha < \beta \rangle$ végtelen számosságok egy sorozata, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (1) $s = SEQ(X)$ valamely 0-dimenziós diszpergált X térre .
- (2) $s = SEQ(X)$ valamely reguláris diszpergált X térre,
- (3) $|\beta \setminus \alpha| \leq 2^{s(\alpha)}$ és $s(\alpha') \leq 2^{s(\alpha)}$ ha $\alpha < \alpha' < \beta$,

A fenti tétel érdekes következménye az, hogy ámbár a reguláris és a 0-dimenziós diszpergált terek osztályai különbözőek, de ennek ellenére számosságsorozataik azonosak.

Meglepő módon közvetlen konstrukcióval nem tudjuk belátni, hogy a fenti tételben (1) és (2) ekvivalens, csak az általános jellemzésen át működik a bizonyítás.

2.8. Inicialisan ω_1 -kompakt terek

E. van Douwen és tőle függetlenül A. Dow, [34], belátták, hogy ha igaz a kontinuum hipotézis, akkor minden reguláris, megszámlálható szükségű, inicialisan ω_1 -kompakt tér szükségszerűen kompakt is. Természetesen adódott a kérdés, hogy vajon szükséges-e feltenni KH-t, vagyis bizonyítható-e ugyanez az állítás ZFC-ben. A kérdés még érdekesebbé vált, amikor [23]-ben Fremlin és Nyikos megmutatták, hogy PFA-ból is következik az állítás.

[90]-ban M. Rabus tagadó választ adott van Douwen és Dow fenti kérdésére. Forszólással egy olyan B Boole algebrát konstruált, hogy az $St(B)$ Stone tér egy megfelelő altere ω_2 számosságú ellenpélda lesz. A Rabus által használt forszolás közeli kapcsolatban van azzal, aminek segítségével Baumgartner and Shelah [25]-ben megmutatta, hogy $\langle \omega \rangle_{\omega_2} \in \mathcal{C}(\omega_2)$ konzisztens. Speciálisan, Rabus is egy úgynevezett Δ -függvényt használt, aminek azonban bizonyos speciális tulajdonságokkal is kellett rendelkeznie.

[11]-ben egy más módszerrel, közvetlenül a tér egy szubbázisát forszolva gyártottuk ellenpéldát van Douwen és Dow kérdésére, amely konstrukció egyszerűbb, sokkal intuitívabb, nem követelünk meg az általunk használt Δ -függvénytől semmi extra tulajdonságot, továbbá a mi térünk rendelkezik bizonyos extra tulajdonságokkal is. Ráadásul az általunk konstruált tér egy megfelelő további iterált forszálással Frechet-Urysohn tulajdonságú térré is tehető. [11] fő eredménye tehát az alábbi tétel:

2.24. Tétel. *Ha $2^\omega = \omega_1$ és létezik Δ -függvény, akkor van olyan ω_2 számosságú, MAF-os P_f parciálisan rendezett halmaz, hogy $V^{P_f} \models$ „Van egy $X_f = \langle \omega_2, \tau_f \rangle$ -nal jelölt 0-dimenziós, jobb-szeparált (azaz diszpergált), lokálisan kompakt tér, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal is:*

- (i) $t(X_f) = \omega$, sőt Frechet-Urysohn tulajdonságú,
- (ii) $\forall A \in [\omega_2]^{\omega_1} \exists \alpha \in \omega_2 |A \cap H(\alpha)| = \omega_1$,
- (iii) $\forall A \in [\omega_2]^\omega$ (vagy $\bar{A}$ kompakt, vagy $|\omega_2 \setminus \bar{A}| \leq \omega_1$). ”

Következésképpen, V^{P_f} -ben X_f egy lokálisan kompakt, megszámlálhatóan szűk, normális, inicialisan ω_1 -kompakt, de nem kompakt tér.

Arhangel'skii, [20, problem 3], kérdezte, hogy vajon van Douwen és Dow fentebb említett tételében a $2^\omega = \omega_1$ feltevés helyett elegendő-e, hogy $2^\omega < 2^{\omega_1}$? Megmutattuk, hogy nem elegendő, mert ellenpéldánk lényegében minden, a kontinuum hipotézist tagadó számosságaritmetika mellett létezhet.

A fenti tételünket erősítettük [8]-ban, s ezt az eredményt tartalmazza az 1.8 fejezet. Nevezetesen fenti példánkat első megszámlálhatóvá tudtuk tenni. Ez a látszólag kis lépés azonban sok évi munkát igényelt.

Valójában már Alan Dow azt sejtette, hogy Koszmider [74]-ben leírt módszerét Rabus [90] terére alkalmazva egy iniciálisan ω_1 -kompakt, de nem kompakt első megszámlálható teret kapunk. Egy ilyen konstrukciós kísérlet szerepel a második szerző [71] írásában. Azonban a fellépő technikai problémákon csak úgy sikerült úrrá lenni, hogy Rabus konstrukciója helyett [11] módszerét alkalmaztuk. A kapott fő eredmény a következő állítás.

2.25. Tétel. *Konzisztens, hogy van egy a lokálisan kompakt, 0-dimenziós, normális, első megszámlálható, iniciálisan ω_1 -kompakt, de nem kompakt X tér.*

Jegyezzük meg, hogy a fenti bizonyítás is egy igen speciális tulajdonságú Δ -függvény létét használta. Terünk azonban, lévén első megszámlálható, nem lehetett diszpergált, azonban [11]-ban megadott diszpergált térkonstrukció megfelelő módosításán alapult. Tételünkkel megválaszoltuk Arhangel'skii, [20, problem 12], kérdését.

Az X tér egy pontos αX kompaktifikációja rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy (a) a végtelen távoli ponthoz lehet konvergálni ω_2 típusú sorozattal, (b) nem tartalmaz ω_1 típusú konvergens sorozatot, azaz a konvergenciaspektruma kihagyja ω_1 -t. Tudtunkkal ez az egyetlen ismert kompakt tér, amely rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

2.9. Kombinatorikus elvek a Cohen modellben

Az elmúlt 40 évben számos állításról látták be, hogy azok függetlenek ZFC-től, a halmazelmélet szokásos axiómarendszerétől. Ezeknek a függetlenségi eredményeknek a bizonyításai általában kifinomult és mély halmazelméleti módszereket igényelnek, ugyanakkor az eredmények maguk általában érdekesek nem csak a halmazelmélészek, de más matematikusok számára is. Így tehát természetes gondolat volt, hogy megpróbáljanak elkülöníteni relatíve kis számú elvet, azaz független állítást, amelyek (a) *egyszerűen megfogalmazhatók* (b) *hasznosak* abban az értelemben, hogy belőlük számos más állítás levezethető. A legtöbb ilyen állítás kombinatorikus jellegű. Legnevesebb példa erre a Martin Axióma: míg a Martin Axióma konzisztenciájának a bizonyítása az iterált forszolás ismeretét igényli, addig a Martin Axióma

alkalmazásához az algebrában, a topológiában vagy az analízisben elegendő a halmazelmélet alapszintű ismerete.

Amint említettem, Just belátta, hogy a Cohen modellben sem az $\langle \omega \rangle_{\omega_2}$, sem az $\langle \omega \rangle_{\omega_1} \cap \langle \omega_2 \rangle$ sorozat nem lesz LCS* tér számosságsorozata. A két bizonyítás hasonló ötleteket alapul. Ugyanezen gondolatokat használva bizonyítottunk más állításokat is, s így természetesen volt megvizsgálni, hogy nem lehetne-e ezeket az ismétlődő megfontolásokat is valamiféle „kombinatorikus elvbe” foglalni. Így kezdtünk el a Cohen modellben érvényes kombinatorikus elvekkel foglalkozni, s a problémakör eredete kapcsolja össze eredendően a disszertáció két részét.

A korábbiakban bevezetett kombinatorikus elvek vagy Martin Axióma szerű állítások voltak, vagy pedig L-ben, a konstruálható univerzumban (is) teljesültek. Tudtommal a mi munkánk volt az első kísérlet arra, hogy más modelleket is ilyen elvekkel jellemezzünk.

A fent megfogalmazott hasznossági és egyszerűségi követelmények általában ellentmondanak egymásnak. Reméljük, hogy munkánkban sikerült egy megfelelő egyensúlyt teremtenünk köztük.

Amint az látni fogjuk, sikerült olyan elveket találnunk, amelyek egyrészt igazak a Cohen modellben, másrészt belőlük - számos más eredmény mellett - le tudjuk vezetni Just fentebb említett eredményét: sem az $\langle \omega \rangle_{\omega_2}$, sem az $\langle \omega \rangle_{\omega_1} \cap \langle \omega_2 \rangle$ sorozat nem lesz LCS* tér számosságsorozata.

A disszertáció 2.1. fejezetében olyan kombinatorikus elveket vezetünk be, amelyek $\mathcal{P}(\omega)$ -ra, a természetes számok hatványhalmazára vonatkozó állítások. Valójában minden állítás $\langle A(\alpha, n) : \langle \alpha, n \rangle \in \kappa \times \omega \rangle$ alakú mátrixokra vonatkozik, ahol $A(\alpha, n) \subset \omega$ valahányszor $\langle \alpha, n \rangle \in \kappa \times \omega$, és az érdekes esetekben κ egy olyan reguláris számosság amire $2^\omega \geq \kappa > \omega_1$.

Megmutatjuk, hogy ezek az elvek, állítások igazak minden olyan modellben amit úgy kapunk hogy tetszőleges számú Cohen valóst adunk egy V alapmodellhez feltéve hogy a κ paraméter reguláris és ω -*elérhetetlen számosság* V -ben (azaz ha $\lambda < \kappa$ akkor $\lambda^\omega < \kappa$). Az elveink olyan állítások lesznek, amelyek azt mondják, hogy egy ilyen mátrix szükségszerűen tartalmaz nagy „szabályos” részmátrixot.

Elveink számos következményét is belátjuk, néhány közülük kombinatorikus, mások topologikusak.

Elveink megfogalmazásukhoz néhány előzetes definícióra lesz szükségünk.

Ha S egy tetszőleges halmaz, $k \in \omega$ és $D_0, \dots, D_{k-1} \subset S$, akkor legyen

$$(S)^k = \{s \in S^k : |\text{ran } s| = k\}$$

és

$$(D_0, \dots, D_{k-1}) = \{s \in (S)^k : \forall i \in k (s(i) \in D_i)\}.$$

2.26. Definíció. Ha S rendszámok egy halmaza, akkor $\mathcal{M}(S)$ álljon az összes olyan $S \times \omega$ -mátrixból, amelyek elemei ω részhalmazai, azaz $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(S)$ pontosan akkor, ha $\mathcal{A} = \langle A(\alpha, i) : \alpha \in S, i < \omega \rangle$, ahol $A(\alpha, i) \subset \omega$ minden $\alpha \in S$ rendszámra és $i < \omega$ természetes számra.

Ha $\mathcal{A} = \langle A(\alpha, i) : \alpha \in S, i < \omega \rangle \in \mathcal{M}(S)$ és $R \subset S$ akkor definiáljuk az $\mathcal{A} \upharpoonright R$ mátrixot, $\mathcal{A}$ -nak R -re való megszorítását az alábbi természetes módon:

$$\mathcal{A} \upharpoonright R = \langle A(\alpha, i) : \alpha \in R, i < \omega \rangle.$$

Ha $\mathcal{A} = \langle A(\alpha, i) : \alpha \in S, i < \omega \rangle \in \mathcal{M}(S)$, $t \in \omega^{<\omega}$ és $s \in (S)^{|t|}$, akkor legyen

$$A(s, t) = \bigcap_{i < |t|} A(s(i), t(i)).$$

2.27. Definíció. Rögzítsünk egy $\kappa = \text{cf}(\kappa) > \omega$ számosságot.

(a) A $C(\kappa)$ elv a következő állítás : ha $T \subset \omega^{<\omega}$ és $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(\kappa)$ akkor (C1) vagy (C2) teljesül:

(C1) Van olyan $S \subset \kappa$ kofinális halmaz hogy $A(s, t) \neq \emptyset$ valahányszor $t \in T$ és $s \in (S)^{|t|}$.

(C2) Van $t \in T$ és vannak κ -nak kofinális $D_0, D_1, \dots, D_{|t|-1}$ részhalmazai, hogy ha $s \in (D_0, \dots, D_{|t|-1})$ akkor mindig $A(s, t) = \emptyset$.

(b) A $\hat{C}(\kappa)$ elv a következő állítás : ha $T \subset \omega^{<\omega}$ és $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(\kappa)$ akkor vagy ($\hat{C}1$) vagy ($\hat{C}2$) teljesül:

($\hat{C}1$) van olyan $S \subset \kappa$ kofinális halmaz hogy bármely $t \in T$ és $s \in (S)^{|t|}$ elemekre $|A(s, t)| < \omega$,

($\hat{C}2$) Van $t \in T$ és vannak κ -nak kofinális $D_0, D_1, \dots, D_{|t|-1}$ részhalmazai, hogy ha $s \in (D_0, \dots, D_{|t|-1})$ akkor mindig $|A(s, t)| = \omega$.

(c) Az $F(\kappa)$ elv az alábbi állítás: ha $T \subset \omega^{<\omega}$ és $\mathcal{A} \in \mathcal{M}(\kappa)$ akkor vagy (F1) vagy (F2) teljesül:

(F1) van olyan $S \subset \kappa$ kofinális halmaz hogy a $|\{A(s, t) : t \in T, s \in (S)^{|t|}\}|$ halmaz megszámlálható.

(F2) van $t \in T$ és vannak κ -nak kofinális $D_0, D_1, \dots, D_{|t|-1}$ részhalmazai, hogy ha $s_0, s_1 \in (D_0, \dots, D_{|t|-1})$ olyan elemek, hogy $s_0(i) \neq s_1(i)$ ha $i < |t|$, akkor $A(s_0, t) \neq A(s_1, t)$.

Az $C^s(\kappa)$, $\widehat{C}^s(\kappa)$ és az $F^s(\kappa)$ elveket úgy kapjuk, hogy a fenti definíciókban a „kofinális” kifejezést mindenütt „stacionárius”-ra cseréljük.

2.28. Tétel. *Ha κ egy reguláris, ω -elérhetetlen számosság akkor bármely λ számosságra teljesül, hogy*

$$V^{Fn(\lambda, 2; \omega)} \models „C^s(\kappa), F^s(\kappa) \text{ és a } \widehat{C}^s(\kappa) \text{ elvek igaz.}”$$

Először elveink néhány kombinatorikus következményét említjük.

Kunen [76] megmutatta, hogy a Cohen modellben nincs ω részhalmazainak ω_2 típusú hosszú szigorúan monoton $\subset^*$ -növekvő lánc. Ezt általánosítja első tételünk.

2.29. Tétel. *Ha $C(\kappa)$ igaz, akkor tetszőleges κ számosságú $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$ halmazrendszerre vagy*

$$(a) \exists \mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^\kappa \forall B \neq B' \in \mathcal{B} |B \setminus B'| = \omega$$

vagy

$$(b) \exists X \in [\omega]^\omega |\{A \in \mathcal{A} : A \subset X\}| = |\{A \in \mathcal{A} : X \subset^* A\}| = \kappa.$$

2.30. Tétel. *Ha $C(\kappa)$ igaz, akkor nincs κ -Luzin gap $[\omega]^\omega$ -ban.*

Lássunk topologikus következményeket. Első két állításunk Just eredményeit erősíti.

2.31. Tétel. (1) *Ha $C^s(\kappa)$ igaz, akkor az $\langle \omega \rangle_\kappa$ sorozat nem lesz LCS^* tér számosságsorozata.*

(2) *Ha $\text{cf}(\lambda) \geq \omega_1$ és $F^s(\lambda^+)$ igaz, akkor nincs olyan X LCS^* tér, hogy X magassága $\lambda + 1$, $|I_0(X)| = \omega$, $|I_\alpha(X)| \leq \lambda$ ha $\alpha < \lambda$ és $|I_\lambda(X)| = \lambda^+$.*

[49] terminológiáját követve egy topologikus teret P_2 -nek hívunk, ha nem tartalmaz két diszjunkt, nem megszámlálható nyílt alteret. Hajnal és Juhász kontsruáltak ZFC-ben első megszámlálható ω_1 számosságú P_2 teret. Azt is belátták, hogy konzisztens, hogy tetszőlegesen nagy kontinuum mellett lehet kontinuumos példa. Nem tudták azonban, hogy a kontinuum hipotézis tagadása elegendő-e ω_2 -s példa megkonstruálásához. Mivel [49] szerint minden P_2 tér szeparábilis, az alábbi tétel szerint nincs mindig ω_2 -es példa akkor sem, ha a kontinuum nagy.

2.32. Tétel. *Ha $C^s(\kappa)$ igaz, akkor minden első megszámlálható szeparábilis κ számosságú T_2 tér tartalmaz két diszjunkt κ számosságú nyílt halmazt.*

Legújabban sikerült elveinknek Banach terekre is alkalmazni [1]-ben. Ha a kontinuum hipotézis igaz, akkor minden legfeljebb 2^ω sűrűségű Banach algebra beágyazható ℓ_∞/c_0 -ba. A Cohen modellben nem igaz ez az állítás, azonban a bizonyítás komoly forszolási ismereteket igényel. Ezért érdekes, hogy a fenti állítást sikerült egyik elvünkéből is levezetni az alábbi módon.

2.33. Állítás. *Ha $\hat{C}(\kappa)$ igaz akkor teljesül az alábbi, $\otimes_\kappa$ -val jelölt állítás.*

$$(\otimes_\kappa): \forall \{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \ell_\infty/c_0 \quad \forall \ell \in \omega \quad \forall c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \exists S_1, \dots, S_\ell \in [\kappa]^\kappa \quad \exists \rho \in \{\leq, >\}$$

$$\forall a \in (S_1, \dots, S_\ell) \quad \left\| \sum_{i=1}^{\ell} c_i \cdot f_{a(i)} \right\| \rho x.$$

2.34. Állítás. *Ha $\otimes_\kappa$ igaz, akkor $C([0, \kappa])$ nem ágyazható be ℓ_∞/c_0 -ba.*

2.35. Állítás. *Ha $\otimes_{\omega_2}$ igaz, akkor van olyan $\leq \omega_2$ sűrűségű X Banach tér hogy $C([0, \omega_2])$ nem ágyazható be X -ba, de X mégsem ágyazható be ℓ_∞/c_0 -ba.*

A Cohen modell beható vizsgálata aztán visszahatott a számosságsorozatok kutatására is. Ahogy már többször említettük, Just megmutatta, hogy a Cohen modellben $\langle \omega \rangle_{\omega_2} \notin \mathcal{C}(\omega_2)$. A Cohen modell egy sokkal finomabb analízist használva sikerült ezt az eredményt megjavítanunk. Ahogy azt a 2.2. fejezet tartalmazza, [10]-ben baláttuk az alábbi tételt:

2.36. Tétel. *Egy Cohen modelben egy X LCS térnek legfeljebb ω_1 darab megszámlálható Cantor-Bendixson szintje lehet, azaz*

$$|\{\alpha < \text{ht}(X) : |I_\alpha(X)| = \omega\}| \leq \omega_1.$$

A fenti tétel bizonyítása közvetlen bizonyítása helyett valójában egy általánosabb topologikus tételt látunk be, s talán ez is az oka annak, hogy a bizonyítás meglepően bonyolultnak különös tekintettel arra, hogy az előző fejezet kombinatorikus elvei konzisztenciájának a bizonyítása standard módszerekkel történt.

Megfogalmaztuk a következő sejtést:

Sejtés: Egy X LCS^* térnek legfeljebb ω_2 darab megszámlálható Cantor-Bendixson szintje lehet, azaz $|\{\alpha < \text{ht}(X) : |I_\alpha(X)| = \omega\}| \leq \omega_2$.

Sejtésünk érdekességét az alábbi megfigyelés adja. Shelah híres eredménye szerint

$$\max \text{pcf}\{\aleph_n : n < \omega\} < \aleph_{\omega_4},$$

amiből könnyen adódik, hogy ha $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ akkor $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$. A mai halmazelmélet talán legérdekesebb kérdése, hogy vajon javítható-e Shelah eredménye. Ha a fenti sejtés igaz, akkor azt Shelah eredeti bizonyításába beillesztve az adódna, hogy

$$\max \text{pcf}\{\aleph_n : n < \omega\} < \aleph_{\omega_3},$$

és így ha $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ akkor $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_3}$ lenne.

2.10. Eredmények a weak Freeze-Nation tulajdonsággal kapcsolatban

Parciálisan rendezett halmazok weak Freeze-Nation (wFN) tulajdonságainak vizsgálatához a kombinatorikus elvek kutatásától függetlenül csatlakoztam. Azonban hamar kiderült, hogy bizonyos parciálisan rendezett halmazok wFN tulajdonsága maga is egy számos érdekes következménnyel rendelkező kombinatorikus elvnek tekinthető.

2.37. Definíció. Egy P parciális rendezés rendelkezik a *weak Freese-Nation* (wFN) tulajdonsággal ha van egy olyan $f : P \rightarrow [P]^\omega$ leképezés hogy

- ha $p, q \in P$ és $p \leq q$ akkor van olyan $r \in f(p) \cap f(q)$ hogy $p \leq r \leq q$.

Legyen $Q \subseteq P$. Azt mondjuk, hogy $Q \leq_\sigma P$ ha minden $p \in P$ elemre a $\{q \in Q : q \leq p\}$ halmaznak van egy megszámlálható kofinális része és a $\{q \in Q : q \geq p\}$ halmaznak van egy megszámlálható koiniciális része.

Könnyen látható, hogy a P parciálisan rendezett halmaz pontosan akkor wFN tulajdonságú, ha a $\{Q \in [P]^{\omega_1} : Q \leq_\sigma P\}$ halmaz kofinális és zárt. [46]-ban azt a kérdés vizsgálták, hogy a $\{Q \in [P]^{\omega_1} : Q \leq_\sigma P\}$ halmaz kofinális és zárt volta helyett elegendő-e valamilyen gyengébb feltevés ahhoz, hogy abból következzen, hogy P rendelkezik a wFN tulajdonsággal. A szerzők megfogalmaztak egy ilyen állítás, azonban sikerült belátnom a 2.40 tételt, ami megcáfolta azt. Az általam adott konzisztens ellenpéda indította el azt a

vizsgálatot, amely révén [7]-ben megmutattuk, hogy a [46]-ben megfogalmazott feltétel elégséges, feltéve, hogy a halmazelméleti modellünk eléggé L-szerű. Ezt az eredményt tartalmazza a 2.3. fejezet. Eredményeink megfogalmazásához azonban először bizonyos definíciókat kell felidézniünk.

2.38. Definíció. Ha μ egy számosság, akkor $\square_\mu^{***}$ a következő állítás: van olyan $\langle C_\alpha : \alpha < \mu^+ \rangle$ sorozat és egy $D \subseteq \mu^+$ kof.zárt halmaz, hogy ha $\alpha \in D$ és $\text{cf}(\alpha) \geq \omega_1$ akkor

- (i) $C_\alpha \subseteq \alpha$, C_α kofinális α -ban;
- (ii) $[\alpha]^\omega \cap \{C_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}$ a tartalmazásra nézve dominálja a $[C_\alpha]^\omega$ halmazt.

2.39. Tétel. Legyen λ egy olyan számosság amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- (i) $\text{cf}([\mu]^\omega, \subseteq) = \mu$ ha $\omega_1 < \mu < \lambda$ és $\text{cf}(\mu) \geq \omega_1$,
- (ii) $\square_\mu^{***}$ igaz minden λ -nál kisebb ω kofinalitású szinguláris μ számosságra.

Ekkor egy tetszőleges, legfeljebb λ számosságú P parciálisan rendezett halmazra az alábbi állítások ekvivalensek:

- (1) P wFN tulajdonságú,
- (2) minden elég nagy χ reguláris számosságra, ha $M \prec \mathcal{H}(\chi)$, $P, \kappa \in M$, és M előáll $\mathcal{H}(\chi)$ megszámlálható elemi részmodelljei egy ω_1 láncának uniójaként, akkor $P \cap M \leq_\sigma P$.

Beláttuk, hogy a fenti tételből nem hagyható el a $\square_\mu^{***}$ axiómára vonatkozó (ii) feltevés. Ehhez egy bizonyos „Chang-sejtés” szerű állítás használunk.

Azt írjuk, hogy $(\kappa, \lambda) \rightarrow (\mu, \nu)$ ha az alábbi igaz: Tetszőleges $\mathcal{A} = (\kappa, \lambda, \dots)$ struktúrának van olyan $\mathcal{A}' = (A', U', \dots)$ elemi részstruktúrája hogy $|A'| = \mu$ és $|U'| = \nu$. [80]-ben megmutatták, hogy $\text{ZFC} + \text{ÁKH} + (\aleph_{\omega+1}, \aleph_\omega) \rightarrow (\aleph_1, \aleph_0)$ konzisztens.

2.40. Tétel. Tegyük fel, hogy ÁKH igaz és $(\aleph_{\omega+1}, \aleph_\omega) \rightarrow (\aleph_1, \aleph_0)$. Ekkor $([\aleph_\omega]^{\aleph_0}, \subseteq)$ nem rendelkezik a wFN tulajdonsággal.

Ha igaz KH, akkor $([\aleph_\omega]^{\aleph_0}, \subseteq)$ -re teljesül 2.39(2). Tehát (i) és (ii) helyett ÁKH nem elegendő a 2.39 tételben megfogalmazott ekvivalencia bizonyításához.

A disszertáció 2.4. fejezetében a 2.3 fejezetben felvetett, Boole algebrák, mint parciálisan rendezett halmazok, wFN tulajdonságával kapcsolatos kérdéseket oldottunk meg. Megmutattuk, hogy

- (a) aa $\aleph_2$ Cohen valóst adunk egy tetszőleges halmazelméleti modellhez, akkor mindig lesz olyan MAF-os teljes Boole algebra, ami nem rendelkezik a wFN tulajdonsággal;
- (b) modulo egy superkompakt számosság, ÁKH-val is konzisztens, hogy van olyan MAF-os teljes Boole algebra, ami nem rendelkezik a wFN tulajdonsággal.

Mig a 2.3. fejezetben beláttuk, hogy $\mathcal{P}(\omega)$ rendelkezik a wFN tulajdonsággal egy olyan modellben amit úgy kapunk, hogy vagy

- (a) tetszőleges számú Cohen valóst adunk L-hez; vagy
- (b) $\aleph_\omega$ -nál kevesebb Cohen valósos adunk egy olyan modellhez, amiben igaz a kontinuum hipotézis;

addig 2.4.-ben megmutattuk, hogy konzisztens (modulo egy nagy számosság), hogy $\mathcal{P}(\omega)$ nem rendelkezik a wFN tulajdonsággal egy olyan modellben amit úgy kapunk, hogy Chen valósakat egy olyan modellhez, amelyben az ÁKH teljesült.

Mindenesetre a $\mathcal{P}(\omega)$ Boole algebra rendelkezik a wFN tulajdonsággal a „klasszikus” Cohen modellben, azaz egy olyan modellben, amit úgy kapunk, hogy ω_2 Cohen valóst adunk egy, a kontinuum hipotézist kielégítő modellhez.

A disszertáció 2.5 fejezetében megmutatjuk, hogy a

$\mathcal{P}(\omega)$ Boole algebra wFN tulajdonságú

feltevés is egy olyan kombinatorikus elvnek tekinthető, amiből számos, a Cohen modellben igaz állítás levezethető. Az alábbi tétel foglalja össze legfontosabb eredményeinket.

2.41. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\mathcal{P}(\omega)$ Boole algebra wFN tulajdonságú. Ekkor*

- (a) ω_2 nem ágyazható be $\mathcal{P}(\omega)$ -be és nincs $\aleph_2$ -Luzin gap,
- (b) nincs olyan LCS^* tér amely számosságsorozata $\langle \omega \rangle_{\omega_1} \frown \langle \omega_2 \rangle$ vagy $\langle \omega \rangle_{\omega_2}$ lenne,
- (c) $non(\mathcal{M}) = \omega_1$ és $cov(\mathcal{M}) > \omega_1$,
- (d) $\mathfrak{a} = \omega_1$,
- (e) a valós egyenes zárt halmazokkal történő tetszőleges ω_1 -szeres fedése ω_1 darab diszjunk részfedéssé particionálható.

Az utolsó, (e) alkalmazás sokkal későbbi, és a megjelenés alatt levő [2] cikkünkéből való.

2.11. A $\uparrow$ elv ² és a $\clubsuit$ axióma ³

Eddig a disszertációban számos, a Cohen modellben igaz kombinatorikus elvet vezettünk be. Léteznek más elvek is, amelyek közül egyesekről közismert, hogy nem igazak a Cohen modellben. Ilyen például a $\clubsuit$ axióma vagy a $\uparrow$ elv. Az utóbbi az az állítás, hogy van olyan $\{A_\nu : \nu < \omega_1\} \subset [\omega_1]^\omega$ sorozat, hogy ω_1 bármely nem megszámlálható része tartalmazza valamely A_ν -t részhalmazként.

A disszertáció utolsó fejezetében leírt kutatás kiindulópontja az a kérdés volt, hogy vajon hogyan lehet a kontinuumot egy forszolással úgy megnövelni, hogy a bővítésben $\uparrow$ igaz legyen, de a forszolás ne omlasszon számosságokat.

Ennek a problémának a kezelésére kényszerképzetek egy újfajta „szorzatát” adtuk meg. Az alapgondolat az, hogy úgy tudjunk sok-sok Cohen valóst adni egy modellhez, hogy ezzel párhuzamosan nem keletkezzék az $Fn(\omega_1, 2; \omega)$ kényszerképzetnek generikus része.

Az így kapott forszolás azonban alkalmasnak bizonyult arra, hogy olyan modelleket kapjunk amelyekben több, addig egymással nem összeegyeztethetőnek vélt kombinatorikus elv egyszerre teljesüljön.

A fejezet módszerének legérdekesebb következménye az alábbi állítás. A szokásos módon jelölje $MA(countable)$ azt az állítást, hogy a Martin Axióma teljesül az $Fn(\omega, 2; \omega)$ kényszerképzetre.

2.42. Tétel. *Konzisztens, hogy 2^ω tetszőlegesen nagy, $MA(countable)$ igaz és $\clubsuit$ is teljesül.*

Lássuk végezetül 2.42 egy alkalmazását. [5]-ben beláttuk az alábbi:

2.43. Tétel. *Ha $\uparrow$ igaz, akkor van olyan ω_1 számosságú B Boole algebra, hogy Fr_{ω_1} beágyazható B -be, de nincs B -ből Fr_{ω_1} -re képező szűrjekció.*

Shapiro belátta, hogy ha $MA(Cohen)$ igaz, akkor nincs ilyen Boole algebra. Mivel a 2.42 tétel szerint konzisztens, hogy $\uparrow$ és $MA(countable)$ egyszerre igaz, ezért a 2.43 állítás miatt Shapiro tételében a $MA(Cohen)$ nem helyettesíthető $MA(countable)$ -val.

3. Irodalomjegyzék

²„pálca” elv

³„treff” axióma

A disszertáció alapjául szolgáló írások

- [1] Mirna Dzamonja and Lajos Soukup. Some note on banach spaces, 2010. manuscript.
- [2] Márton Elekes, Tamás Mátrai, and Lajos Soukup. On splitting infinite-fold covers. *Fund. Math.*, 2010. to appear.
- [3] Sakaé Fuchino, Stefan Geschke, Saharon Shelah, and Lajos Soukup. On the weak Freese-Nation property of complete Boolean algebras. *Ann. Pure Appl. Logic*, 110(1-3):89–105, 2001.
- [4] Sakaé Fuchino, Stefan Geschke, and Lajos Soukup. On the weak Freese-Nation property of $\mathcal{P}(\omega)$. *Arch. Math. Logic*, 40(6):425–435, 2001.
- [5] Sakaé Fuchino, Saharon Shelah, and Lajos Soukup. On a theorem of Shapiro. *Math. Japon.*, 40(2):199–206, 1994.
- [6] Sakaé Fuchino, Saharon Shelah, and Lajos Soukup. Sticks and clubs. *Ann. Pure Appl. Logic*, 90(1-3):57–77, 1997.
- [7] Sakaé Fuchino and Lajos Soukup. More set-theory around the weak Freese-Nation property. *Fund. Math.*, 154(2):159–176, 1997. European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (Haifa, 1995).
- [8] István Juhász, Piotr Koszmider, and Lajos Soukup. A first countable, initially ω_1 -compact but non-compact space. *Topology Appl.*, 156(10):1863–1879, 2009.
- [9] István Juhász, Saharon Shelah, Lajos Soukup, and Zoltán Szentmiklóssy. A tall space with a small bottom. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(6):1907–1916 (electronic), 2003.
- [10] István Juhász, Saharon Shelah, Lajos Soukup, and Zoltán Szentmiklóssy. Cardinal sequences and Cohen real extensions. *Fund. Math.*, 181(1):75–88, 2004.
- [11] István Juhász and Lajos Soukup. How to force a countably tight, initially ω_1 -compact and noncompact space? *Topology Appl.*, 69(3):227–250, 1996.

- [12] István Juhász, Lajos Soukup, and Zoltán Szentmiklóssy. Combinatorial principles from adding Cohen reals. In *Logic Colloquium '95 (Haifa)*, volume 11 of *Lecture Notes Logic*, pages 79–103. Springer, Berlin, 1998.
- [13] István Juhász, Lajos Soukup, and Zoltán Szentmiklóssy. What is left of CH after you add Cohen reals? *Topology Appl.*, 85(1-3):165–174, 1998. 8th Prague Topological Symposium on General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra (1996).
- [14] István Juhász, Lajos Soukup, and William Weiss. Cardinal sequences of length $< \omega_2$ under GCH. *Fund. Math.*, 189(1):35–52, 2006.
- [15] Juan Carlos Martinez and Lajos Soukup. Cardinal sequences of lcs spaces under gch. *Ann. Pure Appl. Logic*, 161:1180–1193, 2010.
- [16] Juan Carlos Martinez and Lajos Soukup. Universal locally compact scattered spaces. *Topology Proc.*, 35:19–36, 2010.
- [17] Juan Carlos Martinez and Lajos Soukup. Superatomic boolean algebras constructed from strongly unbounded functions. *Mathematical Logic Quarterly*, 2011. to appear.
- [18] Lajos Soukup. A lifting theorem on forcing LCS spaces. In *More sets, graphs and numbers*, volume 15 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 341–358. Springer, Berlin, 2006.
- [19] Lajos Soukup. Wide scattered spaces and morasses. *Topology Appl.*, 2011. submitted.

Egyéb hivatkozások

- [20] Alexander Arhangel'skii. On countably compact and initially ω_1 -compact topological spaces and groups. *Math. Japon.*, 40(1):39–53, 1994.
- [21] Joan Bagaria. Locally-generic Boolean algebras and cardinal sequences. *Algebra Universalis*, 47(3):283–302, 2002.
- [22] B. Balcar and F. Franěk. Independent families in complete Boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2):607–618, 1982.

- [23] Z. Balogh, A. Dow, D. H. Fremlin, and P. J. Nyikos. Countable tightness and proper forcing. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(1):295–298, 1988.
- [24] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set theory*. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1995. On the structure of the real line.
- [25] James E. Baumgartner and Saharon Shelah. Remarks on superatomic Boolean algebras. *Ann. Pure Appl. Logic*, 33(2):109–129, 1987.
- [26] M. Bekkali. *Topics in set theory*, volume 1476 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. Lebesgue measurability, large cardinals, forcing axioms, rho-functions, Notes on lectures by Stevo Todorčević.
- [27] Shai Ben-David and Menachem Magidor. The weak $\square^*$ is really weaker than the full $\square$. *J. Symbolic Logic*, 51(4):1029–1033, 1986.
- [28] A. Blass. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.
- [29] Andreas Blass. Applications of superperfect forcing and its relatives. In *Set theory and its applications (Toronto, ON, 1987)*, volume 1401 of *Lecture Notes in Math.*, pages 18–40. Springer, Berlin, 1989.
- [30] Jörg Brendle and Sakaé Fuchino. Coloring ordinals by reals. *Fund. Math.*, 196(2):151–195, 2007.
- [31] S. Broverman, J. Ginsburg, K. Kunen, and F. D. Tall. Topologies determined by σ -ideals on ω_1 . *Canad. J. Math.*, 30(6):1306–1312, 1978.
- [32] G. Cantor. Über die ausdehnung eines stazes aus der theorie der trigonometrischen reihen. *Math. Ann.*, 5:123–132, 1872.
- [33] George W. Day. Superatomic Boolean algebras. *Pacific J. Math.*, 23:479–489, 1967.
- [34] Alan Dow. On initially κ -compact spaces. In *Rings of continuous functions (Cincinnati, Ohio, 1982)*, volume 95 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 103–108. Dekker, New York, 1985.
- [35] Alan Dow. Compact spaces of countable tightness in the Cohen model. In *Set theory and its applications (Toronto, ON, 1987)*, volume 1401 of *Lecture Notes in Math.*, pages 55–67. Springer, Berlin, 1989.

- [36] Alan Dow. Large compact separable spaces may all contain $\beta\mathbf{N}$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109(1):275–279, 1990.
- [37] Alan Dow and Istvan Juhász. Are initially ω_1 -compact separable regular spaces compact? *Fund. Math.*, 154(2):123–132, 1997. European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (Haifa, 1995).
- [38] Mirna Džamonja and Saharon Shelah. Similar but not the same: various versions of $\clubsuit$ do not coincide. *J. Symbolic Logic*, 64(1):180–198, 1999.
- [39] Katsuya Eda, Masaru Kada, and Yoshifumi Yuasa. The tightness about sequential fans and combinatorial properties. *J. Math. Soc. Japan*, 49(1):181–187, 1997.
- [40] Ryszard Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.
- [41] K. Er-rhaimini and B. Veličkovic. Pcf structure of height less than ω_3 . *The Journal of Symbolic Logic*.
- [42] M. Foreman, M. Magidor, and S. Shelah. Correction to: „Martin’s maximum, saturated ideals, and nonregular ultrafilters. I” [Ann. of Math. (2) **127** (1988), no. 1, 1–47; MR0924672 (89f:03043)]. *Ann. of Math. (2)*, 129(3):651, 1989.
- [43] Matthew Foreman and Menachem Magidor. A very weak square principle. *J. Symbolic Logic*, 62(1):175–196, 1997.
- [44] Ralph Freese and J. B. Nation. Projective lattices. *Pacific J. Math.*, 75(1):93–106, 1978.
- [45] Sakaé Fuchino, Sabine Koppelberg, and Saharon Shelah. A game on partial orderings. In *Proceedings of the International Conference on Set-theoretic Topology and its Applications (Matsuyama, 1994)*, volume 74, pages 141–148, 1996.
- [46] Sakaé Fuchino, Sabine Koppelberg, and Saharon Shelah. Partial orderings with the weak Freese-Nation property. *Ann. Pure Appl. Logic*, 80(1):35–54, 1996.

- [47] Stefan Geschke. On tightly κ -filtered Boolean algebras. *Algebra Universalis*, 47(1):69–93, 2002.
- [48] Martin Goldstern. Tools for your forcing construction. In *Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991)*, volume 6 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 305–360. Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.
- [49] A. Hajnal and I. Juhász. Intersection properties of open sets. *Topology Appl.*, 19(3):201–209, 1985.
- [50] A. Hajnal, I. Juhász, and S. Shelah. Splitting strongly almost disjoint families. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 295(1):369–387, 1986.
- [51] Lutz Heindorf and Leonid B. Shapiro. *Nearly projective Boolean algebras*, volume 1596 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. With an appendix by Sakaé Fuchino.
- [52] Tetsuya Ishiu. α -properness and Axiom A. *Fund. Math.*, 186(1):25–37, 2005.
- [53] R. Björn Jensen. The fine structure of the constructible hierarchy. *Ann. Math. Logic*, 4:229–308; erratum, *ibid.* 4 (1972), 443, 1972. With a section by Jack Silver.
- [54] I. Juhász. Cardinal functions. In *Recent progress in general topology (Prague, 1991)*, pages 417–441. North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [55] I. Juhász. On the minimum character of points in compact spaces. In *Topology. Theory and applications, II (Pécs, 1989)*, volume 55 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 365–371. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [56] I. Juhász, Zs. Nagy, L. Soukup, and Z. Szentmiklóssy. Intersection properties of open sets. II. In *Papers on general topology and applications (Amsterdam, 1994)*, volume 788 of *Ann. New York Acad. Sci.*, pages 147–159. New York Acad. Sci., New York, 1996.
- [57] I. Juhász, L. Soukup, and Z. Szentmiklóssy. What makes a space have large weight? *Topology Appl.*, 57(2-3):271–285, 1994.
- [58] I. Juhász and Z. Szentmiklóssy. Convergent free sequences in compact spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 116(4):1153–1160, 1992.

- [59] I. Juhász and W. Weiss. On thin-tall scattered spaces. *Colloq. Math.*, 40(1):63–68, 1978/79.
- [60] I. Juhász and W. Weiss. Omitting the cardinality of the continuum in scattered spaces. *Top. Appl.*, 31:19–27, 1989.
- [61] I. Juhász and W. Weiss. Cardinal sequences. *Ann. Pure Appl. Logic*, 144(1-3):96–106, 2006.
- [62] István Juhász. *Cardinal functions in topology. TLaen years later*, volume 123 of *Mathematical Centre Tracts*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, second edition, 1980.
- [63] István Juhász and Kenneth Kunen. The power set of ω . Elementary submodels and weakenings of CH. *Fund. Math.*, 170(3):257–265, 2001.
- [64] Winfried Just. Two consistency results concerning thin-tall Boolean algebras. *Algebra Universalis*, 20(2):135–142, 1985.
- [65] Masaru Kada and Yoshifumi Yuasa. Cardinal invariants about shrinkability of unbounded sets. In *Proceedings of the International Conference on Set-theoretic Topology and its Applications (Matsuyama, 1994)*, volume 74, pages 215–223, 1996.
- [66] Peter Koepke and Juan Carlos Martínez. Superatomic Boolean algebras constructed from morasses. *J. Symbolic Logic*, 60(3):940–951, 1995.
- [67] Péter Komjáth. Set systems with finite chromatic number. *European J. Combin.*, 10(6):543–549, 1989.
- [68] S. Koppelberg. General theory of boolean algebras. In J.D. Monk and R. Bonnet, editors, *Handbook of Boolean algebras, VOL I*. North-Holland, 1989.
- [69] Sabine Koppelberg. Applications of σ -filtered Boolean algebras. In *Advances in algebra and model theory (Essen, 1994; Dresden, 1995)*, volume 9 of *Algebra Logic Appl.*, pages 199–213. Gordon and Breach, Amsterdam, 1997.
- [70] Sabine Koppelberg and Saharon Shelah. Subalgebras of Cohen algebras need not be Cohen. In *Logic: from foundations to applications*

- (*Staffordshire, 1993*), Oxford Sci. Publ., pages 261–275. Oxford Univ. Press, New York, 1996.
- [71] P. Koszmider. Splitting ultrafilters of the thin-very tall algebra and initially ω_1 -compactness. preprint, 1995.
 - [72] Piotr Koszmider. Fact about velemen’s simplifiead morasses. note.
 - [73] Piotr Koszmider. Semimorasses and nonreflection at singular cardinals. *Ann. Pure Appl. Logic*, 72(1):1–23, 1995.
 - [74] Piotr Koszmider. Forcing minimal extensions of Boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(8):3073–3117, 1999.
 - [75] Piotr Koszmider. Universal matrices and strongly unbounded functions. *Math. Res. Lett.*, 9(4):549–566, 2002.
 - [76] Kenneth Kunen. *Inaccessibility Properties of Cardinals*. PhD thesis, Stanford, 1968.
 - [77] Kenneth Kunen. *Set theory*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. An introduction to independence proofs, Reprint of the 1980 original.
 - [78] Kenneth Kunen and Franklin D. Tall. Between Martin’s axiom and Souslin’s hypothesis. *Fund. Math.*, 102(3):173–181, 1979.
 - [79] Robert LaGrange. Concerning the cardinal sequence of a Boolean algebra. *Algebra Universalis*, 7(3):307–312, 1977.
 - [80] Jean-Pierre Levinski, Menachem Magidor, and Saharon Shelah. Chang’s conjecture for $\aleph_\omega$. *Israel J. Math.*, 69(2):161–172, 1990.
 - [81] Juan Carlos Martínez. A consistency result on thin-tall superatomic Boolean algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 115(2):473–477, 1992.
 - [82] Juan Carlos Martínez. On uncountable cardinal sequences for superatomic Boolean algebras. *Arch. Math. Logic*, 34(4):257–261, 1995.
 - [83] Juan Carlos Martínez. On cardinal sequences of scattered spaces. *Topology Appl.*, 90(1-3):187–196, 1998.

- [84] Juan Carlos Martínez. A forcing construction of thin-tall boolean algebras. *Fundamenta Mathematicae*, 159(2):99–113, 1999.
- [85] Juan Carlos Martínez. Some open questions for superatomic Boolean algebras. *Notre Dame J. Formal Logic*, 46(3):353–356 (electronic), 2005.
- [86] S. Mazurkiewicz and W. Sierpinski. Contributions a la topologie des ensembles denombrables. *Fund. Math.*, 1:17–27, 1920.
- [87] A. Mostowski and A. Tarski. Boolesche ringe mit geordneter basis. *Fund. Math.*, 32:69–86, 1939.
- [88] S. Mrówka, M. Rajagopalan, and T. Soundararajan. A characterization of compact scattered spaces through chain limits (chain compact spaces). In *TOPO 72—general topology and its applications (Proc. Second Pittsburgh Internat. Conf., Pittsburgh, Pa., 1972; dedicated to the memory of Johannes H. de Groot)*, pages 288–297. Lecture Notes in Math., Vol. 378. Springer, Berlin, 1974.
- [89] A. J. Ostaszewski. On countably compact, perfectly normal spaces. *J. London Math. Soc. (2)*, 14(3):505–516, 1976.
- [90] Mariusz Rabus. An ω_2 -minimal Boolean algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(8):3235–3244, 1996.
- [91] M. Rajagopalan. A chain compact space which is not strongly scattered. *Israel J. Math.*, 23(2):117–125, 1976.
- [92] J. Roitman. Supersatomic boolean algebras. In J.D. Monk and R. Bonnet, editors, *Handbook of Boolean algebras, Vol 3*. North-Holland, 1989.
- [93] Judy Roitman. Height and width of supersatomic Boolean algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 94(1):9–14, 1985.
- [94] Judy Roitman. A very thin thick supersatomic Boolean algebra. *Algebra Universalis*, 21(2-3):137–142, 1985.
- [95] Judy Roitman. Supersatomic Boolean algebras. In *Handbook of Boolean algebras, Vol. 3*, pages 719–740. North-Holland, Amsterdam, 1989.

- [96] Saharon Shelah. Whitehead groups may not be free, even assuming CH. II. *Israel J. Math.*, 35(4):257–285, 1980.
- [97] Saharon Shelah. *Proper forcing*, volume 940 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [98] Saharon Shelah. Advances in cardinal arithmetic. In *Finite and infinite combinatorics in sets and logic (Banff, AB, 1991)*, volume 411 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 355–383. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [99] Saharon Shelah. More on cardinal arithmetic. *Arch. Math. Logic*, 32(6):399–428, 1993.
- [100] Saharon Shelah. Further cardinal arithmetic. *Israel J. Math.*, 95:61–114, 1996.
- [101] Saharon Shelah. On what i do not understand (and have something to say) part i. *Fundamenta Mathematicae*, 166(1–2):1–82, 2000.
- [102] Saharon Shelah. PCF and infinite free subsets in an algebra. *Arch. Math. Logic*, 41(4):321–359, 2002.
- [103] Stevo Todorcevic. *Walks on ordinals and their characteristics*, volume 263 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [104] Dan Velleman. Simplified morasses. *J. Symbolic Logic*, 49(1):257–271, 1984.
- [105] Martin Weese. On cardinal sequences of Boolean algebras. *Algebra Universalis*, 23(1):85–97, 1986.
- [106] Yoshifumi Yuasa. Shrinkability of unbounded sets in the Cohen extension. *Surikaiseikikenkyusho Kokyuroku*, (930):55–58, 1995. Foundations of mathematics and its applications (Japanese) (Kyoto, 1995).