Válasz Krisztin Tibor opponensi bírálatára

Mindenekelőtt megköszönöm Dr. Krisztin Tibor, az MTA doktora opponensi munkáját és véleményét.

1. kérdés: *Mi motiválja a két különböző típusú paraméter, ξ és θ bevezetését? Van olyan alkalmazás által motivált példa, ahol ez fontos?*

válasz: Hale és Ladeira a [6] cikkükben

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau))$$

alakú konstans késleltetésű differenciálegyenlet megoldásainak paraméter szerinti differenciálhatóságát vizsgálta. Ez kérdés abban az időben hosszú éveken keresztül megoldatlan probléma volt. Technikailag az állapotfüggő késleltetés függvény képletében szereplő paraméter hasonló problémát okoz, mint a [6] cikkben a konstans késleltetés szerinti differenciálhatóság. Például a [7] cikkemben használt technikával a késleltetésben szereplő paraméter szerinti differenciálhatóságot gyengébb értelemben sikerült igazolni, mint az f függvényben szereplő paraméter illetve a kezdeti érték szerinti differenciálhatóságot. A jelen disszertációban használt bizonyítási tehnika esetében a késleltetésben szereplő paraméter szerinti deriválthatóság is kezelhető, ráadásul pontonkénti értelemben.

Az [1] cikkben a szerzők egy sejt populáció modellezésére egy

$$N'(t) = g(N(t), N(t - \tau(N(t))))$$

alakú állapotfüggő késleltetésű funkcionál-differenciálegyenletet adtak meg, ahol $N(t)$ a populáció mérete a t időpontban. A szerzők a modell pozitív egyensúlyi helyzetének stabilitását vizsgálták, abban az esetben, amikor a késleltetés függvény alakja $\tau(u) = \mu\bar{\tau}(u)$, ahol μ egy pozitív valós paraméter, $\bar{\tau}$ egy rögzített függvény. Megmutatták, hogy a modellben Hopf bifurkáció létezik.

2. kérdés: *A paraméter kezelésére standard technika az, hogy a paramétert is független változónak tekintjük, azaz az értekezés (2.1.1) egyenletében $\xi(t)$ és $\theta(t)$ ismeretlenek, és az egyenlethez hozzávesszük az*

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\theta(t) = 0$$

egyenleteket. A nem-autonóm esetben még az explicit időfüggés is megszüntethető, a független változók számának növelésével. Tehát feltehető sok esetben az, hogy az egyenlet autonóm és nincs benne paraméter. Ennek az átírásnak vannak-e itt előnyei?

válasz: Tekintsük azt az esetet, amikor $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^p$ és $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^q$ véges dimenziós paraméterek. Ekkor a disszertációban szereplő paraméter halmazok $\Theta = \mathbb{R}^p$, $\Xi = \mathbb{R}^q$ és $\Gamma = W^{1,\infty} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Az új változók bevezetésével a (2.1.1) egyenlet az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - \tau(t, x_t, \xi(t))), \theta(t)), \qquad t \in [0,T], &(1)\\ \dot{\theta}(t) &= 0, \qquad t \in [0,T], &(2)\\ \dot{\xi}(t) &= 0, \qquad t \in [0,T], &(3) \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel ekvivalens, ahol a kezdeti feltételt az

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-r,0], &(4)\\ \theta(0) &= \bar{\theta}, &(5)\\ \xi(0) &= \bar{\xi} &(6) \end{aligned}$$

alakban írhatjuk fel. Az (1)-(3) egyenletrendszer megoldását jelölje

$$y(t,\gamma) = (x(t,\gamma), \theta(t,\gamma), \xi(t,\gamma)) = (x(t,\gamma), \bar{\theta}, \bar{\xi}),$$

ahol $\gamma = (\varphi, \bar{\theta}, \bar{\xi})$. Az y megoldás γ szerinti deriváltját jelölje $D_2 y(t,\gamma) \in \mathcal{L}(\Gamma, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$, és legyen $w(t,\gamma,h) = D_2 y(t,\gamma)h$, $h \in \Gamma$. Ekkor ellenőrizhető, hogy $w(t,\gamma,h) = (z(t,\gamma,h), h^\theta, h^\xi)$, ahol $h = (h^\varphi, h^\theta, h^\xi) \in \Gamma$, és $z(t) = z(t,\gamma,h)$ megoldása a disszertációban szereplő (2.3.13)-(2.3.14) k.é.f.-nak. Azaz a paramétereket áttranszformáltuk a kezdeti értékbe, de a paraméter szerinti derivált lényegében ugyanazt a variációs egyenletet teljesíti, amit a disszertációban vizsgáltam. A differenciálhatóság igazolása ezt az alakot használva gyakorlatilag ekvivalens nehézségű a disszertáció tárgyalásával.

Abban az esetben, amikor a $\bar{\theta}$ és $\bar{\xi}$ paraméterek t függvényei, a (2) és (3) egyenletek jobb oldalain $\dot{\bar{\theta}}(t)$ és $\dot{\bar{\xi}}(t)$ szerepel (feltéve persze, hogy differenciálhatóak a paraméterek), illetve az (5) és (6) kezdeti feltételekben is $\bar{\theta}(0)$ és $\bar{\xi}(0)$ kell. A fenti gondolatmenet erre az esetre is vonatkozik a Θ és Ξ paraméter halmazok megfelelő függvényhalmazokra cserélésével.

Az idő változót is új függő változóval helyettesítve valóban autonóm alakra lehet hozni a nem-autonóm egyenletet. A differenciálhatóság igazolásánál f és τ időtől való függése nem okozott gondot (csak a képletek hosszabbak), hiszen például az f és τ függvények t szerinti differenciálhatóságára sincs szükség a bizonyításban.

A paraméterbecslés feladata esetén is a fenti helyettesítéssel konstans paramétert a kezdeti feltételbe át lehet transzformálni, de ez itt sem fogja a kvázilinearizációs módszer konvergeniájának a bizonyítását könnyebbé tenni, hiszen itt is a megoldás paraméter szerinti deriváltjára és a vele kapcsolatos becslésekre van szükség. Az időtől függő $\bar{\theta}$ és $\bar{\xi}$ paraméter esetén is a fentiek szerint áttranszformálható a feladat, de nem egyszerűsödik vele a kérdés. Ebben az esetben a paraméter deriváltja a (2) és (3) egyenletek jobb oldalán is szerepel, ami egy kicsit komplikálja a numerikus módszert, hiszen nem csak a $\bar{\theta}$ ill. $\bar{\xi}$ függvényeket, hanem azok első deriváltját is közelítenük kell.

3. kérdés: *Folytonos szemidinamikai rendszerhez (semiflow) kell a $t \to x_t$ leképezés folytonossága. Ha $W^{1,\infty}$ a fázistér, akkor ez nem feltétlenül folytonos. Ez motiválta a Krisztin–Wu* *cikket, majd Walthert a C^1 tér bevezetésében? Alkalmas fázistér a $W^{1,\infty}$, ha a t-ben való folytonosságot szeretnénk? Mi itt a kompatibilitási feltétel szerepe?*

válasz: Valóban, ha a kezdeti függvény nem teljesíti a kompatibilitási feltételt, akkor a $[0,\alpha] \ni t \to x_t \in W^{1,\infty}$ leképezés nem folytonos, azaz nem kapunk folytonos félcsoportot ebben a fázistérben. A probléma megoldása a [10] és [11] cikkekben javasolt technika: a kezdeti függvények leszűkítése a kompatibilitási feltételt teljesítő függvényekre, és a C^1 fázistér használata. A C^1 elmélet hátránya, hogy leszűkíti az egyenlet megoldásait, hiszen tetszőleges $W^{1,\infty}$ térbeli kezdeti függvényekre is egyértelmű megoldása van a (2.1.1) egyenletnek (természetes feltételek mellett), és a megoldás folytonosan függ a paraméterektől is.

Egy másik lehetőség folytonos félcsoport definiálására, ha a $W^{1,p}$ normát használjuk, ahol $1 \le p < \infty$. Könyen igazolható, hogy a $[0,\alpha] \ni t \to x_t \in W^{1,p}$ leképezés folytonos. Sajnos a $W^{1,p}$ tér nem jó állapottérnek, hiszen $W^{1,p}$-beli kezdeti függvényekre ugyan létezik megoldása a (2.1.1) alakú egyenleteknek, de a megoldás általában nem egyértelmű (lásd pédául a [8, 14] cikkeket). Emiatt a $\mathbb{R} \times W^{1,p} \ni (t,\varphi) \mapsto x_t \in W^{1,p}$ leképezés nem definiál félcsoportot. Egy lehetséges megoldás az, ha az állapottérnek a $(W^{1,\infty}, |\cdot|_{W^{1,p}})$ normált teret választjuk, hiszen ekkor a félcsoport is jól definiált és folytonos is. Sajnos ez az egyébkén elég természetes lehetőség sem ideális, hiszen a $(W^{1,\infty}, |\cdot|_{W^{1,p}})$ tér nem teljes. Másrészt a $W^{1,\infty}$ halmaz a $|\cdot|_{W^{1,\infty}}$ és $|\cdot|_{W^{1,p}}$ normákkal ú.n. kvázi-Banach-teret alkot. Ezt a teret használta Hale és Ladeira a [6] cikkükben, és ebben a térben dolgozva, az egyenletes kontrakciós tétel egy általánosítását használva sikerült a [9] cikkünkben igazolni a $\Gamma \ni \gamma \mapsto x_t(\cdot,\gamma) \in W^{1,p}$ leképezés differenciálhatóságát.

4. kérdés: *Több példában (az elektrodinamikai modell, küszöbfeltétellel definiált késleltetés, szabályozás visszhanggal, adaptív késleltetés) a késleltetés nem egy explicit függvénnyel adott, hanem azt egy függvényegyenlet, differenciálegyenlet definiálja. Viszont ennek következtében a $t \to x(t-\tau(t,x_t))$ szigorú monotonitása automatikusan teljesül. Segíthet-e ez a simasági kérdésekben?*

válasz: A fent említett modellekben nagy részében valóban teljesül a visszanyúlási függvény szigorú monotonitása. A disszertáció 2. fejezetében ehelyett használt szakaszonkénti monotonitás feltétele ennél enyhébb, de a bizonyítások valamivel bonyolultabbak emiatt, azaz a szigorú monotonitás egyszerűbbé teszi a differenciálhatóság tárgyalását. Simon László bírálatában feltett 2. kérdésére adott válaszban szereplő példa mutatja, hogy a monotonitás vagy a szakaszonkénti monotonitás feltétele nélkül nem biztos, hogy a differenciálhatóság teljesül. Továbbra is nyitott probléma, hogy magasabb rendű differenciálhatóságot milyen feltétel mellett és milyen értelemben lehet bizonyítani.

5. kérdés: *Mi a kapcsolat Chen-Hu-Wu eredménye és az értekezés 2.4 részének eredménye között?*

válasz: A [2] cikk az

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau(t)), \sigma), \qquad t \in [0,\alpha], \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau}(t) &= g(x(t),\tau(t),\sigma), \qquad t\in[0,\alpha], && (8)\\ x(t) &= \varphi(t), \qquad t\in[-r,0], && (9)\\ \tau(0) &= \tau_0 && (10) \end{aligned}$$

kezdeti érték feladat megoldásainak a $\gamma=(\varphi,\tau_0,\sigma)$ paraméterek szerinti differenciálhatóságát vizsgálja. Itt a τ késleltetés adaptív módon, azaz egy csatolt differenciálegyenlet segítségével definiált. A késleltetés a kezdeti értékként megadott τ_0 paramétertől, a σ paramétertől és a megoldástól is függ, azaz a késleltetés állapotfüggő. A szerzők megmutatták a

$$W^{2,\infty}\times\mathbb{R}^+\times\Sigma\ni\gamma\mapsto(x(t,\gamma),\tau(t,\gamma))\in W^{2,p}\times W^{2,p}$$

leképezés differeciálhatóságát, valamint a

$$W^{2,\infty}\times\mathbb{R}^+\times\Sigma\ni\gamma\mapsto(x(t,\gamma),\tau(t,\gamma))\in W^{1,p}\times W^{1,p}$$

függvény kétszer differenciálhatóságát. A bizonyítás egy szép kiterjesztése a [9] cikkünkben bevezetett módszernek, 82 oldalon. Megjegyzem, hogy a szerzők ugyan explicit módon nem teszik fel, de használják a kompatibilitási feltételt is.

A disszertációmban én a (2.1.1) alakú, explicit módon definiált állapotfüggő késleltetést tartalmazó egyenletet vizsgáltam. Szintén különbség, hogy a (2.1.1) egyenletben f és τ időtől is függ, míg a (7)-(10) feladatban nem. Megjegyzem, hogy a disszertációmban szereplő eredmények is könyen átírhatók adapív késleltetés esetére, illetve Chen-Hu-Wu eredménye is átfogalmazható a (2.1.1) egyenletre is különösebb probléma nélkül. A lényegi külöbség a két dolgozat között az, hogy a disszertációban én az első és a második derivált létezését is pontonkénti értelemben mutattam meg, azaz minden rögzített t-re igazoltam a

$$W^{2,\infty}\times\Theta\times\Xi\ni\gamma\mapsto x_t(\cdot,\gamma)\in C$$

leképezés kétszer differenciálhatóságát. Ez a numerikus alkalmazások szempontjából, mint például a disszertációban szereplő paraméter becslési feladat, fontos külöbség. A bizonyítás elve is teljesen más, egy elemi megközelítéssel, a [2] cikkhez képest jóval rövidebben és egyszerűbben láttam be az állítást.

6. kérdés: *A bizonyításokat technikailag áttekinthetőbbé tenné-e, ha valamivel absztraktabb módon lenne az állapotfüggő késleltetés megfogalmazva?*

válasz: A disszertációban szereplő egyenletek, és különösen a variációs egyenletek alakja hosszú, annak ellenére is, hogy az egyenletben csak egy állapotfüggő késleltetésű tagot vettem fel. A bizonyítások könnyen kiterjeszthetők arra az esetre is, ha több hasonló alakú állapotfüggő késleltetett tag szerepel az egyenletben. Valóban lényeges kérdés hogyan érdemes a jelölés egyszerűsíteni. A 4. kérdésben felsorolt ill. további alkalmazásokban sokszor a késleltetést egy csatolt differenciálegyenlet, integrálegyenlet vagy algebrai egyenlet definiálja. Emiatt is indokolt egy absztraktabb megközelítés, ami az alkalmazásokban megjelenő konkrét késleltetéseket tartalmazhatja. Ilyen például Walther megközelítése a neutrális egyenletek esetére [12, 13]. Természetesen érdemes foglalkozni a differenciálhatósági eredmények kiterjesztésével az explicit alakú neutrális egyenletekre is. A dolgozatban feltettem, hogy a késleltetés füvvény képlete explicit módon adott. Ennek célja az volt, hogy a talán legegyszerűbben kezelhető esetben próbáljam meg a monotonitási feltétel gyengítését ill. a magasabb rendű derivált létezését vizsgálni. Fontos az eredmények általánosabb esetre való kiterjesztése.

7. kérdés: *A 4. fejezet eredményei alkalmazhatók-e a Driver által is vizsgált elektrodinamikai kéttest-problémára?*

válasz: Driver több dolgozatában tárgyalta az elektrodinamikai kéttest probléma különböző eseteit. A [3] cikkben olyan a két részecske pozíciójára és sebességére vonatkozó egyenletrendszert állított fel, ahol a két késleltetés függvény egy-egy differenciálegyenlettel van definiálva, azaz adaptív módon definiáltak a késleltetések. Az én eredményem explicit módon definiált késleltetésre van kidolgozva, de azok könnyen átírhatók az adaptív késleltetés esetére is. A [4] dolgozatban Driver adaptív módon definiált állapotfüggő késleltetést tartalmazó explicit differenciálegyenlet-rendszert vizsgált. Erre az esetre a 4. fejezet eredményei nem alkalmazhatók direkt módon, hiszen én implicit alakú neutrális egyenleteket vizsgáltam. Az eredmények várhatóan átvihetők erre az esetre is, de ezt még nem vizsgáltam. Megjegyezem, hogy Driver az [5] cikkben a kéttest probléma egyik esetében olyan modellt kapott, amelyben késleltetett és siettetett tagok is szerepelnek. Ilyen esetre sincsenek eredményeim.

Hivatkozások

[1] M. Adimy, F. Crauste, M. L. Hbid, R. Qesmi, Stability and Hopf bifurcation for a cell population model with state-dependent delay, SIAM J. Appl. Math., 70:5 (2010) 1611–1633.

[2] Y. Chen, Q. Hu, J. Wu, Second-order differentiability with respect to parameters for differential equations with adaptive delays, Front. Math. China, 5:2 (2010) 221–286.

[3] R.D. Driver, A two-body problem of classical electrodynamics: The one-dimensional case, Ann. Phys. 21 (1963), 122–142.

[4] R.D. Driver, A neutral system with state-dependent delay, J. Differential Equations 54 (1984), 73–86.

[5] R.D. Driver, A mixed neutral system, Nonlinear Anal. TMA 8 (1984), 155–158.

[6] J. K. Hale, L. A. C. Ladeira, Differentiability with respect to delays, J. Diff. Eqns., 92 (1991) 14–26.

[7] F. Hartung, On differentiability of solutions with respect to parameters in a class of functional differential equations, Funct. Differ. Equ., 4:1-2 (1997) 65–79.

[8] F. Hartung, J. Turi, Stability in a class of functional differential equations with state-dependent delays. In Qualitative Problems for Differential Equations and Control Theory, pp. 15-31, Corduneanu, C., ed., World Scientific, Singapore, 1995.

[9] F. Hartung, J. Turi, On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations, J. Differential Equations 135:2 (1997), 192–237.

[10] T. Krisztin and J. Wu, Monotone semiflows generated by neutral equations with different delays in neutral and retarded parts. Acta Math. Univ. Comenianae 63 (1994), 207–220.

[11] H. O. Walther, The solution manifold and C^1-smoothness of solution operators for differential equations with state dependent delay. J. Differential Equations 195 (2003), 46–65.

[12] H.-O. Walther, Linearized stability for semiflows generated by a class of neutral equations, with applications to state-dependent delays, J. Dyn. Diff. Equat., 22:3 (2010) 439–462.

[13] H.-O. Walther, Semiflows for neutral equations with state-dependent delays, Fields Inst. Commun. (to appear).

[14] E. Winston, Uniqueness of the zero solution for delay differential equations with state-dependence, J. Diff. Eqns., 7 (1970) 395–405.

Veszprém, 2012. június 2.

Hartung Ferenc