

Opponensi vélemény

Soukup Lajos

„Cardinal Sequences and Combinatorial Principles”

című doktori értekezéséről

A dolgozat első része különböző topologikus terek tulajdonságaival foglalkozik. Jelölje egy X (végtelen, Hausdorff) tér izolált pontjainak halmazát $I(X)$. Az izolált pontokat elhagyva, majd a maradék izolált pontjait elhagyva, stb, a következő halmazsorozatot kapjuk:

$$I_\alpha(X) = I\left(X - \bigcup\{I_\beta(X) : \beta < \alpha\}\right)$$

minden α rendszámra. Nyilván valahonnan kezdve minden α rendszámra $I_\alpha(X) = \emptyset$, a legkisebbet nevezzük X $\text{ht}(X)$ magasságának. A visszamaradó rész önmagában sűrű, vagy üres. Ha a második eset teljesül, akkor X -et *szétszórt*nak nevezzük. Az értekezés legnagyobb részben azzal foglalkozik, hogy milyen sorozatok fordulhatnak elő, mint különböző tulajdonságú szétszórt X terek *számosságsorozatai*, azaz az

$$\langle |I_\alpha(X)| : \alpha < \text{ht}(X) \rangle$$

sorozat.

LCS*-térnek nevezzük a lokálisan kompakt, nem kompakt, szétszórt tereket.

Az 1.2. fejezetben a szerző, Juhász egy hosszú ideig nyitott kérdésére válaszol, megmutatja, hogy ZFC-ben van ω_2 magasságú LCS*-tér $\aleph_1$ izolált ponttal. A bizonyítás, meglepő módon, könnyebb, ha a kontinuumhipotézis nem teljesül. Ha a kontinuumhipotézis teljesül, egy igen nehéz halmazrendszer-konstrukció vezet a megoldáshoz. Hasonló módszerek segítségével a szerző megadja, az ÁKH feltevése mellett, a $\mathcal{C}(\alpha)$ osztályok teljes leírását, ahol $\mathcal{C}(\alpha)$ az α hosszú LCS*-terek számosság-sorozatainak halmazát jelöli.

Ha $\delta < \lambda^{++}$, és $\lambda = \omega$, akkor legyen

$$\mathcal{D}_\omega(\delta) = \{f \in {}^\delta\{\omega, \omega_1\} : f(0) = \omega\},$$

ha pedig $\lambda > \omega$ számosság, $\mathcal{D}_\lambda(\delta)$ jelölje azon $f : \delta \rightarrow \{\lambda, \lambda^+\}$ függvények halmazát, ahol $f(0) = \lambda$ és $f^{-1}(0) < \lambda$ -zárt és zárt a rákövetkezésre. Egy

Juhász–Soukup–Weiss-eredmény szerint, ha az ÁKH teljesül, akkor $\mathcal{C}_{\omega_1}(\delta) \subseteq \mathcal{D}_{\omega_1}(\delta)$ és fennáll az egyenlőség, ha $\delta < \omega_2$. Az 1.4. fejezetben a szerző megmutatja, hogy minden $\delta < \omega_3$ -ra konzisztens, hogy fennáll az egyenlőség.

A bizonyítás univerzális teret ad, ahol egy X LCS*-tér $\mathcal{C}_\lambda(\alpha)$ -univerzális, ha $CS(X) \in \mathcal{C}_\lambda(\alpha)$ és minden $s \in \mathcal{C}_\lambda(\alpha)$ előfordul, mint $CS(Y)$ X valamelyik Y nyílt alterére.

Az 1.5. fejezetben a szerző megmutatja, hogy $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ -vel konzisztens, hogy

$$\mathcal{C}_\omega(\omega_2) = \{s \in {}^\omega \{\omega, \omega_1, \omega_2\} : s(0) = \omega\},$$

azaz a lehető legnagyobb és van $\mathcal{C}_\omega(\omega_2)$ -univerzális tér.

Az 1.6 fejezet főeredménye az, hogy ha bizonyos típusú kényszerképzettel forszolható olyan LCS*-tér létezése, aminek a számosság-sorozata $\langle \omega \rangle_\kappa$ (az a, csupa ω -sból álló sorozat, ami κ hosszúságú) egy κ számosságra, akkor ez igaz minden $\delta < \kappa^+$ rendszámra.

Az 1.7 fejezet főeredménye az, hogy (ÁKH mellett) minden $\lambda \geq \omega_2$ reguláris számossághoz van számosságmegőrző forszolásos bővítés, ami a kontinuumot λ -ra növeli és a bővített modellben minden $\langle s_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$ sorozat, amire $\omega \leq s_\alpha \leq \lambda$ ($\alpha < \omega_2$) egy lokálisan kompakt, szétszórt tér számosságsorozata. A meglehetősen bonyolult bizonyítás először Koszmider egy konstrukcióját módosítva, egy olyan modellt ad, amiben létezik egy bizonyos tulajdonságú függvény. Ezután egy további forszolással kapható a kívánt topologikus tér, itt a forszolás szükséges kombinatorikus tulajdonságának igazolásához van szükség az említett függvényre.

Az 1.8. fejezet eredménye, hogy ha κ, λ végtelen számosságok, $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, $2^\kappa = \kappa^+$, $\kappa^{+3} \leq \lambda$ és $\kappa^+ \leq \eta < \kappa^{++}$, $\text{cf}(\eta) = \kappa^+$, akkor van számosságmegőrző forszolásos bővítés, amiben egy alkalmas LCS*-tér számosságsorozata az az s függvény, amire $\text{Dom}(s) = \eta + 1$, $s(\alpha) = \kappa$ ($\alpha < \eta$) és $s(\eta) = \lambda$.

Az 1.9. fejezet eredménye a reguláris, szétszórt terek számosságsorozatát jellemzi.

Az 1.10. fejezetben a szerző egy normális, lokálisan kompakt, nulladimenziós, Fréchet-Uriszon, iniciálisan ω_1 -kompakt, nemkompakt $\aleph_2$ számosságú X terek forszol, amiben minden G nyílt halmazra G vagy G komplementere legfeljebb $\aleph_1$ számosságú. A módszer további elbonyolításával első megszámlálható, normális, lokálisan kompakt, iniciálisan ω_1 -kompakt, nemkompakt tér is nyerhető (1.11. fejezet).

A dolgozat második, rövidebb részében a szerző különböző kombinatorikus halmazelméleti kérdéseket vizsgál. Bevezeti a $C(\kappa)$, $\hat{C}^s$ stb, elveket és

megmutatja, hogy ezek teljesülnek, ha κ $\aleph_0$ -elérhetetlen és tetszőleges számú Cohen-valóst adunk forszolással.

Ezután ismert és új alkalmazásokat ad. Az eredmények közül kiemelkedő az, ami szerint $C^s(\kappa)$ esetén nincs lokálisan kompakt, vékony, szétszórt, κ súlyú tér.

Egy másik eredmény szerint $C(\omega_2)$ esetén, ha X reguláris Fréchet-Uriszon tér és $s(X) = \omega$, akkor $h(X) \leq \omega_1$.

Szintén figyelemreméltó az a tétel, ami szerint, ha a $C(\kappa)$ elv teljesül, X szeparábilis, első megszámlálható, reguláris tér, amire $w(X) \geq \kappa$, akkor van olyan $Y \subseteq X$ altér, amire $|Y| = \kappa$ és Y -nak van irreducibilis bázisa.

A 2.2 fejezet fő eredménye az, hogy ha $\kappa = c^{+\omega}$, és tetszőleges számú Cohen-valóst adunk, akkor a kapott modellben nincs LCS*-tér, amiben lenne páronként diszjunkt megszámlálható alterek $\{E_\alpha : \alpha < \kappa\}$ sorozata, amire $\overline{E}_\alpha \supset E_\beta$ teljesül ($\alpha < \beta < \kappa$).

A 2.3. részfejezetben a szerző bevezeti a κ -Freeze-Nation tulajdonság fogalmát. Egy $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz rendelkezik a κ -Freeze-Nation tulajdonsággal, ha van $f : P \rightarrow [P]^{<\kappa}$ függvény, amire a következő teljesül: ha $p \leq q$, akkor van $p \leq r \leq q$, amire $r \in f(p) \cap f(q)$. A $\kappa = \aleph_1$ esetben (amikor tehát $f : P \rightarrow [P]^{\aleph_0}$ függvény) gyenge Freeze-Nation tulajdonságról beszélünk.

A 2.3.1. fejezetben a szerző kimutatja, hogy elemi részmodellek egy bizonyos típusú mátrixának létezése (lényegében) ekvivalens a $\square$ -axióma egy formájával.

A 2.3.2. fejezet eredménye a κ -Freeze-Nation tulajdonsággal ekvivalens tulajdonságok igazolása.

A 2.3.16. Tétel azt mondja ki, hogy ha $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$ és az $(\aleph_{\omega+1}, \aleph_\omega) \rightarrow (\aleph_1, \aleph_0)$ Chang-sejtés teljesül, akkor $([\aleph_\omega]^{\aleph_0}, \subseteq)$ nem rendelkezik a gyenge FN-tulajdonsággal.

A 2.4. részfejezet Boole-algebrák gyenge Freeze-Nation tulajdonságával foglalkozik.

A 2.4.2. fejezetben a szerző igazolja, hogy legalább $\aleph_2$ Cohen valós adjungálása esetén keletkezik egy $\aleph_2$ sűrűségű, megszámlálható antilánc feltétel, teljes Boole-algebra, aminek nincs meg a gyenge FN-tulajdonsága (2.4.3. Tétel).

A 2.4.3. fejezet eredménye, felhasználva Hajnal–Juhász–Shelah egy konstrukcióját, azt mondja ki, hogy ha konzisztens superkompakt számosság létezése, akkor az is, hogy az is, hogy teljesül az ÁKH és van MAF teljes Boole-algebra, ami nem rendelkezik a gyenge FN-tulajdonsággal.

2.4.4.-ben a szerző belátja, hogy ha V modellje ÁKH-nak és a $(\aleph_{\omega+1}, \aleph_\omega) \rightarrow (\aleph_1, \aleph_0)$ Chang sejtésnek, először egy domináló valóst hozzáadó, $\aleph_1$ számosságú MAF P kényszerképzettel, majd $\text{Add}(\omega, \omega_\omega)$ -val forszolunk, akkor a kapott modellben $(\mathcal{P}(\omega), \subseteq)$ nem rendelkezik a gyenge FN tulajdonsággal.

A 2.5. pont annak van szentelve, mikor rendelkezik $\mathcal{P}(\omega)$ a gyenge Freeze-Nation tulajdonsággal.

A 2.6. pontban a szerző egy speciális forszolás konstrukció segítségével megmutatja, hogy

$$\min \{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\omega_1]^\omega, \forall x \in [\omega_1]^{\omega_1} \exists y \in \mathcal{A}, y \subseteq x\}$$

bármilyen megszámlálhatónál nagyobb számosság lehet. Ha viszont kicsit módosítjuk a kényszerképzetet, akkor az állítás nem igaz, minden stacionárius $S \subseteq \omega_1$ halmazra $\clubsuit_S$ fog teljesülni. A forszolás egyébként S. Shelah Was Sierpiński right ? című dolgozatából ered (1988).

A fenti felsorolásból remélhetőleg világos, hogy Soukup értekezése mély és érdekes tételekkel van telezsúfolva. A halmazelméleti topológia illetve a kombinatorikus halmazelmélet mások által is intenzíven kutatott területein súlyos, sokszor hosszabb ideig reménytelennek tűnő problémákat old meg nehéz, technikailag igényes forszolási módszerekkel. A szerző az axiomatikus halmazelmélet számos területének módszereit használja fel a bizonyításokhoz. Kiemelhető az a konstrukció, ahol a forszoláshoz szükséges struktúra maga is forszolással keletkezik, sőt e megelőző forszolás is úgy történik, hogy egy korábbi forszolással nyert struktúrát használunk (1.7.1. Tétel).

A feniteket figyelembevéve, melegen javaslom Soukup Lajos értekezésének vitára bocsátását és a szerzőnek az MTA doktora cím odaitélését.

Komjáth Péter