

dc_109_10

MTA DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

DIFFERENTIABILITY OF SOLUTIONS WITH
RESPECT TO PARAMETERS IN DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH STATE-DEPENDENT DELAYS

HARTUNG FERENC

Pannon Egyetem

Veszprém

2011

1. Az értekezés tárgya és előzményei

Az értekezésben állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek bizonyos kvalitatív kérdéseit vizsgáltam a retardált és a neutrális egyenletosztályokra. Az állapotfüggő késleltetésű egyenletek vizsgálata Driver munkásságával indult fejlődésnek. Driver az 1960-as években az elektrodinamika kéttest problémáját vizsgálta a [20]-[23] cikkekben, ahol a két test pozícióját, sebességét és a két időkésleltetés függvényét meghatározó differenciálegyenlet-rendszert állított fel, és vizsgálta a megoldások létezését, egyértelműségét. A modellben szereplő időkésleltetések a két részecske távolságától, azaz a pozíciójuktól függtek, és implicit módon voltak definiálva. Driver megmutatta, hogy a modellben fellépő késleltetések nem mindig korlátosak, illetve olyan eseteket is vizsgált, amikor a mozgást leíró egyenletek neutrális differenciálegyenletek [22, 23], illetve siettetett és késleltetett tagokat egyaránt tartalmaznak [47].

Számos egyéb alkalmazást modelleztek az irodalomban állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletekkel. Büger, Martin [14, 15] illetve Walther [65, 67, 69] a pozíció kontroll problémát vizsgálták, Insperger, Stépán és Turi [50] és Insperger, Stépán, Hartung és Turi [49] esztergagép ill. marógép vibrációját leíró modellt adtak meg, Gaticia és Waltman [25, 26, 27], Hoppenstadt és Waltman [48], Kuang és Smith [55, 56] járványterjedési modelleket tanulmányoztak, Aiello, Freedman, Wu [1], Al-Omari és Gourley [2], Arino, Hbid, Bravo de la Parra [4] különböző populációs modelleket vizsgáltak.

A fenti és további alkalmazások részletesebb összefoglalása megtalálható a [42] cikkünkben, amely több mint 200, az egyenletosztállyal foglalkozó cikket dolgozott fel, összefoglalja az egyenletosztályra vonatkozó alapvető elméleti eredményeket, számos alkalmazási területet ismertet, és az egyenletek megoldásai numerikus közelítéseivel kapcsolatos alapvető módszereket is bemutatja.

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = f(x_t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

általános autonóm funkcionál-differenciálegyenletet, és az

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0] \quad (2)$$

kezdeti feltételt. Itt $r > 0$ egy rögzített konstans, $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, ahol C a $[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ típusú folytonos függvények halmaza a maximum normával, $\varphi \in C$, és az x_t szegmens függvényt az $x_t : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_t(\zeta) := x(t + \zeta)$ képlettel definiáljuk. Az (1) alakú egyenletek elméleti alapjait és alkalmazásait számos monográfia vizsgálta [19, 31, 51, 54]. Az (1) egyenlettel leírt modellekben a rendszer t időpontbeli állapota megváltozásának a sebessége a rendszer múltbeli, mégpedig a $t - r$ és t időpontok közötti állapotától függ. Ilyen legegyszerűbb szabály az

$\dot{x}(t) = ax(t - \tau)$ alakú konstans késleltetést tartalmazó egyenlet, ahol mindig egy τ időponttal korábbi állapot határozza meg a rendszer változását. Ha az egyenletben fellépő késleltetés nagysága függ a rendszer pillanatnyi vagy korábbi állapotától, akkor állapotfüggő késleltetésről beszélünk. Ennek egyik egyszerű példája egy

$$\dot{x}(t) = ax(t - \tau(x(t))) \quad (3)$$

alakú egyenlet, ahol a τ késleltetés a rendszer aktuális állapotától, $x(t)$ -től függő értékeket vesz fel. Megjegyezzük, hogy ezt az egyenletet is felírhatjuk az (1) alakban, ha az f függvényt az $f(\psi) := a\psi(-\tau(\psi(0)))$ képlettel definiáljuk. Az (1) alakban sokkal általánosabb állapotfüggő késleltetésű tagokat tartalmazó modelleket is megadhatunk (lásd pl. [42]).

Az állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek elméletének nehézsége látható már a (3) egyenleten is: az $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(\psi) = a\psi(-\tau(\psi(0)))$ függvény nem Lipschitz folytonos, még akkor sem, ha a τ függvény a C^k függvényosztályba tartozik valamely $k > 1$ -re. Így a differenciálegyenletek alapkérdéseinek tárgyalása is, beleértve a megoldások egyértelműségét, a linearizált stabilitás kérdését, a megoldások paraméterektől való függését a klasszikus funkcionál-differenciálegyenletek elméletéhez (lásd például Diekmann, van Gils, Lunel, Walther [19] és Hale és Lunel [31] monográfiáit) képest sokszor más módszereket igényel, hiszen nem tehetjük fel, hogy az f függvény elegendően sima. A folytonos függvények osztálya tehát nem megfelelő választása a megoldások állapotterének az állapotfüggő késleltetésű egyenletek esetén, de nem világos, hogy mi az ideális állapottér választás, különösen akkor, ha folytonosan differenciálható félfolyam létezését szeretnénk bizonyítani.

Walther a [66, 68] dolgozataiban az (1) egyenletet vizsgálva olyan feltételrendszert adott meg, amelyet állapotfüggő késleltetésű modellek széles körére teljesül, és amelyek a megoldás létezését, egyértelműségét, a megoldás operátor által definiált félfolyam folytonos differenciálhatóságát, a linearizált stabilitás tételét, hiperbolikus egyensúlyi helyzetekben C^1 -sima lokális stabil és instabil sokaság létezését garantálják. A Walter által kidolgozott elméletet C^1 elméletek nevezzük, mivel a legfontosabb feltétele az, hogy a megoldások kezdőfüggvényeit szűkíti a C^1 tér egy n kodimenziós sokaságára, amely a

$$X_f := \{\psi \in C^1 : \dot{\psi}(0) = f(\psi)\}$$

feltétellel van definiálva. Ekkor az X_f -ből induló megoldások minden pozitív t -re X_f -ben maradnak, azaz X_f egy pozitív invariáns halmaz a megoldás félfolyamra vonatkozóan. Krisztin az [52, 53] dolgozataiban a C^1 elméletet használva megmutatta C^N -sima lokális instabil sokaság és C^1 -sima centrális sokaság létezését hiperbolikus egyensúlyi helyzetekben.

Ebben a disszertációban állapotfüggő késleltetésű egyenletek két osztályát vizsgáltam, a disszertáció 2. és 3. fejezetben az

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

alakú retardált egyenletet, a disszertáció 4. fejezetében pedig a

$$\frac{d}{dt} \left(x(t) - g(t, x_t, x(t - \rho(t, x_t, \chi)), \lambda) \right) = f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

alakú neutrális egyenletet. Az egyenletekben $\xi \in \Xi$, $\theta \in \Theta$ illetve $\lambda \in \Lambda$ és $\chi \in X$ paramétereket jelölnek, ahol Ξ , Θ , Λ és X adott normált terek. Mindkét egyenletet a (2) kezdeti feltétel mellett vizsgáljuk, és a vizsgálatokban a kezdeti függvényt, φ -t is paraméternek tekintettem. A (4) és (5) egyenletekben feltettem, hogy a retardált ill. a neutrális tagban is szerepel idő- és állapotfüggő késleltetés, amit τ ill. ρ jelöl. Mindkét egyenletben az állapotfüggő tagok egy pontbeli értéket adnak vissza, ahol a késleltetés képlete explicit módon adott, de a képleteikben is szerepelnek paraméterek. Feltettem továbbá, hogy az egyenletekben további késleltetések is szerepelnek, amelyeket az f és g függvények x_t szegmenstől függése jelöl, de ezek már nem állapotfüggő késleltetéseket reprezentálnak, azaz feltehettem, hogy f és g sima a második változóra vonatkozóan. Az egyszerűbb jelölés érdekében csak egy állapotfüggő késleltetésű tagot vettem fel az f ill. a g függvényben is, de az eredményeim könnyen kiterjeszthetők a több állapotfüggő késleltetés esetére is.

Az irodalomban számos a retardált állapotfüggő késleltetésű egyenletekre vonatkozó, a megoldások létezését, egyértelműségét ill. a kezdeti függvénytől való folytonos függését biztosító feltétel ismert a különböző egyenletosztályokra [20, 42, 43, 63, 72]. Az értekezésemben a neutrális egyenletosztályban az (5) alakú, ún. implicit neutrális egyenletekkel foglalkoztam. Ez a Hale, Lunel [30] klasszikus monográfiájában részletesen vizsgált $\frac{d}{dt}G(t, x_t) = f(t, x_t)$ alakú nemlineáris neutrális egyenletek természetes kiterjesztése az állapotfüggő késleltetésű legegyszerűbb esetre, egy pontbeli állapotfüggő késleltetést feltételezve. Hasonló implicit neutrális állapotfüggő késleltetésű egyenleteket vizsgáltak a [3, 8, 16, 18, 34, 35, 40, 57, 58, 62] dolgozatokban, de ezekben több esetben csak a retardált tagban szerepelt állapotfüggő késleltetés. Megjegyezzük, hogy az irodalomban számos alkalmazásban és dolgozatban

$$x'(t) = h\left(t, x(t), x(t - \tau(t, x(t))), x'(t - \eta(t, x(t)))\right)$$

alakú, ún. explicit neutrális egyenleteket tanulmányoztak [9, 10, 22, 23, 24, 45, 67, 69, 73, 74]. Az (5) alakú egyenletére nem ismert az irodalomban megoldások létezésére és egyértelműségére vonatkozó eredmény, így azt is bizonyítottam az

értekezésben. Hasonló, de az (5) egyenletnél egyszerűbb implicit neutrális állapotfüggő késleltetésű egyenletek esetén a megoldások létezésére, egyértelműsége, valamint numerikus közelítésére vonatkozó eredmények a [40, 58] dolgozatokban jelentek meg.

A disszertáció fő célja a megoldások paraméterek szerinti differenciálhatóságának vizsgálata a (4) és (5) egyenletosztályokban. Funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak paraméterek szerinti differenciálhatósága egy alapvető elméleti kérdés. Például a megoldások kezdeti függvényről folytonosan differenciálható módon való függése folytonosan differenciálható félfolyam létezését biztosítja. Fontos, máig megoldatlan probléma olyan feltétel megadása, amely C^2 -simaságú megoldás félfolyam létezését garantálja állapotfüggő késleltetésű egyenletekre. Ez fontos lépés lenne például a C^k -simaságú ($k > 1$) centrális sokaság létezésének igazolásához. Az értekezésemben a kezdeti függvényen kívül más paraméterek szerinti differenciálhatóságot is vizsgáltam. A differenciálhatóságot a disszertációban mindig a Fréchet-féle értelemben használtam.

Retardált állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek megoldásai paraméterek szerinti differenciálhatóságát a [17, 32, 43, 66, 68] dolgozatok tárgyalták. A [32] dolgozatomban a paraméter leképezés pontonkénti értelemben vett differenciálhatóságát mutattam meg a

$$\varphi \in C^1, \quad \dot{\varphi}(0-) = f(0, \varphi, \varphi(-\tau(0, \varphi, \xi)), \theta) \quad (6)$$

kompatibilitási feltétel teljesülése (és természetesen az f és τ függvények folytonos differenciálhatósága) esetén, azaz a

$$W^{1,\infty} \times \Theta \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\varphi, \theta, \xi) \mapsto x(t, \varphi, \theta, \xi)$$

leképezés differenciálhatóságát minden rögzített t -re a megoldás értelmezési tartományán. Itt $W^{1,\infty}$ a $[-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz folytonos függvények terét jelöli, ahol a normát a $|\psi|_{W^{1,\infty}} := \max\{|\psi|_C, |\dot{\psi}|_{L^\infty}\}$ képlettel definiáljuk. A bizonyítás egyszerű következménye szerint a

$$W^{1,\infty} \times \Theta \times \Xi \rightarrow C, \quad (\varphi, \theta, \xi) \mapsto x_t(\cdot, \varphi, \theta, \xi),$$

leképezés is, és további simasági feltétel mellett a

$$W^{1,\infty} \times \Theta \times \Xi \rightarrow W^{1,\infty}, \quad (\varphi, \theta, \xi) \mapsto x_t(\cdot, \varphi, \theta, \xi)$$

leképezés is differenciálható. Megjegyezzük, hogy a (6) feltétel és Walter C^1 elméletének az (1) alapfeltevése a (3) autonóm egyenletre egybeesik. Walter [66, 68] cikkeiben igazolt, a megoldások kezdeti függvény szerinti differenciálhatóságára vonatkozó eredmények a (4) egyenletben szereplő explicit alakú állapotfüggő késleltetés

eseténél általánosabb esetre is alkalmazhatók az autonóm egyenletek osztályán belül.

A [43] cikkünkben a paraméter leképezés differenciálhatóságát a (6) kompatibilitási feltétel nélkül sikerült bizonyítani. Helyette egy más jellegű feltételre volt szükség. Feltettük, hogy egy rögzített x megoldáshoz tartozó $t \mapsto t - \tau(t, x_t, \xi)$ visszanyúlás függvény szigorúan monoton növvő, pontosabban teljesíti az

$$\operatorname{ess\,inf}_{0 \leq t \leq \alpha} \frac{d}{dt}(t - \tau(t, x_t, \xi)) > 0 \quad (7)$$

feltételt valamely $\alpha > 0$ -ra. Egy fontos különbség a (7) monotonitási és a (6) kompatibilitási feltétel között, hogy a (6) feltétel egy rögzített paraméter értékre teljesülhet, de a paraméter egy kicsi környezetében általában már nem teljesül. Ezzel szemben a (7) monotonitási feltétel ha egy adott paraméterre teljesül, akkor a paraméter egy kis környezetéhez tartozó megoldásokra is teljesül. Emiatt a [43] dolgozatban a megoldás differenciálhatóságát nem csak egy rögzített paraméter értékben tudtuk igazolni, hanem egy nyílt halmazon láttuk be a derivált létezését és folytonosságát. Egy jelenős szempontból viszont a [43] dolgozatban bizonyított eredmény gyengébb, mint a [32] dolgozat eredménye: a paraméter leképezés differenciálhatóságát a

$$W^{1,\infty} \times \Theta \times \Xi \rightarrow W^{1,p}, \quad (\varphi, \theta, \xi) \mapsto x_t(\cdot, \varphi, \theta, \xi)$$

értelemben sikerült bizonyítani, azaz a pontonkénti ill. az erős C vagy $W^{1,\infty}$ -norma helyett egy gyenge, $W^{1,p}$ -normában ($1 \leq p < \infty$) tudtuk igazolni, ahol $W^{1,p}$ a $\psi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ abszolút folytonos függvények tere, ahol a $|\psi|_{W^{1,p}} := \left(\int_{-r}^0 |\psi(\zeta)|^p + |\dot{\psi}(\zeta)|^p d\zeta \right)^{1/p}$ norma véges.

Chen, Hu és Wu a [17] cikkükben a [43] dolgozat módszereit kiterjesztve megmutatták, hogy a (7) monotonitási feltétel mellett a

$$W^{2,\infty} \times \Theta \times \Xi \rightarrow W^{1,p}, \quad (\varphi, \theta, \xi) \mapsto x_t(\cdot, \varphi, \theta, \xi)$$

paraméter leképezés kétszer folytonosan differenciálható. Itt $W^{2,\infty}$ olyan $W^{1,\infty}$ függvények halmazát jelöli, amelynek első deriváltja Lipschitz folytonos, és ahol a normát a $|\psi|_{W^{2,\infty}} := \max \left\{ |\psi|_C, |\dot{\psi}|_C, |\ddot{\psi}|_{L^\infty} \right\}$ képlettel értelmezzük. Megjegyezzük, hogy a [17] cikk az adaptív állapotfüggő késleltetés esetét vizsgálta, azaz a késleltetés értékét nem egy explicit módon megadott függvény, hanem egy differenciálegyenlet definiálta.

A [36] dolgozatomban az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t))), & t \in [\sigma, T], \\ x(t) &= \varphi(t - \sigma), & t \in [\sigma - r, \sigma] \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladatot (k.é.f.) vizsgáltam. Itt az egyszerűség kedvéért a θ és ξ paraméterek nem szerepeltek az egyenletben, de a σ kezdeti időpontot is paraméternek tekintettem. A [32] és [43] dolgozatok bizonyítási módszerét kombinálva sikerült igazolnom a (6) kompatibilitási feltétel nélkül, de a (7) monotonitási feltételnek megfelelő feltétel mellett, hogy a

$$W^{1,\infty} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi \mapsto x(t, \sigma, \varphi)$$

és

$$W^{1,\infty} \rightarrow C, \quad \varphi \mapsto x_t(\cdot, \sigma, \varphi)$$

paraméter leképezések a (7) monotonitási feltételt teljesítő paraméterek kis környezetében folytonosan differenciálhatóak. Megjegyezzük, hogy hasonló eredményt az értékkészleten $W^{1,\infty}$ -normát használva már nem tudtam igazolni a (6) feltétel nélkül.

A (6) kompatibilitási feltétel mellett beláttam továbbá, hogy a

$$[0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma \mapsto x(t, \sigma, \varphi)$$

és

$$[0, \alpha) \rightarrow C, \quad \sigma \mapsto x_t(\cdot, \sigma, \varphi)$$

leképezések is folytonosan differenciálhatóak minden $t \in [\sigma - r, \alpha]$ ill. $t \in [\sigma, \alpha]$ -re, a monotonitási feltételt teljesítő (σ, φ) paraméterértékek egy kis környezetében, ahol $\alpha > 0$ egy bizonyos konstans. Speciális alakú f és τ függvények esetén, azaz az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \bar{f}\left(t, x(t - \lambda^1(t)), \dots, x(t - \lambda^m(t)), \int_{-r}^0 A(t, \theta)x(s + \theta) ds, \right. \\ & \left. x\left(t - \bar{\tau}\left[t, x(t - \xi^1(t)), \dots, x(t - \xi^\ell(t)), \int_{-r}^0 B(t, \theta)x(s + \theta) ds\right]\right)\right) \end{aligned}$$

egyenletosztály esetében a

$$[0, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma \mapsto x(t, \sigma, \varphi)$$

paraméter leképezés differenciálhatóságát is igazoltam a kompatibilitási feltétel nélkül, csak a monotonitási feltételt használva. Megjegyezem, hogy hasonló eredményt a $(0, \alpha) \rightarrow C, \sigma \mapsto x_t(\cdot, \sigma, \varphi)$ leképezésre már nem tudunk igazolni, hiszen megmutatható (lásd [36]), hogy a $\sigma \mapsto x(t, \sigma, \varphi)$ leképezés a $t = \sigma$ pontban akkor és csak akkor differenciálható, ha teljesül a kompatibilitási feltétel.

Neutrális állapotfüggő egyenletek megoldásai paraméterek szerinti differenciálhatóságára alig van eredmény az irodalomban. A [34] dolgozatomban

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - g(t, x(t - \eta(t)))\right) = f\left(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \sigma)), \theta\right) \quad t \in [0, T],$$

alakú neutrális egyenletek $(\varphi, \theta, \sigma) \in W^{1,\infty} \times \Theta \times \Xi$ paraméterek szerinti differenciálhatóságát vizsgáltam. Megmutattam, hogy a paraméter leképezés a pontonkénti értelemben, valamint a szegmens függvényeken a C , és bizonyos további feltételek mellett a $W^{1,\infty}$ -normákat használva is differenciálható egy megfelelő kompatibilitási feltétel teljesülése esetén. Hasonló eredmény az (5) alakú neutrális egyenletekre nem ismert.

Walter a [71] cikkében $\dot{x}(t) = f(\partial x_t, x_t)$ alakú explicit neutrális egyenleteket vizsgált, ahol a retardált egyenletekre általa kidolgozott C^1 elméletet terjesztette ki a neutrális egyenletre. Ennek során vizsgálta a kezdeti függvény szerinti differenciálhatóság kérdését is, és igen erős feltételek mellett igazolta azt.

A megoldások paraméter szerinti differenciálhatóságának, annak elméleti jelentősége mellett, egy konkrét gyakorlati alkalmazása is van a paraméter becslés témakörében. Tekintsük a (4) retardált egyenletet a skaláris esetben. Tegyük fel, hogy a k.é.f.-ban szereplő $\gamma = (\varphi, \theta, \xi)$ paraméter ismeretlen, de a megoldásnak ismerjük a $t_0, t_1, \dots, t_\ell$ időpontokbeli $X_0, X_1, \dots, X_\ell$ értékeit. Ekkor keressük azt a $\gamma^* \in \Gamma$ paraméter értéket, amely minimalizálja a

$$J(\gamma) := \sum_{i=0}^l (x(t_i, \gamma) - X_i)^2$$

legkisebb négyzetes eltérést.

Ezt a feladatot számos cikk vizsgálta funkcionál-differenciálegyenletek számos osztályára vonatkozóan [5, 6, 11, 12, 37, 38, 40, 41, 44, 60]. A paraméter becslési eljárásra Banks és Groome adtak meg egy hatékony módszert közönséges differenciálegyenletekre. Ennek lényege az, hogy a J célfüggvényt deriválva keresték meg a $J'(\gamma) = 0$ egyenlet közelítő megoldását. A módszer azon alapul, hogy ki tudjuk számítani az $x(t, \gamma)$ megoldás γ szerinti parciális deriváltját. Ezt az ú.n. kvázi-linearizációs módszert Brewer, Burns, Cliff [5], majd Herdman, Morin és Spies [46] absztrakt differenciálegyenletekre is kiterjesztették, amelyet funkcionál-differenciálegyenletekre is lehetett alkalmazni. A módszert a [33] dolgozatomban retardált állapotfüggő késleltetésű egyenletekre is megfogalmaztam, és numerikus példákon vizsgáltam a módszer konvergenciáját. Eddig erre az esetre a konvergencia igazolását nem ismertük. A módszert egy

$$\mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{c}^k - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{c}^k) \mathbf{b}(\mathbf{c}^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

alakú iterációval definiáljuk, ahol a $\mathbf{c}^k \in \mathbb{R}^N$ vektorok véges dimenziós paramétereket reprezentálnak, és a $\mathbf{D}$ mátrix és a $\mathbf{b}$ vektor komponenseit az $D_2 x(t, \gamma)$ parciális deriváltak segítségével definiálhatjuk (lásd az értekezés 3. fejezetét).

2. Az értekezés módszerei

Brokate and Colonius a [13] cikkükben

$$x'(t) = f\left(t, x(t - \tau(t, x(t)))\right), \quad t \in [a, b],$$

alakú állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenetek linearizációját, és annak során az

$$A : W^{1,\infty}([a, b]; \mathbb{R}) \supset \bar{X} \rightarrow L^p([a, b]; \mathbb{R}), \quad A(x)(t) := x(t - \tau(t, x(t)))$$

operátor Fréchet-differenciálhatóságát vizsgálták. Feltették, hogy τ kétszer folytonosan differenciálható és teljesíti az $a \leq t - \tau(t, v) \leq b$ feltételt minden $t \in [a, b]$ és $v \in \mathbb{R}$ -re, és az A operátort az

$$\bar{X} = \left\{ x \in W^{1,\infty}([a, b]; \mathbb{R}) : \text{létezik olyan } \varepsilon > 0, \text{ hogy } \frac{d}{dt}(t - \tau(t, x(t))) \geq \varepsilon \right. \\ \left. \text{m.m. } t \in [a, b]\text{-re} \right\}$$

halmazon értelmezték. Ilyen feltételek mellett megmutatták, hogy az A leképezés folytonosan differenciálható, és

$$(DA(x)u)(t) = -\dot{x}(t - \tau(t, x(t)))D_2\tau(t, x(t))u(t) + u(t - \tau(t, x(t)))$$

minden $u \in W^{1,\infty}([a, b], \mathbb{R})$ -re. A bizonyításuk egyik kulcsa az alábbi eredmény.¹

1.2.6. Lemma ([13]). *Legyen $g \in L^1([c, d], \mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ és $u \in \mathcal{A}(\varepsilon)$, ahol*

$$\mathcal{A}(\varepsilon) := \{v \in W^{1,\infty}([a, b], [c, d]) : \dot{v}(s) \geq \varepsilon \text{ for a.e. } s \in [a, b]\}.$$

Ekkor

$$\int_a^b |g(u(s))| ds \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_c^d |g(s)| ds.$$

Továbbá, ha az $u^k \in \mathcal{A}(\varepsilon)$ sorozatra $|u^k - u|_{C([a, b], \mathbb{R})} \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$, akkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |g(u^k(s)) - g(u(s))| ds = 0. \quad (9)$$

Mind az erős $W^{1,\infty}$ -norma az értelmezési tartományon, mind a gyenge L^p -norma az értékkészleten, mind pedig az értelmezési tartomány választása fontos volt az 1.2.6. Lemma bizonyításában. Megjegyezzük, hogy Manitius [59] hasonló értelmezési tartományt és normát használt bizonyos állapotfüggő késleltetésű egyenletek linearizációjakor.

¹A tételek/lemmák sorszámozása az értekezésben használt számozással egyezik meg.

Az 1.2.6. Lemma által biztosított (9) konvergencia tulajdonság alapvető módszere volt a korábbi [43] és a most benyújtott [36] cikkeimnek is. A disszertációban általánosítottam az 1.2.6. Lemmát arra az esetre, amikor az u és u^k függvények szakaszonként szigorúan monoton függvények, és így sikerült a visszanyúlási függvény monotonitási feltételét enyhíteni a differenciálhatósági eredmények bizonyításában.

Az állapotfüggő késleltetésű funkcionál-differenciálegyenletek megoldásainak paraméter szerinti differenciálhatóságát korábban két alapvetően különböző módszert használva vizsgáltam. A [43] cikkünkben Hale és Ladeira [30] által alkalmazott, kvázi-Banach terekre kiterjesztett egyenletes kontrakciós tételt, Brokate és Colonius 1.2.6. Lemmáját és egy speciális szorzat normát használva sikerült retardált állapotfüggő késleltetésű egyenletek megoldásainak paraméter szerinti differenciálhatóságát megmutatnunk fixpont technikával. A [32] dolgozatomban egy, a közönséges differenciálegyenletek elméletében alkalmazott direkt módszert (lásd például [64]) általánosítottam az állapotfüggő késleltetésű esetre, amelyben a γ és a $\gamma+h$ paraméterekhez tartozó $x(t, \gamma)$ és $x(t, \gamma+h)$ megoldásokat és a γ paraméterhez tartozó megoldás körüli és a h értékhez tartozó lineáris variációs egyenlet $z(t, \gamma, h)$ megoldását integrálegyenlet alakjában fejezzük ki, és felírhatunk egy integrálegyenlőtleniséget az $x(t, \gamma+h) - x(t, \gamma) - z(t, \gamma, h)$ kifejezésre, amiből a Gronwall-egyenlőtlenység alkalmazásával megmutatható, hogy $|x(t, \gamma+h) - x(t, \gamma) - z(t, \gamma, h)|/|h|_\Gamma \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$ a Γ paraméterterben. Ekkor kapjuk, hogy a $h \rightarrow z(t, \gamma, h)$ lineáris leképezés adja az $x(t, \gamma)$ paraméter szerinti deriváltját. Ezt a direkt módszert alkalmaztam a jelen disszertációban is a retardált, illetve a neutrális esetben is. Az állapotfüggő késleltetésű tagokat is tartalmazó neutrális integrálegyenlőtleniségek kezelésére egy ismert technika (lásd például a [28] cikket) formalizált alakja a következő lemmában adható meg, amelyet a [34] dolgozatomban bizonyítottam.

1.2.2. Lemma ([34]). *Tegyük fel, hogy $h: [0, \alpha] \times [0, \infty)^3 \rightarrow [0, \infty)$ monoton növekvő minden változójában, az $\eta: [0, \alpha] \rightarrow [0, r]$ függvényre $a \leq \eta(t)$ for $t \in [0, \alpha]$ valamely $a > 0$ -ra; az $u: [-r, \alpha] \rightarrow [0, \infty)$ függvényre*

$$u(t) \leq h(t, u(t), u(t - \eta(t)), |u_t|_C), \quad t \in [0, \alpha],$$

és

$$|u_0|_C \leq h(0, u(0), u(-\eta(0)), |u_0|_C).$$

Ekkor

$$v(t) \leq h(t, v(t), v(t - a), v(t)), \quad t \in [0, \alpha],$$

ahol $v(t) := \sup\{u(s) : s \in [-r, t]\}$.

Az előző lemma alkalmazása után kapott konstans késleltetésű neutrális egyenlőtleniséget Györi [28] dolgozatában bizonyított Gronwall-típusú egyenlőtleniséggel oldottam meg.

A (4) retardált egyenlet $x(t, \gamma)$ megoldásának γ szerinti másodrendű differenciál létezésére az irodalomban egy eredmény létezett. Chen, Hu and Wu a [43] dolgozatunkban megadott módszert terjesztették ki a másodrendű derivált létezésére a [17] cikkükben. A disszertációban nem ezt a módszert, hanem az elsőrendű derivált létezésére is használt, integrálegyenlőtlenségeket használó direkt módszert alkalmaztam a másodrendű derivált létezésének igazolására. Itt a másodrendű derivált létezéséhez újra feltettem a kompatibilitási feltételt, de ki kell emelni, hogy az elsőrendű deriváltak már nem teljesítenek ilyen kompatibilitási feltételt, így a bizonyítás során a linearizációs számolások becsléseiben erősen kihasználtam az elsőrendű derivált igazolásához használt módszereket. (Lásd például a 2.2.4. Lemma bizonyítását.)

A disszertáció 3. fejezetében vizsgált kvázi-linearizációs sorozat konvergenciájának igazolásához Herdman, Morin, Spies [46] cikkében is használt egyszerű kontrakciós módszert használtam. A bizonyítás kulcsa az, hogy sikerült a kompatibilitási feltétel nélkül pontonkénti értelemben igazolnom a megoldás paraméter szerinti deriváltja létezését, valamint megmutattam, hogy bizonyos feltételek mellett a megoldás paraméter szerinti deriváltja Lipschitz folytonosan függ a paraméterektől. A numerikus példákban használt approximációs technikában Györi [28] cikkében bevezetett, majd a [29] cikkünkben állapotfüggő késleltetésű retardált egyenletekre kiterjesztett módszerét használtam a kvázi-linearizációs sorozat generálásához szükséges funkcionál-differenciálegyenletek numerikus numerikus közelítésére.

Az (5) neutrális egyenlet egyik alapfeltevése az, hogy a neutrális tagban szereplő állapotfüggő késleltetés függvény, ρ , egy r_0 számmal alulról korlátos, ahol $0 < r_0 < r$, és a $g(t, \psi, u, \lambda)$ és $\rho(t, \psi, \chi)$ késleltetés függvények csak a ψ függvény $[-r, -r_0]$ intervallumra történő megszorításától függenek. Ez a feltétel a Hale, Lunel [30] monográfiájában lineáris neutrális egyenletekre alapfeltételként használt „nonatomic” feltétel egy erősebb verziója. Walther hasonló feltételek mellett adott a megoldások létezésére ill. egyértelműségére eredményeket a [70, 71] cikkeiben, ahol explicit neutrális állapotfüggő késleltetésű egyenleteket vizsgált. Rezounenko [61] cikkében állapotfüggő késleltetést tartalmazó parciális differenciálegyenletek megoldásai egyértelműségéhez használta szintén azt a feltételt, hogy a késleltetés nem függ a pillanatnyi időponthoz r_0 -nál közelebbi megoldás értékektől. Hasonló pozitivitási feltételt használtam a [34] és [35] dolgozataimban a neutrális tagban szereplő késleltetésre. Ennek a feltételnek a segítségével a megoldások létezéséhez a klasszikus lépések módszerét lehetett használni, de a feltételt erősen kihasználtam a Gronwall-típusú egyenlőtlenség alkalmazhatóságához is.

3. Az értekezés fontosabb új eredményei és alkalmazási lehetőségei

Az értekezésben korábbi eredményeimet továbbfejlesztve retardált állapotfüggő késleltetésű egyenletekre erős (pontonkénti ill. C -normában számított) értelemben mutattam meg az $x(t, \gamma)$ megoldás γ paraméter szerinti elsőrendű folytonos differenciálhatóságát a kompatibilitási feltétel felhasználása nélkül és a monotonitási feltétel gyengítése mellett. Megmutattam továbbá a kompatibilitási feltétel mellett az $x(t, \gamma)$ megoldás γ paraméter szerinti másodrendű folytonos differenciálhatóságát pontonkénti értelemben és a C -normában is.

A differenciálhatósági eredmények alkalmazásaként bizonyítottam a retardált állapotfüggő késleltetésű egyenletek paraméter becslési feladata megoldására vonatkozó kvázi-linearizációs módszer konvergenciáját bizonyos esetekben, és teszteltem a módszer konvergenciáját numerikus példákban.

Implicit neutrális állapotfüggő késleltetésű egyenletek egy általános osztályára a megoldások létezésére, egyértelműségére, a paraméterektől való Lipschitz folytonos függésére, valamint a megoldások paraméterek szerinti differenciálhatóságára bizonyítottam új eredményeket.

Az értekezésben szereplő eredmények még nem jelentek meg publikációkban, a 2. fejezet eredményeit motiváló dolgozatom is még megjelenés alatt áll [36]. A legfontosabb eredményeimet az értekezésben szereplő fejezetek szerinti felosztásban ismertetem az alábbiakban.

1. fejezet

Az 1. fejezetben a dolgozatban később használt jelöléseket és az irodalomban ismert állításokat ismertettem, majd néhány később használt lemmát bizonyítottam. Ezek közül a korábban hivatkozott 1.2.6. Lemma alábbi általánosítását emelem ki, amely alapvető fontosságú a differenciálhatósági eredményeim igazolásához. Tekintsük először az alábbi definíciót.

1.2.9. Definíció. Jelölje $\mathcal{PM}([a, b], [c, d])$ az $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ abszolút folytonos függvények halmazát, amelyek szakaszonként monotonok abban az értelemben, hogy létezik az $[a, b]$ intervallum $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ felosztása, hogy minden $i = 0, 1, \dots, m-1$ -re vagy

$$\operatorname{ess\,inf}\{\dot{u}(s) : s \in [a', b']\} > 0, \quad \text{minden } [a', b'] \subset (t_i, t_{i+1})\text{-re}$$

vagy

$$\operatorname{ess\,sup}\{\dot{u}(s) : s \in [a', b']\} < 0, \quad \text{minden } [a', b'] \subset (t_i, t_{i+1})\text{-re}$$

teljesül.

1.2.11. Lemma. *Tegyük fel, hogy $g \in L^\infty([c, d], \mathbb{R}^n)$, $u, u^k \in \mathcal{PM}([a, b], [c, d])$ ($k \in \mathbb{N}$), és*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - u\|_{W^{1,\infty}([a,b], \mathbb{R})} = 0.$$

Ekkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |g(u^k(s)) - g(u(s))| ds = 0.$$

2. fejezet

A 2. fejezetben az

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta), \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0] \quad (11)$$

retardált állapotfüggő késleltetésű kezdetiérték-feladatot vizsgáltam.

Az alábbi feltételeket tettem fel a fejezet során az egyes állításokhoz:²

- (A1) (i) $f: [0, T] \times C \times \mathbb{R}^n \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos;
- (ii) f Lipschitz folytonos a 2., 3. és 4. változójára vonatkozóan;
- (ii) f folytonosan differenciálható a 2., 3. és 4. változójára vonatkozóan;
- (iv) f Lipschitz folytonos az 1. változójára vonatkozóan;
- (v) a D_2f , D_3f és D_4f parciális deriváltak Lipschitz folytonosak minden változóra vonatkozóan;
- (vi) a D_2f , D_3f és D_4f függvények folytonosan parciálisan differenciálhatóak a 2., 3. és 4. változókra vonatkozóan;
- (A1) (i) $\tau: [0, T] \times C \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow [0, r]$ folytonos;
- (ii) τ Lipschitz folytonos a 2. és 3. változójára vonatkozóan;
- (iii) τ folytonosan differenciálható a 2. és 3. változójára vonatkozóan;
- (iv) τ Lipschitz folytonos az 1. változójára vonatkozóan;
- (v) a $(t, \xi) \mapsto \tau(t, y_t, \xi)$ függvény Lipschitz folytonos minden $y \in W^{1,\infty}([-r, T], \mathbb{R}^n)$ függvényre;
- (vi) $D_2\tau$ és $D_3\tau$ függvények Lipschitz folytonosak;
- (vii) $D_2\tau$ és $D_3\tau$ folytonosan parciálisan differenciálhatóak a 2. és 3. változókra vonatkozóan;

²A feltételek az egyszerűség kedvéért vázlatosan vannak megadva, a pontosan megfogalmazott feltételeket lásd a disszertációban.

(viii) a $(t, \xi, \theta) \mapsto f(t, y_t, y(t - \tau(t, y_t, \xi)), \theta)$ függvény Lipschitz folytonos minden $y \in W^{1,\infty}([-r, T], \mathbb{R}^n)$ függvényre.

Jelölje

$$\Gamma := W^{1,\infty} \times \Theta \times \Xi$$

a paraméterteret, a szorzat normával ellátva. A $\hat{\gamma} \in \Gamma$ pont $\delta > 0$ sugarú nyílt környezetét jelölje $\mathcal{B}_\Gamma(\hat{\gamma}; \delta)$.

A 2.2. szakasz fő eredménye a (10)-(11) kezdetiérték-feladat létezésére és a paraméterektől való folytonos függésére vonatkozik.³

2.2.1. Tétel. *Tegyük fel az (A1) (i), (ii), (A2) (i), (ii), feltételeket, és legyen $\hat{\gamma} \in \Gamma$. Ekkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $0 < \alpha \leq T$ véges számok, amelyre*

(i) *minden $\gamma \in P := \mathcal{B}_\Gamma(\hat{\gamma}; \delta)$ esetén a (10)-(11) k.é.f.-nak létezik pontosan egy $x(t, \gamma)$ megoldása a $[-r, \alpha]$ intervallumon;*

(ii) *$x_t(\cdot, \gamma) \in W^{1,\infty}$ minden $\gamma \in P$ és $t \in [0, \alpha]$ -re, és létezik olyan $L = L(\alpha, \delta)$ konstans, amelyre*

$$|x_t(\cdot, \gamma) - x_t(\cdot, \bar{\gamma})|_{W^{1,\infty}} \leq L|\gamma - \bar{\gamma}|_\Gamma, \quad \gamma \in P, \quad t \in [0, \alpha]$$

teljesül.

Megjegyezzük, hogy a fenti állításban a megoldás értelmezési tartománya és az L Lipschitz konstans minden $\gamma \in P$ paraméter értékre azonos. Ezt a tényt kihasználtam a további eredmények bizonyításában. A tétel értelmében a $W^{1,\infty}$ tér természetes választás lehet a (10) retardált egyenlet megoldásai állapotterének, hiszen a feladat jól definiált ebben a térben. Ez a választás Walter C^1 elméletéhez képest általánosabb esetekben is alkalmazható, hiszen a megengedhető kezdeti függvények halmaza jóval bővebb, mint a C^1 elméletben.

A továbbiakban a 2.2.1. Tétellel definiált P halmazt és az $\alpha > 0$ konstanst rögzítettnek tekintjük.

A 2.3. szakaszban egy rögzített $\gamma \in P$ paraméter értékhez tartozó $x(t, \gamma)$ megoldás mentén definiáltam az $L(t, x): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} L(t, x)(h^\varphi, h^\theta, h^\xi) \\ := & D_2 f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta) h^\varphi + D_3 f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta) \\ & \times \left[-\dot{x}(t - \tau(t, x_t, \xi)) \left(D_2 \tau(t, x_t, \xi) h^\varphi + D_3 \tau(t, x_t, \xi) h^\xi \right) \right. \\ & \left. + h^\varphi(-\tau(t, x_t, \xi)) \right] + D_4 f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta) h^\theta \end{aligned}$$

³Az állítások is több esetben egyszerűsített alakban vannak megfogalmazva a téziszűzetben. A részletesebb állításokat lásd a disszertációban.

lineáris leképezést $(h^\varphi, h^\theta, h^\xi) \in \Gamma$ -ra, és tekintettem az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$\dot{z}(t) = L(t, x)(z_t, h^\theta, h^\xi) \quad \text{a.e. } t \in [0, \alpha], \quad (12)$$

$$z(t) = h^\varphi(t), \quad t \in [-r, 0], \quad (13)$$

ahol $h = (h^\varphi, h^\theta, h^\xi) \in \Gamma$ rögzített.

Definiáltam a

$$P_1 := \left\{ \gamma = (\varphi, \theta, \xi) \in P : \text{ess inf} \left\{ \frac{d}{dt}(t - \tau(t, x_t(\cdot, \gamma), \xi)) : \text{a.e. } t \in [0, \alpha^*] \right\} > 0 \right\}$$

és

$$P_2 := \left\{ \gamma = (\varphi, \theta, \xi) \in P : \text{a } [0, \alpha^*] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t - \tau(t, x_t(\cdot, \gamma), \xi) \text{ leképezés a } \mathcal{PM}([0, \alpha^*], [-r, \alpha^*]) \text{ osztályba tartozik} \right\} \quad (14)$$

paraméter halmazokat, ahol $\alpha^* := \min\{r, \alpha\}$. Ekkor $P_1 \subset P_2 \subset P$.

2.3.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy (A1) (i)–(iii), (A2) (i)–(v) teljesülnek, és legyen P_2 a (14) formulával definiálva. Ekkor az*

$$\mathbb{R} \times \Gamma \supset [0, \alpha] \times P \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, \gamma) \mapsto x(t, \gamma)$$

és

$$\mathbb{R} \times \Gamma \supset [0, \alpha] \times P \rightarrow C, \quad (t, \gamma) \mapsto x_t(\cdot, \gamma)$$

függvények γ szerint parciálisan differenciálhatóak minden $\gamma \in P_2$ -re, és

$$D_2 x(t, \gamma)h = z(t, \gamma, h), \quad h \in \Gamma, t \in [0, \alpha], \gamma \in P_2,$$

valamint

$$D_2 x_t(\cdot, \gamma)h = z_t(\cdot, \gamma, h), \quad h \in \Gamma, t \in [0, \alpha], \gamma \in P_2,$$

ahol $z(t, \gamma, h)$ a (12)–(13) k.é.f. megoldása $t \in [0, \alpha]$, $\gamma \in P_2$ és $h \in \Gamma$ -ra. Továbbá az

$$\mathbb{R} \times \Gamma \supset [0, \alpha] \times P_2 \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (t, \gamma) \mapsto D_2 x(t, \gamma)$$

és

$$\mathbb{R} \times \Gamma \supset [0, \alpha] \times P_2 \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma, C), \quad (t, \gamma) \mapsto D_2 x_t(\cdot, \gamma)$$

függvények folytonosak.

A 3. fejezetben a kvázi-linearizációs sorozat konvergenciájának a bizonyítása az egyik esetben az alábbi lemmán alapul, amely a $D_2 x(t, \gamma)$ parciális derivált γ -ra vonatkozó Lipschitz folytonosságára ad elegendő feltételt. Tekintsük ehhez először a következő definíciót.

2.3.7. Definíció. Jelölje $PW^{2,\infty}$ azon $\varphi \in W^{1,\infty}$ függvények halmazát, amelyek szakaszonként $W^{2,\infty}$ -függvények, azaz létezik olyan $-r = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 0$ beosztás, amelyre $\dot{\varphi}$ Lipschitz folytonos a (t_i, t_{i+1}) intervallumokon minden $i = 0, \dots, m-1$ -re, és $\dot{\varphi}$ jobbról és balról is folytonos a t_i pontokban minden $i = 0, \dots, m$ -re. A $PW^{2,\infty}$ halmazon a normát a $|\varphi|_{PW^{2,\infty}} := \max\{|\varphi|_C, |\dot{\varphi}|_{L^\infty}, |\ddot{\varphi}|_{L^\infty}\}$ képlettel definiáljuk.

2.3.8. Lemma. Tegyük fel, hogy (A1) (i)–(v), (A2) (i)–(vi) teljesülnek, $\gamma^* = (\varphi^*, \theta^*, \xi^*) \in P_1$. Ekkor létezik olyan $\delta^* > 0$, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ és $K \geq 0$ konstansokhoz létezik egy $N_3 = N_3(\gamma^*, \delta^*, m, K)$ nemnegatív konstans, hogy minden $\gamma = (\varphi, \theta, \xi) \in \mathcal{B}_\Gamma(\gamma^*; \delta^*)$ -re, amelyre $\varphi \in PW^{2,\infty}$ és $|\varphi|_{PW^{2,\infty}} \leq K$, továbbá a $\dot{\varphi}$ és $\ddot{\varphi}$ függvények $(-r, 0)$ -beli szakadási pontjai száma nem nagyobb, mint m , létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $h_k \in \Gamma$ -ra, amelyre $|h_k|_\Gamma \leq \delta$ teljesül $k \in \mathbb{N}$ -re és $h \in \Gamma$ -ra, a $z^{k,h}(t) := z(t, \gamma + h_k, h)$ és $z^h(t) := z(t, \gamma, h)$ függvényekre a

$$|z^{k,h}(t) - z^h(t)| \leq |z_t^{k,h} - z_t^h|_C \leq N_3 |h_k|_\Gamma |h|_\Gamma, \quad t \in [0, \alpha], \quad h \in \Gamma$$

reláció teljesül.

A 2.4. szakaszban a (10)-(11) k.é.f. $x(t, \gamma)$ megoldásának γ szerinti másodrendű deriváltjának létezését mutattam meg. Ehhez először vezessük be a $\Gamma_2 := W^{2,\infty} \times \Theta \times \Xi$ paraméter teret a szorzat normával ellátva.

Egy rögzített $\gamma \in P_2$ -re legyen x a (10)-(11) k.é.f. megoldása, és legyen z^h and z^y a (12)-(13) k.é.f. $h, y \in \Gamma$ paraméterekhez tartozó megoldása. Tekintsük a

$$\dot{w}(t) = L(t, x)(w_t, 0, 0) + B(t) \langle (z_t^h, h^\theta, h^\xi), (z_t^y, y^\theta, y^\xi) \rangle, \quad \text{a.e. } t \in [0, \alpha], \quad (15)$$

$$w(t) = 0, \quad t \in [-r, 0]. \quad (16)$$

k.é.f.-ot, ahol $B\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy bizonyos explicit módon megadott bilineáris leképezés (amelynek pontos definícióját lásd a disszertáció 2.4. fejezetében).

A kompatibilitási feltételt teljesítő paraméterek halmazát jelölje

$$\mathcal{P} := \left\{ (\varphi, \theta, \xi) \in P: \varphi \in C^1, \quad \dot{\varphi}(0-) = f(0, \varphi, \varphi(-\tau(0, \varphi, \xi)), \theta) \right\}.$$

2.4.16. Tétel. Tegyük fel, hogy (A1) (i)–(vi), (A2) (i)–(vii) teljesülnek. Ekkor minden $t \in [0, \alpha]$ -ra a

$$\Gamma_2 \supset (P_2 \cap \Gamma_2) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma \mapsto x(t, \gamma)$$

és

$$\Gamma_2 \supset (P_2 \cap \Gamma_2) \rightarrow C, \quad \gamma \mapsto x_t(\cdot, \gamma)$$

függvények kétszer differenciálhatóak a γ szerint minden $\gamma \in P_2 \cap \Gamma_2 \cap \mathcal{P}$ -ra, és

$$D_{22}x(t, \gamma)\langle h, y \rangle = w^{h,y}(t), \quad h, y \in \Gamma_2,$$

valamint

$$D_{22}x_t(\cdot, \gamma)\langle h, y \rangle = w_t^{h,y}, \quad h, y \in \Gamma_2,$$

ahol $w^{h,y}$ a (15)-(16) variációs egyenlet megoldása. Továbbá, ha (A2) (viii) teljesül, akkor a

$$\mathbb{R} \times \Gamma_2 \supset ([0, \alpha] \times (P_2 \cap \Gamma_2 \cap \mathcal{P})) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Gamma_2 \times \Gamma_2, \mathbb{R}^n), \quad (t, \gamma) \mapsto D_{22}x(t, \gamma)$$

és

$$\mathbb{R} \times \Gamma_2 \supset ([0, \alpha] \times (P_2 \cap \Gamma_2 \cap \mathcal{P})) \rightarrow \mathcal{L}^2(\Gamma_2 \times \Gamma_2, C), \quad (t, \gamma) \mapsto D_{22}x_t(\cdot, \gamma)$$

leképezések folytonosak.

3. fejezet

Az értekezés 3. fejezetében a paraméter szerinti differenciálhatóság alkalmazásaként a (10)-(11) k.é.f. skaláris változatára vonatkozó paraméter becslési feladatot vizsgáltam. Az alábbi feltételre volt szükségem.

- (B1) $n = 1$, azaz a (10) egyenlet skaláris;
- (B2) $\Gamma^N \subset \Gamma$ véges dimenziós altér minden $N \in \mathbb{N}$ -re;
- (B3) létezik $\gamma^* \in \Gamma$, amelyre $J(\gamma^*) = 0$;
- (B4) minden $N \in \mathbb{N}$ -re a $\chi_j^N := (\chi_j^{\varphi,N}, \chi_j^{\theta,N}, \chi_j^{\xi,N})$ bázis függvényekre $\chi_j^{\varphi,N} \in PW^{2,\infty}$ teljesül minden $j = 1, \dots, N$ -re, és létezik olyan $-r < t_1 < \dots < t_m < 0$ beosztás, ahol $m = m(N)$, és amelyre $\dot{\chi}_j^{\varphi,N}$ és $\ddot{\chi}_j^{\varphi,N}$ függvények szakadási pontjai a t_i pontok minden $j = 1, \dots, N$ -re;
- (B5) minden $N \in \mathbb{N}$ -re $\sum_{j=1}^N |\chi_j^N|_{\Gamma} \leq 1$;
- (B6) minden $N \in \mathbb{N}$ -re a J függvény Γ^N altérre való megszorításának létezik $\bar{\gamma}_N \in \Gamma^N$ lokális minimuma.

A feltételeket teljesítő Γ^N véges dimenziós alterekre a numerikus példákban természetes választási lehetőség a lineáris spline függvények halmaza.

3.2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{c}^k \in \mathbb{R}^N$ sorozat szuperlineárisan konvergál $\mathbf{c}^* \in \mathbb{R}^N$ -hez, ha létezik olyan $\varepsilon_k \geq 0$ sorozat, amelyre $\varepsilon_k \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$, és

$$|\mathbf{c}^{k+1} - \mathbf{c}^*| \leq \varepsilon_k |\mathbf{c}^k - \mathbf{c}^*|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.2.2. Tétel. Tegyük fel, hogy (A1) (i)–(iii), (A2) (i)–(iii) és (B1)–(B3) teljesülnek, továbbá $\gamma^* := \sum_{j=1}^N c_j^* \chi_j^N \in P_1 \cap \Gamma^N$ valamely $N \in \mathbb{N}$ -re, és $\mathbf{D}(\mathbf{c}^*)$ invertálható, ahol $\mathbf{c}^* := (c_1^*, \dots, c_N^*)^T$. Ekkor erre az N -re a (8) kvázi-linearizációs sorozat lokálisan szuperlineárisan konvergál $\mathbf{c}^*$ -hez.

Megjegyzem, hogy a numerikus példák azt mutatják, hogy a gyakorlatban a szuperlineáris sebességnél gyorsabban konvergál a kvázi-linearizációs sorozat, de ennek igazolásához nem ismerjük a megoldás elegendő simasági tulajdonságát a paraméterre vonatkozóan.

3.2.3. Tétel. Tegyük fel, hogy (A1) (i)–(v), (A2) (i)–(vi), és (B1)–(B7) teljesülnek, továbbá a (B3) feltételben szereplő γ^* paraméterre $\gamma^* \in P_1$. Legyen $\delta^* > 0$ a 2.3.8. Lemma által definiált konstans, legyen $\bar{\gamma}_N := \sum_{j=1}^N \bar{c}_j \chi_j^N$ a (B6) feltételben definiált paraméter, $\bar{\mathbf{c}}^N := (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_N)^T$, $m = m(N)$ és $\chi_j^{\varphi, N}$ ($j = 1, \dots, N$) a (B4) feltétellel definiálva,

$$K := \max \left\{ |\bar{\mathbf{c}}^N|_1 + \delta^*, (|\bar{\mathbf{c}}^N|_1 + \delta^*) \max_{j=1, \dots, N} |\ddot{\chi}_j^{\varphi, N}|_{L^\infty} \right\},$$

és legyen $N_3 = N_3(\gamma^*, \delta^*, m, K)$ a 2.3.8. Lemma által definiált konstans. Ekkor ha $\bar{\gamma}_N \in \mathcal{B}_\Gamma(\gamma^*; \delta^*)$, a $\mathbf{D}(\bar{\mathbf{c}}^N)$ mátrix invertálható, és

$$|\mathbf{D}^{-1}(\bar{\mathbf{c}}^N)|_1 N_3 \sum_{i=0}^{\ell} |x(t_i, \bar{\mathbf{c}}^N) - X_i| < 1,$$

akkor ilyen N -ekre a (8) kvázi-linearizációs sorozat lokálisan konvergál $\bar{\mathbf{c}}^N$ -hez.

4. fejezet

Az értekezés 4. fejezetében a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(x(t) - g(t, x_t, x(t - \rho(t, x_t, \chi)), \lambda) \right) &= f \left(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \theta \right), \\ t &\in [0, T], \end{aligned} \quad (17)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-r, 0] \quad (18)$$

neutrális egyenlethez tartozó k.é.f.-ot vizsgáltam. Az (A1) és (A2) feltételek mellett az alábbi feltételeket használtam fel.

(A3) (i) $g: [0, T] \times C \times \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos;

(ii) g Lipschitz folytonos a következő értelemben:

$$|g(t, \psi, u, \lambda) - g(t, \bar{\psi}, \bar{u}, \bar{\lambda})| \leq L_3 \left(|t - \bar{t}| + \max_{\zeta \in [-r, -r_0]} |\psi(\zeta) - \bar{\psi}(\zeta)| + |u - \bar{u}| + |\lambda - \bar{\lambda}|_\Lambda \right);$$

(iii) g folytonosan differenciálható a 2., 3. és 4. változójában;

(iv) D_2g , D_3g és D_4g Lipschitz folytonos az 1., 2. és 3. változójában;

(A4) (i) $\rho: [0, T] \times C \times X \rightarrow [r_0, r]$ folytonos;

(ii) ρ Lipschitz folytonos a következő értelemben:

$$|\rho(t, \psi, \chi) - \rho(t, \bar{\psi}, \bar{\chi})| \leq L_6 \left(|t - \bar{t}| + \max_{\zeta \in [-r, -r_0]} |\psi(\zeta) - \bar{\psi}(\zeta)| + |\chi - \bar{\chi}|_X \right);$$

(iii) ρ folytonosan differenciálható a 2. és 3. változójában;

(iv) $D_2\rho$ és $D_3\rho$ Lipschitz folytonos az 1. és 2. változójában.

Megmutattam, hogy a (17) alakú egyenletek egy széles osztályában teljesülnek a fenti feltételek. Ebben a fejezetben a paraméter teret a

$$\Gamma := W^{1,\infty} \times \Theta \times \Xi \times \Lambda \times X$$

térnek választottam, a szorzat normával ellátva.

4.2.2. Tétel. Tegyük fel az (A1) (i), (ii), (A2) (i), (ii), feltételeket, és legyen $\hat{\gamma} \in \Gamma$. Ekkor léteznek olyan $\delta > 0$ és $0 < \alpha \leq T$ véges számok, amelyre

(i) minden $\gamma \in P := \mathcal{B}_\Gamma(\hat{\gamma}; \delta)$ esetén a (17)-(18) k.é.f.-nak létezik pontosan egy $x(t, \gamma)$ megoldása az $[-r, \alpha]$ intervallumon;

(ii) $x_t(\cdot, \gamma) \in W^{1,\infty}$ minden $\gamma \in P$ és $t \in [0, \alpha]$ -re, és létezik olyan $L = L(\alpha, \delta)$ konstans, amelyre

$$|x_t(\cdot, \gamma) - x_t(\cdot, \bar{\gamma})|_{W^{1,\infty}} \leq L|\gamma - \bar{\gamma}|_\Gamma, \quad \gamma \in P, \quad t \in [0, \alpha]$$

teljesül.

A kompatibilitási feltételt az alábbi módon definiáltam:

$$\mathcal{P} := \left\{ (\varphi, \xi, \theta, \lambda, \chi) \in \Gamma : g(t, \psi, u, \lambda) \text{ és } \rho(t, \psi, \chi) \text{ a } t \text{ változóra szerint} \right. \\ \text{parciálisan differenciálható, és a } (t, \psi, u) \mapsto D_1g(t, \psi, u, \lambda) \text{ és} \\ (t, \psi) \mapsto D_1\rho(t, \psi, \chi) \text{ függvények folytonosak } t \in [0, T]\text{-re; } \varphi \in C^1; \\ \dot{\varphi}(0-) = D_1g(0, \varphi, \varphi(-\rho(0, \varphi, \chi)), \lambda) + D_2g(0, \varphi, \varphi(-\rho(0, \varphi, \chi)), \lambda)\dot{\varphi} \\ + D_3g(0, \varphi, \varphi(-\rho(0, \varphi, \chi)), \lambda)\dot{\varphi}(-\rho(0, \varphi, \chi)) \\ \left. \times (1 - D_1\rho(0, \varphi, \chi) - D_2\rho(0, \varphi, \chi)\dot{\varphi}) + f(0, \varphi, \varphi(-\tau(0, \varphi, \xi)), \theta) \right\}.$$

Definiáltam a $G(t, x): C \times \Lambda \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} G(t, x)(\psi, h^\lambda, h^\chi) \\ := D_2g(t, x_t, x(t - \rho(t, x_t, \bar{\chi})), \bar{\lambda})\psi + D_3g(t, x_t, x(t - \rho(t, x_t, \bar{\chi})), \bar{\lambda}) \\ \times \left[-\dot{x}(t - \rho(t, x_t, \bar{\chi})) \left\{ D_2\rho(t, x_t, \bar{\chi})\psi + D_3\rho(t, x_t, \bar{\chi})h^\chi \right\} \right. \\ \left. + \psi(-\rho(t, x_t, \bar{\chi})) \right] + D_4g(t, x_t, x(t - \rho(t, x_t, \bar{\chi})), \bar{\lambda})h^\lambda \end{aligned}$$

lineáris operátort, és tekintettem a

$$\frac{d}{dt} \left(z(t) - G(t, x)(z_t, h^\lambda, h^\chi) \right) = L(t, x)(z_t, h^\xi, h^\theta), \quad t \in [0, \alpha] \quad (19)$$

$$z(t) = h^\varphi(t), \quad t \in [-r, 0] \quad (20)$$

k.é.f.-ot $h = (h^\varphi, h^\theta, h^\xi, h^\lambda, h^\chi) \in \Gamma$ -ra.

4.3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy (A1) (i)–(iii), (A2) (i)–(iii), (A3) (i)–(iv) és (A4) (i)–(iv) teljesülnek, legyen P és $\alpha > 0$ a 4.2.2. Tétellel definiálva, $\bar{\gamma} \in P \cap \mathcal{P}$, és legyen $x(t; \gamma)$ a (17)–(18) k.é.f. megoldása a $[-r, \alpha]$ intervallumon $\gamma \in P$ -re. Ekkor az $x(t, \cdot): \Gamma \supset P \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény differenciálható a $\bar{\gamma}$ pontban minden $t \in [0, \alpha]$ -re, és*

$$D_2x(t, \bar{\gamma})h = z(t, \bar{\gamma}, h), \quad h \in \Gamma, \quad t \in [0, \alpha],$$

ahol z a (19)–(20) k.é.f. megoldása.

4.3.5. Következmény. *A 4.3.4. Tétel feltételei mellett a*

$$\Gamma \supset P \rightarrow C, \quad \gamma \mapsto x(\cdot, \gamma)_t$$

függvény differenciálható minden $\bar{\gamma} \in P \cap \mathcal{P}$ pontban minden $t \in [0, \alpha]$ -re, és

$$D_2x_t(\cdot, \bar{\gamma})h = z_t(\cdot, \bar{\gamma}, h), \quad h \in \Gamma, \quad t \in [0, \alpha].$$

Hivatkozások

- [1] W. G. Aiello, H. I. Freedman, J. Wu, Analysis of a model representing state-structured population growth with state-dependent time delay, SIAM J. Applied Math. 52 (1992), 855–869.
- [2] J. F. M. Al-Omari, S.A. Gourley, Dynamics of a stage-structured population model incorporating a state-dependent maturation delay, Nonlinear Analysis: Real World Applications 6 (2005) 13–33.
- [3] A. Anguraj, A. Arjunan, M. Mallika, E. Hernández, Existence results for an impulsive neutral functional differential equation with state-dependent delay. Appl. Anal. 86:7 (2007) 861–872.

- [4] O. Arino, Hbid, M. L., R. Bravo de la Parra, A mathematical model of growth of population of fish in the larval stage: Density-dependence effects, *Math. Biosciences* 150 (1998) 1-20.
- [5] H. T. Banks, J. A. Burns and E. M. Cliff, Parameter estimation and identification for systems with delays, *SIAM J. Control and Opt.*, 19:6 (1981) 791–828.
- [6] H. T. Banks and P. K. Daniel Lamm, Estimation of delays and other parameters in nonlinear functional differential equations, *SIAM J. Control and Opt.*, 21:6 (1983) 895–915.
- [7] H. T. Banks, G. M. Groome, Convergence theorems for parameter estimation by quasilinearization, *J. Math. Anal. Appl.* 42 (1973) 91–109.
- [8] M. Bartha, On stability properties for neutral differential equations with state-dependent delay, *Differential Equations Dynam. Systems* 7 (1999), 197–220.
- [9] A. Bellen, N. Gulielmi, Solving neutral differential equations with state-dependent delays, *J. Comput. Appl. Math.*, 229:2 (2009) 1260–1267.
- [10] A. Bellen, M. Zennaro, Numerical methods for delay differential equations, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [11] D. W. Brewer, Quasi-Newton methods for parameter estimation in functional differential equations, *Proc. 27th IEEE Conf. on Decision and Control*, Austin, TX, (1988) 806–809.
- [12] D. W. Brewer, J. A. Burns, E. M. Cliff, Parameter identification for an abstract Cauchy problem by quasilinearization, *Quart. Appl. Math.* 51:1 (1993) 1–22.
- [13] M. Brokate, F. Colonius, Linearizing equations with state-dependent delays, *Appl. Math. Optim.*, 21 (1990) 45–52.
- [14] M. Büger, M. R. W. Martin, Stabilizing control for an unbounded state-dependent delay differential equation, In: *Dynamical Systems and Differential Equations*, Kennesaw (GA), 2000, *Discrete and Continuous Dynamical Systems (Added Volume)*, 2001, 56-65.
- [15] M. Büger, M. R. W. Martin, The escaping desaster: A problem related to state-dependent delays. *J. Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 55 (2004), 547-574.
- [16] Y. K. Chang and W. S. Li, Solvability for Impulsive Neutral Integro-Differential Equations with State-Dependent Delay via Fractional Operators, *J Optim Theory Appl.*, 144 (2010), 445–459.
- [17] Y. Chen, Q. Hu, J. Wu, Second-order differentiability with respect to parameters for differential equations with adaptive delays, *Front. Math. China*, 5:2 (2010) 221–286.
- [18] C. Cuevas, G. M. N’Guérékata and M. Rabelo, Mild solutions for impulsive neutral functional differential equations with state-dependent delay *Semigroup Forum*, 80:3 (2010), 375–390.
- [19] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, and H.-O. Walther, *Delay Equations, Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [20] R. D. Driver, Existence theory for a delay-differential system, *Contributions to Differential Eqs.* 1 (1963), 317-336.
- [21] R. D. Driver, A two-body problem of classical electrodynamics: the one-dimensional case, *Annals of Physics* 21 (1963), 122-142.

- [22] R. D. Driver, A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics, In International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, pp. 474-484, LaSalle, J., and S. Lefschetz eds., Academic Press, New York, 1963.
- [23] R. D. Driver, A neutral system with state-dependent delay, J. Differential Eqs. 54 (1984), 73-86.
- [24] G. Fusco, N. Gulielmi, A regularization for discontinuous differential equations with application to state-dependent delay differential equations of neutral type, J. Differential Equations, 250 (2011) 3230–3279.
- [25] J. G. Gatica, P. Waltman, A threshold model of antigen antibody dynamics with fading memory, In Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, pp. 425-439, Lakshmikantham, V., ed., Academic Press, New York, 1982.
- [26] J. G. Gatica, P. Waltman, Existence and uniqueness of solutions of a functional differential equation modeling thresholds, Nonlinear Analysis TMA 8 (1984), 1215-1222.
- [27] J. G. Gatica, P. Waltman, A system of functional differential equations modeling threshold phenomena, Applicable Analysis 28 (1988), 39-50.
- [28] I. Győri, On approximation of the solutions of delay differential equations by using piecewise constant arguments, Internat. J. Math. & Math. Sci. 14:1 (1991), 111–126.
- [29] I. Győri, F. Hartung and J. Turi, On numerical approximations for a class of differential equations with time- and state-dependent delays, Appl. Math. Letters, 8:6 (1995) 19–24.
- [30] J. K. Hale, L. A. C. Ladeira, Differentiability with respect to delays, J. Diff. Eqns., 92 (1991) 14–26.
- [31] J. K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [32] F. Hartung, On differentiability of solutions with respect to parameters in a class of functional differential equations, Funct. Differ. Equ., 4:1-2 (1997) 65–79.
- [33] F. Hartung, Parameter estimation by quasilinearization in functional differential equations with state-dependent delays: a numerical study, Nonlinear Anal., 47:7 (2001) 4557–4566.
- [34] F. Hartung, On differentiability of solutions with respect to parameters in neutral differential equations with state-dependent delays, J. Math. Anal. Appl., 324:1 (2006) 504–524.
- [35] F. Hartung, Linearized stability for a class of neutral functional differential equations with state-dependent delays, J. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 69 (2008) 1629–1643.
- [36] F. Hartung, Differentiability of solutions with respect to the initial data in differential equations with state-dependent delays, Preprint.
- [37] F. Hartung, T. L. Herdman and J. Turi, Identifications of parameters in hereditary systems, Proceedings of ASME Fifteenth Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Boston, Massachusetts, September 1995, DE-Vol 84-3, Vol.3, Part C, 1061–1066.

- [38] F. Hartung, T. L. Herdman and J. Turi, Identifications of parameters in hereditary systems: a numerical study, *Proceedings of the 3rd IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation*, Cyprus, July 1995, 291–298.
- [39] F. Hartung, T. L. Herdman, and J. Turi, On existence, uniqueness and numerical approximation for neutral equations with state-dependent delays, *Appl. Numer. Math.*, 24 (1997) 393–409.
- [40] F. Hartung, T. L. Herdman, and J. Turi, Parameter identification in classes of hereditary systems of neutral type, *Appl. Math. and Comp.*, 89 (1998) 147–160.
- [41] F. Hartung, T. L. Herdman, and J. Turi, Parameter identification in neutral functional differential equations with state-dependent delays, *Nonlin. Anal.*, 39 (2000) 305–325.
- [42] F. Hartung, T. Krisztin, H.O. Walther and J. Wu, Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications, in *Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations*, volume 3, edited by A. Canada, P. Drábek and A. Fonda, Elsevier, North-Holand, 2006, 435–545.
- [43] F. Hartung, J. Turi, On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations, *J. Differential Equations* 135:2 (1997), 192–237.
- [44] F. Hartung, J. Turi, Identification of Parameters in Delay Equations with State-Dependent Delays, *J. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 29:11 (1997) 1303–1318.
- [45] F. Hartung and J. Turi, Identification of Parameters in Neutral Functional Differential Equations with State-Dependent Delays, *Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005*, Seville, (Spain). 12-15 December 2005, 5239–5244.
- [46] T. L. Herdman, P. Morin, R. D. Spies, Parameter identification for nonlinear abstract Cauchy problems using quasilinearization, *J. Optim. Th. Appl.* 113 (2002) 227–250.
- [47] J. T. Hoag, R. D. Driver, A delayed-advanced model for the electrodynamics two-body problem, *Nonlinear Analysis TMA* 15 (1990), 165–184.
- [48] F. C. Hoppensteadt, P. Waltman, A flow mediated control model of respiration. In *Lectures on Mathematics in the Life Sciences*, vol. 12, pp. 211–218, Amer. Math. Soc., Providence, 1979.
- [49] T. Insperger, G. Stépán, F. Hartung, J. Turi, State dependent regenerative delay in milling processes, in *Proceedings of ASME International Design Engineering Technical Conferences*, Long Beach CA, (2005), paper no. DETC2005-85282 (CD-ROM).
- [50] T. Insperger, G. Stépán, J. Turi, State-dependent delay model for regenerative cutting processes, *Proceedings of the Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference*, Eindhoven, Netherlands, 2005, 1124–1129.
- [51] V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov, *Stability of functional differential equations*, Academic Press, 1986.
- [52] T. Krisztin, A local unstable manifold for differential equations with state-dependent delay. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 9 (2003), 993–1028.
- [53] T. Krisztin, C^1 -smoothness of center manifolds for differential equations with state-dependent delay. To appear in *Nonlinear Dynamics and Evolution Equations*, Fields Institute Communications, 48 (2006) 213–226.

- [54] Y. Kuang, Delay differential equations with applications with applications in population dynamics, Academic Press, 1993.
- [55] Y. Kuang, H. L. Smith, Periodic solutions of differential delay equations with threshold-type delays, In Oscillation and Dynamics in Delay Equations, pp. 153-176, Graef, J. R., and J. K. Hale eds., Contemporary Mathematics, vol. 120, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.
- [56] Y. Kuang, H. L. Smith, Slowly oscillating periodic solutions of autonomous state-dependent delay differential equations, Nonlinear Analysis TMA 19 (1992), 855-872.
- [57] W. S. Li, Y. K. Chang, J. J. Nieto, Solvability of impulsive neutral evolution differential inclusions with state-dependent delay, Math. Comput. Modelling, 49 (2009) 1920–1927.
- [58] Y. Liu, Numerical solutions of implicit neutral functional differential equations, SIAM J. Numer. Anal. 36:2 (1999), 516–528.
- [59] A. Manitius, On the optimal control of systems with a delay depending on state, control, and time. Séminaires IRIA, Analyse et Contrôle de Systèmes, IRIA, France, 1975, 149–198.
- [60] K. A. Murphy, Estimation of time- and state-dependent delays and other parameters in functional differential equations, SIAM J. Appl. Math., 50:4 (1990) 972–1000.
- [61] A. V. Rezounenko, Differential equations with discrete state-dependent delay: uniqueness and well-posedness in the space of continuous functions. Nonlinear Anal. 70:11, 3978-3986 (2009)
- [62] J. P. C. dos Santos, Existence results for a partial neutral integro-differential equation with state-dependent delay, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 29 (2010), 12 pp.
- [63] B. Sležák, On the parameter-dependence of the solutions of functional differential equations with unbounded state-dependent delay I. The upper-semicontinuity of the resolvent function, Int. J. Qual. Theory Differential Equations Appl., 1:1 (2007) 88–114.
- [64] R. A. Struble, Nonlinear Differential Equations, McGraw-Hill Book Co., 1962.
- [65] H.-O. Walther, Stable periodic motion of a system with state-dependent delay, Differential and Integral Eqs. 15 (2002), 923-944
- [66] H.-O. Walther, Smoothness properties of semiflows for differential equations with state dependent delay. Russian, in Proceedings of the International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, 2002, vol. 1, pp. 40–55, Moscow State Aviation Institute (MAI), Moscow 2003. English version: J. Math. Sci. 124 (2004), 5193–5207.
- [67] H.-O. Walther, Stable periodic motion of a system using echo for position control, J. Dynamics and Differential Eqs. 15 (2003), 143-223.
- [68] H.-O. Walther, The solution manifold and C^1 -smoothness of solution operators for differential equations with state dependent delay, J. Differential Equations 195 (2003), 46–65.
- [69] H.-O. Walther, On a model for soft landing with state-dependent delay, Journal of Dynamics and Differential Equations, 19:3 (2007), 593-622.
- [70] H.-O. Walther, Linearized stability for semiflows generated by a class of neutral equations, with applications to state-dependent delays, J. Dyn. Diff. Equat., 22:3 (2010) 439–462.
- [71] H.-O. Walther, Semiflows for neutral equations with state-dependent delays, Preprint (2009).

- [72] E. Winston, Uniqueness of solutions of state dependent delay differential equations, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 620–625.
- [73] Z. Yang, J. Cao, Existence of periodic solutions in neutral state-dependent delays equations and models, J. Comput. Appl. Math. 174 (2005), 179–199.
- [74] Z. Zhou, Z. Yang, Periodic solutions in higher-dimensional Lotka-Volterra neutral competition systems with state-dependent delays, Appl. Math. Comput., 189 (2007) 986–995.