

Válasz Simon László opponensi bírálatára

Mindenekelőtt megköszönöm Dr. Simon László, az MTA doktora opponensi munkáját és véleményét.

1. kérdés: *A (8) monotonitási feltétel és az említett szakaszonkénti monotonitási feltétel csak a megoldás ismeretében ellenőrizhető. Tud-e egyszerű, az f, τ, φ adatokra vonatkozó elegendő feltételeket adni ezekre? Ez fontos lenne a 3.2.2 tétel feltételeinek teljesüléséhez is. Tud-e mondani olyan példát, ahol (8) nem teljesül, de a szakaszonkénti monotonitás igen? Mondhatjuk-e azt, hogy P_2 általában nem nyílt halmaz?*

válasz: (a) Tekintsük az egyszerűség kedvéért az

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t, x(t)))), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

skaláris állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletet. A $t \mapsto t - \tau(t, x(t))$ visszanyúlási függvényre a szigorú monotonitási feltétel pontosan akkor teljesül, ha $\frac{d}{dt}\tau(t, x(t)) \leq c < 1$ m.m. t -re. Az egyenletet felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tau(t, x(t)) &= D_1\tau(t, x(t)) + D_2\tau(t, x(t))\dot{x}(t) \\ &= D_1\tau(t, x(t)) + D_2\tau(t, x(t))f(t, x(t), x(t - \tau(t, x(t)))). \end{aligned}$$

Egy erős feltétel, de amely a megoldás ismerete nélkül is garantálja a visszanyúlási függvény szigorú monotonitását, ha feltesszük, hogy

$$D_1\tau(t, u) + D_2\tau(t, u)f(t, u, v) \leq c < 1, \quad t \in [0, T], \quad u, v \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

A (2) feltétel teljesülése esetén tetszőleges kezdeti függvényhez tartozó megoldás mentén a visszanyúlási függvény szigorúan monoton növekvő lesz.

(b) Populációs modelleknél a visszanyúlási függvény szigorú monotonitása alapfeltétel a modell érvényességéhez (lásd például [1, 2, 3]). Például a [1] és a [2] cikkben is szerepel olyan explicit feltétel, amely az adott modell esetén garantálja a visszanyúlási függvény szigorú monotonitását.

A visszanyúlási függvény szigorú monotonitása könnyen adódik az ún. adaptív módon definiált állapotfüggő késleltetés esetén. Például az [3, 7] dolgozatok az

$$\dot{x}(t) = -f(x(t - \tau(t))), \quad (3)$$

$$\dot{\tau}(t) = h(x(t), \tau(t)) \quad (4)$$

alakú skaláris differenciálegyenlet-rendszert vizsgálták. Látható, hogy a késleltetés függ a rendszer állapotától, de nem egy explicit képlettel definiált, mint az (1) egyenletben. Ha

$h(u, v) \leq c < 1$ minden $u, v \in \mathbb{R}$ -re, akkor a $t \mapsto t - \tau(t)$ visszanyúlási függvény szigorúan monoton növekvő (lásd [3, 7]).

(c) Az 1.2.9 definíció értelmében vett szakaszonként monoton visszanyúlási függvény természetes módon megjelenhet az (1) egyenletben abban az esetben, amikor $t \mapsto \tau(t, x(t))$ periodikus függvény. Periodikus késleltetés lép fel például a marógép vibrációját leíró állapotfüggő késleltetésű modellben (lásd például a [6] cikket).

Ha valamely $t_1 \in [0, \alpha]$ -ra $\frac{d}{dt}\tau(t, x(t))|_{t=t_1} > 1$, és a $\{t \in [0, \alpha] : \frac{d}{dt}\tau(t, x(t)) = 1\}$ halmaz véges, akkor a visszanyúlási függvény szakaszonként monoton az 1.2.9 definíció értelmében. Ehhez csak azt kell megfigyelni, hogy a periodikusság miatt van olyan $t_2 \in [0, \alpha]$, hogy $\frac{d}{dt}\tau(t, x(t))|_{t=t_2} < 0$. Annak ellenőrzésére viszont, hogy a $\frac{d}{dt}\tau(t, x(t)) = 1$ egyenletnek véges sok gyöke legyen, a megoldások ismerete nélkül nem tudok olyan feltételt adni, ami reálisan ellenőrizhető lenne a gyakorlatban.

(d) Tekintsük most az

$$\dot{x}(t) = x(t - \tau(t, x(t))), \quad t \in [0, 2], \quad (5)$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0] \quad (6)$$

kezdeti érték feladatát, ahol

$$\tau(t, u) = \max \left\{ \frac{1}{2}u^2 - t, 0 \right\}. \quad (7)$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $x(t) = t + 1$ az egyértelmű megoldása a feladatnak a $[0, 2]$ intervallumon. A megoldás mentén a késleltetés függvény

$$\tau(t, x(t)) = \frac{1}{2}(t + 1)^2 - t = \frac{1}{2}(t - 1)^2 + t > 0, \quad t \geq 0,$$

és a visszanyúlási függvény

$$t - \tau(t, x(t)) = -\frac{1}{2}(t - 1)^2 \leq 0$$

szakaszonként monoton a $[0, 2]$ intervallumon az 1.2.9 definíció értelmében.

(e) Tekintsük újra az (5)-(6) kezdeti érték feladatát, de most legyen

$$\tau(t, u) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{1}{2}u^2 - t, 0 \right\}, & t \in [0, 1], \\ \max \left\{ \frac{1}{2}u^2 - t - c(t - 1)^2, 0 \right\}, & t \in [1, 2], \end{cases} \quad (8)$$

ahol $c \in [0, 1/2]$ egy paraméter. A disszertáció jelölését használva legyen $\Xi = [0, \infty)$ a paraméter halmaz (az egyenlet jobb oldalán nincs paraméter és a kezdeti függvény is rögzített). $c = 0$ -ra visszkapjuk a (7) függvényt. Ha $c \in [0, 1/2]$, akkor az (5)-(6), (8) feladat megoldása újra $x(t) = t + 1$, hiszen a megoldás mentén a késleltetés

$$\tau(t, x(t)) = \frac{1}{2}(t + 1)^2 - t - c(t - 1)^2 = \left(\frac{1}{2} - c \right) (t - 1)^2 + t > 0, \quad t \geq 0$$

és visszanyúlási függvény $t \in [0, 2]$ -re

$$t - \tau(t, x(t)) = t - \left(\frac{1}{2}(t+1)^2 - t - c(t-1)^2 \right) = - \left(\frac{1}{2} - c \right) (t-1)^2,$$

amely az értékét a $[-(1/2-c), 0]$ intervallumból veszi fel. Látható, hogy tetszőleges $c \in [0, 1/2)$ -re a visszanyúlási függvény most is szakaszonként monoton, azaz $[0, 1/2) \subset P_2$. Másrészt $c = 1/2$ -re a visszanyúlási függvény azonosan 0 a $[0, 2]$ intervallumon, azaz $1/2 \notin P_2$. Ez azt mutatja, hogy ebben a példában $P_2 \cap [0, 1/2]$ nyílt halmaz Σ -ban. Nincs példa olyan esetre, amikor P_2 nem nyílt, de bizonyítani sem tudom a nyíltságot. A sejtésem az, hogy P_2 általában nem nyílt halmaz.

2. kérdés: Van-e olyan példa, ahol a megoldás nem differenciálható valamelyik paraméter szerint?

válasz: Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = x(t - cx(t)), \quad t \in [0, 2], \quad (9)$$

$$x(t) = \begin{cases} t+2, & t \in [-2, -1], \\ 1, & t \in [-1, 0] \end{cases} \quad (10)$$

feladatot, ahol $c > 0$. Ha $c \in (2/3, 1]$, akkor a (9)-(10) k.é.f. megoldása

$$x(t, c) = x(t) = t + 1,$$

hiszen ekkor a visszanyúlási függvény $t - cx(t) = t - c(t+1) = (1-c)t - c$, amely -1 és 0 közötti értékeket vesz fel $t \in [0, 2]$ -re. Viszont, ha $c \in (1, 2]$, akkor a visszanyúlási függvény értéke $t = 0$ -ban $-cx(0) = -c \in [-2, -1]$, ezért kis pozitív t -re (9) ekvivalens az

$$\dot{x}(t) = t - cx(t) + 2, \quad x(0) = 1$$

feladattal, amelynek megoldása

$$x(t) = \frac{1}{c^2} \left((1-c)^2 e^{-ct} + ct + 2c - 1 \right).$$

Megmutatható, hogy erre a megoldásra a visszanyúlási függvény $t - cx(t) \in [-2, -1]$ minden $t \geq 0$ -ra. Beláttuk tehát, hogy a $c \in (1, 2]$ paraméter értékhez tartozó megoldás $t \in [0, 2]$ -re

$$x(t, c) = \begin{cases} t+1, & c \in (2/3, 1], \\ \frac{1}{c^2} \left((1-c)^2 e^{-ct} + ct + 2c - 1 \right), & c \in (1, 2]. \end{cases}$$

Ekkor viszont $c \in (2/3, 1]$ -re

$$D_2 x(t, c) = 0, \quad t \in [0, 2],$$

illetve $c \in (1, 2]$ -re és $t \in [0, 2]$ -re

$$D_2 x(t, c) = -\frac{2}{c^3} \left((1-c)^2 e^{-ct} + ct + 2c - 1 \right) + \frac{1}{c^2} \left(-2(1-c)e^{-ct} - (1-c)^2 c e^{-ct} + t + 2 \right).$$

Másrészt $c \in (1, 2]$ -re és $t \in [0, 2]$ -re

$$\begin{aligned} \frac{x(t, c) - x(t, 1)}{c - 1} &= \frac{1}{c - 1} \left[\frac{1}{c^2} ((1 - c)^2 e^{-ct} + ct + 2c - 1) - (t + 1) \right] \\ &= \frac{1}{c^2} [(c - 1)e^{-ct} - ct + 1 - c] \\ &\rightarrow -t, \quad \text{ha } c \rightarrow 1 +. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a $c = 1$ pontban $x(t, c)$ nem differenciálható c szerint $t > 0$ -ra.

Megjegyezzük, hogy $c = 1$ -re a $t \mapsto t - cx(t)$ visszanyúlási függvény konstans -1 , és így nem szakaszonként monoton a visszanyúlás. Azaz a disszertációban szereplő szakaszonkénti monotonitási feltétel (vagy az erősebb szigorú monotonitási feltétel) lényeges a differenciálhatóság bizonyításához.

3. kérdés: *A neutrális egyenlet megoldásának paraméter szerinti differenciálhatóságáról szóló 4.3.4 tételben feltesszük a 84. oldalon található kompatibilitási feltételt. Van-e eredmény a paraméter szerinti differenciálhatóságról abban az esetben, ha a kompatibilitási feltétel helyett a (8) monotonitási feltétel teljesül?*

válasz: A disszertációban használt módszerrel a neutrális esetben egyelőre csak a kompatibilitási feltétel teljesülése esetén tudom a paraméter szerinti differenciálhatóságot pontonkénti értelemben, azaz a

$$\Gamma \ni \gamma \rightarrow x(t, \gamma) \in \mathbb{R}^n$$

függvény differenciálhatóságát igazolni minden rögzített t -re. Megjegyzem, hogy a [4] dolgozatban szintén a kompatibilitási feltétel mellett mutattam meg a pontonkénti értelemben vett paraméter szerinti differenciálhatóságot (olyan a neutrális esetre, ahol a neutrális tagban csak időképletetés szerepel).

Az [5] cikkben kidolgozott módszer viszont kiterjeszthető a neutrális esetre. Megmutatható, hogy a

$$\Gamma \ni \gamma \rightarrow x(\cdot, \gamma)_t \in W^{1,p}$$

függvény differenciálható minden $t \in [0, \alpha]$ és $p \in [1, \infty)$ esetén, feltéve, hogy a szigorú monotonitási feltétel teljesül. A bizonyítást a [4] cikkben vizsgált neutrális egyenletre egy nem publikált kéziratban kidolgoztam, és meggyőződésem, hogy a disszertációban vizsgált neutrális egyenletre is átvihető.

A kompatibilitási feltétel nélküli pontonkénti differenciálhatóság szükséges a disszertációban szereplő kvázilinearizációs paraméter becslési eljárás definiálásához, illetve annak lokális konvergenciájának igazolásához, így a 3. fejezet eredményeit még nem sikerült a neutrális esetre kiterjeszteni. Megjegyzem, hogy a numerikus szimulációik azt sejtetik, hogy a paraméter szerinti differenciálhatóság pontonkénti értelemben is teljesül a neutrális egyenletekre a kompatibilitási feltétel hiányában is.

Hivatkozások

- [1] W. G. Aiello, Freedman, H. I., J. Wu, Analysis of a model representing state-structured population growth with state-dependent time delay. SIAM J. Applied Math. 52 (1992), 855–869.
- [2] J. F. M. Al-Omari, S.A. Gourley, Dynamics of a stage-structured population model incorporating a state-dependent maturation delay. Nonlinear Analysis: Real World Applications 6 (2005), 13–33.
- [3] O. Arino, K.P. Hadeler, M.L. Hbid, Existence of periodic solutions for delay differential equations with state dependent delay, J. Differential Equations, 144 (1998), 263–301.
- [4] F. Hartung, On differentiability of solutions with respect to parameters in neutral differential equations with state-dependent delays, J. Math. Anal. Appl., 324:1 (2006) 504–524.
- [5] F. Hartung, J. Turi, On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations, J. Differential Equations 135:2 (1997), 192–237.
- [6] T. Insperger, G. Stépán, F. Hartung, J. Turi, State dependent regenerative delay in milling processes, in Proceedings of ASME International Design Engineering Technical Conferences, Long Beach CA, (2005), paper no. DETC2005-85282
- [7] P. Magal, O. Arino, Existence of periodic solutions for a state dependent delay differential equation, J. Differential Equations, 165 (2000), 61–95.

Veszprém, 2012. június 2.

Hartung Ferenc