

Bírálati vélemény Hartung Ferenc:
Differentiability of solutions with respect to parameters in differential equations
with state-dependent delays
című MTA doktori értekezéséről

A világhírű Vito Volterra volt az, aki 1930 környékén elsőként fogalmazta meg azt az elvet, hogy valóságos folyamatokat modellező differenciálegyenleteknél figyelembe kell venni a múlttól való függést is. Populációdinamikai munkássága azóta is iránymutató, és a hatvanas évektől kezdődően, Richard Bellman és Kenneth Cooke híres monográfiájával a késleltetett egyenletek elmélete önálló életre kelt. A téma azóta a differenciálegyenletek elméletének elismert önálló ágává vált, mely mind a mai napig igen dinamikusan fejlődik.

Itt olyan differenciálegyenletekről van szó, ahol a derivált a rendszernek nem csak jelenkori állapotától függ, hanem múltbeli eseményektől is. Tipikus alkalmazások populációdinamikai modellek, ahol a terhességet kell figyelembe venni, vagy betegségterjedési modellek, ahol a lappangás jelent komoly tényezőt, vagy mérnöki alkalmazásokban a visszacsatolás (feedback) esetén, ahol a mérések kiértékelése és a jelfeldolgozás ideje a figyelembe veendő tényező.

Ezeket az egyenleteket a hatvanas évektől kezdve szokás

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0$$

alakba írni, ahol (véges $r > 0$ késleltetés esetén) $x : [-r, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ahol $a \in (0, \infty]$), valamint $x_t(s) := x(t+s)$ ha $s \in [-r, 0]$. Világos, hogy ezen egyenletekhez a kezdeti feltételek halmaza nem lehet véges dimenziós, a múltat ismeri kell minden időpillanatban. Azaz meg kell adnunk az $x(s) := \varphi(s)$ kezdeti feltételt valamilyen adott $\varphi \in C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ függvénnyel. A témának hatalmas irodalma van, és az elmúlt ötven évben rengeteg mély eredmény született mind a kvalitatív tulajdonságok, mind az idődiszkretizáció terén, melyek új problémákat vetettek fel.

Különösen fontos és a jelenlegi kutatások középpontjában állnak az úgynevezett állapotfüggő késleltetésű egyenletek, ahol a késleltetés maga függ a függ a rendszer állapotának múltbeli értékeitől. Ezek az egyenletek leegyszerűsítve

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t - \tau(t, x_t)))$$

alakba írhatók, ahol a τ kétváltozós függvény értékei a $[0, r]$ intervallumba esnek. Ez az egyenlet is az (1) által megadott egyenletosztályba tartozik még, de a hagyományos, lokális Lipschitz feltételt használó egzisztenciátételek itt már sajnos nem működnek. Ezeknek az egyenleteknek a vizsgálata új módszereket igényel. Fontos, mondhatni középponti probléma a mai napig, hogy nem teljesen világos, milyen fázisteret kell választani a dinamika vizsgálatához.

Hartung Ferenc munkássága az elmúlt majdnem 20 évben jelentősen gazdagította az állapotfüggő késleltetett differenciálegyenletek elméletét és gyakorlatát. Különösen nagy hatása volt Krisztin Tiborral, Hans Otto Walther-rel és J. Wu-val közösen írt áttekintő cikkének, melyben a téma legfontosabb eredményeit foglalják össze. Emellett színvonalas folyóiratokban publikálta eredményeit neves társszerzőkkel.

Akadémia doktori disszertációja eddigi jelentős és nagy hatású eredményeihez képest új és mélyen szántó tudományos eredményeket tartalmaz. A dolgozatban, mint címe is jelzi, állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek megoldásának paraméterek szerinti differenciálhatóságával foglalkozik. Pontosabban megfogalmazva, tekintsük a

$$(2) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \vartheta)$$

késleltetett vagy a

$$(3) \quad \frac{d}{dt}(x(t) - g(t, x_t, x(t - \rho(t, x_t, \chi)), \lambda)) = f(t, x_t, x(t - \tau(t, x_t, \xi)), \vartheta)$$

neutrális egyenletet az $x(s) := \varphi(s)$ kezdeti feltétellel ha $s \in [-r, 0]$, és vizsgáljuk a megoldások létezésének kérdését valamint a megoldások függését a $\xi, \vartheta, \chi, \lambda, \varphi$ paraméterektől. A szerző mindezt nagyrészt a dolgozata harmadik és negyedik fejezetében teszi. Külön kiemelendő a neutrális (3) egyenlet megoldásainak létezésére bizonyított állítás, mely alapvetően új eredmény. Bár a bemutatott eredményeket még nem publikálta a szerző, azok komolyan támaszkodnak Hartung Ferenc korábbi munksságára és korábbi cikkeiben kifejlesztett módszerekre.

Emeljünk ki pár további fontos és új eredményt. A késleltetett (2) egyenlet ξ, θ, φ paraméterek szerinti differenciálhatósághoz természetes feltétel a

$$\varphi \in C^1, \quad \dot{\varphi}(0-) = f(0, \varphi, \varphi(-\tau(0, \phi, \xi)), \vartheta)$$

kompatibilitási feltétel, mely késleltetett egyenletnél adja magát. Korábban a szerző ezt a feltételt használva bizonyított pontonkénti differenciálhatóságot. Ezt a feltételt később sikerült lecserélni egyfajta monotonitási feltételre, mely a

$$\text{ess inf}_{0 \leq t \leq a} \frac{d}{dt}(t - \tau(t, x_t, \xi)) > 0$$

alakot öltötte, és mely nem csak pontonkénti differenciálhatóságot garantál, hanem egy adott paraméter kicsi környezetére is megadja a folytonos deriválhatóságot. A szerző alaposan megvizsgálja, hogy mely feltétel milyen típusú differenciálhatóságot garantál. Ezeket a kérdéseket elemzi ki nagy részletességgel a második fejezetben. A harmadik fejezetben a paraméterbecslési módszer konvergenciáját bizonyítja.

Kiemelendő a negyedik fejezetben a neutrális egyenletekre vonatkozó általános egzisztenciátétel, mely megoldások létezését és egyértelműségét mutatja meg (3) típusú feladatokra igen általános feltételek mellett. Emellett más szerzőnek eddig nem volt említésre méltó eredménye neutrális egyenletek paraméterek szerinti differenciálhatósága témakörében.

Bizonyításában a szerző jelentősen tovább kellett, hogy fejlessze az irodalomban megtalálható becsléseket. Így például az 1.2.6 Lemma általánosítása kiemelendő, mely igen komoly gyengítése az eddig ismert feltételeknek. Megemlítenéd, hogy a dolgozat technikailag igen mély munka, ami, a téma jellegéből adódóan is, sokszor az olvashatóság rovására megy.

Összefoglalva, Hartung Ferenc értekezésében egy igen fontos és aktuális témához adott fontos és igen mély eredményeket. Eredményeihez új módszereket dolgozott ki, bizonyításai mélyek és igen technikásak. Dolgozata tömör, pontos, helyenként talán túlságosan is tömör. A szerző a téma nemzetközileg igen elismert szaktekintélye, doktori értekezése óta folyamatosan publikált neves folyóiratokban neves társszerzőkkel. Idézettsége átlagon felüli. A tudományos közéletben is aktívan részt vesz, konferenciák szervezésével, folyoiratszerkesztéssel is kitűnt. Munkásságát többek között Bolyai János Ösztöndíjjal és a Magyar Köztársasági Ezüst Érdemkeresztrel értékelték.

Mindezek alapján javaslom az értekezés nyilvános vitára kitűzését és javaslom Hartung Ferencnek az MTA Doktora cím odaítélését.

Tekintettel arra, hogy az elért eredményeket igen alapvetőnek és nagy hatásúnak tartom, a következő kérdéseket tenném fel a jelöltnek:

- Lát-e arra lehetőséget, hogy eredményeinek valamely része általánosítható parabolikus funkcionáldifferenciálegyenletekre? Miben látja a fő nehézséget egy ilyen általánosításhoz?
- Állapotfüggő késleltetett egyenletek Runge-Kutta módszereinek hibabecslései alapvetően függenek a megoldásokra adott precíz becslésekről. Tudomásom szerint neutrális állapotfüggő egyenletek esetén semmilyen hasonló eredmény nem ismert. Gondolkozott-e a szerző azon, hogy eredményeit ilyen irányban felhasználja?

Vác, 2012. április 28.

Bátkai András