

Válasz Bátкаи András opponensi bírálatára

Mindenekelőtt megköszönöm Dr. Bátкаи András opponensi munkáját és véleményét.

1. kérdés: *Lát-e arra lehetőséget, hogy eredményeinek valamely része általánosítható parabolikus funkcionál-differenciálegyenletekre? Miben látja a fő nehézséget egy ilyen általánosításhoz?*

válasz: Állapotfüggő késleltetést is tartalmazó parciális funkcionál-differenciálegyenletek vizsgálata az utóbbi évtizedben egy népszerű téma lett (lásd például a [9, 7, 10] dolgozatokat és hivatkozásait), még neutrális esetben is (lásd pl. [8]). A paraméterek szerinti differenciálhatóság kérdését ismereteim szerint még nem vizsgálták ilyen egyenletosztályra. Parabolikus parciális differenciálegyenletekre a kérdéssel pl. a [11] cikk foglalkozik.

A kérdésre válaszként az ötleteimet tudom leírni, ami mögött a részletek kidolgozatlanok. Véleményem szerint a disszertáció technikája alkalmazható bizonyos esetekben. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + f(t, u_t(\cdot, x), u(t - \tau(t, u_t(\cdot, x), \xi)), \theta), \quad t \in [0, T], \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad t \in [-r, 0], \quad x \in [0, 1] \quad (2)$$

skaláris parabolikus egyenletet homogén peremfeltétel mellett, $a \in \mathbb{R}^+$, f teljesítse a disszertációban feltetteket. Legyen X a $\psi: [-r, 0] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények halmaza, amelyek minden x -re t -ben abszolút folytonosak, és amelyre

$$|\psi|_X := \max \left\{ \max_{t \in [-r, 0], x \in [0, 1]} |\psi(t, x)|, \operatorname{ess\,sup}_{t \in [-r, 0], x \in [0, 1]} \left| \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) \right| \right\}$$

véges. A disszertáció módszerét és jelöléseit használva legyen $\Gamma = X \times \Theta \times \Xi$, $\gamma = (\varphi, \theta, \xi) \in \Gamma$ egy rögzített paraméter, $u = u(\cdot, \cdot, \gamma)$ megoldása az (1)-(2) feladatnak, L a (2.3.10) léplettel definiált lineáris operátor, $h = (h^\varphi, h^\theta, h^\xi) \in \Gamma$, és tekintsük a

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, x, h) = a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t, x, h) + L(t, u)(z_t(\cdot, x, h), h^\theta, h^\xi) \quad (3)$$

$$z(t, x, h) = h^\varphi(t, x), \quad t \in [-r, 0], \quad x \in [0, 1] \quad (4)$$

variációs egyenletet. Az a sejtésem, hogy a disszertációban használt becslésekkel megmutatható, hogy a

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto u(t, \cdot, \gamma) \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$$

leképezés differenciálható lesz minden t -re, és a derivált megoldása a (3)-(4) k.é.f.-nak. Pontonkénti, azaz minden rögzített t -re és x -re az $u(t, x, \gamma)$ megoldás γ szerinti differenciálhatóságának bizonyítását nem látom.

2. kérdés: *Állapotfüggő késleltetésű egyenletek Runge-Kutta módszereinek hibabecslései alapvetően függenek a megoldásokra adott precíz becslésekről. Tudomásom szerint neutrális állapotfüggő késleltetésű egyenletek esetén semmilyen hasonló eredmény nem ismet. Gondolkozott-e a szerző arról, hogy eredményeit ilyen irányban felhasználja?*

válasz: Állapotfüggő késleltetésű differenciálegyenletek számos osztályára vonatkozó numerikus approximációs eredményeknek igen gazdag az irodalma (lásd például [2, 3, 4] irodalomjegyzékeit). Számos cikk foglalkozik ezek közül Runge-Kutta típusú módszerek konvergenciájának vizsgálatával. Egy részletes tárgyalás a témáról megtalálható Bellen és Zennaro klasszikus könyvében [3]. Számos dolgozat foglalkozik a neutrális állapotfüggő késleltetés esetével is [1, 3, 5, 6], sőt a cikkek többsége mind az explicit, mind pedig az implicit alakú neutrális egyenletek közelítését is tárgyalja. A neutrális egyenletek numerikus közelítésének szokásos módszere az, hogy explicit esetben új változó bevezetésével egy

$$My'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau(t, y(t))))$$

alakú rendszerre írjuk át a neutrális egyenletet, ahol M egy sziguláris mátrix. Implicit esetben is egy differenciál-algebrai rendszerre szokás átírni a neutrális egyenletet. A előbbi két típusú feladatok numerikus közelítésének az elmélete kidolgozott, és hatékony algoritmusok léteznek a megoldásukra.

Egy magasrendű hibával rendelkező numerikus algoritmus kulcskérdése a kezdeti függvényben megtalálható (magasabb deriváltban megjelenő) elsőfajú szakadások terjedésének vizsgálta, detektálása. Ennek is kiterjedt irodalma van a retardált állapotfüggő késleltetés esetére, de ennek részletes analitikus tárgyalását nem ismerem neutrális esetre, bár algoritmusok megfogalmazódtak a neutrális esetre is [6]. Itt látok nyitott elméleti kérdéseket, különösen rendszerek esetén. Én eddig ilyen jellegű numerikus vizsgálatokkal nem foglalkoztam, bár egyszerűbb, Euler-típusú numerikus approximációs módszerek konvergenciáját vizsgáltam állapotfüggő késleltetésű egyenletekre, beleértve neutrális eseteket is. Tervezem továbbá kollokációs közelítő módszerek konvergenciáját vizsgálni neutrális állapotfüggő késleltetésű egyenletekre, mert erre az esetre tudomásom szerint még nincs a konvergencia bizonyítva.

Hivatkozások

- [1] A. Bellen, N. Guglielmi, Solving neutral delay differential equations with state-dependent delays, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 229:2 (2009) 350–362.
- [2] A. Bellen, S. Maset, M. Zennaro, N. Guglielmi, Recent trends in the numerical solution of retarded functional differential equations, *Acta Numerica*, 18 (2009) 1–110.
- [3] A. Bellen, M. Zennaro, *Numerical methods for delay differential equations*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 2003.

- [4] F. Hartung, T. Krisztin, H.O. Walther and J. Wu, Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications, in Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, volume 3, edited by A. Canada, P. Drábek and A. Fonda, Elsevier, North-Holand, 2006, 435–545.
- [5] N. Guglielmi and E. Hairer, Computing breaking points in implicit delay differential equations, *Adv Comput Math* 29 (2008) 229–247.
- [6] N. Guglielmi and E. Hairer, Numerical approaches for state-dependent neutral delay equations with discontinuities, *Mathematics and Computers in Simulation*, Article in press, DOI: 10.1016/j.matcom.2011.11.002
- [7] A. V. Rezounenko, A condition on delay for differential equations with discrete state-dependent delay, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 385:1 (2012) 506–516.
- [8] E. Hernández, M. A. McKibben, On state-dependent delay partial neutral functional-differential equations, *Applied Mathematics and Computation* 186 (2007) 294–301.
- [9] E. Hernández, A. Prokopczyk, L. Ladeira, A note on partial functional differential equations with state-dependent delay, *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications* 7 (2006) 510–519.
- [10] L. Simon, On nonlinear functional parabolic equations with state-dependent delays of Volterra type, *International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications*, 4:1 (2010) 88–103.
- [11] J. R. Singler, Differentiability with respect to parameters of weak solutions of linear parabolic equations, *Mathematical and Computer Modelling* 47 (2008) 422–430.

Veszprém, 2012. június 2.

Hartung Ferenc